I) ANEXO I. Cálculo de propiedades para la definición del comportamiento de los materiales.

Las propiedades dadas en [38] que describen el comportamiento de las sustancias elegidas para su uso en el montaje propuesto son las siguientes:

$K(Pa)$ → Coeficiente de Bulk (compresibilidad).

$E(Pa)$ → Módulo de Young.

$a_L(K^{-1})$ → Coeficiente de expansión térmica lineal.

Como se observa, no se tratan las propiedades necesarias para definir el comportamiento del material por medio de la ecuación de coeficientes constantes. Para hallar la relación de las anteriores con las dadas en el documento [38] es necesario seguir los siguientes pasos.

La definición del coeficiente de Bulk es la siguiente:

$$K = -V\frac{\partial P}{\partial V} \rightarrow \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{V}{K} \ (AI.1)$$

Para una masa determinada de una sustancia que se considera pura el volumen sólo dependerá para de la temperatura y presión a que se encuentre dicha. O lo que es lo mismo:

La segunda proposición inicial de la termodinámica macroscópica establece que las ecuaciones de estado, una variable intensiva para una sustancia pura es dependiente de otras dos variables intensivas de la misma. Así pues se puede expresar el volumen molar de la siguiente forma:

$$V_m = f(T,p) \ (AI.2)$$

Con:

$V_m \left(\frac{m^3}{mol}\right)$ →Volumen molar.

n →Número de moles.

Por lo que:

$$dV_m = \left(\frac{\partial V_m(T,P)}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial V_m(T,P)}{\partial P}\right)_T \ (AI.3)$$

$$\frac{dV_m(T,P)}{V_m(T,P)} = \frac{1}{V_m(T,P)}\left(\frac{\partial V_m(T,P)}{\partial T}\right)_P dT + \frac{1}{V_m(T,P)}\left(\frac{\partial V_m(T,P)}{\partial P}\right)_T dP = \alpha * dT - k_T dT$$

$$(AI.4)$$

La definición del coeficiente del coeficiente de compresibilidad isotérmica.

$$k_T = \frac{-1}{V_m(T,P)}\left(\frac{\partial V_m(T,P)}{\partial P}\right)_T \quad (AI.5)$$

Multiplicando y dividiendo por el número de moles (n)

$$k_T = \frac{-1}{V_m(T,p) * n}\left(\frac{\partial V_m(T,p) * n}{\partial P}\right)_T = \frac{-1}{V(T,p)}\left(\frac{\partial V(T,p)}{\partial p}\right)_T \quad (AI.6)$$

Sustituyendo de la ecuación A1.1

$$k_T = -\frac{1}{V(T,p)}\left(-\frac{V(T,p)}{K}\right) = K^{-1} \; (AI.7)$$

Según [38] para materiales cristalinos se puede aproximar el coeficiente de Bulk como el módulo de Young, por lo que se tendría:

$$\boldsymbol{E \approx K \rightarrow k_T \approx E^{-1}} (AI.8)$$

En cuanto al coeficiente de dilatación cúbica se define como:

$$\alpha_V = \frac{1}{V_m(T,p)}\left(\frac{\partial V_m(T,P)}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V(T,p)}\left(\frac{\partial V(T,p)}{\partial T}\right)_p \quad (AI.9)$$

Sin embargo los datos proporcionados se encuentran el coeficiente de dilatación lineal, que se define como:

$$\alpha_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p \quad (AI.10)\;; siendo\ L\ la\ longitud\ (m)$$

Se define un volumen inicial ficticio del material a estudiar de forma cúbica de volumen V cuyas aristas miden una longitud L. Al aparecer el efecto de la variación deferencial de la temperatura a presión constante, se produce la dilatación en cada una de las tres direcciones aumentando un diferencial de las mismas (dL) el volumen final en este proceso el volumen final se podrá definir como el volumen inicial más una variación diferencial del mismo (V+dV).

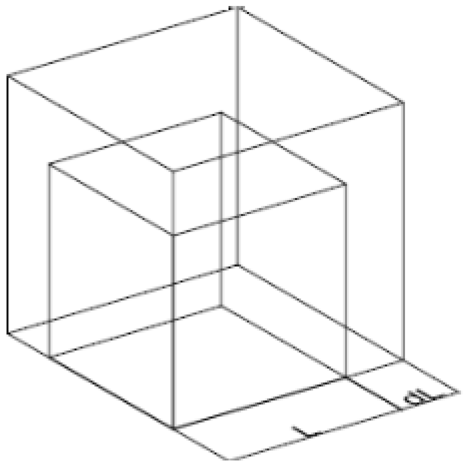

Figura 92: Volumen ficticio del material a estudiar.

El volumen final se puede definir de dos formas:

$$V_{FINAL} = V + (dV)_p = \left(L + (dL)_p\right)^3 = L^3 + 3L^2(dL)_p + 3(dL)_p^2 L + (dL)^3{}_p (AI.11)$$

Como

$$V = L^3\ (AI.12)$$

Si se divide ambos miembros de la ecuación AI.10 por el mismo valor

$$1 + \left(\frac{dV}{V}\right)_p = \frac{L^3 + 3L^2(dL)_P + +3(dL)_p^2 L + (dL)_p^3}{L^3} = 1 + 3\left(\frac{dL}{L}\right)_p + 3\left(\frac{dL}{L}\right)_p^2 + \left(\frac{dL}{L}\right)_p^3;$$

Se desprecian los elementos diferenciales de orden mayor a la unidad:

$$1 + \left(\frac{dV}{V}\right)_p = 1 + 3\left(\frac{dL}{L}\right)_p \rightarrow \left(\frac{dV}{V}\right)_p = 3\left(\frac{dL}{L}\right)_p\ (AI.13)$$

Los incrementos diferenciales tanto de volumen como de longitud se pueden definir usando los coeficientes anteriormente definidos

$$\left(\frac{dV}{V}\right)_p = \alpha_V * dT\ (AI.14); \quad \left(\frac{dL}{L}\right)_p = a_L * dT\ (AI.14)$$

Quedando finalmente una relación entre ambos:

$$\boldsymbol{\alpha_V = 3a_L}\ (AI.16)$$

Las relaciones entre los coeficientes proporcionados y los necesarios en la ecuación de estado son mostradas por las ecuaciones AI.8 y AI.16

$$\boldsymbol{k_T \approx E^{-1};\ \alpha_V = 3a_L}$$