

Capítulo 4: Efectos de Compresibilidad

Índice

4	Efectos de compresibilidad	105
4.1	Movimiento no-estacionario de líquidos en conductos	105
4.1.1	Tiempo de cierre mucho menor que el tiempo de residencia, $t_c \sim t_r$..	108
4.1.2	Apertura de válvula desde $a = 0$	115
4.2	Tratamiento numérico de la compresibilidad	115
4.2.1	Condiciones de contorno de un esquema numérico	118
4.3	Aplicación a la central Tajo de la Encantada	119
4.3.1	Cierre instantáneo con fricción	119
4.3.2	Cierre no instantáneo con fricción	121
4.3.3	Cierre rápido con la turbina sin chimenea de equilibrio	124
4.3.4	Cierre rápido de la instalación completa	125

4 Efectos de compresibilidad

4.1 Movimiento no-estacionario de líquidos en conductos

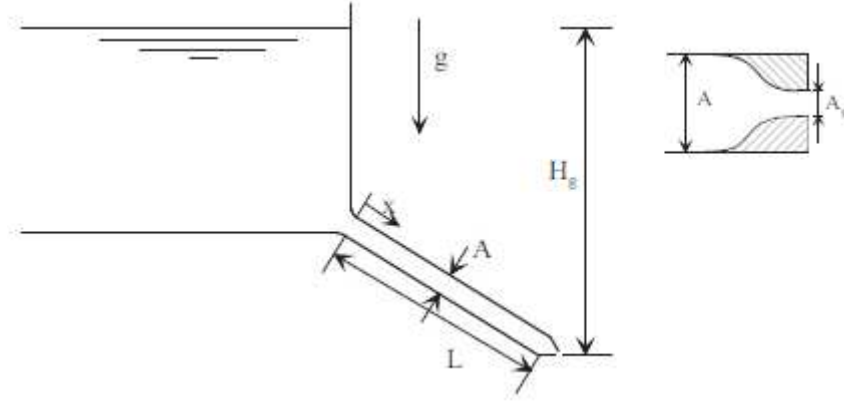


Figura 1.- Flujo en un conducto descargando a través de una válvula reguladora.

En lo que sigue, y para centrar ideas se considerara el caso de un conducto de sección y rugosidad constantes que toma agua de un depósito (o embalse) descargándola al exterior a una cota H_g por debajo del nivel del depósito bajo la presencia de la gravedad, o sea, $U = gz$, donde g es la aceleración de la gravedad y z es la cota medida desde la válvula. A la salida del conducto existe una válvula reguladora del caudal que se modela mediante una tobera convergente de área mínima a la salida que puede variar con el tiempo (Figura 1). Las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento determinan la distribución de presiones y velocidades en el conducto cuando se retienen los efectos de compresibilidad del líquido y la elasticidad de las paredes del conducto. Como condiciones iniciales se impondrán las correspondientes al estado estacionario previo. Por ejemplo si la válvula está cerrada en el instante inicial, las condiciones serán las correspondientes a la hidrostática

$$v = 0, \quad p + \rho_0 gz - p_a - \rho_0 g H_g = 0 \quad (4.1)$$

mientras que si en el instante inicial, la válvula está abierta, la distribución de presiones es la correspondiente a la del estado estacionario. Se tiene entonces

$$p + \rho_0 gz = -\frac{\lambda \rho_0 v_0^2}{2D} x + p(0) + \rho_0 gz(0) \quad (4.2)$$

donde $p(0)$ y $z(0)$ representan la presión y la cota a la entrada al conducto. El cálculo de $p(0)$ y de la velocidad inicial v_0 comporta el análisis de los flujos en las toberas de entrada y salida del conducto donde se supondrá que las fuerzas másicas son despreciables, por serlo las variaciones de cota, y sin fricción por ser las longitudes características de estas zonas (l) tales que $\lambda l/D \ll 1$. Con estas

condiciones la integración de la ecuación de la cantidad de movimiento proporciona

$$p(0) + \frac{1}{2}\rho_0 g z(0) = p_a + \rho_0 g H_g + \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 = 0 \quad (4.3)$$

y

$$p(L) + \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho_0 v_s^2 = 0, \text{ con } v_s = v_0 \frac{A}{A_s(0)} \quad (4.4)$$

Sustituyendo (4.3) y (4.4) en la ecuación (4.2) particularizada en $x = L$ se obtiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH_g}{[A/A_s(0)]^2 + \lambda L/D}} \quad (4.5)$$

y la distribución de presiones en el conducto en el instante inicial

$$p + \frac{1}{2}\rho_0 g z - p_a - \rho_0 g H_g = -\frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 \left(1 + \frac{\lambda x}{D}\right) \quad (4.6)$$

Para las condiciones de contorno es necesario dar la presión a la entrada del conducto $x = 0$ y a la salida $x = L$ como funciones del tiempo. Estas condiciones se obtienen mediante un proceso similar al seguido para obtener las condiciones iniciales. En efecto, suponiendo movimiento estacionario entre una sección aguas arriba del conducto donde la velocidad es prácticamente nula y la entrada del conducto situada en $z(0)$ donde la velocidad es la del conducto v , la integración de la ecuación (4.17) sin fuerzas másicas ni fricción y proporciona

$$\begin{aligned} p(0, t) + \rho_0 g z &= p_a + \rho_0 g H_g - \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2(0, t), & \text{si } v(0, t) > 0 \\ p(0, t) + \rho_0 g z &= p_a + \rho_0 g H_g, & \text{si } v(0, t) < 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

mientras que del análisis de la tobera de salida se tiene

$$\begin{aligned} p(L, t) &= p_a + \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2(L, t) \left[\frac{A^2}{A_s^2(t)} - 1 \right], & \text{si } v(0, t) > 0 \\ v(L, t) &= 0, & \text{si } v(0, t) < 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde t_c es el tiempo de cierre de la válvula. En esta última condición de contorno se ha tenido en cuenta que la velocidad es siempre positiva antes del cierre.

Para simplificar el análisis conviene definir las variables adimensionales

$$p' = \frac{p + \rho_0 g z - p_a - \rho_0 g H_g}{p_0}, \quad v' = \frac{v}{v_0}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad t' = \frac{t}{t_0} \quad (4.9)$$

y la ley adimensional de cierre o apertura de válvula

$$a(t) = \frac{A_s(t)}{A} \quad (4.10)$$

donde p_0 representa el valor característico de las variaciones de presión y t_0 es el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas, que se determinaran a continuación dependiendo de cada caso 2. En las nuevas variables, las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento y las condiciones iniciales y y de contorno y resultan

$$\frac{p_0}{\rho_0 c_0^2} \left[\frac{L}{v_0 t_0} \frac{\partial p'}{\partial t'} + v' \frac{\partial p'}{\partial x'} \right] + \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{L}{v_0 t_0} \frac{\partial v'}{\partial t'} + v' \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} = -\frac{\lambda L}{2D} v' |v'| \quad (4.12)$$

con las condiciones iniciales

$$p'(x', 0) = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0 v_0^2}{p_0} \left(1 + \frac{\lambda L}{D} x' \right), \quad v'(x', 0) = 0 \quad (4.13)$$

y las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} p'(0, t') &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_0 v_0^2}{p_0} v'^2, & \text{si } v'(0, t') > 0 \\ p'(0, t') &= 0, & \text{si } v'(0, t') < 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} p'(1, t') &= \frac{1}{2} \frac{\rho_0 v_0^2}{p_0} \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) v'^2(1, t') - \frac{\rho_0 g H_g}{p_0}, & \text{si } t' < t_c/t_0 \\ v'(1, t') &= 0, & \text{si } t' > t_c/t_0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

En (4.11) se ha despreciado el término gravitatorio ya que $gHg/c_0^2 \ll 1$ en los casos de interés.

Las ecuaciones (4.11), (4.12) y condiciones iniciales (4.13) y de contorno (4.14)-(4.15), que permiten obtener las evoluciones temporales de las distribuciones de presión y velocidad en el conducto, admiten dos límites asintóticos distinguidos que corresponden a los casos en los que: **1)** el tiempo de cierre o apertura de la válvula es mucho mayor o del orden del tiempo de residencia, $t_c \sim t_r$ y **2)** el tiempo de cierre o apertura es pequeño comparado con el de residencia, $t_c \ll t_r$. Como se verá en lo que sigue, los fenómenos de compresibilidad aparecen en este último caso donde pueden distinguirse dos subrégimenas asintóticos: **2a)** denominado cierre lento que corresponde al caso en el que el tiempo de cierre es grande frente al de ida o vuelta de las ondas, $t_{iv} \ll t_c \ll t_r$, y **2b)** cierre rápido, en el que los tiempos de ida o vuelta de las ondas y de cierre son comparables, $t_{iv} \sim t_c \ll t_r$. De nuevo se ha tenido en cuenta que en los casos de interés $v_0 \ll c_0$ y por lo tanto $t_{iv} \ll t_r$. Se añadirá un tercer régimen para describir la apertura de válvulas desde $a=0$. En el sistema de ecuaciones (4.11)-(4.15) han aparecido distintas presiones características: la presión hidrostática, $\rho_0 g H_g$, la presión dinámica del estado estacionario, $\rho_0 v_0^2$, la presión característica de los problemas con compresibilidad, $\rho_0 v_0 c_0$, y el incremento de presión característico para la aparición de

compresibilidad en reposo, $\rho_o v_o^2$. En lo que sigue se analizarán los regímenes aquí definidos y se determinarán las presiones características de cada uno.

