

4 Cálculo del comportamiento de la unión atornillada

Como ya se ha visto en la teoría, la relación del par de apriete con la fuerza a la que quedan unidas las piezas depende de varios parámetros: geometría del tornillo, rozamiento en la rosca y rozamiento entre las superficies en contacto entre tuerca y pieza unidas.

También se ha visto que el comportamiento de la unión atornillada antes una fuerza que intente separar las piezas depende de la rigidez de los elementos de la unión y del lugar donde se aplica dicha fuerza separadora.

En este apartado se realizarán los cálculos necesarios para predecir el comportamiento de la unión atornillada en el apriete y tras aplicar la fuerza separadora.

4.1 Cálculo del par de apriete para una tensión determinada

Se aplicará la ecuación (20) vista en el apartado 2.1.3, que da la tensión equivalente del tornillo durante el apriete:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{F}{A_s}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{W_t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{A_s}\right)^2 + 3\left(\frac{16T}{\pi d_a^3}\right)^2} \quad (20)$$

Esta deberá ser menor que la tensión admisible σ_{adm} que tendrá un valor 0.6 a 0.8 el límite elástico σ_{lim} (640 MPa para tornillos clase 8.8).

F es la fuerza de tracción que aparece en el tornillo (y que se puede medir con el circuito extensométrico) y T no es todo el torsor aplicado por la llave dinamométrica (T_t), ya que la parte del torsor para vencer el rozamiento de las superficies de contacto entre tuerca y piezas unidas, no se transmite al tornillo. El torsor T transmitido al tornillo será:

$$T_t = F (\mu_c \cdot r_c + \tan(\varphi' + \alpha)) \cdot \frac{d_m}{2} \quad (13)$$

$$T = F \cdot \tan(\varphi' + \alpha) \cdot \frac{d_m}{2}$$

o lo que es lo mismo, expresado directamente en función del rozamiento modificado por la rosca triangular del filete y del paso de rosca:

$$T = F \cdot \left(\frac{\mu' \frac{d_m}{2} + \frac{P}{2\pi}}{1 - \frac{\mu' P}{\pi d_m}} \right)$$

Sustituyendo en la ecuación (20):

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{F}{A_s}\right)^2 + 3\left(\frac{F \cdot \left(\mu' \frac{d_m}{2} + \frac{P}{2\pi}\right)}{W_t \cdot \left(1 - \frac{\mu' P}{\pi d_m}\right)}\right)^2} = F \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{A_s}\right)^2 + 3\left(\frac{\mu' \frac{d_m}{2} + \frac{P}{2\pi}}{W_t \cdot \left(1 - \frac{\mu' P}{\pi d_m}\right)}\right)^2} \leq \sigma_{adm}$$

Por lo que en el apriete, la fuerza que aparece en el tornillo para no superar la tensión admisible deberá ser:

$$F \leq \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{\left(\frac{1}{A_s}\right)^2 + 3\left(\frac{\mu' \frac{d_m}{2} + \frac{P}{2\pi}}{W_t \cdot \left(1 - \frac{\mu' P}{\pi d_m}\right)}\right)^2}}$$

En nuestro caso se tomará como sección resistente del tornillo la zona rebajada con $d=10\text{mm}$. En la siguiente tabla se representa lo valores que obtendremos de F (expresada en Newtons) para distintos σ_{adm} (del 0,6 al 0,8 del límite elástico) y el intervalo de valores posibles del rozamiento.

| Fracción del σ_{lim} | μ | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,2 |
|-----------------------------|-------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | $\sigma_{adm} \setminus \mu'$ | 0,0924 | 0,1155 | 0,1386 | 0,1617 | 0,1848 | 0,2078 | 0,2309 |
| 0,8 | 512 MPa | 27014 | 24075 | 21569 | 19452 | 17660 | 16138 | 14836 |
| 0,75 | 480 MPa | 25326 | 22570 | 20221 | 18236 | 16557 | 15130 | 13909 |
| 0,7 | 448 MPa | 23637 | 21066 | 18873 | 17020 | 15453 | 14121 | 12981 |
| 0,65 | 416 MPa | 21949 | 19561 | 17525 | 15804 | 14349 | 13112 | 12054 |
| 0,6 | 384 MPa | 20260 | 18056 | 16177 | 14589 | 13245 | 12104 | 11127 |

Tabla 10: Límite Fuerza (N) en el apriete para no superar la tensión admisible

En el peor de los casos (rozamiento en la rosca no lubricada $\mu = 0,2$), se tiene que controlar (con las medidas que proporciona el circuito de extensometría calibrado) que no se superen los **11127 N** de fuerza durante el apriete.

Es difícil estimar teóricamente el par necesario para conseguir esta fuerza de apriete, ya que depende de dos rozamientos (μ en la rosca y μ_c en la superficie de contacto entre tuerca y piezas) que son difíciles de conocer a priori.

Para ello, se puede consultar en la bibliografía valores orientativos del rozamiento, como los que se recogen en la siguiente tabla:

| Estados superficiales | | Estados de lubricación | | |
|-----------------------|-------------------|------------------------|-------------|----------------|
| Tornillo | Tuerca | No lubricado | Con aceite | Con pasta MoS2 |
| Fosfatado | Sin recubrimiento | 0,14 a 0,21 | 0,14 a 0,17 | 0,10 a 0,12 |
| Cincado galvánico | Sin recubrimiento | 0,12 a 0,18 | 0,12 a 0,17 | |
| Cadmido galvánico | Sin recubrimiento | 0,08 a 0,12 | 0,08 a 0,11 | |
| Cincado galvánico | Cincado galvánico | 0,14 a 0,19 | 0,12 a 0,17 | |
| Cadmido galvánico | Cadmido galvánico | 0,14 a 0,15 | 0,08 a 0,12 | |

Tabla 11: Coeficientes de rozamiento para diversos estados superficiales y de lubricación

Se calculará el par aplicado necesaria a partir de la ecuación 13:

$$F (\mu_c \cdot r_c + \tan (\varphi' + \alpha) \cdot \frac{d_m}{2}) \quad (13)$$

Como al principio no se conocen exactamente los valores del rozamiento ni en la rosca ni entre las superficies de contacto de la tuerca, se ha de garantizar que con el par aplicado no se superen los valores de fuerza en el apriete $F = 11127 N$.

La siguiente tabla muestra el par necesario para obtener este valor de fuerza de apriete para distintos valores del coeficiente de rozamiento en la rosca μ y entre las superficies de contacto de la tuerca μ_c :

| μ | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,2 |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\mu_c \setminus \mu'$ | 0,0924 | 0,1155 | 0,1386 | 0,1617 | 0,1848 | 0,2078 | 0,2309 |
| 0,08 | 19,42 | 21,31 | 23,21 | 25,10 | 27,00 | 28,90 | 30,80 |
| 0,1 | 21,73 | 23,62 | 25,51 | 27,41 | 29,31 | 31,21 | 33,11 |
| 0,12 | 24,04 | 25,93 | 27,82 | 29,72 | 31,62 | 33,52 | 35,42 |
| 0,14 | 26,35 | 28,24 | 30,13 | 32,03 | 33,93 | 35,83 | 37,73 |
| 0,16 | 28,66 | 30,55 | 32,44 | 34,34 | 36,23 | 38,14 | 40,04 |
| 0,18 | 30,97 | 32,86 | 34,75 | 36,65 | 38,54 | 40,44 | 42,35 |
| 0,2 | 33,28 | 35,17 | 37,06 | 38,95 | 40,85 | 42,75 | 44,66 |

Tabla 12: Par de apriete (N·m) para alcanzar 11120N de fuerza de apriete en función de los coeficientes de rozamiento

Para estar del lado de la seguridad, no se debe superar los **19,42 N·m** en el primer apriete aplicado si no se conocen exactamente los coeficientes de rozamiento. Este cálculo es muy conservador, ya que la fuerza límite mínima (que no se quiere superar para no llegar al 60% del límite elástico) se obtuvo con el coeficiente de rozamiento más alto ($\mu = 0,2$), y el caso más desfavorable para llegar a esta fuerza se da con los coeficientes de rozamiento más bajos ($\mu = \mu_c = 0,08$), cosa que no puede suceder en la realidad ya que ambas condiciones no se pueden dar simultáneamente.

