

## Capítulo 7

# Control Multivariable

### 7.1 – Introducción.

Una de las ideas por la que se concibió este proyecto es la de crear la base necesaria para poder aplicar distintos tipos de controladores a la planta. Una vez realizado esto en capítulos anteriores, se completa este documento con la aplicación de un control multivariable sencillo, como demostración e inicio de futuras aplicaciones.

En un proceso multivariable como éste, una variable manipulada puede afectar a más de una variable controlada y, viceversa, una variable controlada puede depender de más de una variable manipulada. La primera cuestión que surge al diseñar el sistema de control es cómo se emparejan las variables manipuladas y controladas para formar lazos de regulación. Esta cuestión es muy importante ya que está relacionada con el principal problema de control de los sistemas multivariables: las interacciones entre lazos de regulación.

Cuando las interacciones entre lazos son fuertes, las técnicas de control de una entrada y una salida no ofrecen buenos resultados. Hay que acudir a técnicas de control multivariable que son muy complejas. La más accesible, y la que se aplicará en este caso, es la basada en *desacopladores*: elementos de control que reducen la intensidad de las interacciones.

### 7.2 - Medida de las interacciones

Una técnica que se utiliza para resolver el problema del emparejamiento entre variables manipuladas y controladas, y que permite evaluar con facilidad las interacciones en régimen permanente es el método de *Bristol* de las ganancias relativas.

Para aplicar este método hay que obtener la matriz de ganancias relativas  $\lambda$ . Ésta puede obtenerse a partir de la matriz de ganancias estáticas en lazo abierto  $K$ . Esta matriz se deduce de:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

La matriz  $G(s)$  que se obtuvo del modelo de la planta es:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1.8}{1 + 4257.13s} & \frac{11.93}{1 + 645.16s} \\ \frac{0.0174}{1 + 929.37s} * e^{-70s} & \frac{-0.096}{1 + 471.03s} \end{bmatrix}$$

Por lo que la matriz  $K$  de ganancias estáticas cuando los lazos están abiertos queda:

$$K = \begin{bmatrix} -1.81 & 11.93 \\ 0.017 & -0.0966 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida  $K$ , la matriz de ganancias relativas  $\lambda$  puede deducirse fácilmente de la expresión:

$$\lambda = K \times (K^{-1})^T$$

donde el símbolo  $\times$  significa el producto de Hadamard de las dos matrices (las matrices se multiplican elemento a elemento).

Operando:

$$(K^{-1})^T = \begin{bmatrix} 3.45 & 0.607 \\ 426.07 & 64.64 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = K \times (K^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1.81 & 11.93 \\ 0.017 & -0.0966 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3.45 & 0.607 \\ 426.07 & 64.64 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} -6.24 & 7.24 \\ 7.24 & -6.24 \end{bmatrix}$$

Una de las propiedades de la matriz  $\lambda$  que sirve de comprobación de las operaciones es que todas las filas y columnas deben sumar "1".

Los valores de esta matriz están relacionados con el grado y el tipo de interacción entre variables:

- Cuanto más difiere de "1" la ganancia relativa, mayor es el grado de interacción.
- Las variables se emparejan de forma que se elija el  $\lambda_{ij}$  mayor.

Aplicando estas dos propiedades al modelo que se obtuvo de la planta:

$$\begin{bmatrix} T^a \text{ cola} \\ H^a \text{ salida} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.24 & 7.24 \\ 7.24 & -6.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\text{prod}} \\ F_{\text{comb}} \end{bmatrix}$$

se concluye lo siguiente:

- Existe una interacción alta entre variables.
- La temperatura de cola debe ir emparejada con el flujo de combustible y la humedad de salida con el caudal de producto.

### 7.3 - Desacoplamiento

En el caso de que las interacciones sean muy fuertes y desfavorables, es preciso acudir a sistemas de control específicos para procesos multivariables que presentan una estructura mucho más compleja. Uno de estos sistemas de control multivariables es el que incluye desacopladores para eliminar, o al menos reducir, las interacciones.