4.1.1 Tiempo de cierre mucho menor que el tiempo de residencia, $t_c \sim t_r$.

En este caso se tiene $t_c \sim t_o \ll L/v_o \sim t_r$ y por tanto de la ecuación (4.12) interesa tomar $t_o = t_c$ y $p_o = \rho_o v_o L/t_c$. Introduciendo este valor de p_o en (4.11), es fácil comprobar que el término de compresibilidad es del orden de $(L/c_o t_c)^2 \sim (t_{iv}/t_c)^2$. Si sucede que $t_{iv} \ll t_c$, lo que corresponde al denominado cierre lento, los efectos de compresibilidad son despreciables en primera aproximación (se verá posteriormente que los efectos de compresibilidad pueden hacerse importantes en los últimos instantes del cierre de la válvula), mientras que lo contrario sucede en el denominado cierre rápido en el que $t_{iv} \sim t_c$.

1a) Cierre lento: $t_{iv} \ll t_c \ll t_r$.

En este caso $p_o = \rho_o v_o L/t_c \gg \rho_o v_o^2$ y las ecuaciones (4.11) y (4.12) se reducen a

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{\partial p'}{\partial x'} = -\frac{\lambda L}{2D} \frac{t_c}{t_r} v'^2 \quad (4.16)$$

Obsérvese que el término de fricción es despreciable si

$$\frac{\lambda L}{2D} \frac{t_c}{t_r} v'^2 \ll 1, \quad (4.17)$$

lo que sucede usualmente excepto en situaciones en las que la longitud de la tubería es suficientemente larga. Dado que la fricción no juega un papel esencial (solo amortiguador) en este caso de cierre lento se supondrá, por simplicidad, que se satisface (4.17) y (4.16) se reduce a

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{\partial p'}{\partial x'} = 0 \quad (4.18)$$

Por otra parte, las condiciones de contorno (4.35)-(4.36) para $t' < 1$ e inicial (4.34) muestran que en los instantes iniciales del cierre $p' \sim v_o t_c/L = t_c/t_r \ll 1$ y $v' \sim 1$, lo que sugiere buscar la solución del sistema (4.18) como un desarrollo en serie de potencias del parámetro pequeño t_c/t_r

$$\begin{aligned} v'(x', t') &= 1 + \frac{t_c}{t_r} v'_1(x', t') + \left(\frac{t_c}{t_r}\right)^2 v'_2(x', t') \dots \\ p'(x', t') &= 1 + \frac{t_c}{t_r} p'_1(x', t') + \left(\frac{t_c}{t_r}\right)^2 p'_2(x', t') \dots \end{aligned} \quad (4.19)$$

Introduciendo (4.19) en las ecuaciones (4.18) y en las condiciones iniciales (4.13) y de contorno (4.14) y (4.15) para $t' < 1$, reteniendo solamente términos de orden superior, se obtiene

$$\frac{\partial v'_1}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial v'_1}{\partial t'} + \frac{\partial p'_1}{\partial x'} = 0 \quad (4.20)$$

con

$$v'_1(x', 0) = 0, \quad p'_1(0, t') = -\frac{1}{2}, \quad p'_1(1, t') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) - \frac{1}{2a^2(0)} = 0, \quad (4.21)$$

donde, de (4.26), se ha tenido en cuenta que $v_0 = a(0)\sqrt{2gH_g}$ al cumplirse la condición (4.17). Multiplicando la segunda de las ecuaciones (4.20) por dx' e integrando entre 0 y x' se obtiene la distribución de la perturbación de presión a lo largo del conducto

$$x' \frac{dv'_1}{dt'} + p'_1(x', t') - p'_1(0, t') = 0 \quad (4.22)$$

y si se imponen las condiciones de contorno (4.21), se obtiene la ecuación diferencial que determina la velocidad perturbada como función del tiempo

$$\frac{dv'_1}{dt'} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{a^2} \right] dt' \quad (4.23)$$

y cuya integración proporciona

$$v'_1(t') = \frac{1}{2} \int_0^{t'} \left[\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{a^2} \right] dt' \quad (4.24)$$

Obsérvese que la solución representada por (4.22) y (4.24) es válida en tanto que el valor de las funciones p'_1 y v'_1 se mantenga de orden unidad (puesto que para que el desarrollo (4.19) sea uniformemente válido cada término de la serie debe ser mucho menor que el anterior). El comportamiento de (4.24) depende de la ley de cierre de la válvula; en efecto, si se supone una ley de cierre potencial de la forma

$$a(t') = a(0)(a + t')^n, \quad 0 \leq t' \leq 1, \quad (4.25)$$

la expresión (4.24) permanece acotada para valores de t' en el intervalo de interés si el exponente n de la ley de cierre es $n < 1/2$ mientras que diverge si $n \geq 1/2$. En el primer caso, el desarrollo en serie de potencias (4.19) es uniformemente válido para todo t' y los términos sucesivos del desarrollo se calculan en forma análoga a lo realizado para calcular v'_1 y p'_1 . Un valor muy bajo de n ($n < 1/2$) significa que en los instantes cercanos al cierre el área de la válvula se reduce muy rápidamente. En este caso el líquido no llega a pararse en el instante del cierre y siempre aparece compresibilidad. Por el contrario, si (4.24) diverge por ser $n \geq 1/2$, la solución encontrada no es uniformemente válida para todo t' , sino que diverge para $t' \rightarrow 1$, $t \rightarrow t_c$, como se indica en la figura 4.4, en la que se ha representado cualitativamente las soluciones aproximadas obtenidas, (4.22) y (4.24). Como puede verse, estas soluciones divergen para tiempos próximos al de cierre, produciéndose una brusca subida de presión y deceleración del líquido que sucede en un tiempo característico que es muy pequeño frente al tiempo de cierre.

Este comportamiento singular de la solución aproximada para tiempos próximos al tiempo de cierre procede de haber despreciado los efectos de compresibilidad en la ecuación (4.11), lo que quiere decir que en instantes de tiempo próximos al

tiempo de cierre los efectos de compresibilidad se hacen importantes y es necesario retenerlos en el análisis. El nuevo tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas t_o y el orden de magnitud del pico de presión p_o se determinan de las ecuaciones (4.11) y (4.12) de forma que se retenga el efecto de la compresibilidad, obteniéndose de este modo

$$p_o \sim \rho_o v_o L / t_o \quad \text{y} \quad p_o / (\rho_o c_o^2 t_o) \sim v_o / L, \quad (4.26)$$

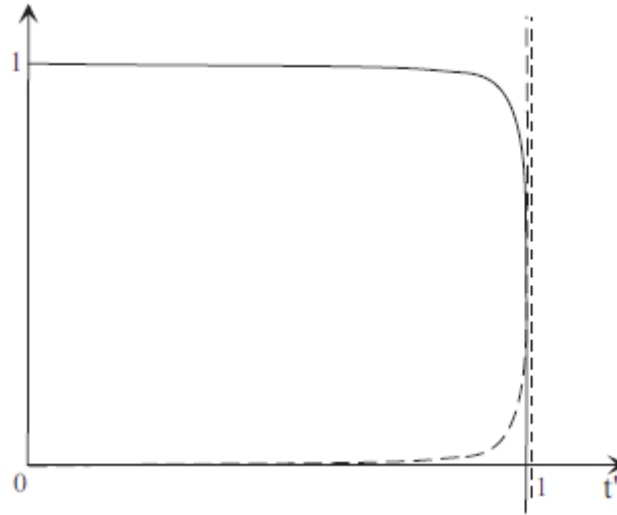


Figura 2.- Figura 4.4: Valores de la presión (---) y velocidad (—) en la válvula desde el instante inicial hasta el cierre utilizando las soluciones aproximadas (4.22) y (4.24).

O

$$t_o \sim L / c_o = t_{iv} \quad \text{y} \quad p_o \sim \rho_o v_o c_o \quad (4.27)$$

Si se redefine p' con $p_o = \rho_o v_o c_o$ la condición de contorno a la salida se escribe

$$p'(1, t') = \frac{v_o}{c_o} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2(0)} - 1 \right) v'^2(1, t') - \frac{1}{2a^2(0)} \right] \quad (4.28)$$

La relación (4.27) significa que para que aparezca compresibilidad en tiempos anteriores al cierre del orden de t_{iv} se debe cumplir que $p'(1, t') \sim 1$. Si se supone una ley de cierre como la de (4.25) en el límite $a \rightarrow 0$ se obtiene

$$p'(1, t') \cong \frac{1}{2a^2(0)} \frac{t_{iv}}{t_r} \left(\frac{t_c}{t_{iv}} \right)^2 v'^2(1, t') \sim 1 \quad (4.29)$$

por lo que se concluye que en el caso de cierre lento, $t_{iv} \ll t_c \ll t_r$, se evitara el golpe de ariete en los últimos instantes del cierre si y solo si

$$t_c \gg t_{iv} \left[a^2(0) \frac{t_r}{t_{iv}} \right]^{1/2n} \quad (4.30)$$

Esto es, para un cierre lento cuya ley de áreas se comporta en la forma descrita en (4.25), los fenómenos de compresibilidad no cuentan si el tiempo de cierre cumple (4.30). En caso contrario los fenómenos de compresibilidad son importantes en las últimas etapas del cierre, esto es, cuando $t_c - t \sim t_{iv}$.

El proceso de resolución de las ecuaciones completas en las que se incluya el término de compresibilidad es enteramente similar al que se realizara en el próximo apartado correspondiente a cierre rápido.

1b) Cierre rápido: $t_c \sim t_{iv} \ll t_r$.

En este caso los fenómenos de compresibilidad son importantes desde los primeros instantes del proceso de cierre de la válvula ya que el tiempo característico del movimiento del líquido en el conducto $t_o \sim t_c \sim t_{iv}$ y los valores característicos de la presión son $p_o \sim \rho_o v_o c_o$. Tomando $t_o = t_{iv}$ y $p_o = \rho_o v_o c_o$ y despreciando los términos de orden $t_{iv}/t_r = v_o/c_o$ las ecuaciones (4.11), (4.12) se reducen a

$$\frac{dp'}{dt'} + \frac{dv'}{dx'} = 0, \quad \frac{dv'}{dt'} + \frac{dp'}{dx'} = -\frac{\lambda L}{2D} \frac{v_o}{c_o} v' |v'|, \quad (4.31)$$

con las condiciones iniciales

$$v'(x', 0) = 1, \quad y \quad p'(x', 0) = -\frac{\lambda L}{2D} \frac{v_o}{c_o} x'^2 \quad (4.32)$$

y de contorno

$$\begin{aligned} p'(0, t') &= 0 \\ p'(1, t') &= -\frac{v_o}{2c_o} \frac{v'^2(1, t')}{a^2} - \frac{gH_g}{v_o c_o}, \quad \text{si } t' < t_c/t_{iv} \\ v'(1, t') &= 0, \quad \text{si } t' \leq t_c/t_{iv} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nótese que las ecuaciones (4.31) recogen todos los casos anteriores, por lo que se pueden considerar como las ecuaciones generales del movimiento de líquidos en conductos cuando $v_o/c_o \ll 1$ y $gH_g/c_o^2 \ll 1$.

Las ecuaciones (4.31) pueden transformarse para su solución por el método de las características. En efecto, sumando o restando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{\partial(v'+p')}{\partial t'} + \frac{\partial(v'+p')}{\partial x'} + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_o}{c_o} v' |v'| = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial(v'-p')}{\partial t'} + \frac{\partial(v'-p')}{\partial x'} + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_o}{c_o} v' |v'| = 0 \quad (4.35)$$

por lo que

$$\begin{aligned} (c+) : \text{sobre } \frac{dx'}{dt'} = 1 \quad & \frac{\partial(v'+p')}{\partial t'} + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_o}{c_o} v' |v'| = 0, \\ (c-) : \text{sobre } \frac{dx'}{dt'} = -1 \quad & \frac{\partial(v'-p')}{\partial t'} + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_o}{c_o} v' |v'| = 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para ilustrar la resolución de (4.36), antes de pasar a la resolución del caso general mediante el tratamiento numérico de este problema, consideremos el caso del cierre instantáneo de una válvula en ausencia de fricción. Al cerrar instantáneamente la válvula situada al final de un conducto de desagüe de un deposito, el líquido ha de cumplir la nueva condición de contorno (velocidad nula

en la válvula), por lo que se forma una onda que viaja aguas arriba incrementando la presión para dejar al líquido, a su paso, con velocidad nula (ver figura 4.6a). Al llegar a la base del depósito la presión detrás de la onda es distinta de la que hay en ese lugar ($p' = 0$) y por tanto la onda se refleja y viaja aguas abajo disminuyendo la presión y haciendo que el líquido se ponga en movimiento hacia el depósito (ver figura 4.6b). De nuevo al llegar la onda a la válvula no puede cumplirse la condición de contorno ($v' = 0$), puesto que la velocidad detrás de la onda es finita ($v' = -1$), la onda vuelve a reflejarse y a su paso deja al líquido parado de nuevo, disminuyendo su presión (figura 4.6c). Esto hace que nuevamente deje de cumplirse la condición de contorno en la base del depósito y la onda vuelva a reflejarse dejando al líquido en las condiciones iniciales (figura 4.6d). Al llegar la onda a la válvula vuelve a producirse el mismo proceso que se repetirá periódicamente con un periodo de $4L/co = 4tiv$.

En este caso las ecuaciones (4.36) se reducen a

$$\begin{aligned} (c+) : \text{sobre } dx' &= dt' d(v' + p') = 0 , \\ (c-) : \text{sobre } dx' &= -dt' d(v' - p') = 0 , \end{aligned} \quad (4.37)$$

con las condiciones iniciales

$$v'(x', 0) = 1 \text{ y } p'(x', 0) = 0 \quad (4.38)$$

y de contorno

$$p'(0, t') = 0 \text{ y } v'(1, t') = 0 \quad (4.39)$$

Es fácil ver que la solución a este problema en el plano x', t' es la representada en la figura 4.7. El eje x' representa la condición inicial $p' = 0$ y $v' = 1$. Las condiciones de contorno se

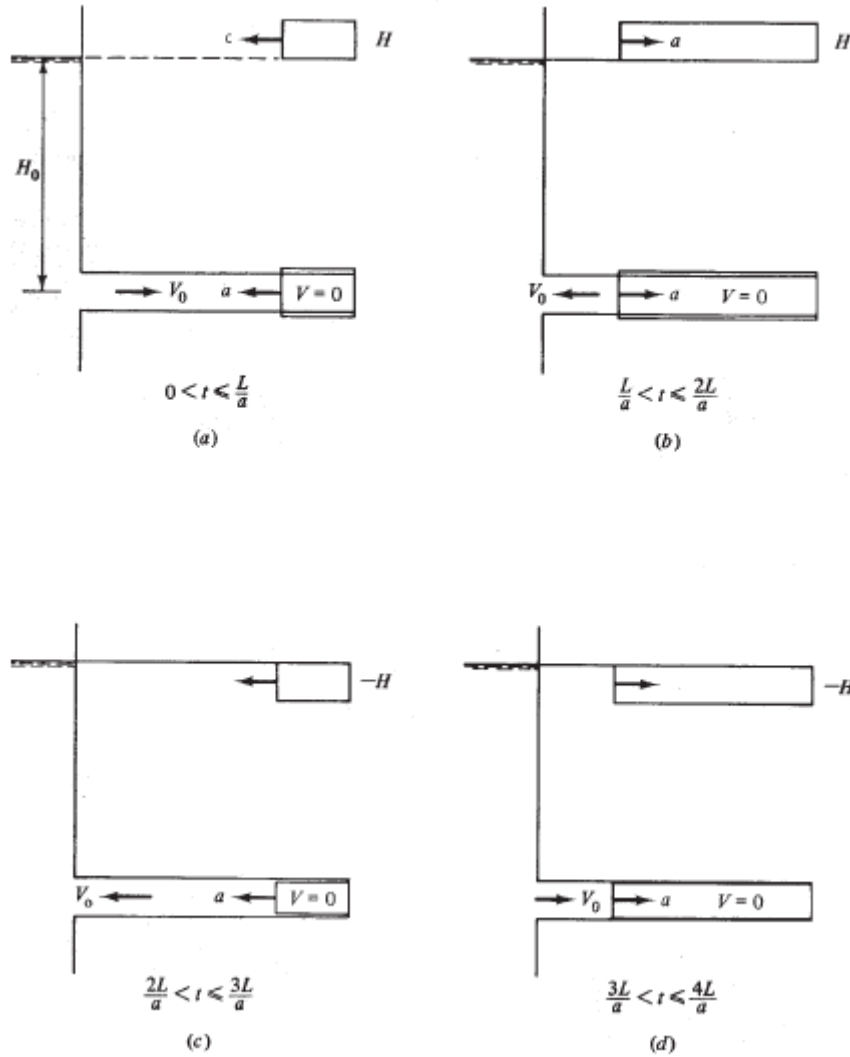


Figura 3.- Ondas de compresión y expansión en el cierre instantáneo de válvulas.

impondrán, para todo t' : en $x' = 0$, $p' = 0$ y en $x' = 1$ $v' = 0$. La onda de compresión inicial se forma en la válvula ($x' = 1$) en el instante $t' = 0$ y viaja por el conducto hacia el depósito, llegando a la base de este en el instante $t' = 1$. Por tanto, un observador que se mueva sobre $dx' = -dt'$ desde un punto B de coordenadas $(x'_B, 0)$ llegara a $(0, x'_B)$, cumpliéndose que $v' - p' = v'_B - p'_B = 1$, por lo que la velocidad en la base del depósito hasta $t' = 1$ es $v' = 1$, como era de esperar. De igual forma, cualquier punto del conducto al que no haya llegado la onda de compresión inicial tiene una velocidad $v' = 1$ y una presión $p' = 0$, como se puede comprobar de las relaciones

$$(c+) : \text{sobre } dx' = dt' \quad v' + p' = v'_A + p'_A,$$

$$(c-) : \text{sobre } dx' = -dt' \quad v' - p' = v'_B - p'_B, \quad (4.40)$$

escogiendo puntos B sobre el eje x' y puntos A sobre el eje x' o sobre el eje t' en el intervalo $0 < t' < 1$. Por otra parte, partiendo de uno de los puntos A y moviéndose sobre $dx' = dt'$ hasta la válvula ($x' = 1$), se cumple que $v' + p' = v'_A + p'_A = 1$, de lo que se deduce que la presión en la válvula en el intervalo $0 < t' < 2$ es $p' = 1$.

Igualmente se puede comprobar que en los puntos del interior del conducto por los que ha pasado la onda de compresión pero

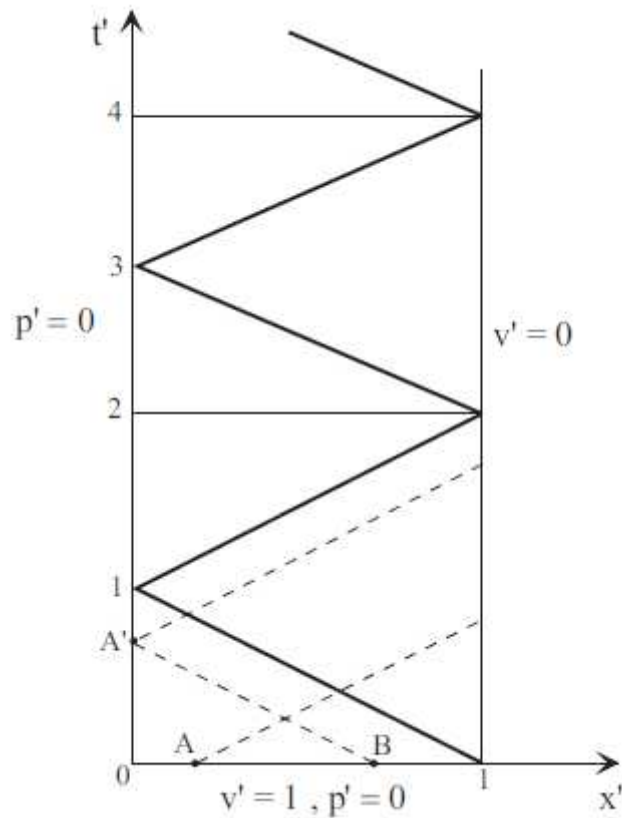


Figura 4.- Diagrama $x'-t'$ de la evolución de la velocidad y la presión a partir del cierre instantáneo de la válvula reguladora.

todavía no ha llegado la de expansión $v' = 0$ y $p' = 1$. Del mismo modo puede razonarse hasta completar el resto de la figura 4.7. En la figura 4.8 se representa la evolución de la presión adimensional en la válvula en función del tiempo.

Si el cierre de la válvula se produce en un tiempo finito $t_c \sim t_{iv}$ la presión en la válvula aumenta progresivamente antes del cierre. Si el exponente n de la ley de cierre es pequeño esta presión alcanza el máximo justamente en instante del cierre y para valores de n grandes el máximo se produce antes del cierre, ya que en estos casos el área disminuye muy lentamente a partir de alcanzarse ese valor (ver figura 4.5). En la figura 4.9 se representa el valor máximo alcanzado en un cierre rápido sin fricción como función del tiempo de cierre para $n = 1$ y $n = 2$.

A partir del instante de cierre la presión oscila con un periodo que es de nuevo $4t_{iv}$, como se muestra en la figura 4.10. En este caso se ha tenido en cuenta además el efecto de la fricción, que produce la amortiguación de las oscilaciones de presión en un tiempo $t \sim t_r/(\lambda L/D) \sim D/(\lambda v_0)$ [ver (4.12)]. Hay que tener en cuenta que cuando en algún punto del conducto la presión alcanza la presión de vapor del líquido hay que replantear el problema debido a la aparición de cavitación.

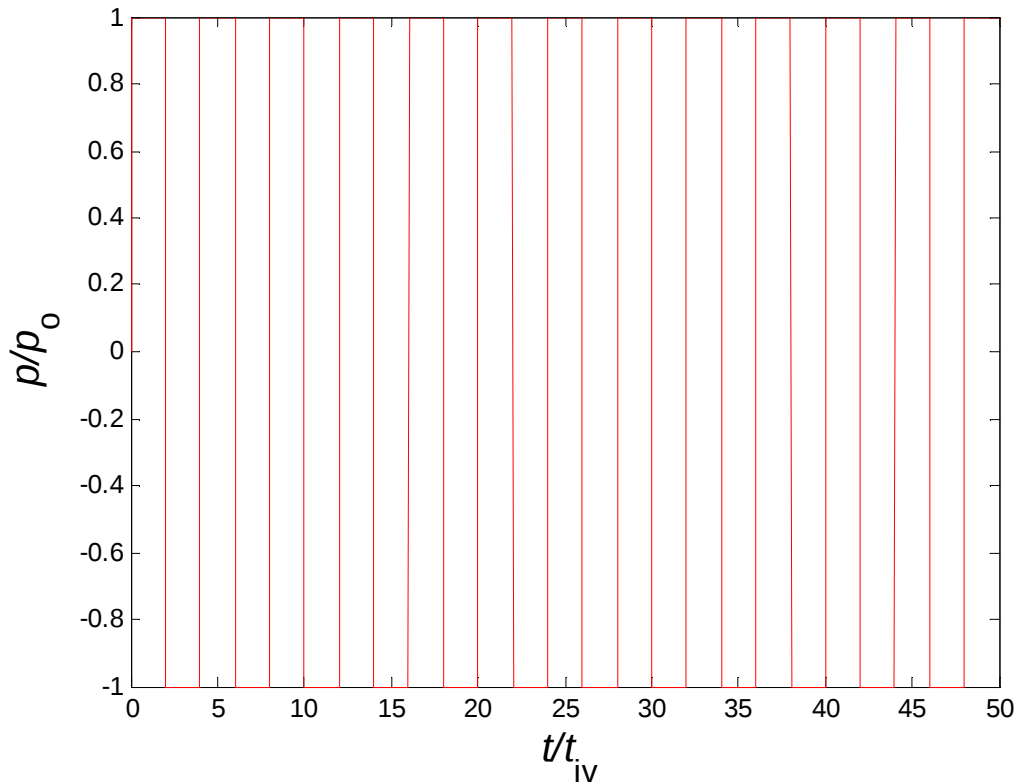


Figura 5.- Evolución de la presión en la válvula en un cierre instantáneo.

4.1.2 Apertura de válvula desde $a = 0$.

La diferencia esencial de tratamiento estriba en que cuando $a(0) \neq 0$ se elegía $v_o = v_e$ (velocidad correspondiente al estado estacionario), que en este caso es nula, y por tanto no puede elegirse este valor para adimensionalizar la velocidad. Sin embargo, dado que cuando la válvula está cerrada la distribución de presiones en el conducto viene dada por la hidrostática $p_a + \rho g H_g$, y que en el momento en que se abre la válvula la presión a la salida es p_a , los incrementos de presión son del orden de $\rho g H_g$ y se tomara $p_o = \rho g H_g$ y $v_o = \sqrt{g H_g}$.

Siguiendo un camino análogo al de los anteriores se puede estudiar el proceso de la apertura. Análogamente, el caso singular se presenta cuando el tiempo de residencia $L / \sqrt{g H_g} \gg t_{ai}$; se tiene entonces que los fenómenos de compresibilidad cuentan en los primeros instantes de la apertura de la válvula y el estudio es análogo al realizado en el apartado en los casos anteriores.

4.2 Tratamiento numérico de la compresibilidad.

En esta sección se hará uso del carácter hiperbólico de las ecuaciones que describen el movimiento no estacionario de líquidos teniendo en cuenta los efectos de compresibilidad. Como se vio anteriormente, los términos convectivos eran despreciables tanto en la aproximación incompresible como en la compresible, por lo que si, como en la mayoría de los casos de interés $v_o/c_o \ll 1$ y $g H_g/c_o^2 \ll 1$, las ecuaciones del movimiento son las (4.10), o utilizando el método de las

características las (4.15), que proporcionan una forma muy apropiada para discretizarlas en diferencias finitas. Considérese, por ejemplo, un tubo recto de sección y rugosidad constante dividido en N elementos iguales de longitud $\Delta x'$. Suponiendo conocidos los valores v'_A, p'_A, v'_B y p'_B de la velocidad y la presión en los puntos $A = (x' - \Delta x', t')$ y $B = (x' + \Delta x', t')$ y se desea calcular la velocidad y la presión en un punto $P = (x', t' + \Delta t')$ (ver figura 4.11), un esquema explícito de primer orden en diferencias hacia delante (forward differences) es el siguiente:

$$\begin{aligned} (c+) : v'_P + p'_P - (v'_A + p'_A) + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_0}{c_0} v'_A |v'_A| \Delta t' &= 0 \\ (c-) : v'_P - p'_P - (v'_B - p'_B) + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_0}{c_0} v'_B |v'_B| \Delta t' &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

y un esquema implícito de segundo orden en diferencias centradas podría ser

$$\begin{aligned} (c+) : v'_P + p'_P - (v'_A + p'_A) + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_0}{c_0} \frac{v'_P |v'_P| + v'_A |v'_A|}{2} \Delta t' &= 0 \\ (c-) : v'_P - p'_P - (v'_B - p'_B) + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_0}{c_0} \frac{v'_P |v'_P| + v'_B |v'_B|}{2} \Delta t' &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

El esquema explícito de primer orden presenta la ventaja de que el sistema de ecuaciones algebraicas (4.41) es lineal y de muy fácil solución. Sin embargo, como veremos al final de esta sección, los esquemas explícitos (y este en particular) suelen presentar un tipo de inestabilidad numérica que limita el paso de integración temporal. Por otra parte, en los esquemas implícitos, aunque el sistema (4.42) es no lineal, el paso de avance temporal $\Delta t'$ tan solo está limitado por el error de truncamiento, que en el caso del esquema de integración

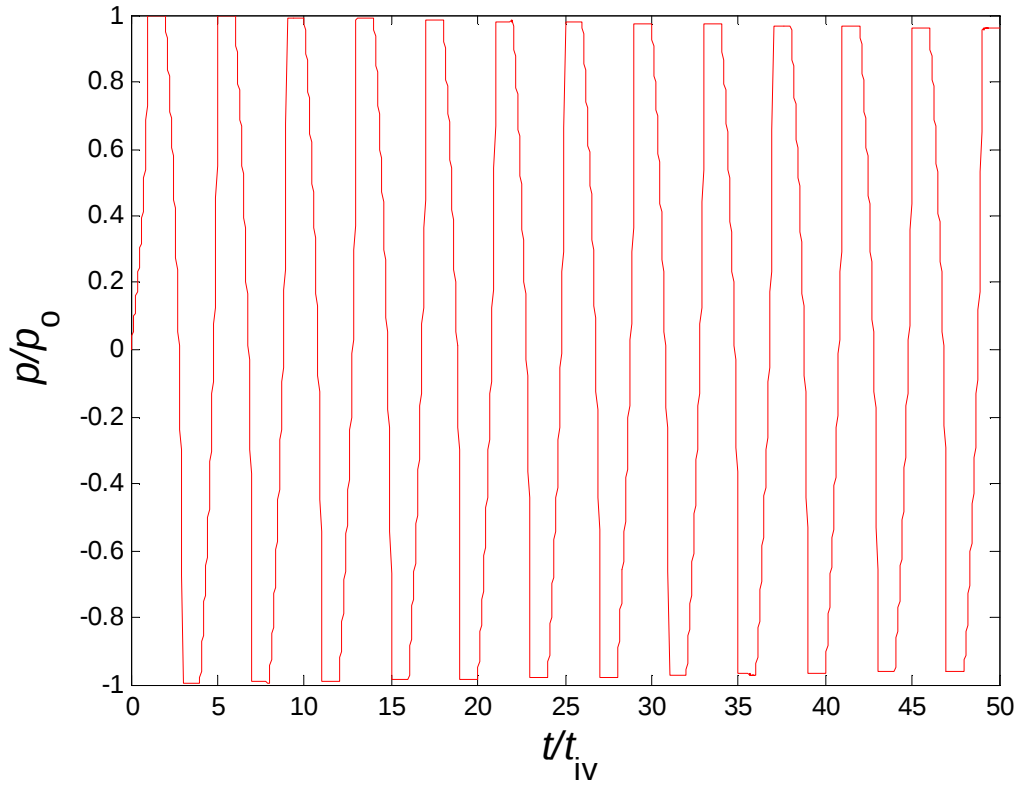


Figura 6.- Evolución de la presión en la válvula en un cierre rápido con fricción, obtenida mediante integración numérica de las ecuaciones (4.36) con las condiciones iniciales (4.32) y de contorno (4.33).

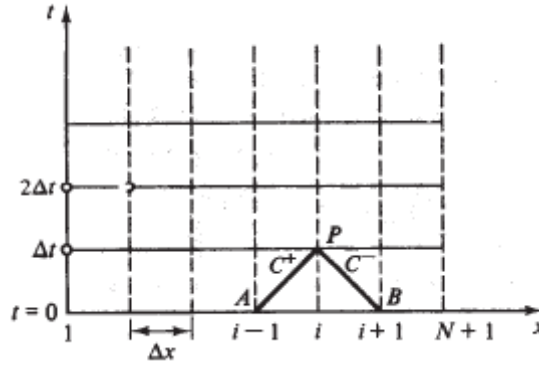


Figura 7.- Ejemplo de mallado de un esquema de diferencias finitas.

(4.42) es de orden $(\Delta t')^2$. La elección del tipo de esquema depende fundamentalmente de la importancia de los efectos de fricción, caracterizados por el parámetro $(\lambda L/D)(v_o/c_o)$, siendo recomendable utilizar un esquema implícito cuando este parámetro sea grande.

Para arrancar la integración temporal habría que imponer unas condiciones iniciales. Para el caso de la descarga de un depósito, de (4.34) se llega a

$$p'(x', 0) = -\frac{1}{2} \frac{v_o}{c_o} \left(1 + \frac{\lambda L}{D} x' \right), \quad v'(x', 0) = 1 \quad (4.43)$$

Es evidente que los sistemas de ecuaciones del tipo de (4.41) o (4.42) no son validos para determinar los valores de la velocidad y presión de un punto P de los

extremos del conducto, ya que o el punto A o el B quedaría fuera del mismo. Para conseguir el cierre del problema hay que imponer la condición de contorno en el punto P en cuestión. A continuación se presentan algunos casos típicos.

4.2.1 Condiciones de contorno de un esquema numérico.

- Depósito de nivel constante aguas arriba.

En este caso las magnitudes fluidas en el punto P se calculan aplicando la ecuación de la característica (c -) que junto con la condición de contorno

$$\begin{aligned} p'_p &= -\frac{v_o}{2c_o} v_p'^2 & \text{si} & \quad v'_p > 0 \\ p'_p &= 0 & \text{si} & \quad v'_p < 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

proporcionan dos ecuaciones algebraicas para calcular p'_p y v'_p .

- Pérdidas de carga localizadas.

En este caso se desglosa el punto P de la unión de los conductos en dos puntos P_i y P_{i+1} , pertenecientes respectivamente a los tramos de conducto de la red i y $i + 1$. Las ecuaciones de balance de masa y cantidad de movimiento a través del punto considerado proporcionan

$$v'_{p_i} = v'_{p_{i+1}} \frac{A_{i+1}}{A_i} \quad (4.45)$$

$$p'_{p_i} + \frac{v_o}{2c_o} v_{p_i}'^2 = p'_{p_{i+1}} + (1 + k) \frac{v_o}{2c_o} v_{p_{i+1}}'^2 \quad (4.46)$$

donde

$$\begin{aligned} k &= k_{i,i+1} & \text{si} & \quad v'_{p_i} > 0 \\ k &= -k_{i+1,i} & \text{si} & \quad v'_{p_i} < 0 \end{aligned}$$

donde A_{i+1}/A_i es la relación de áreas del conducto $i + 1$ respecto del i . Estas ecuaciones unidas a la ecuación característica ($c+$) aplicada al punto P_i y a la ecuación ($c-$) aplicada al punto P_{i+1} da lugar a un sistema de cuatro ecuaciones que determinan v'_{p_i} , $v'_{p_{i+1}}$, p'_{p_i} y $p'_{p_{i+1}}$. Este caso engloba al anterior así como a la pérdida de carga producida por válvulas (que puede variar con el tiempo) o en descargas a la atmosfera o a depósitos. En el caso de una ramificación se actuaría de la misma forma.

- Salto a través de turbomáquinas.

La condición de contorno en este caso viene dada por la ecuación que representa la curva característica altura-caudal, que puede ser ajustada por regresión (por ejemplo polinómica) para tener una relación del tipo

$$p'_{p_{i+1}} - p'_{p_i} = f(v'_{p_i}) \quad (4.47)$$

que combinada con la ecuación de conservación de la masa (4.45), la ecuación característica ($c+$) aplicada al punto P_i y a la ecuación ($c-$) aplicada al punto P_{i+1} permite conocer p'_{p_i} , $p'_{p_{i+1}}$, v'_{p_i} y $v'_{p_{i+1}}$. Si se desea analizar situaciones en las que la velocidad angular de la maquina, ω , varíe con el tiempo, como sucede en

arranques o paradas, a estas ecuaciones habría que añadirles la del momento angular aplicado en el eje

$$I \frac{d\omega}{dt} = C_{motor}(\omega) - C_{fluido}(\omega, v'_{pi}) - C_{p.mec.}(\omega) \quad (4.48)$$

donde I es el momento de inercia del conjunto eje-rotor-rodete, C_{motor} es el par aplicado por el motor de la bomba (por el alternador en el caso de turbinas), C_{fluido} es el par absorbido por el fluido y $C_{p.mec.}$ es el par de frenado producido por las pérdidas mecánicas. De esta forma, además de obtener las magnitudes fluidas en P_i y P_{i+1} se obtendría la velocidad angular en cada instante de tiempo.

4.3 Aplicación a la central Tajo de la Encantada

En este apartado se pasa a describir el proceso seguido hasta conseguir modelar los fenómenos de compresibilidad que se producen al realizar un cierre rápido en la central.

Para llegar a este punto se han seguido una serie de pasos en los que se parte de un modelo simplificado de la planta consistente en un embalse y un conducto con una válvula situada en su extremo donde se produce un cierre instantáneo. A continuación se incluye la ley de cierre de la válvula de manera que sea posible modelar el modo en que se produce el cierre. El siguiente paso es modelar las condiciones de contorno de la turbina. En la última fase del proyecto se incluye en la simulación la chimenea de equilibrio finalizando así una reproducción de toda la instalación.

4.3.1 Cierre instantáneo con fricción

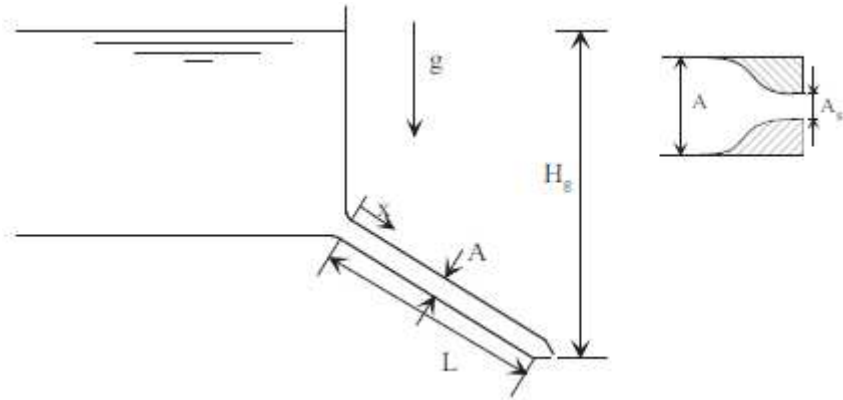


Figura 8.- Esquema de la instalación simplificada.

Para modelar el cierre instantáneo de la instalación simplificada, es decir embalse superior y túnel, se empleará el método de las características. Para ello se definen las condiciones iniciales y de contorno de presión y temperatura como se definieron en apartados anteriores, es decir las condiciones iniciales:

$$v'(x', 0) = 1 \text{ y } p'(x', 0) = 0 \quad (4.49)$$

y de contorno:

$$p'(0, t') = 0 \text{ y } v'(1, t') = 0 \quad (4.50)$$

Para considerar el efecto de la fricción, como hemos visto antes, se implementará en la programación las siguientes ecuaciones características:

$$\begin{aligned} (c+) : v'_P + p'_P - (v'_A + p'_A) + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_0}{c_0} v'_A |v'_A| \Delta t' &= 0 \\ (c-) : v'_P - p'_P - (v'_B - p'_B) + \frac{\lambda L}{2D} \frac{v_0}{c_0} v'_B |v'_B| \Delta t' &= 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Tras escribir el código completo, es posible ejecutar una pequeña animación en que se aprecian como las ondas de velocidad v' (rojo) y de presión p' (azul) se desplazan por el conducto de longitud adimensionalizada x' .

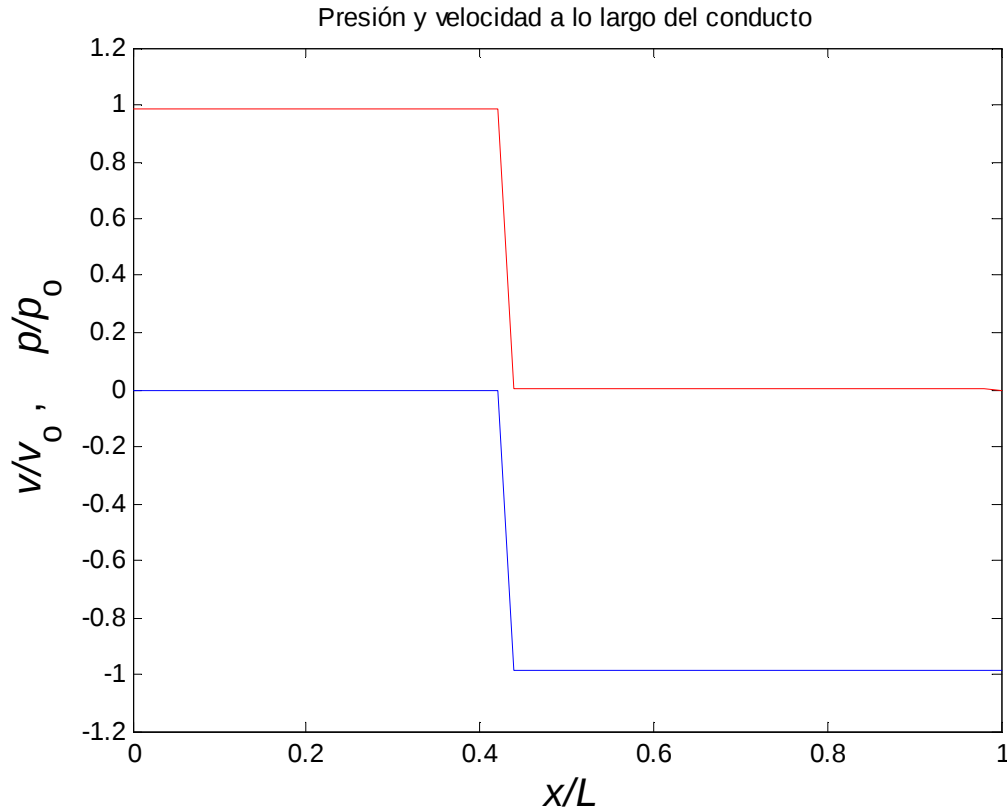


Figura 9.- Captura de pantalla de la simulación en un cierto instante.

Es posible apreciar como el efecto de la fricción, efectivamente, contribuye a amortiguar el sistema disminuyendo los valores máximos de v' y p' , es decir, 1.

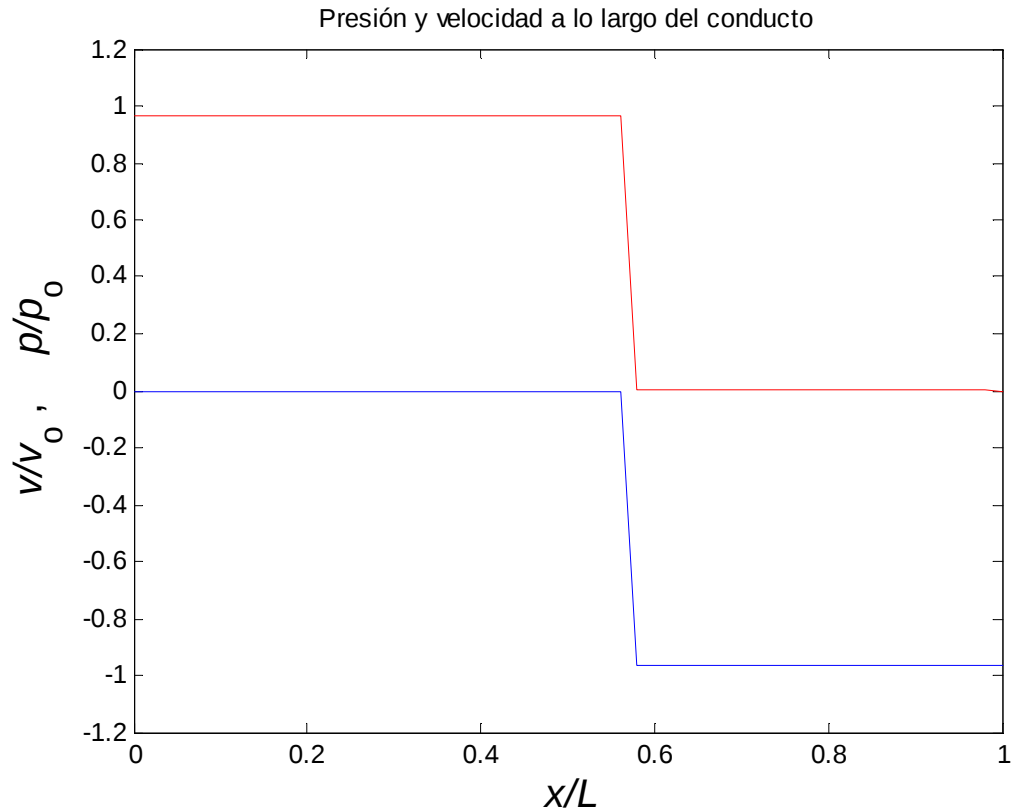
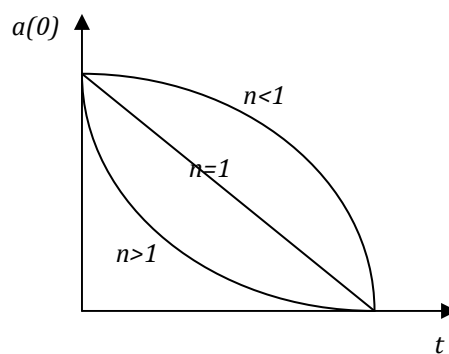


Figura 10.- Captura de pantalla de la animación en un cierto instante posterior al anterior.

4.3.2 Cierre no instantáneo con fricción

El siguiente paso en el desarrollo del modelo completo de la instalación es incluir la ley de cierre

$$a(t') = a(0)(a + t')^n, \quad 0 \leq t' \leq 1, \quad (4.25)$$



y modificar las condiciones iniciales y de contorno

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH_g}{[A/A_s(0)]^2 + \lambda L/D}} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
 p'(0, t') &= 0 \\
 p'(1, t') &= -\frac{v_0}{2c_0} \frac{v'^2(1, t')}{a^2} - \frac{gH_g}{v_0 c_0'} \quad \text{si } t' < t_c/t_{iv} \\
 v'(1, t') &= 0, \quad \text{si } t' \leq t_c/t_{iv} \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

de manera que podamos simular el cierre rápido de la instalación simplificada de manera que cambiando el valor del parámetro n , obtengamos:

Para $n=1$:

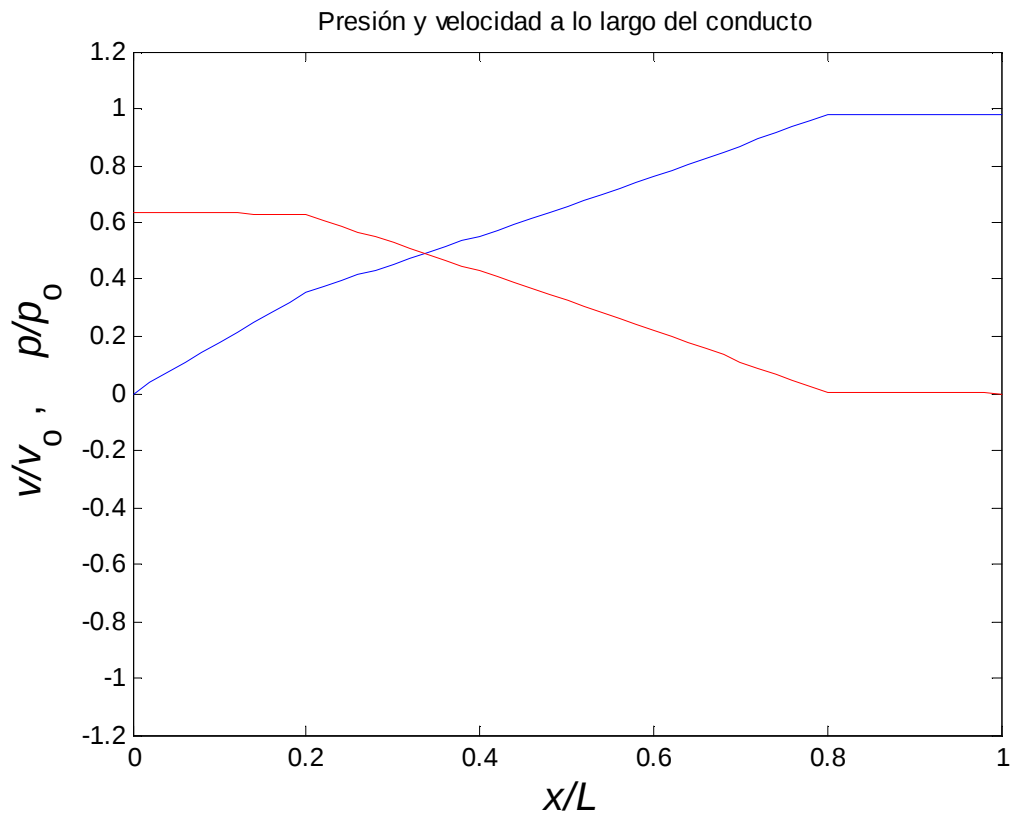


Figura 11.- Cierre lineal

Para $n=0,5$:

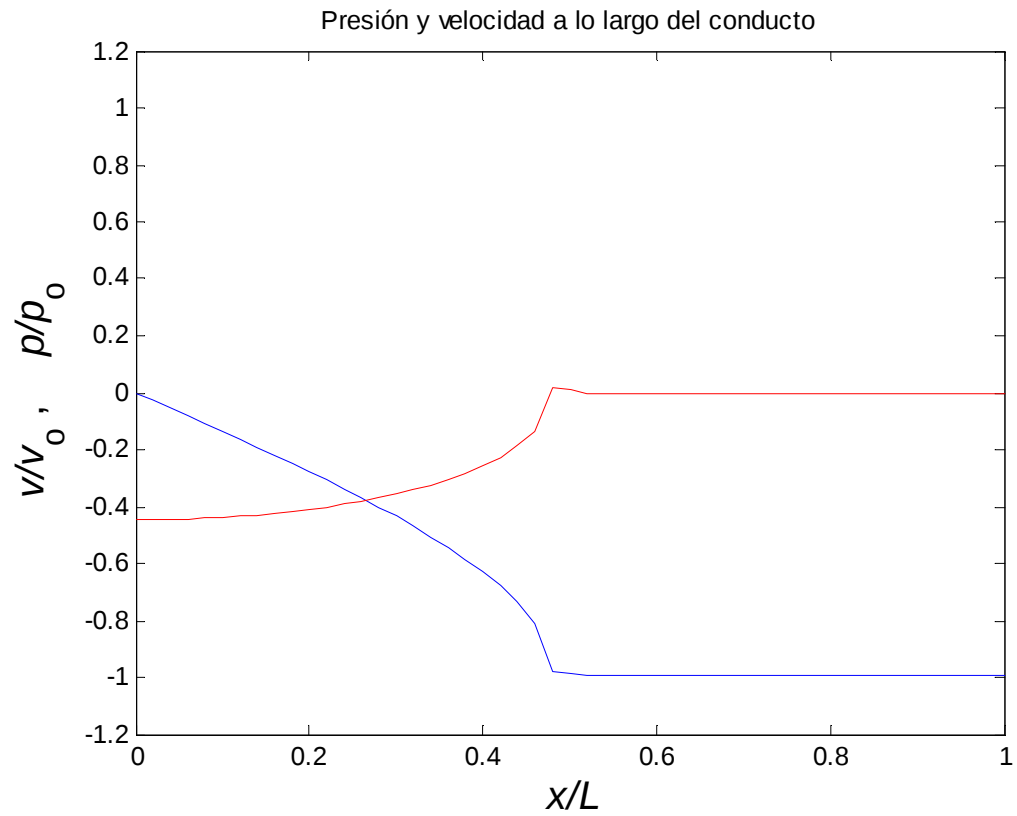


Figura 12.- Cierre muy rápido.

Para $n=2$:

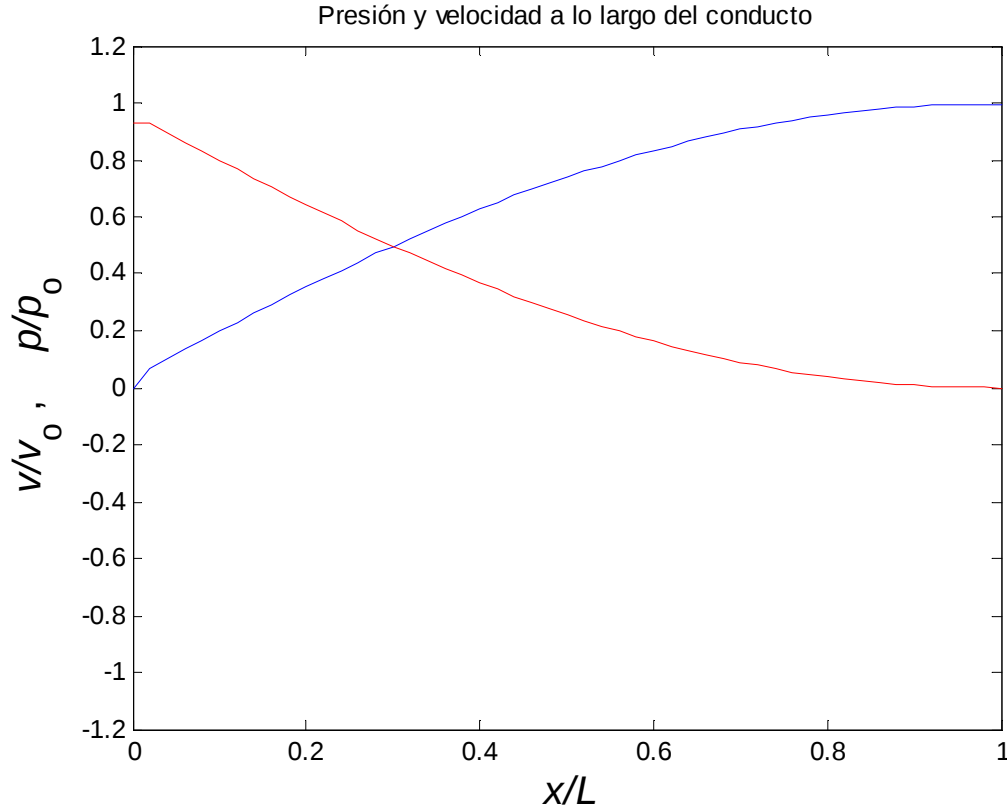


Figura 13.- Cierre lento.

4.3.3 Cierre rápido con la turbina sin chimenea de equilibrio

En este punto se incluyen las ecuaciones que modelan el comportamiento de la turbina de manera en el punto $x'=l$, se modifican las condiciones de contorno anteriores. Básicamente, se trata de despejar el valor de la p_E de las siguientes ecuaciones y adimensionalizarla.

$$H_T = H_{ET} - H_{ST} \quad (4.52)$$

$$H_S = k \frac{v_S^2}{2g} + \xi_{tdif} \quad (4.53)$$

$$v_S = \frac{Q}{A_S} \quad (4.54)$$

$$H_E = \frac{p_E - p_a}{\rho g} + \frac{v_S^2}{2g} + z_E \quad (4.55)$$

Además, habrá que redefinir v_0 a partir de la ecuación:

$$H(0) = H(L) + \xi(v_0) \quad (4.56)$$

donde

$$H(L) = H_E; H_E = H_S + H_T; H_E = C_{tdif} A^2 v_0^2 + B_0 + B_1 A v_0 + B_2 A^2 v_0^2 \quad (4.57)$$

$$\xi(v_0) = (C_{1ch} + C_{chT}) A^2 v_0^2 \quad (4.58)$$

$$H(0) = H_g \quad (4.59)$$

entonces

$$(B2 + C_{tdif} + C_{1ch} + C_{chT})A^2v_0^2 + B1Av_0 + B0 - \rho_0gH_g = 0 \quad (4.60)$$

es decir, resolveremos la ecuación de 2º grado:

$$c_a v_0^2 + c_b v_0 + c_c = 0 \quad (4.61)$$

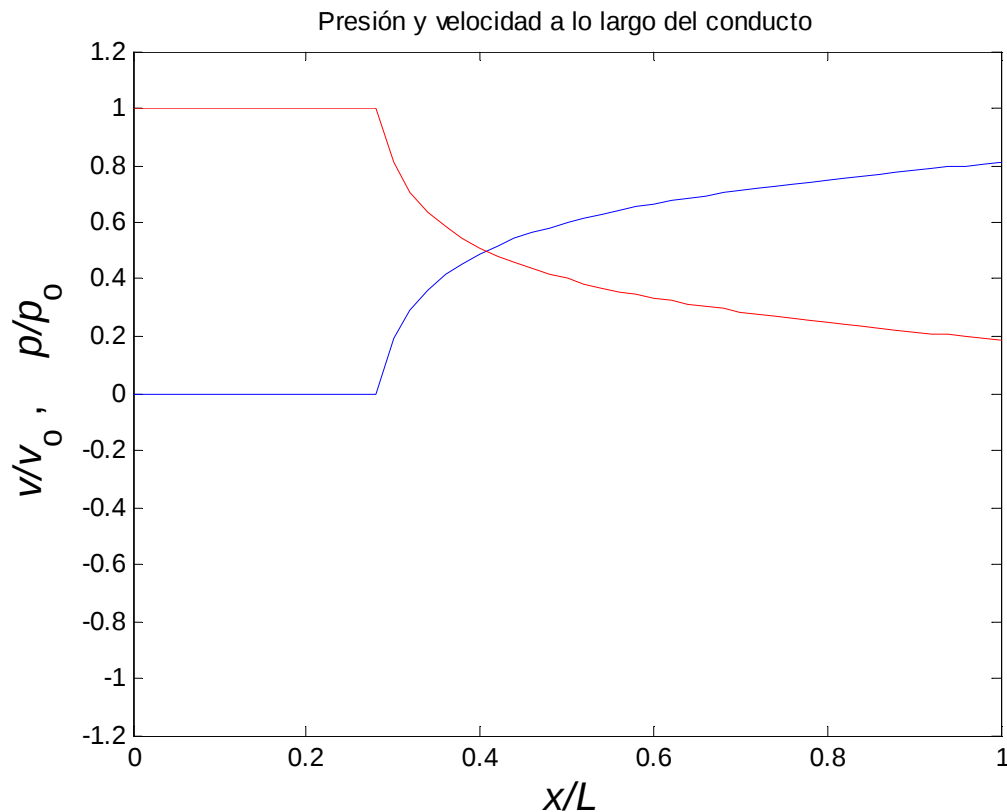


Figura 14.-Representación gráfica de v' y p' en cierre con turbina.

4.3.4 Cierre rápido de la instalación completa.

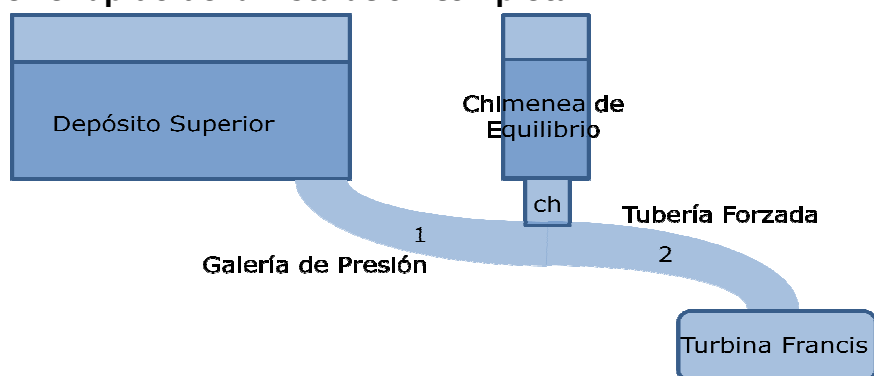


Figura 15.-Esquema simplificado de la instalación.

En este apartado se va a simular la instalación completa incluyendo la chimenea de equilibrio. Para ello, en lugar de emplear las ecuaciones de las

características en un solo conducto como hasta ahora, la instalación se dividirá en tres partes. Para cada una de ellas se definen unas condiciones iniciales y de contorno y se relacionan entre sí, además de por las ecuaciones características, a través de la ecuación de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento. Aunque para ello haya que descomponer en su x e y .

$$Q_{gp} = -Q_{ch} + Q_{tf} \quad (4.62)$$

Es decir

$$Q_1 = -Q_{ch} + Q_2 \quad (4.63)$$

Además

$$-\vec{v}_1 Q_1 + \vec{v}_2 Q_2 - \vec{v}_{ch} Q_{ch} = -p_1 \vec{n}_1 A_1 - p_2 \vec{n}_2 A_2 - p_{ch} \vec{n}_{ch} A_{ch} \quad (4.64)$$

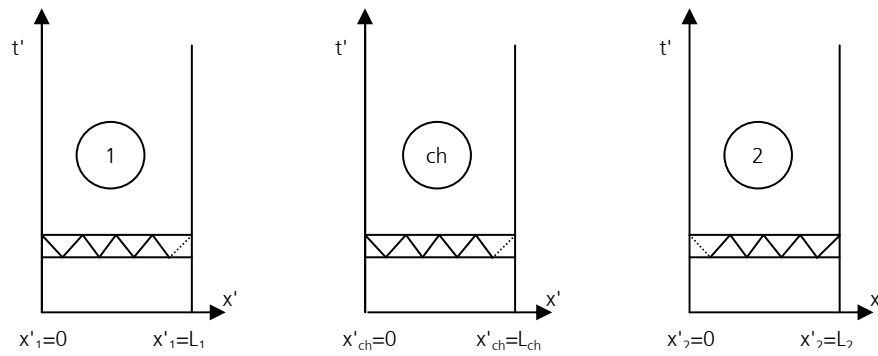


Figura 16.- Representación gráfica del método de las características en cada uno de los conductos de los que se compone la instalación.

Conclusiones

Se ha demostrado la importancia de centrales hidráulicas de bombeo dentro de la estructura energética a nivel mundial. Su versatilidad, su eficiencia y su rentabilidad económica son algunas de las cualidades que sitúan esta tecnología como una de las más atractivas para generadores y operadores de la red. En este proyecto se han querido reflejar algunas de sus características operativas, tanto en modo de funcionamiento en régimen de bombeo como de turbinación.

Existen situaciones en las que los efectos de compresibilidad en el movimiento de líquidos en conductos son importantes. Tal es el caso del denominado golpe de ariete que se genera, por ejemplo, cuando se produce el cierre (o apertura) de una válvula reguladora de caudal en un tiempo suficientemente corto. Como es sabido, las sobrepresiones generadas en estos casos pueden ser lo suficientemente grandes para que los efectos de compresibilidad del líquido y los efectos elásticos de las paredes de la tubería intervengan en el proceso.



Figura 17.- Imagen de la tubería forzada de una central hidráulica reventada por el golpe de ariete.

Para controlar estos transitorios se diseñan dispositivos capaces de aumentar el tiempo característico de variación de las presiones en el interior de los conductos. Para ello se instalan normalmente tres tipos de dispositivos: reguladores de presión, calderines y chimeneas de equilibrio.

En este proyecto se han estudiado las oscilaciones que sufre el sistema cuando se somete a determinadas maniobras de operación propias de este tipo de centrales y se ha desarrollado una aplicación del método de las características a través de la cual es posible observar cómo varían las ondas de presión y velocidad a lo largo de la instalación.

Bibliografía

- Andritz
(grz.g.andritz.com/c/com2011/00/01/68/16886/1/1/0/1000680823/hy-hn20-es.pdf)
- Aplicaciones de la energía eólica. Diciembre 2003. Ignacio Cruz
(http://www.reoltec.net/varios/Asambleas/IV/05a_REOLTEC-APLICACIONES_DE_LA_ENERGIA_EOLICA.pdf)
- Beacon Power (<http://www.beaconpower.com/products/presentations-reports.asp>)
- Centrales Hidroeléctricas, Rafael Alejo García-Mauricio
(thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0226-01/capitulo3.html)
- DSD-NOELL (www.dsd-noell.com/es/noticias-de-actualidad/vista-detallada/?tx_ttnews%5Btt_news%5D=69&cHash=d1d99d5de4af834a916324de7f9e275b)
- Eagle Crest energy Company (http://files.eesi.org/divine_040611.pdf)
- Ecoult (<http://www.ecoult.com/applications/renewables/>)
- Electricity Energy Storage Technology Options, A White Paper Primer on Applications, Costs, and Benefits Electric Power research Institute
(<http://my.epri.com/portal/server.pt?>)
- Francisco José Lara Rosales, 1986. Análisis de fenómenos transitorios en instalaciones hidráulicas. Aplicación a la central hidroeléctrica "Tajo de la Encantada"
- Hitachi (http://www.hitachi.com/rev/1998/revoct98/r4_108.pdf)
- Hydropower (www.hydropower.org/psd/articles/introduction.html)
- Javier Dávila Martín, 2005. Instalaciones Hidráulicas
- Ludington Pumped Storage Plant
(www.consumersenergy.com/uploadedFiles/CEWEB/SHARED/LudingtonPumpedStorage.pdf)
- NGK
(<http://www.ngk.co.jp/english/products/power/nas/installation/index.html>)
- Pentadyne (Volantes de inercia) (<http://www.power-thru.com/>)
- Premium Power
(<http://www.premiumpower.com/product/transflow2000.php>)
- RedFlow (<http://www.redflow.com/>)
- Reflexiones para una política energética Consideraciones desde la perspectiva de la seguridad del suministro. 7 de julio de 2010. Alberto Carbajo Josa ([http://www.industria.ccoo.es/comunes/recursos/27/529041-Red_Electrica_de_Espana_\(REE\).pdf](http://www.industria.ccoo.es/comunes/recursos/27/529041-Red_Electrica_de_Espana_(REE).pdf))
- Thermal Energy Storage in ThermalBanks
(http://www.icax.co.uk/thermal_energy_storage.html) .
- U.S. Department of Energy. Energy Efficiency & Renewable Energy. Fuel Cell Technology Program. Enero 2011
- UNESA. (<http://www.unesa.es/sector-electrico/funcionamiento-de-las-centrales-electricas>)
- VRB Prudent Energy (<http://www.pdenenergy.com/>)
- Xtreme Power (<http://www.xtremepower.com/projects/wind.php#kaheawa-1>)