Con una serie de ensayos dando un apriete conocido y midiendo la fuerza de apriete obtenida se podrán aproximar los valores de rozamiento en la unión atornillada, como se verá en los resultados del ensayo.

4.2 Modelos teóricos de los elementos de la unión atornillada.

Aunque los elementos de la unión estarán sometidos a un complejo campo de tensiones y deformaciones, nos centraremos en la dirección principal en la que se producen, que coincide con la dirección axial del tornillo. Los parámetros que se describirán a continuación se refieren a dicha dirección principal.

Se define como constante de rigidez de un elemento deformado elásticamente la relación entre la fuerza y el alargamiento ocasionado:

$$K = \frac{F}{\delta}$$

Según la ley de Hooke, el módulo de elasticidad E , relaciona la tensión σ , y la deformación unitaria ε :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Siendo la tensión la relación entre la fuerza y superficie, y la deformación unitaria la relación entre alargamiento y longitud inicial.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \varepsilon = \frac{\delta}{l}$$

Por tanto:

$$E = \frac{F/A}{\delta/l} = \frac{F l}{\delta A} = K \frac{l}{A}$$

$$K = \frac{A \cdot E}{l}$$

A continuación se expondrán los modelos monodimensionales utilizados para calcular la rigidez axial de los elementos de la unión, que será necesaria para poder predecir su comportamiento tras el apriete y ante la aplicación de la fuerza separadora.

4.2.1 Modelo para la rigidez del tornillo

Generalmente el tornillo no tiene un área constante a lo largo de toda su longitud, así que se modelará el tornillo como la suma de rigideces de una serie de cilindros de distintas áreas y longitudes.

En nuestro caso hay tres secciones diferenciadas:

A_1 : Área de la longitud no roscada del tornillo ($d_1 = 16 \text{ mm}$).

A_2 : Área de la longitud de la zona rebajada del tornillo ($d_2 = 10 \text{ mm}$).

A_3 : Área equivalente de la longitud roscada (ver ecuación 17, $d_3 = 14.59 \text{ mm}$).

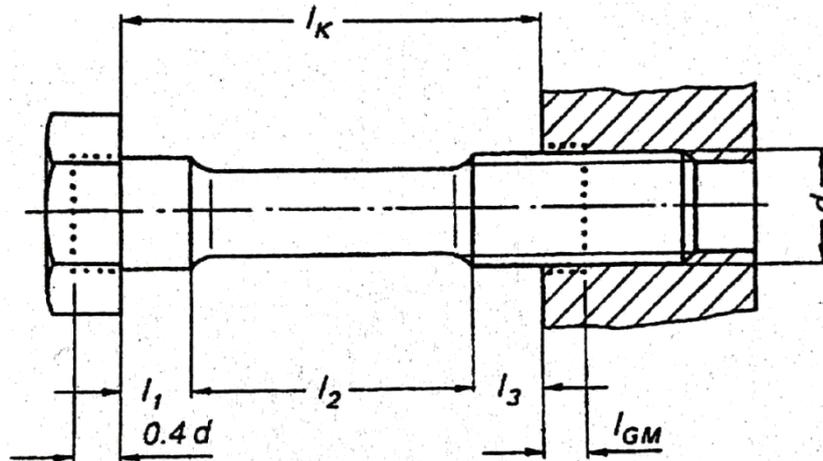


Figura 37: División del tornillo en cilindros simples

Además aportan rigidez al tornillo una parte de la cabeza del mismo y una parte de la zona roscada dentro de la tuerca. Se considera que ambas tienen una longitud $l' = 0.4d_1$ que se añaden a la longitud no roscada que está en contacto con la cabeza y a la longitud roscada en contacto con la tuerca (ver Figura 37).

La rigidez de los cilindros en serie se obtiene como:

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}$$

Teniendo en cuenta las distintas longitudes de los cilindros ($l' = 6,4 \text{ mm}$, $l_1 = 66 \text{ mm}$, $l_2 = 40 \text{ mm}$ y $l_3 = 14 \text{ mm}$) y el módulo de elasticidad del acero ($E_t = 210000 \text{ MPa}$), la rigidez total del tornillo será:

$$K_t = \frac{E_t}{\left(\frac{l_1 + l'}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3 + l'}{A_3}\right)} = 211,83 \text{ KN/mm}$$

4.2.2 Modelo para la rigidez de las piezas unidas

Para el cálculo de rigidez del conjunto de casquillos cilíndricos, no se puede suponer una distribución uniforme de tensión, ya que el diámetro exterior de los mismos es mayor que el diámetro de cabeza del tornillo. ($D_p > D_a$, ver Figura 38).

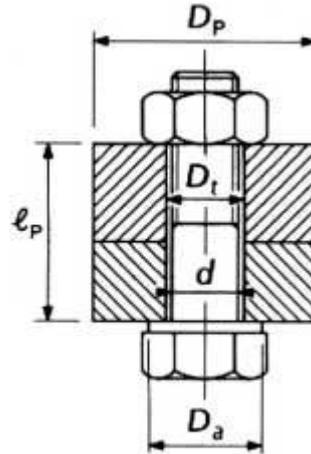


Figura 38: Parámetros necesario para el cálculo de rigidez de las piezas unidas

Como ya se vio en la teoría, en estos casos no se conoce exactamente la distribución de tensiones, y por tanto su rigidez. Para determinar la rigidez se supone que los esfuerzos se transmiten por troncos de conos con ángulos $\alpha = \text{atan } 0,5$ (ver Figura 39).

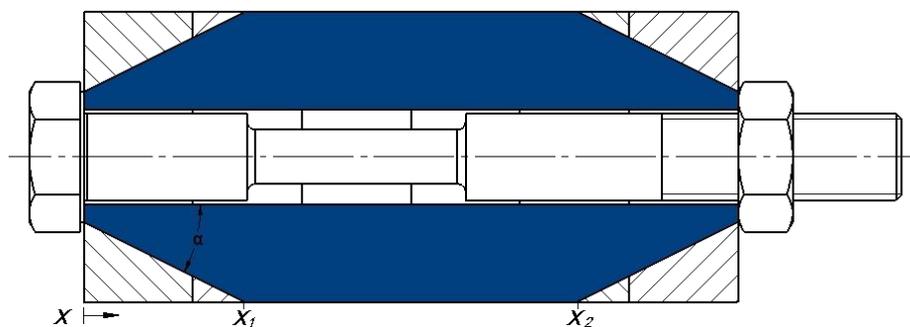


Figura 39: Modelo de distribución de esfuerzos en los casquillos

Se realizará el cálculo de la rigidez mediante la suma de infinitas rebanadas de espesor diferencial, cuya rigidez será:

$$dK_p(x) = \frac{E_p \cdot A(x)}{dx}$$

Por lo que la rigidez total viene dada por la siguiente integral:

$$\frac{1}{K_p} = \int_0^{l_p} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)}$$

Los parámetros necesarios para calcular esta integral son los que aparecían en la Figura 38:

- Ángulo del tronco de cono: $\alpha = \text{atan } 0,5 = 26,57^\circ$
- Diámetro exterior de los casquillos: $D_p = 53,5 \text{ mm}$
- Diámetro del agujero de los casquillos: $D_t = 17,5 \text{ mm}$
- Diámetro entre casquillo y cabeza o tuerca: $D_a = 24 \text{ mm}$
- Longitud total de los casquillos: $l_p = 120 \text{ mm}$
- Módulo de elasticidad de las piezas: $E_p = 210000 \text{ MPa}$

Teniendo en cuenta que diámetro exterior varía a lo largo de los casquillos:

$$d_{ext} = D_a + \frac{x}{x_1}(D_p - D_a) \quad 0 < x < x_1$$

$$d_{ext} = D_p \quad x_1 < x < x_2$$

$$d_{ext} = D_p - \frac{x - x_2}{l_p - x_2}(D_p - D_a) \quad x_2 < x < l_p$$

siendo $x_1 = \frac{D_p - D_a}{2 \tan \alpha} = 29,5 \text{ mm}$ y $x_2 = l_p - \frac{D_p - D_a}{2 \tan \alpha} = 90,5 \text{ mm}$ los puntos donde hay los cambios de tronco de cono a cilindro (ver Figura 39).