Si se tiene el siguiente sistema:

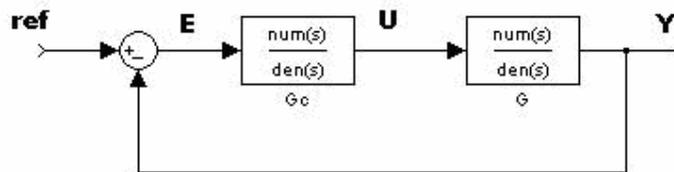


Figura 7.1 - Sistema con controlador

La ecuación expresada en términos matriciales sería:

$$Y = (I + G * G_c)^{-1} * G * G_c * \text{ref} = G_{bc} * \text{ref}$$

A partir de las especificaciones que se impongan se obtiene  $G_{bc}$ , y operando se llega a la expresión:

$$G_D = G * G_c = G_{bc} * (I - G_{bc})^{-1}$$

Donde  $G_D$  representa la matriz de desacoplo. Para que el sistema esté desacoplado la matriz de bucle cerrado ha de ser diagonal. Lo que implica, según la expresión anterior, que  $G * G_c$  ha de ser también diagonal.

El desacoplamiento no puede ser perfecto en un caso real como el de la planta, ya que el desacoplador se diseña con un modelo simple del proceso que sólo representa una aproximación a su comportamiento real. Además en algunos casos el desacoplador no será físicamente realizable.

Aplicando esto a la planta de secado, en la que se eligió que el emparejamiento de las variables debía ser temperatura de cola con flujo de combustible y humedad de salida con caudal de producto, la matriz de la planta en bucle cerrado debe tener la forma:

$$G_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & 0 \end{bmatrix}$$

Las especificaciones para la temperatura de cola y humedad de salida son error en régimen permanente cero y que  $\tau$  no sea menor que la obtenida en el modelo.

Pero la dificultad que plantea el modelo de la planta es el tiempo muerto que posee uno de los términos de la matriz  $G$ . Este tiempo muerto añade una complicación a las operaciones que hace inviable este método. Por ello se tomó la decisión de diseñar la  $G_c$  para la dinámica del proceso como si no tuviese retardo. El retardo se tendrá en cuenta más tarde, añadiéndose al lazo correspondiente una estructura de predictor de Smith. Pero primero se calcula  $G_c$ .

La matriz en bucle cerrado queda:

$$G_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+700s} \\ \frac{1}{1+930s} & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\tau=700$  y  $\tau=930$  son los valores del modelo con algo de holgura.

Una vez obtenida la matriz en bucle cerrado deseada, hay que calcular  $G_c$ . Primero se deduce  $G_D$ :

$$G_D = G_{bc} * (I - G_{bc})^{-1}$$

$$G_{Dii} = \frac{G_{BCii}}{1 - G_{Bii}}$$

$$G_{D11}=0 \quad G_{D12} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+700s}}$$

$$G_{D21} = \frac{1}{1+930s} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+930s}} \quad G_{D22}=0$$

$$\mathbf{G_D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{700s} \\ \frac{1}{930s} & 0 \end{bmatrix}$$

Planteando de nuevo el sistema, la única incógnita es la matriz  $G_C$ :

$$G_D = G * G_C$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{700s} \\ \frac{1}{930s} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1.8}{1+4257.13s} & \frac{11.93}{1+645.16s} \\ \frac{0.0174}{1+929.37s} & \frac{-0.096}{1+471.03s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{C11} & G_{C12} \\ G_{C21} & G_{C22} \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$0 = \frac{-1.8}{1+4257.13s} * G_{C11} + \frac{11.93}{1+645.16s} * G_{C21}$$

$$\frac{1}{700s} = \frac{-1.8}{1+4257.13s} * G_{C12} + \frac{11.93}{1+645.16s} * G_{C22}$$