El área de la rebanada infinitesimal será:

$$A(x) = \frac{\pi}{4}(d_{ext}(x)^2 - D_t^2)$$

Y finalmente se calcula la inversa de la rigidez de las piezas como la suma de las integrales:

$$\frac{1}{K_p} = \int_0^{x_1} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{x_2}^{l_p} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)}$$

$$= 2,035 \cdot 10^{-7} + 1,447 \cdot 10^{-7} + 2,035 \cdot 10^{-7} = 5,517 \cdot 10^{-7} \frac{\text{mm}}{\text{N}}$$

Por lo que la rigidez de las piezas unidas será:

$$K_p = 1812,6 \frac{\text{KN}}{\text{mm}}$$

4.2.3 Modelo de esfuerzos en la unión atornillada ante una fuerza separadora

Como se vio en la apartado 2.1.4 de la teoría, en una unión pretensada con una fuerza inicial F se produce una nueva distribución de esfuerzos, tanto en el tornillo (F_t) como en las piezas unidas (F_c), al someterla a una fuerza separadora P :

$$F_t = F + \frac{K_{t \text{ eq}}}{K_{t \text{ eq}} + K_{p \text{ eq}}} P$$

$$F_c = F - \frac{K_{p \text{ eq}}}{K_{t \text{ eq}} + K_{p \text{ eq}}} P$$

Esta distribución depende del lugar donde se aplica la fuerza separadora, ya que una parte de las piezas unidas se descomprimarán (denominamos $K_{p\ eq}$ a la rigidez equivalente de esta zona descomprimida) y la otra parte se recomprimarán más la piezas unidas, a la vez que se traccioná aun más es tornillo (denominamos $K_{t\ eq}$ a la rigidez equivalente de la suma en serie de esta zona recomprimida más la rigidez del tornillo).

En el caso ideal en el que la fuerza separadora se aplica en los extremos de la unión descomprimiendo todos los casquillos unidos, $K_{p\ eq}$ coincidía con la rigidez de las piezas unidas K_p y $K_{t\ eq}$ coincide con la rigidez del tornillo K_t ya que no hay ninguna parte de los casquillos recomprimidos.

Si inicialmente se tiene la unión pretensada con una fuerza inicial $F = 11,2\ KN$ y aplicamos una fuerza separadora $P = 10\ KN$ (las rigideces del tornillo y las piezas unidas, son las calculadas en los apartados anteriores $K_t = 211,83\ KN/mm$ y $K_p = 1812,6\ KN/mm$), en el caso ideal la nueva fuerza a la que quedaría sometido el tornillo será:

$$F_t = F + \frac{K_t}{K_t + K_p} P = 12,25\ KN$$

y en las piezas unidas:

$$F_c = F - \frac{K_p}{K_t + K_p} P = 2,25\ KN$$

En nuestro caso no podremos ensayar esta situación ideal, ya que habría que aplicar la fuerza separadora directamente a la cabeza del tornillo y a la tuerca. El utillaje diseñado permite la aplicación la fuerza separadora a través de la zona roscada de los casquillos. Como se vio, el diseño permite aplicar la fuerza separadoras en tres posiciones distintas, dependiendo del montaje de casquillos que se haya realizado. El montaje que más se asemeja a la situación ideal es cuando se estira del conjunto desde los casquillos en contacto con la cabeza del tornillo y con la tuerca (ver Figura 40).

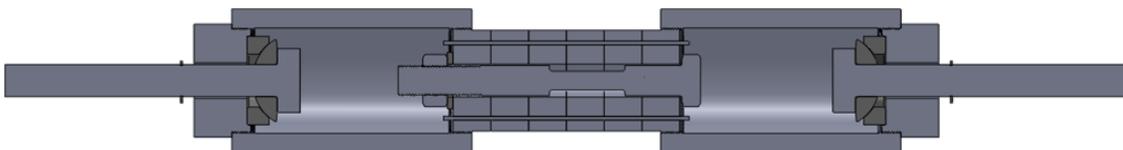


Figura 40: Montaje para aplicar la fuerza separadora desde la zona exterior

El casquillo roscado tiene un paso 1,5 y una longitud roscada de 10 mm por lo que poseen algo más de 6 filetes. Como se explico en la teoría los esfuerzos se transmiten en los primeros filetes de la rosca, por lo que se planteará la siguiente hipótesis simplificadora, supondremos que la fuerza separadora actúa en un plano después del tercer filete (a unos 5 mm del comienzo de la rosca) y se utilizará esto para conocer que parte de los casquillos se descomprimen y cual se recomprimen. En la siguiente figura muestra gráficamente que parte de la rigidez K_p se descomprime (en azul) y dará $K_{p\ eq}^{exterior}$, y que parte se recomprime (en rojo) y se sumara a K_t para calcular $K_{t\ eq}^{exterior}$.

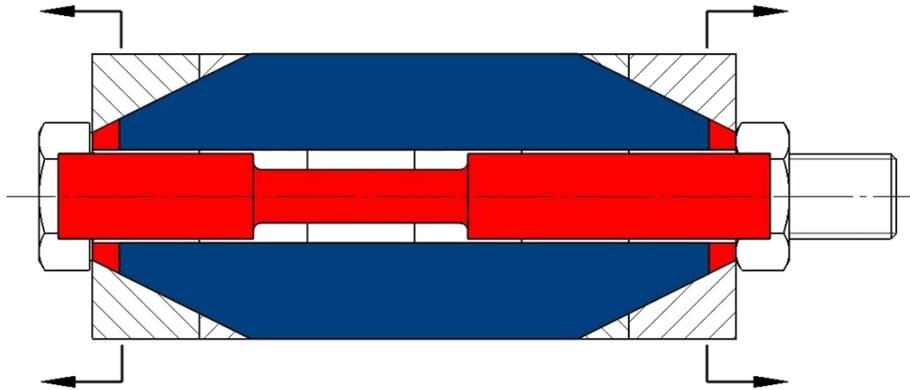


Figura 41: Actuación de la fuerza separadora en los casquillos exteriores

Es fácil calcular estas rigideces con la integral que se definió en el apartado anterior:

$$\frac{1}{K_{p\ eq}^{exterior}} = \int_5^{115} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} = \int_5^{29,5} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{29,5}^{90,5} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{90,5}^{115} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)}$$

$$= 1,244 \cdot 10^{-7} + 1,447 \cdot 10^{-7} + 1,244 \cdot 10^{-7} = 3,934 \cdot 10^{-7} \frac{mm}{N}$$

$$K_{p\ eq}^{exterior} = 2541,7 \frac{KN}{mm}$$

$$\frac{1}{K_{t\ eq}^{exterior}} = \frac{1}{K_t} + \int_0^5 \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{115}^{120} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)}$$

$$= 4,721 \cdot 10^{-6} + 7,913 \cdot 10^{-8} + 7,913 \cdot 10^{-8} = 4,879 \cdot 10^{-6} \frac{mm}{N}$$

$$K_{t\ eq}^{exterior} = 204,96 \frac{KN}{mm}$$

Finalmente se calcula la fuerza a la que quedarán sometido el tornillo y las piezas unidas en esta disposición, teniendo en cuenta las condiciones de pretensado y fuerza separadora anterior ($F = 11,2\ KN$ y $P = 10\ KN$):

$$F_t^{exterior} = F + \frac{K_{t\ eq}^{exterior}}{K_{t\ eq}^{exterior} + K_{p\ eq}^{exterior}} P = 11,95\ KN$$

$$F_c^{exterior} = F - \frac{K_{p\ eq}^{exterior}}{K_{t\ eq}^{exterior} + K_{p\ eq}^{exterior}} P = 1,95\ KN$$

De la misma forma se pueden calcular las fuerzas para el montaje en que la fuerza separadora se aplica desde los casquillos en el intermedio (ver Figura 42).

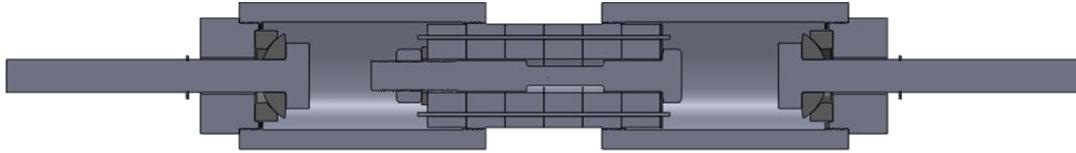


Figura 42: Montaje para aplicar la fuerza separadora desde la zona intermedia

Como se ha intercambiado la posición de dos casquillos que tienen espesor 20 mm, se considera que la división entre la zona recomprimada y descomprimada de los casquillos se mueve 20 mm hacia el interior como se muestra en la Figura 43, el cambio de zonas quedará a 25 mm del borde exterior.

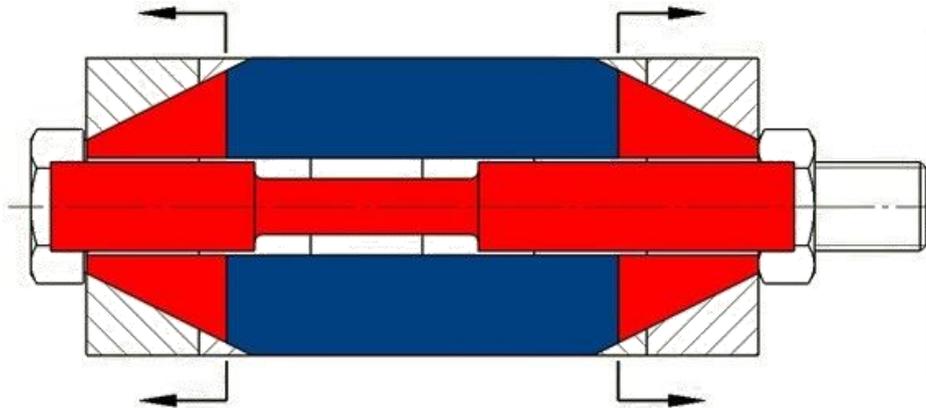


Figura 43: Actuación de la fuerza separadora en los casquillos intermedios

De nuevo se calcula la rigidez equivalente $K_{p\,eq}^{medio}$ de la zona descomprimada (en azul en la figura anterior):

$$\frac{1}{K_{p\,eq}^{medio}} = \int_{25}^{95} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} = \int_{25}^{29,5} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{29,5}^{90,5} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{90,5}^{95} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)}$$

$$= 1,179 \cdot 10^{-8} + 1,447 \cdot 10^{-7} + 1,179 \cdot 10^{-8} = 1,683 \cdot 10^{-7} \frac{mm}{N}$$

$$K_{p\,eq}^{medio} = 5942,7 \frac{KN}{mm}$$

y la rigidez equivalente $K_{t\,eq}^{medio}$ suma del tornillo y la zona recomprimada de los casquillos (en rojo en la figura anterior):

$$\frac{1}{K_{t\,eq}^{medio}} = \frac{1}{K_t} + \int_0^{25} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{95}^{120} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)}$$

$$= 4,721 \cdot 10^{-6} + 1,917 \cdot 10^{-7} + 1,917 \cdot 10^{-7} = 5,104 \cdot 10^{-6} \frac{mm}{N}$$

$$K_{t\ eq}^{medio} = 195,92 \frac{KN}{mm}$$

A continuación se calcula la fuerza a la que quedarán sometidos el tornillo y las piezas unidas en este montaje intermedio, teniendo en cuenta las condiciones de pretensado y fuerza separadora, comunes para todos los montajes ($F = 11,2\ KN$ y $P = 10\ KN$):

$$F_t^{medio} = F + \frac{K_{t\ eq}^{medio}}{K_{t\ eq}^{medio} + K_{p\ eq}^{medio}} P = 11,52\ KN$$

$$F_c^{medio} = F - \frac{K_{p\ eq}^{medio}}{K_{t\ eq}^{medio} + K_{p\ eq}^{medio}} P = 1,52\ KN$$

Y por último se calculan las fuerzas para el montaje en el que se aplica la fuerza separadora desde los casquillos interiores (ver Figura 44):

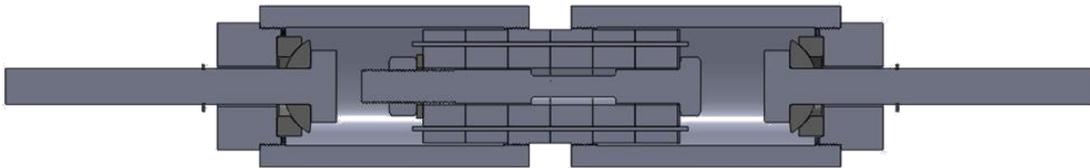


Figura 44: Montaje para aplicar la fuerza separadora desde la zona interior

Ahora los casquillos roscados que aplican la fuerza separadora se encuentra en la zona más interior posible, la zona descomprimida se desplaza de nuevo otros 20 mm hacia el interior, ahora el cambio de zona descomprimida a recomprimida quedará a 45 mm del borde exterior. Se pueden ver las distintas zonas en la siguiente figura:

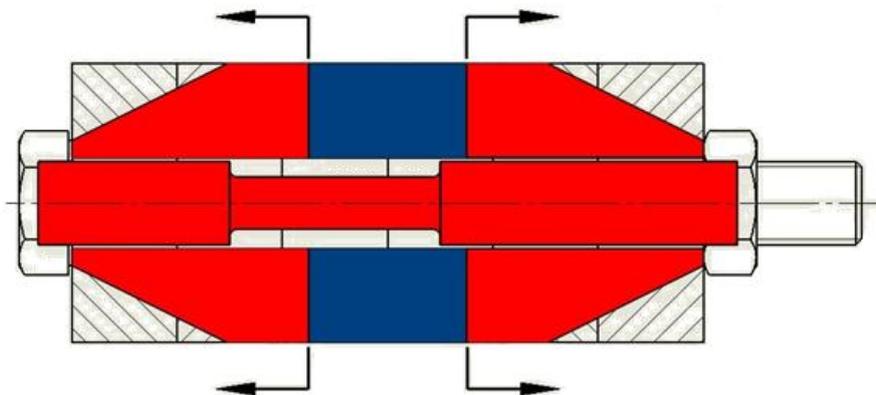


Figura 45: Actuación de la fuerza separadora en los casquillos interiores

Otra vez se calcula la nueva rigidez equivalente $K_{p\ eq}^{interior}$ de la zona descomprimida (en azul en la figura):

$$\frac{1}{K_{p\ eq}^{interior}} = \int_{45}^{75} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} = 7,116 \cdot 10^{-8} \frac{mm}{N}$$

$$K_{p\ eq}^{interior} = 14052,3 \frac{KN}{mm}$$

y la rigidez equivalente $K_{t\ eq}^{interior}$ suma del tornillo y la zona recomprimida de los casquillos (en rojo):

$$\frac{1}{K_{t\ eq}^{interior}} = \frac{1}{K_t} + \int_0^{29,5} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{29,5}^{45} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{75}^{90,5} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)} + \int_{90,5}^{120} \frac{dx}{E_p \cdot A(x)}$$

$$= 4,721 \cdot 10^{-6} + 2,035 \cdot 10^{-7} + 3,677 \cdot 10^{-8} + 3,677 \cdot 10^{-8} + 2,035 \cdot 10^{-7}$$

$$= 5,201 \cdot 10^{-6} \frac{mm}{N}$$

$$K_{t\ eq}^{interior} = 192,26 \frac{KN}{mm}$$

Y finalmente se calculan la fuerza a la que quedarán sometida el tornillo y las piezas unidas en este montaje, donde la fuerza separadora se aplica de en la zona más interior posible, teniendo las condiciones de pretensado y fuerza separadora, comunes para todos los montajes ($F = 11,2\ KN$ y $P = 10\ KN$):

$$F_t^{interior} = F + \frac{K_{t\ eq}^{interior}}{K_{t\ eq}^{interior} + K_{p\ eq}^{interior}} P = 11,33\ KN$$

$$F_c^{interior} = F - \frac{K_{p\ eq}^{interior}}{K_{t\ eq}^{interior} + K_{p\ eq}^{interior}} P = 1,33\ KN$$

Como resumen, en la siguiente tabla se muestran los resultados teóricos del caso ideal y los tres montajes que se pueden realizar en la práctica:

| $F = 11,2\ KN; P = 10\ KN$ Aplicación de la Fuerza separadora: | Rigideces (KN/mm) | | Fuerzas resultantes (KN) | |
|---|-------------------|-------------|--------------------------|-------|
| | $K_{t\ eq}$ | $K_{p\ eq}$ | F_t | F_p |
| En el caso Ideal | 211,83 | 1812,6 | 12,25 | 2,25 |
| En el montaje exterior | 204,96 | 2541,7 | 11,95 | 1,95 |
| En el montaje intermedio | 195,92 | 5942,7 | 11,52 | 1,52 |
| En el montaje interior | 192,26 | 14052,3 | 11,33 | 1,33 |

Tabla 13: Fuerzas en la unión atornillada ante distintas fuerzas separadoras

4.2.4 Otros modelos para la rigidez de las piezas unidas

Hay distintos métodos alternativos que permiten calcular la rigidez de las piezas unidas. Rasmussen, a partir de cálculos efectuados sobre un modelo de elementos finitos, propuso una formulación general para calcular el área equivalente de un cilindro, dada por la siguiente expresión:

$$A_p^* = \frac{\pi}{4} (1 - D_t^{*2}) + \frac{1}{2} (D_p^{*2} - 1) \tan^{-1} \left[\frac{0,35\sqrt{l_p^*} + \sqrt{1 + 2l_p^{*2} - 1}}{2(D_p^{*2} - D_t^{*2})} \right]$$

$$A_p^* = \frac{A_p}{D_a^2} \quad D_p^* = \frac{D_p}{D_a} \quad l_p^* = \frac{l_p}{D_a} \quad D_t^* = \frac{D_t}{D_a}$$

Los parámetros necesarios para poder utilizar la expresión anterior son los vistos en el apartado anterior. Siendo conocidos estos ($D_p = 53,5 \text{ mm}$, $l_p = 120 \text{ mm}$, $D_t = 17,5 \text{ mm}$ y $D_a = 24 \text{ mm}$) y el módulo de elasticidad de las piezas ($E_p = 210000 \text{ MPa}$), se puede calcular el área equivalente:

$$A_p = 969,22 \text{ mm}^2$$

Finalmente se puede calcular la rigidez de las piezas unidas como:

$$K_p^{Rasmussen} = \frac{A_p \cdot E_p}{l_p} = 1696,14 \text{ KN/mm}$$

Vemos que es similar a la rigidez calculada en el apartado anterior ($K_p^{Tronco\ conos} = 1812,6 \text{ KN/mm}$).

4.3 Modelos de elementos finitos para la rigidez de los elementos.

En este apartado se va a realizar un modelo de elementos finitos (MEF) para obtener las rigideces de los elementos de la unión a través de los desplazamientos producidos en dicho modelo.

El programa *SolidWorks*, que se ha utilizado para el diseño de los elementos de la unión, da la opción de realizar un estudio de elementos finitos con la herramienta *SolidWorks Simulation*.

Primero se ha tenido que modelar los elementos de la unión:

- Casquillos: Se utilizará un único casquillo con longitud igual a la suma de los seis casquillos de 20 mm, con un diámetro exterior de 53,5 mm y un orificio interior para alojar al tornillo de 17,5 mm. Al ser un modelo simplificado, no se han incluido los orificios de las varillas centradoras ni los orificios para la salida de cables.
- Tornillo: Se ha modelado el tornillo M16 con todas las secciones y longitudes correspondientes a la real, salvo la parte de la rosca que se ha modelado como un cilindro de diámetro igual al diámetro medio entre el diámetro del núcleo y el diámetro medio de la rosca (como se vio en la teoría en la ecuación 17), y de longitud la parte que queda fuera de la tuerca más $0,4d$.
- Tuerca: Igual que el real salvo que en lugar de de rosca tiene un orificio que coincide con el diámetro del cilindro que modela la parte roscada del tornillo.

Se especifica al programa que todas las piezas son de acero aleado con límite elástico $E = 210000 \text{ MPa}$.

A continuación se muestran imágenes con el modelo utilizado y su sección:

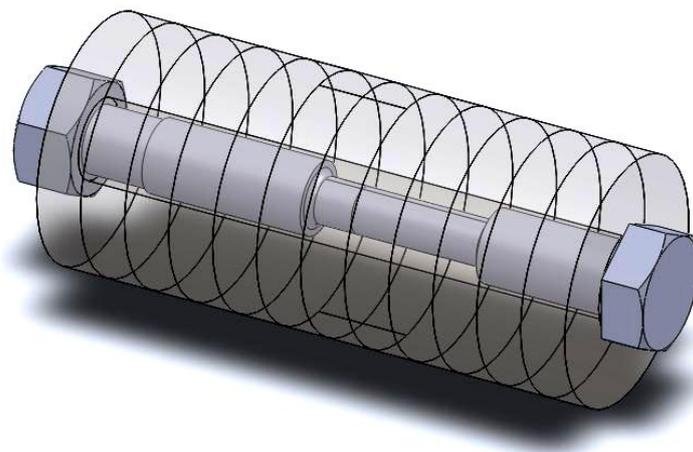


Figura 46: Piezas para el modelo de elementos finitos

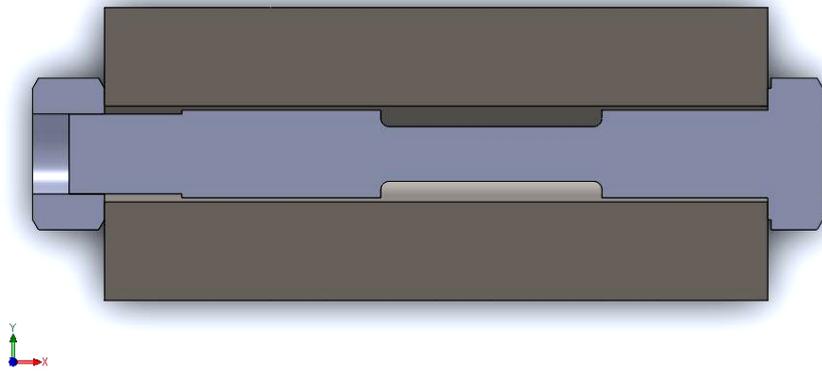


Figura 47: Sección del modelo de elementos finitos

Para modelar el apriete inicial en las piezas de 11,2 KN, se introduce una presión constante que traccione el tornillo en la superficie señalada en la siguiente figura:

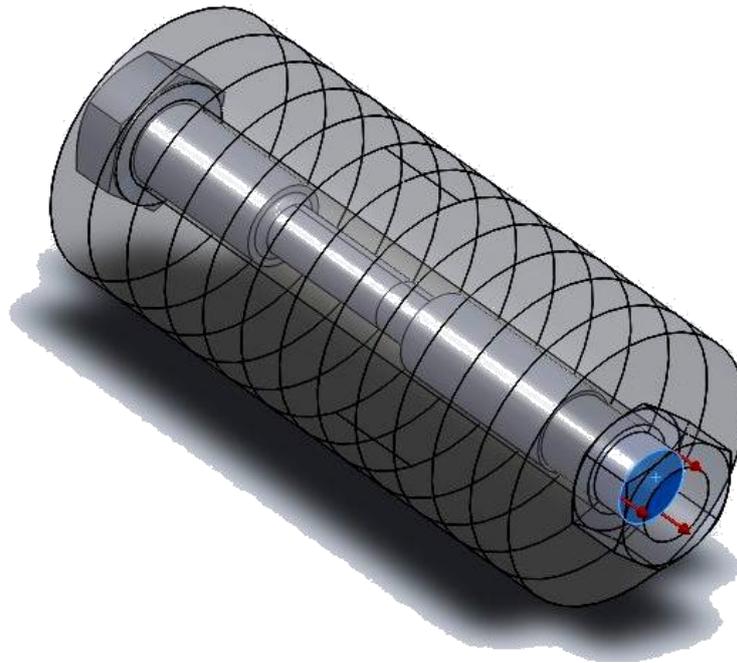


Figura 48: Modelado del apriete mediante una presión constante

El valor de la presión en esta superficie será:

$$P_{\text{apriete}} = \frac{F}{A_{\text{rosca}}} = \frac{11200}{\frac{\pi}{4} 14.59^2} = 66.99 \text{ MPa}$$

Como condición de contorno se fija la cara de la tuerca para tener una referencia de desplazamiento cero, e impedimos los desplazamientos en la dirección angular en un punto del tornillo y del casquillo para evitar el giro de los mismos:

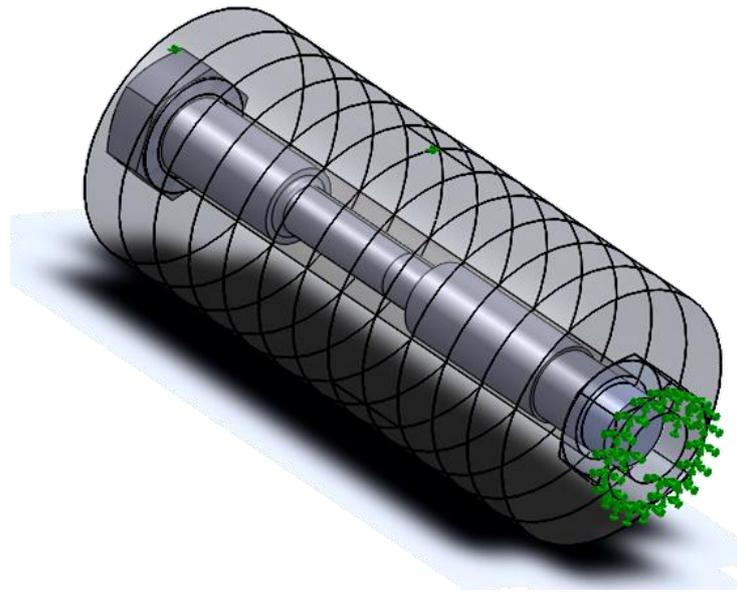


Figura 49: Condiciones de contorno del modelo de elementos finitos

Se ha mallado con la malla más fina que permite el programa:

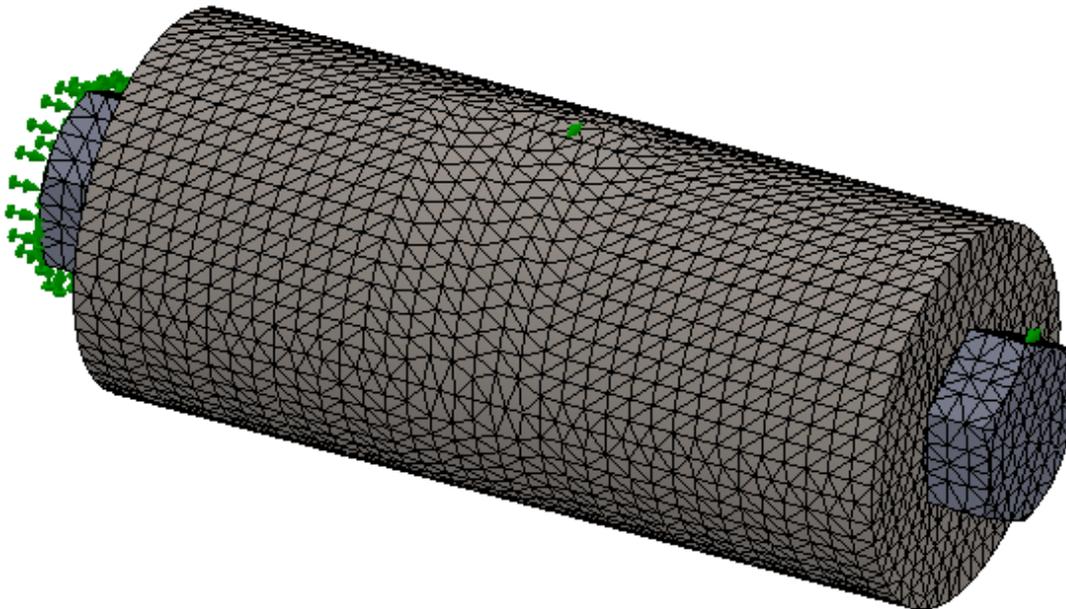


Figura 50: Malla del modelo de elementos finitos

Se resuelve y los resultados que se obtienen para una sección que pasa por el eje del cilindro son los siguientes:

- Tensión equivalente de Von Mises:

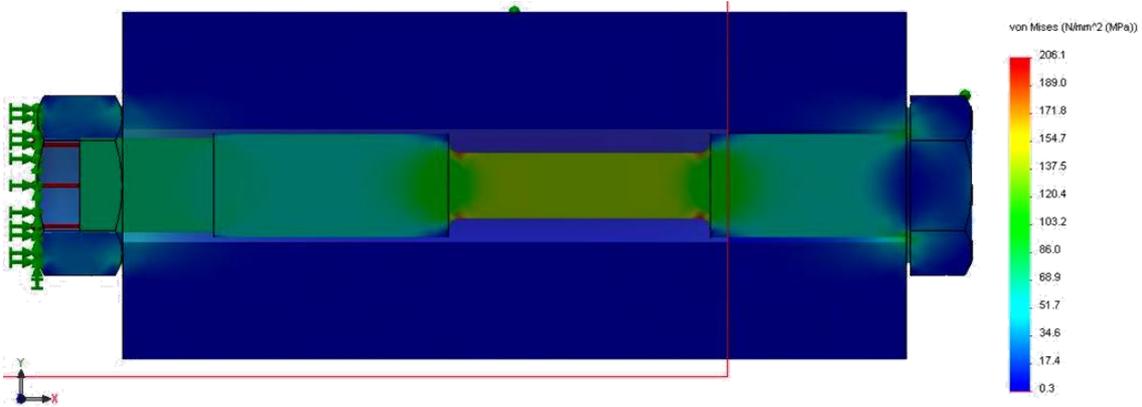


Figura 51: Tensión equivalente de Von Mises

- Tensión en la dirección axial (eje x):

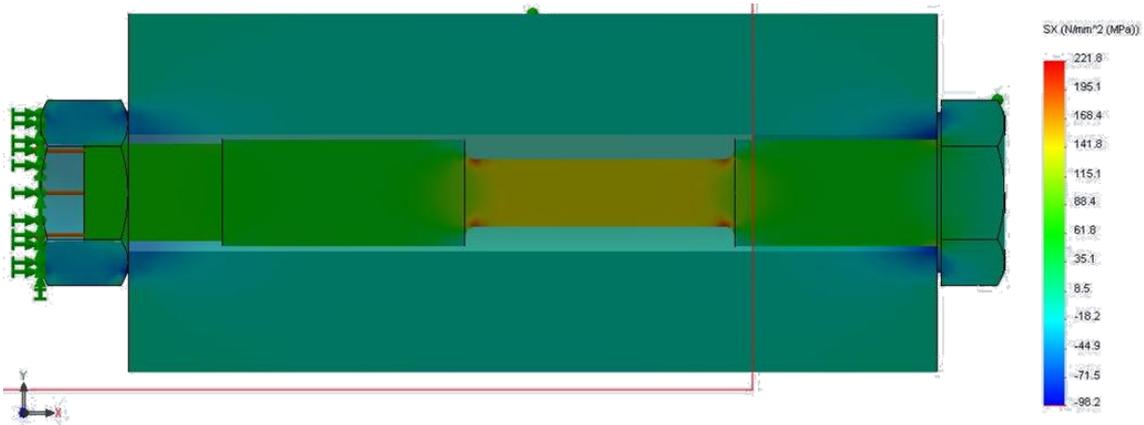


Figura 52: Tensión en la dirección axial

- Desplazamientos en la dirección axial (eje x):

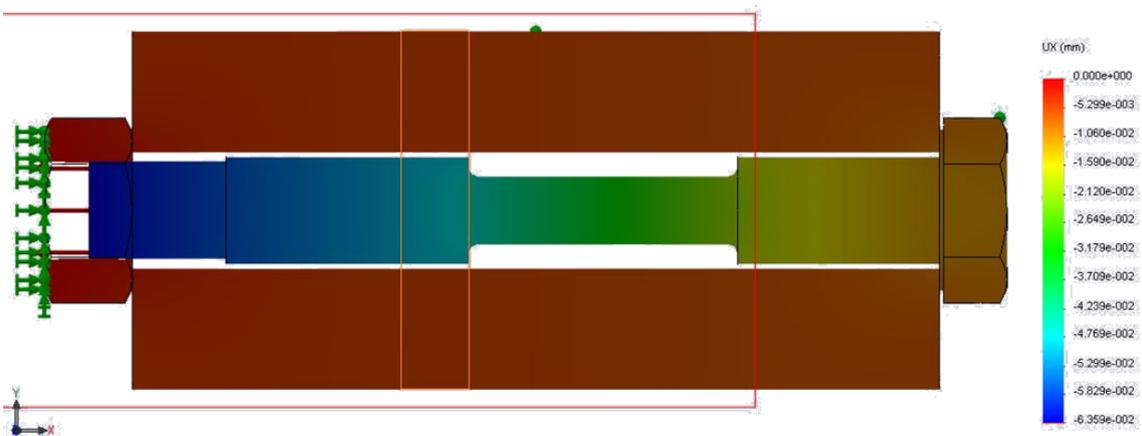


Figura 53: Desplazamientos en la dirección axial

4.3.1 Cálculo de la rigidez del tornillo mediante los desplazamientos del MEF

Debido a la geometría cilíndrica del modelo, se observarán los desplazamientos en la dirección del eje del cilindro (dirección x del modelo) obtenidos al resolver el problema. El programa permite obtener los valores de desplazamientos de una serie de nodos, lo que implica que se pueden conocer el valor medio de los desplazamientos de ciertos lugares geométricos de interés, como pueden ser las aristas y caras de las piezas del modelo.

Se obtienen los siguientes desplazamientos medios en las caras del tornillo:

- Desplazamientos medio en la cara del tornillo en el extremo de la tuerca:

$$\delta_t^{cara\ tuerca} = -0,063566\ mm$$

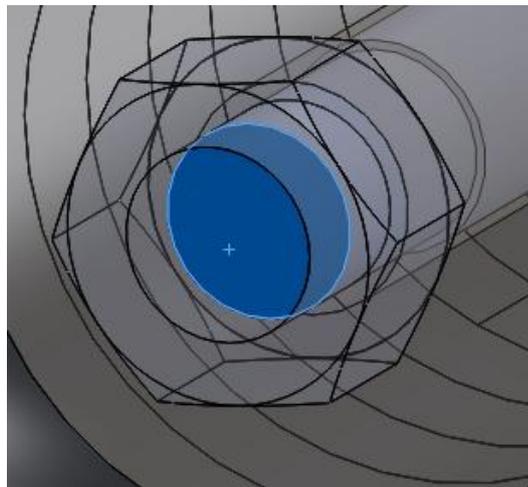


Figura 54: Cara del tornillo en el extremo de la tuerca

- Desplazamientos en la cara del tornillo en el extremo de la cabeza:

$$\delta_t^{cara\ cabeza} = -0,009459\ mm$$

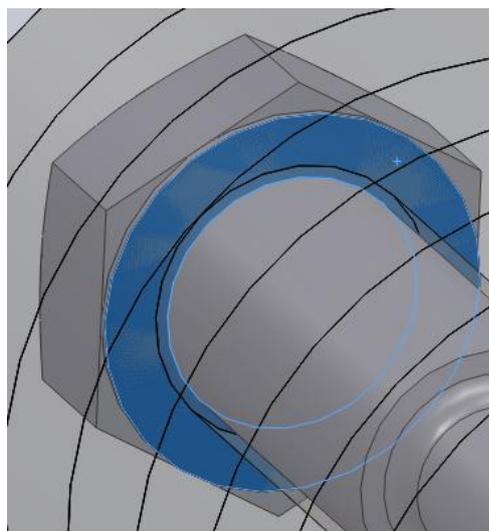


Figura 55: Cara del tornillo en el extremo de la cabeza

Se calcula la rigidez del tornillo como la fuerza que se ha aplicado al tornillo ($F = 11,2 \text{ KN}$) entre la diferencia de los desplazamientos medios de las caras de los dos extremos del tornillo:

$$K_t^{caras} = \frac{F}{|\delta_t^{cara \text{ tuerca}} - \delta_t^{cara \text{ cabeza}}|} = 207 \text{ KN/mm}$$

Se puede realizar el mismo proceso pero en lugar de utilizar las caras de los extremos se utilizan solo el desplazamiento medio de las aristas:

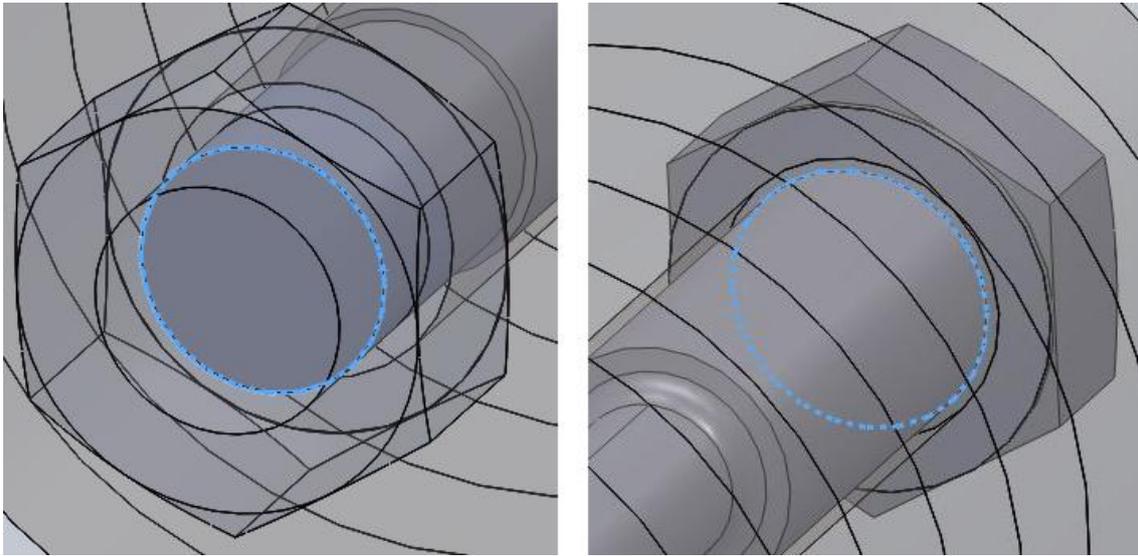


Figura 56: Aristas del tornillo en el extremo de la tuerca y cabeza

$$\delta_t^{arista \text{ tuerca}} = -0,063566 \text{ mm}$$

$$\delta_t^{arista \text{ cabeza}} = -0,010652 \text{ mm}$$

Como se puede observar, los desplazamientos en la arista y la cara del tornillo en el extremo de la puesta coinciden, ya que la presión que introdujimos era constante en toda la cara.

Se calcula la rigidez de una forma similar a la anterior:

$$K_t^{aristas} = \frac{F}{|\delta_t^{arista \text{ tuerca}} - \delta_t^{arista \text{ cabeza}}|} = 211,6 \text{ KN/mm}$$

Se puede comprobar que ambos valores son muy similares a los calculados teóricamente en el apartado 4.2.1 ($K_t^{teorico} = 211,83 \text{ KN/mm}$).

4.3.2 Cálculo de la rigidez de los casquillos mediante los desplazamientos del MEF

Del mismo modo que en el apartado anterior se calculaban la rigidez del tornillo mediante el valor medio de los desplazamientos en las caras y aristas de los extremos del tornillo, en este apartado se calcularán la rigidez de los casquillos mediante los desplazamientos de

las caras en contacto con la tuerca y la cabeza del tornillo, y también de la arista interior de dichas caras (Figura 57 y Figura 58).

De los resultados del MEF se obtienen los siguientes desplazamientos en el modelo del casquillo:

- Desplazamientos medio de la parte de la cara del casquillo en contacto con la tuerca:

$$\delta_p^{cara\ tuerca} = -0,0022762\ mm$$

- Desplazamientos en la cara del tornillo en el extremo de la cabeza:

$$\delta_p^{cara\ cabeza} = -0,0088593\ mm$$

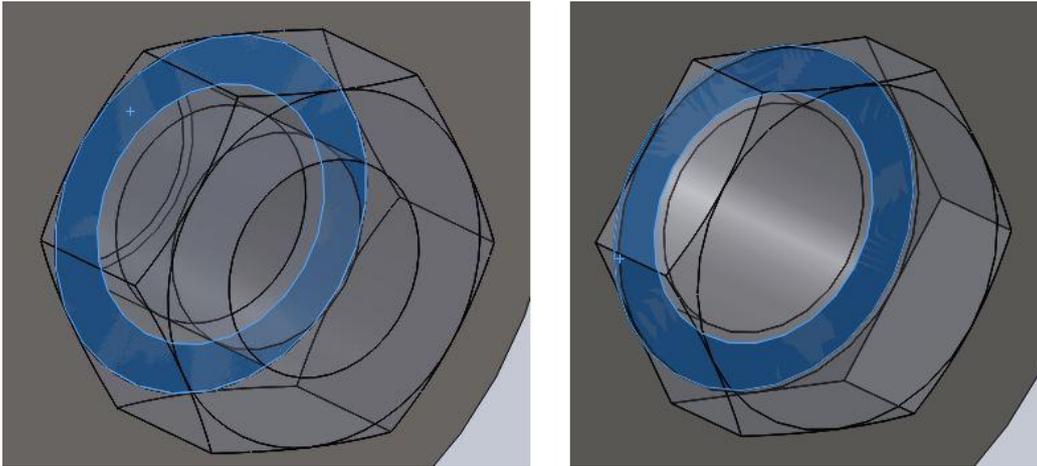


Figura 57: Caras del casquillo en contacto con la tuerca y la cabeza del tornillo

Se calculará la rigidez del casquillo como la fuerza que se ha aplicado a la unión ($F = 11,2\ KN$) entre la diferencia de los desplazamientos medios de las caras anteriores:

$$K_p^{caras} = \frac{F}{|\delta_p^{cara\ tuerca} - \delta_p^{cara\ cabeza}|} = 1.701,3\ KN/mm$$

De un modo similar, se puede utilizar solo el desplazamiento medio de las aristas interior de estas caras (Figura 58) para calcular la rigidez:

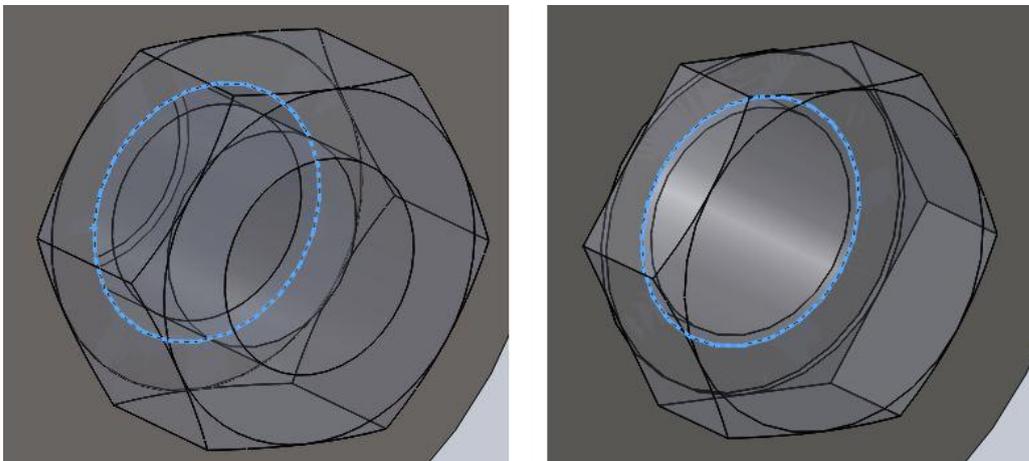


Figura 58: Aristas del casquillo en contacto con la tuerca y la cabeza del tornillo

$$\delta_p^{arista\ tuerca} = -0,0018378\ mm$$

$$\delta_p^{arista\ cabeza} = -0,0096093\ mm$$

Se calcula la rigidez como:

$$K_p^{aristas} = \frac{F}{|\delta_p^{arista\ tuerca} - \delta_p^{arista\ cabeza}|} = 1.441,2\ KN/mm$$

Como se puede comprobar, el valor de la rigidez calculada en las caras ($K_p^{caras} = 1.701,3\ KN/mm$) está entre los valores calculados teóricamente por la rigidez de los troncos de conos (apartado 4.2.2: $K_p^{teorico} = 1812,6\ KN/mm$) y la obtenida por el método de Rasmussen (apartado 4.2.4: $K_p^{Rasmussen} = 1696,14\ KN/mm$). La rigidez calculada entre las aristas interiores ($K_p^{aristas} = 1.441,2\ KN/mm$) es la menor de todas, ya que los desplazamientos producidos en el borde del orificio, son los más amplios que se producen en todo el casquillo.