$$\frac{1}{930s} = \frac{0.0174}{1+929.37s} * G_{C11} + \frac{-0.096}{1+471.03s} * G_{C21}$$

$$0 = \frac{0.0174}{1+929.37s} * G_{C12} + \frac{-0.096}{1+471.03s} * G_{C22}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen los elementos de la matriz de controladores:

$$G_{C11} = \frac{12355708443s^3 + 42428328s^2 + 37509.42s + 6.63}{155737150s^3 + 353331s^2 + 17.1s}$$

$$G_{C12} = \frac{2552542600s^3 + 7302571.3s^2 + 5831.66s + 1}{2280494850s^3 + 5171370.1s^2 + 252s}$$

$$G_{C21} = \frac{282425980s^3 + 1341243.2s^2 + 2045.56s + 1}{155737150s^3 + 353331s^2 + 17.1s}$$

$$G_{C22} = \frac{234482762.5s^3 + 916337.6s^2 + 973.9s + 0.1825}{2280494850s^3 + 5171370.1s^2 + 252s}$$

Hasta aquí se ha calculado el controlador sin tener en cuenta el retardo que poseía uno de los términos. Al crear el diagrama de bloques para simular el sistema con el controlador, se añade el retardo a dicho término.

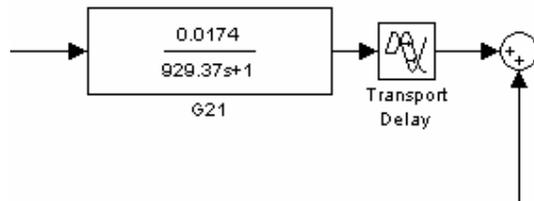
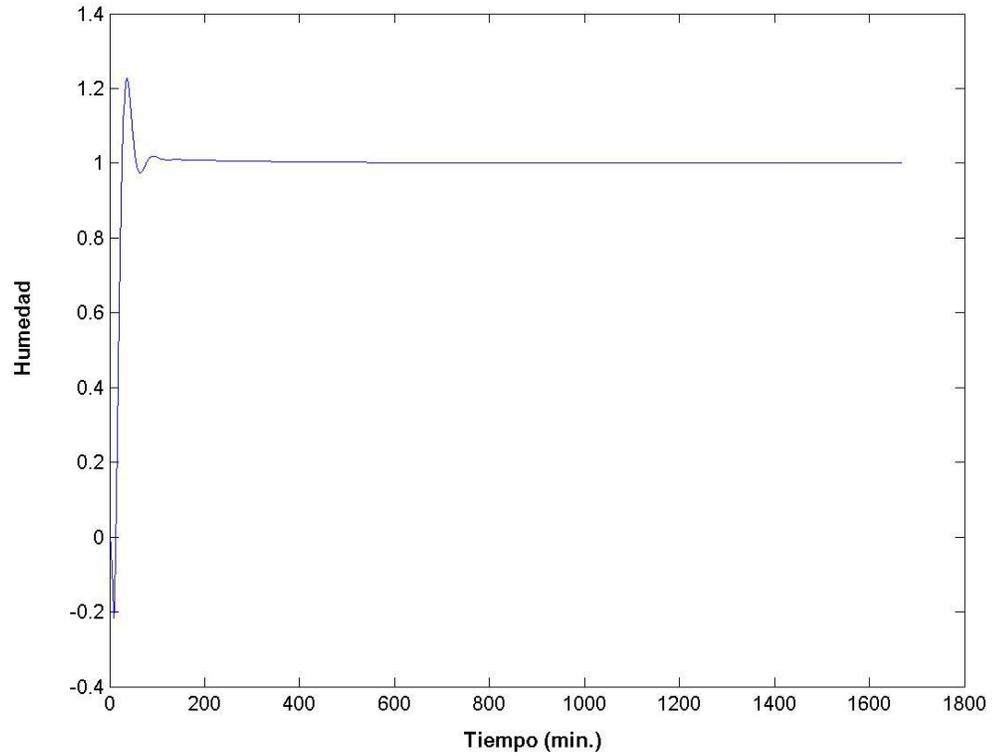
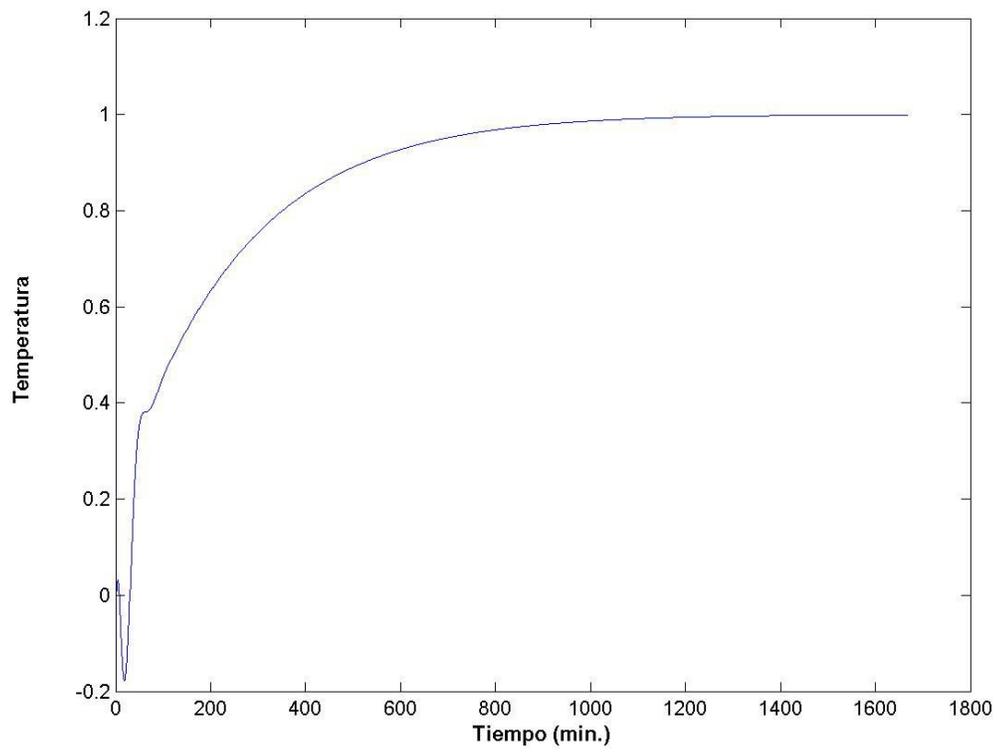
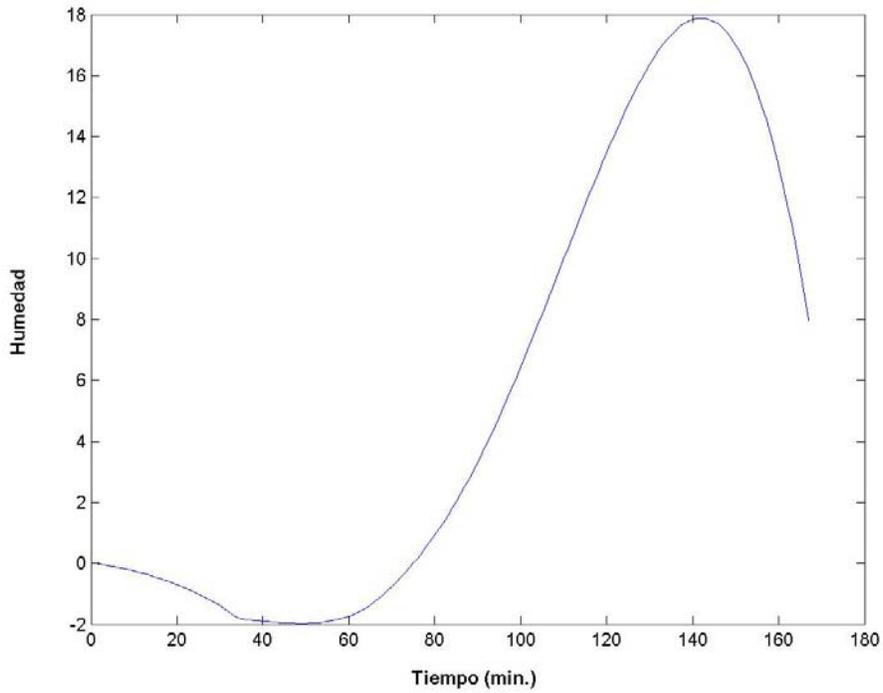
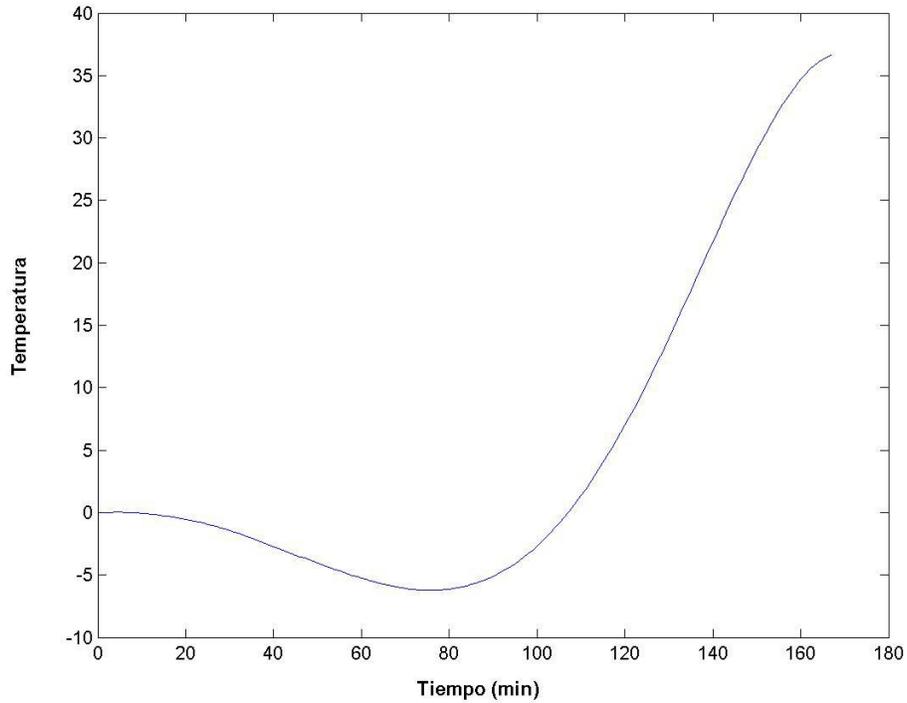


Figura 7.2 - Retardo añadido

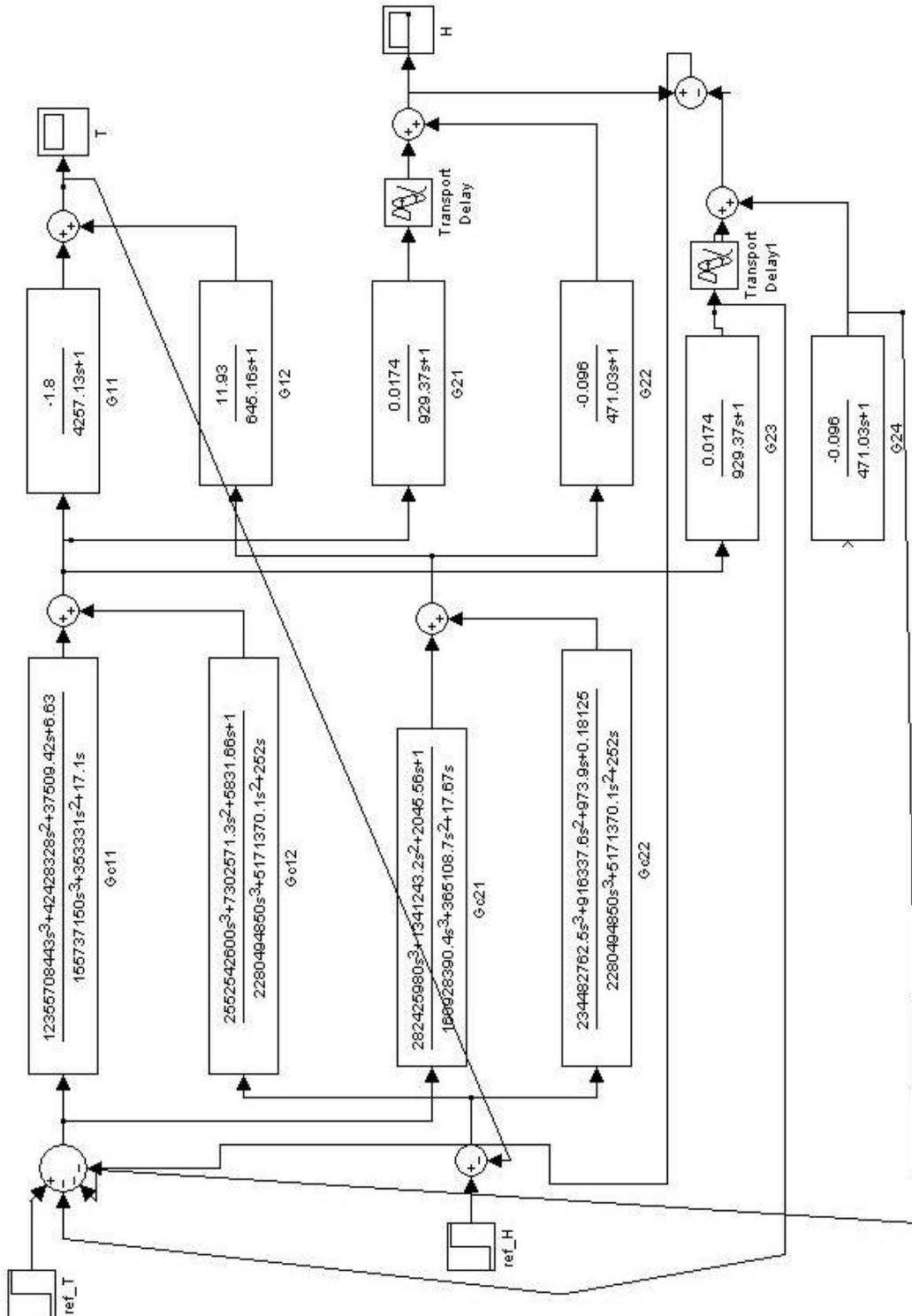
Para pequeños retardos el sistema funciona correctamente. Por ejemplo para un retardo de 8 minutos, la temperatura y la humedad ante un escalón unidad serían:



Pero si se aumenta el retraso el sistema comienza a oscilar a partir de 17 minutos, haciéndose estas oscilaciones cada vez más grandes hasta que con 50 minutos los valores se disparan a infinito. Por ejemplo para 33 minutos:



Este problema se debe a que no se incluyó el retardo en los cálculos del controlador. Por ello se realiza sobre el lazo que contiene el retardo una estructura de predictor de Smith:



El término que posee retardo es el  $G_{21}$ , que sumado con el  $G_{22}$  resulta la humedad de salida. Estos dos términos se restan a la referencia de entrada, y además se resta también la diferencia de las dos salidas con retardo. Se trata de aplicar un predictor de Smith a un sistema multivariable. Ahora los resultados son mucho mejores, pudiendo alcanzar grandes retardos. Por ejemplo, para un retraso de 70 minutos:

