Capítulo 2

Ecuaciones de Onda en Problemas Escalares, Elásticos y Poroelásticos. Formulación Mediante el MEC

2.1.Introducción

En la primera parte de este capítulo se presentan los aspectos relacionados con la formulación de los diferentes medios que forman parte de los modelos acoplados que se pretenden resolver, dedicándose la segunda parte a plantear la solución de estos modelos de forma numérica mediante el Método de los Elementos de Contorno, analizando las dificultades que la aplicación del método comporta. Se comienza en el apartado 2.2 exponiendo las ecuaciones de gobierno en dinámica que rigen el comportamiento de medios elásticos, escalares y poroelásticos. Se presentan únicamente las ecuaciones fundamentales omitiéndose el desarrollo necesario para su obtención que puede consultarse fácilmente en numerosos libros de texto. En el punto 2.3 se describen los mecanismos de propagación de ondas armónicas en cada uno en los medios anteriores, viendo las diferencias y similitudes existentes entre los distintos tipos de medios. En el apartado 2.4 se aborda la formulación integral y la solución fundamental de los diferentes medios involucrados. La formulación integral, que necesita para su aplicación de la solución fundamental, consiste en una serie de ecuaciones que relacionan las variables fundamentales en puntos del dominio Ω con los valores que adoptan éstas y sus derivadas en puntos del contorno Γ . Al final de este punto se estudia lo que ocurre con la formulación integral cuando se pretende que sólo intervengan variables en el contorno. En el siguiente apartado se expone una estrategia para resolver numéricamente las ecuaciones ya planteadas mediante el Método de los Elementos de Contorno (MEC) y los problemas numéricos que su aplicación en nuestro modelo implica. Finalmente en 2.6 se discute como se imponen las condiciones de contorno en las interfases del modelo acoplado.

2.2.Ecuaciones de gobierno en elastodinámica, problemas escalares y poroelasticidad armónica

2.2.1. Ecuaciones básicas en elastodinámica armónica

Las ecuaciones de equilibrio interno, las ecuaciones de compatibilidad y la ley de comportamiento constituyen las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento dinámico de sólidos elásticos, teniendo en cuenta, como es obvio, la dependencia espacial y temporal de las variables involucradas. A diferencia del caso estático las ecuaciones de equilibrio incorporan las fuerzas de inercia y el efecto de disipación. Se asumen las hipótesis clásicas para estos medios: homogeneidad, isotropía, comportamiento elástico y linealidad.

Equilibrio interno	$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i$	(2.1)
Ley de comportamiento	$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}$	(2.2)
Compatibilidad	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right)$	(2.3)
Ecuación de gobierno	$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \mathbf{\ddot{u}}$	(2.4)
Ecuación de gobierno en el dominio de la frecuencia	$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla e + \mathbf{X} = -\rho \omega^2 \mathbf{u} (*)$ (*) Se supone un desplazamiento armónico en el tiempo del tipo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t}$. Las variables se entienden dependientes de	(2.5)

Tabla 2.1.	Ecuaciones	básicas	de la	as elastodinámica	lineal.
------------	------------	---------	-------	-------------------	---------

X	Vector de posición	$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	Constante de Lamé
t	Variable tiempo	$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$	Módulo de rigidez transversal
$\sigma_{_{ij}}$	Tensor de tensiones	$e = \varepsilon_{kk}$	Dilatación volumétrica
${\cal E}_{ij}$	Tensor de deformaciones	Ε	Módulo de elasticidad
X_i , X	Vector de fuerzas de volumen	υ	Coeficiente de Poisson
<i>u</i> _i , u	Vector de desplazamiento	ρ	Densidad del material
\ddot{u}_i , ü	Vector de aceleración	i	Unidad imaginaria
ω	Frecuencia angular	$\delta_{_{ij}}$	Función delta de Kronecker

Tabla 2.2. Variables que intervienen en las ecuaciones básicas de las elastodinámica lineal.

2.2.2. Ecuaciones básicas en medios escalares en dinámica

De manera análoga al caso anterior, se resumen en la tabla 2.3 las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del los medios escalares (agua). Esta se considera un fluido compresible de viscosidad despreciable, con comportamiento elástico y lineal que trabaja en un rango de pequeñas perturbaciones. En los modelos presentados los efectos inerciales tienen un peso mucho mayor que los viscosos lo que justifica considerar despreciable la viscosidad del agua. Tampoco se consideran los efectos provocados por las turbulencias.

Equilibrio interno	$-p_{,i} + X'_{i} = \rho \ddot{U}_{i}$	(2.6)
Ley de comportamiento	$-p = K_f \varepsilon$	(2.7)
Ecuación de gobierno	$\nabla^2 p - \nabla \mathbf{X}' = \frac{1}{c^2} \ddot{p}$	(2.8)
Ecuación de gobierno en el dominio de la frecuencia	$\nabla^2 p - \nabla \mathbf{X}' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = 0 (*)$ (*) Se supone una presión armónica en el tiempo del tipo $p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t}$. Las variables se entienden dependientes de la posición y de la frecuencia.	(2.9)

Tabla 2.3. Ecuaciones básicas en medios potenciales en dinámica.

р	Presión en el fluido	$c = \sqrt{\frac{K_f}{\rho}}$	Velocidad de propagación de las ondas longitudinales
$X_{i}^{'}$, $\mathbf{X}^{'}$	Vector de fuerzas de volumen	ω	Frecuencia angular
\ddot{U}_i	Vector de aceleración	ρ	Densidad del fluido
$\varepsilon = \varepsilon_{kk} = U_{i,i}$	Dilatación volumétrica	i	Unidad imaginaria
K_{f}	Módulo de compresibilidad del fluido		

Tabla 2.4. Variables que intervienen en las ecuaciones básicas en medios potenciales en dinámica.

2.2.3. Ecuaciones básicas en poroelastodinámica armónica

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de medios poroelásticos en régimen dinámico son las ecuaciones de equilibrio, donde habrán de incluirse las fuerzas de inercia y disipación, y una ley de comportamiento que relaciona tensiones y deformaciones en ambas fases del medio. En este apartado veremos sólo unas pocas

expresiones de estas relaciones existiendo en la bibliografía expresiones alternativas a las presentadas aquí. La combinación de las ecuaciones de equilibrio y de la ley de comportamiento permite obtener las ecuaciones de gobierno en términos del vector desplazamiento de ambas fases.

Equilibrio interno	$\begin{aligned} \tau_{ij,j} + X_i &= \rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i + b \left(\dot{u}_i - \dot{U}_i \right) \\ \tau_{,i} + X_i^{'} &= \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i + b \left(\dot{u}_i - \dot{U}_i \right) \\ \end{aligned}$ donde $\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}, \rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}, \rho_{12} = -\rho_a \end{aligned}$	(2.10)
Ley de comportamiento	$\tau_{ij} = \left(\lambda + \frac{Q^2}{R}\right) e \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} + Q \varepsilon \delta_{ij}$ $\tau = Q e + R \varepsilon$	(2.11)
Ecuaciones de gobierno	$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \left[\left(\lambda + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} + Q \nabla \cdot \mathbf{U} \right] + \mathbf{X} = \rho_{11} \ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12} \ddot{\mathbf{U}} + b \left(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}} \right) \right]$ $\nabla \left(Q \nabla \cdot \mathbf{u} + R \nabla \cdot \mathbf{U} \right) + \mathbf{X}' = \rho_{12} \ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22} \ddot{\mathbf{U}} - b \left(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}} \right)$	(2.12)
Ecuaciones de gobierno en el dominio de la frecuencia	$ \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla e + \left(\frac{Q}{R} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}}\right) \nabla \tau + \left(\frac{\hat{\rho}_{11}\hat{\rho}_{22} - \hat{\rho}_{12}^2}{\hat{\rho}_{22}}\right) \omega^2 \mathbf{u} $ $ + \mathbf{X} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \mathbf{X}' = 0 $ $ \nabla^2 \tau + \omega^2 \frac{\hat{\rho}_{22}}{R} \tau + \omega^2 \left(\hat{\rho}_{12} - \frac{Q}{R}\hat{\rho}_{22}\right) e + \nabla \mathbf{X}' = 0 (*) $ $ \text{donde } \hat{\rho}_{11} = \rho_{11} - \mathbf{i} \frac{b}{\omega} ; \hat{\rho}_{22} = \rho_{22} - \mathbf{i} \frac{b}{\omega} ; \hat{\rho}_{12} = \rho_{12} + \mathbf{i} \frac{b}{\omega} $ $ (*) \text{ Se supone un desplazamiento armónico en el tiempo del tipo } \mathbf{u} (\mathbf{x}, t) = \mathbf{u} (\mathbf{x}, \omega) e^{\mathbf{i}\omega t} . \text{ Las variables se entienden dependientes de la posición y de la frecuencia. } $	(2.13)

Tabla 2.5. Ecuaciones básicas en poroelastodinámica armónica.

$ au_{ij}$	Tensor de tensiones sobre el esqueleto sólido referido al material homogéneo	р	Presión de poro
$\tau = -\phi p$	Tensión equivalente en el fluido referido al material homogéneo	ϕ	Porosidad
X_i , ${f X}$	Vector de fuerzas de volumen sobre el esqueleto sólido	η	Viscosidad del fluido
$X_{i}^{'}$, X [']	Vector de fuerzas de volumen en el fluido	k	Permeabilidad de Darcy
$u_i^{}$, u	Vector de desplazamiento en el esqueleto sólido	$\rho_1 = \rho_s(1-\phi)$	Densidad de la fase sólida referida al volumen del material homogéneo
\dot{u}_i , $\dot{\mathbf{u}}$	Vector de velocidad en el esqueleto sólido	$ \rho_2 = \rho_f \phi $	Densidad de la fase fluida referida al volumen del material homogéneo
\ddot{u}_i , $\ddot{\mathbf{u}}$	Vector de aceleración en el esqueleto sólido	$ ho_s$ $ ho_f$	Densidades de la fase sólida y fluida respectivamente
U_i , ${f U}$	Vector de desplazamiento en el fluido	${ ho}_{a}$	Densidad añadida
\dot{U}_i , $\dot{\mathbf{U}}$	Vector de velocidad en el fluido	λ	Constante de Lamé del esqueleto sólido drenado
\ddot{U}_i , $\ddot{\mathbf{U}}$	Vector de aceleración en el fluido	μ	Módulo de rigidez transversal del esqueleto sólido drenado
$e = u_{i,i}$	Dilatación volumétrica del esqueleto sólido	Q, R	Constantes de Biot
$\mathcal{E} = U_{i,i}$	Dilatación volumétrica de la fase fluida	ω	Frecuencia angular
$b = \frac{\eta \phi^2}{k}$	Constante de disipación	i	Unidad imaginaria

Tabla 2.6. Variables que intervienen en las ecuaciones básicas en poroelastodinámica armónica.

2.3.Propagación de ondas en medios elásticos, escalares y poroelásticos

2.3.1. Propagación de ondas en medios elásticos

Se analiza en este apartado cómo se propagan las ondas en un medio homogéneo elástico, lineal e isótropo gobernado por la ecuación de Navier (2.4). A la vista de esta ecuación es evidente que la integración en aras a conocer el campo de desplazamientos no es inmediata al estar las tres componentes de los desplazamientos acopladas. Un procedimiento que permite de manera relativamente sencilla desacoplar estas ecuaciones en términos de la dilatación volumétrica e y del vector de rotación ω definidos como se indica en las ecuaciones (2.14) es el desarrollado por Stockes (1849).

$$e = \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$$
(2.14)

Introducidas estas variables, y tras algunas manipulaciones haciendo uso de los operadores vectoriales, la ecuación (2.4) puede escribirse de manera desacoplada como:

$$\nabla^2 e = \frac{1}{c_{\rm P}^2} \ddot{e}$$

$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{c_{\rm S}^2} \ddot{\omega}$$
(2.15)

La primera de las ecuaciones (2.15), de carácter escalar, representa una onda que se desplaza con velocidad $c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, de naturaleza irrotacional o dilatacional (asociada a cambios de volumen). La segunda, de carácter vectorial, corresponde a una onda rotacional o equivoluminal (asociada a distorsiones en la forma) que se mueve con una velocidad $c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$. En un medio homogéneo, isótropo e infinito ambas ondas coexisten propagándose independientemente. Siempre la velocidad de propagación de la onda irrotacional es mayor que la de la onda rotacional ($c_p > c_s$) por lo que la primera es detectada antes que la segunda; por este motivo la onda irrotacional se denomina onda P (onda primaria) y la rotacional onda S (onda secundaria).

Haciendo uso de las velocidades de propagación de ambas ondas, la ecuación de gobierno puede escribirse en función de la dilatación volumétrica y del vector de rotación como sigue:

$$-c_{\rm S}^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} + c_{\rm P}^2 \nabla \boldsymbol{e} = \ddot{\mathbf{u}}$$
(2.16)

Si sustituimos en esta expresión el campo de desplazamientos correspondiente a un problema de propagación plana armónica con velocidad y dirección de propagación c y s respectivamente, que en notación compleja y para una amplitud unitaria, viene dado por (ver p.e. (Domínguez J. , 1993)):

$$\mathbf{u} = e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d}$$
(2.17)

donde $k = \frac{\omega}{c}$ es el número de onda, ω la frecuencia angular, x el vector posición

de cualquier punto del medio, i la unidad imaginaria y **d** un vector unitario en la dirección del movimiento, la ecuación (2.16) queda como:

$$\left(c_{\rm S}^2 - c^2\right) \mathbf{d} + \left(c_{\rm P}^2 - c_{\rm S}^2\right) \left(\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}\right) \mathbf{s} = 0$$
(2.18)

Las ecuaciones (2.17) y (2.18) permiten analizar las características de los desplazamientos provocados por cada una de las ondas. Si suponemos que la ecuación (2.17) representa los desplazamientos provocados por una onda P ($c = c_p$) el cumplimiento de (2.18) únicamente es posible si $\mathbf{s} = \pm \mathbf{d}$, o dicho de otro modo, la dirección de propagación y el desplazamiento coinciden. Por lo tanto la onda P es una perturbación longitudinal produciéndose los desplazamientos a lo largo de la dirección de propagación (figura 2.1).



Figura 2.1. Desplazamiento y dirección de propagación para el caso de una onda plana P.

Si pensamos ahora que la ecuación (2.17) representa los desplazamientos provocados por una onda S ($c = c_s$) se llega fácilmente a la conclusión, viendo la ecuación (2.18), que para que se satisfaga la igualdad es necesario que el producto escalar de los vectores que definen la dirección de propagación y el desplazamiento sean perpendiculares (($\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}$) = 0). Se trata por tanto de una onda transversal con el vector de desplazamiento contenido en el plano de propagación (figura 2.2).



Figura 2.2. Desplazamiento y dirección de propagación para el caso de una onda plana S.

Aunque se ha realizado el estudio de propagación en base a suponer que las ondas son de carácter armónico es fácil generalizar las conclusiones a cualquier tipo de perturbación plana.

En este apartado sólo se han tratado los aspectos básicos necesarios para entender lo que sigue en los próximos capítulos. Un tratamiento en profundidad de la teoría de la elastodinámica puede estudiarse en Achenbach (1973) o Eringen & Suhubi (1975).

2.3.2. Propagación de ondas en medios escalares

Si bien la ecuación que gobierna la propagación de ondas en un medio escalar en términos de la presión es la (2.9), para realizar un análisis similar al efectuado en el apartado anterior para medios elásticos resulta conveniente partir de la ecuación que expresa la relación entre la variación de la presión y la aceleración que experimentan las partículas del fluido. Esta es fácil de obtener a partir de las ecuaciones de equilibrio interno para sólidos elásticos (2.1) teniendo en cuenta que el tensor de tensiones se reduce a su parte esférica. Para un fluido de densidad ρ si no se consideran las fuerzas de volumen la expresión que relaciona las variables indicadas es:

$$\nabla p = -\rho \ddot{\mathbf{U}} \tag{2.19}$$

teniendo en cuenta que $p = -K_f \varepsilon$ donde K_f y ε representan el módulo de compresibilidad y la dilatación volumétrica del fluido respectivamente y aplicando los operadores divergencia y rotacional a la ecuación anterior es posible escribir:

$$\nabla^2 \varepsilon = \frac{1}{c^2} \ddot{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{0}$$
(2.20)

A la vista de estas ecuaciones en notorio que las partículas se mueven de manera análoga a como lo harían un medio elástico cuando se propaga una onda P con una velocidad $c^2 = \frac{K_f}{\rho}$ (compárese la primera de las ecuaciones (2.20) con la primera de las ecuaciones (2.15)). Además, de la segunda ecuación (2.20), se deduce que no existe onda rotacional (onda S) en el fluido.

Para tener en cuenta la validez de las afirmaciones realizadas, es importante recordar las hipótesis hechas para obtener estas ecuaciones, ya comentadas en el apartado 2.2.2 dedicado a la ecuaciones de gobierno de este tipo de medios: fluido compresible, de viscosidad despreciables con comportamiento elástico y lineal sometido a pequeñas perturbaciones.

2.3.3. Propagación de ondas en medios poroelásticos

En un medio poroelástico se propagan, al igual que en el caso de medios elásticos, tanto ondas irrotacionales como rotacionales, sin embargo y a diferencia de éstos en los que existían una onda de cada tipo, en los medios poroelásticos, además de la onda de corte, existen dos ondas de naturaleza irrotacional que se propagan simultáneamente.

Para justificar lo expuesto anteriormente se va a realizar un procedimiento similar al empleado en el caso de medios elásticos para desacoplar las ecuaciones de gobierno (2.12) y obtener unas nuevas ecuaciones en las que la componente irrotacional y rotacional están desacopladas. Haciendo uso de la dilatación volumétrica (e, ε) y del vector de rotación (ω, Ω) de ambas fases definidos como (Biot, 1956b);

$$e = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{U}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{U}$$

(2.21)

y aplicado el operador divergencia a cada una de las ecuaciones (2.12) se obtienen las ecuaciones que gobiernan la propagación irrotacional. Así asumiendo nulas las fuerzas de volumen:

$$\nabla^{2}\left[\left(\lambda+2\mu+\frac{Q^{2}}{R}\right)e+Q\varepsilon\right] = \rho_{11}\ddot{e}+\rho_{12}\ddot{\varepsilon}+b(\dot{e}-\dot{\varepsilon})$$

$$\nabla^{2}\left(Qe+R\varepsilon\right) = \rho_{12}\ddot{e}+\rho_{22}\ddot{\varepsilon}-b(\dot{e}-\dot{\varepsilon})$$
(2.22)

De manera análoga, si sobre las ecuaciones (2.12), haciendo uso también de las expresiones (2.21), aplicamos el operador rotacional se obtienen las ecuaciones que gobiernan la propagación rotacional o equivoluminal.

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \rho_{11} \, \ddot{\boldsymbol{\omega}} + \rho_{12} \, \ddot{\boldsymbol{\Omega}} + b \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \right)$$

$$0 = \rho_{12} \, \ddot{\boldsymbol{\omega}} + \rho_{22} \, \ddot{\boldsymbol{\Omega}} - b \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \right)$$
(2.23)

Para analizar la componente rotacional se va a suponer una onda armónica que se propaga con igual velocidad en ambas fases del medio en sentido positivo del eje z dadas por:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\omega}} \ e^{\mathbf{i}(\omega t - k_{\mathrm{S}}z)}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\Omega}} \ e^{\mathbf{i}(\omega t - k_{\mathrm{S}}z)}$$
(2.24)

donde ω es la frecuencia angular, k_s el número de onda y \mathbf{D}_{ω} , \mathbf{D}_{Ω} las amplitudes de las ondas de rotación en el sólido y en el fluido respectivamente. Sustituyendo (2.24) en la segunda de las ecuaciones (2.23) y tras unas sencillas operaciones se obtiene:

$$\mathbf{\Omega} = \Lambda \mathbf{\omega} \tag{2.25}$$

donde:

$$\Lambda = \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}$$
(2.26)

La ecuación (2.25) muestra la relación que existe entre la rotación en el sólido (ω) y en el fluido (Ω) . Analizado las variables que intervienen en el valor de Λ vemos como la relación entre ambas rotaciones dependen de las densidades de los medios, de la constante de disipación (b) cuyo valor depende de la viscosidad del fluido y de la frecuencia. En el caso general $(b \neq 0)$ el valor de Λ es complejo lo que implica que existe un desfase entre ambos vectores de rotación.

Si se sustituyen las expresiones (2.24) y (2.25) en la segunda de las ecuaciones (2.23) se obtiene el valor número de onda:

$$k_{\rm S}^2 = \frac{\rho \,\omega^2}{\mu} \tag{2.27}$$

donde:

$$\rho = \frac{\omega^2 \left(\rho_{12}^2 - \rho_{11} \rho_{22}\right) + i \,\omega b \left(\rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}\right)}{i \,\omega b - \omega^2 \,\rho_{22}}$$
(2.28)

De lo visto hasta el momento se concluye que en un medio poroelástico se propaga un solo tipo de onda rotacional de la misma naturaleza que las ondas de corte de un medio elástico. La velocidad de propagación viene dada por:

$$c_{\rm S}^2 = \frac{\omega^2}{k_{\rm S}^2}$$
(2.29)

A diferencia del caso elástico, en los medios poroelásticos esta velocidad, en el caso general de que la fase fluida presenta viscosidad ($b \neq 0$), depende de la frecuencia y tiene carácter complejo. Para ver el significado del carácter complejo supongamos el número de onda descompuesto es su parte real e imaginaria, es decir, $k_s = k_s^r + i k_s^i$. De las dos soluciones de la ecuación (2.27) se deduce que únicamente tiene sentido físico la que implica valores positivos o nulos de k_s^r y de k_s^i . Teniendo esto en cuenta y sustituyendo en la ecuación de la onda armónica que hemos supuesto que se propaga por el sólido (primera de las ecuaciones (2.24)) obtenemos:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\omega}} e^{-k_{\mathrm{S}}^{i} z} e^{i\left(\omega t - k_{\mathrm{S}}^{r} z\right)}$$
(2.30)

En esta expresión, la primera exponencial amortigua la amplitud de la onda en sentido creciente de la coordenada z. El segundo término representa un armónico espacio-temporal que indica que la onda se propaga en dirección positiva de z tal y como habíamos establecido desde el comienzo.

Resulta ilustrativo analizar lo que ocurre con la propagación de la onda de corte en dos casos extremos relacionados con la constante de disipación b del medio poroso. La tabla 2.7 resume como quedan las ecuaciones (2.25) y (2.29) en ambos caso.

Valor de la constante de disipación b	Relación entre $\omega_{ m y}~\Omega$	Valor de c_s^2
b = 0	$\mathbf{\Omega} = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\mathbf{\omega}$	$c_{\rm S}^2 = \frac{\mu}{\rho_{11} \left(1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11} \rho_{22}} \right)}$
$b \rightarrow \infty$	$\Omega = \omega$	$c_{\rm S}^2 = \frac{\mu}{\rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}} = \frac{\mu}{\left(1 - \phi\right)\rho_s + \phi\rho_f} = \frac{\mu}{\rho_h}$

Tabla 2.7. Velocidad de propagación de la onda de corte y relación entre la rotación en ambas fases en función de la constante de disipación.

En el primero de los casos b=0, teniendo en cuenta que $\rho_{12} \le 0$, el fluido y el sólido rotan en fase y la perturbación se propaga con velocidad constante sin

amortiguamiento dado que la velocidad c_s no tiene parte imaginaria. La relación entre ambas rotaciones pone de manifiesto que la rotación del esqueleto sólido induce una rotación de los desplazamientos de la fase fluida a través del parámetro densidad añadida. En el caso particular de que la densidad añadida tome un valor nulo ($\rho_{12} = 0$) el movimiento del fluido es irrotacional lo que significa que, a efectos de la onda de corte, el sólido poroelástico se comporta como un medio viscoelástico cuyas propiedades son las correspondientes al esqueleto sólido drenado. En otras palabras, la onda de corte se propaga exclusivamente a través de la matriz sólida con una velocidad dada por la expresión:

$$c_{\rm S}^2 = \frac{\mu}{\rho_{11}} = \frac{\mu}{(1-\phi) \rho_s}$$
(2.31)

Es fácil ver, dado que ρ_{12} es siempre menor que la unidad, que cuando la densidad añadida es nula ($\rho_{12} = 0$) la velocidad de propagación es menor debido al aumento de la inercia efectiva del medio.

En el otro extremo, cuando el medio es altamente disipativo $(b \rightarrow \infty)$, la rotación es igual en ambas fases, siendo la densidad efectiva que determina la velocidad de propagación la densidad promedio del material poroelástico homogéneo (ρ_h) .

Para estudiar la componente irrotacional se ensaya una onda plana armónica de frecuencia angular ω que se propaga en sentido positivo de z a través de sólido y fluido, con igual velocidad de propagación en ambas fases. El desplazamiento en esa dirección de las partículas de esqueleto (u_3) y de las correspondientes al fluido intersticial (U_3) pueden escribirse como sigue:

$$u_{3} = D_{u} e^{i(\omega t - k_{p}z)}$$

$$U_{3} = D_{U} e^{i(\omega t - k_{p}z)}$$
(2.32)

donde k_p representa el número de onda y D_u , D_U las amplitudes del desplazamiento en sólido y fluido respectivamente. La sustitución (2.32) en (2.22) conduce a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tiene solución distinta de la trivial para determinados valores de k_p . Se trata por tanto de un problema de autovalores definido por la ecuación característica siguiente:

$$A(k_{P}^{2})^{2} - B k_{P}^{2} + C = 0$$
(2.33)

donde las contantes A, B y C vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$A = \lambda + 2\mu$$

$$B = \rho \omega^{2} + \frac{\left(\omega^{2} \rho_{22} - i \omega b\right)}{R} (\lambda + 2\mu)$$

$$- \left[\frac{Q}{R} \left(\omega^{2} \rho_{22} - i \omega b\right) - \left(\omega^{2} \rho_{12} + i \omega b\right)\right] \left(\frac{Q}{R} - \frac{\omega^{2} \rho_{12} + i \omega b}{\omega^{2} \rho_{22} - i \omega b}\right)$$

$$C = \rho \omega^{2} \frac{\left(\omega^{2} \rho_{22} - i \omega b\right)}{R}$$
(2.34)

Los dos autovalores (de valor complejo en el caso general), solución de la ecuación característica (2.33) son:

$$k_{\rm P1}^2 = \frac{{\rm B} - \sqrt{{\rm B}^2 - 4\,{\rm A}\,{\rm C}}}{2\,{\rm A}}$$
 $k_{\rm P2}^2 = \frac{{\rm B} + \sqrt{{\rm B}^2 - 4\,{\rm A}\,{\rm C}}}{2\,{\rm A}}$ (2.35)

La existencia de dos soluciones (el cuadrado de éstas de forma más precisa) implica que hay dos ondas de naturaleza irrotacional propagándose por el medio con velocidades de propagación distintas, cuyos valores (nótese la naturaleza compleja a la vista de las constantes A, B y C) vienen determinados por:

$$c_{\rm P1}^2 = \frac{\omega^2}{k_{\rm P1}^2}$$
 $c_{\rm P2}^2 = \frac{\omega^2}{k_{\rm P2}^2}$ (2.36)

A la onda de mayor velocidad de propagación (c_{p_1}) , que corresponde a la menor de la raíces en módulo, se la denomina "onda de primer tipo", "onda P rápida", "onda P larga", o "onda P_1 ". La más lenta (c_{p_2}) se denomina "onda de segundo tipo", "onda P corta" o "onda P_2 ". Ambas velocidades de propagación son números complejos dependientes de la frecuencia en el caso general. Este carácter complejo, como en el caso anterior, implica que ambas ondas se amortiguan en sentido creciente del eje z. Comentar que este amortiguamiento es mucho más acusado en la onda P_2 , lo que provoca que se atenúe muy rápidamente y sólo puede detectarse en las proximidades de la perturbación. Al igual que ocurría con las ondas de corte, si la constante de disipación es nula (b = 0), ambos valores de la velocidad son constantes reales positivas lo que implica que ambas componentes se propagan sin amortiguarse.

El cálculo de los autovectores (amplitudes de las ondas en la fase sólida y en la fase fluida) correspondientes a cada uno de los autovalores anteriores conduce en el caso de la onda P₁ a valores $D_u^{P_1}$ y $D_U^{P_1}$ del mismo signo, lo que indica que la fase sólida y

fluida vibran en fase. Sin embargo en el caso de la onda P_2 los valores de $D_u^{P_2}$ y $D_U^{P_2}$ tiene signos opuestos lo que denota que ambas vibraciones se producen en contra-fase.

2.4.Formulación integral y solución fundamental armónica

2.4.1.Formulación integral armónica

Se expone a continuación, para cada uno de los tres medios que se vienen analizando, la denominada formulación integral en términos de las variables en el contorno. Esta formulación consiste en una serie de ecuaciones obtenidas a partir de las ecuaciones de gobierno que relacionan las variables fundamentales en puntos internos del dominio Ω con los valores que adoptan éstas y sus derivadas en puntos del contorno Γ . En dichas ecuaciones se relacionan las variables de campo del problema que se pretende resolver con otras correspondientes a un estado virtual con pocas restricciones (cuya solución es perfectamente conocida) denominado "solución fundamental". Estas ecuaciones junto con las diferentes soluciones fundamentales son las piezas clave para poder resolver numéricamente los problemas a través del Método de los Elementos de Contorno.

2.4.1.1.Formulación integral en elastodinámica armónica

En ausencia de fuerzas de volumen, la representación integral del campo de desplazamientos del estado elastodinámico reducido de un dominio acotado Ω con contorno Γ viene dado por:

$$u_j^k + \int_{\Gamma} t_{ji}^* u_i \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ji}^* t_i \, d\Gamma$$
(2.37)

donde el significado de cada uno de los términos que intervienen en la expresión es el siguiente: u_{i}^{k} es el desplazamiento en dirección j del punto k donde se aplica la fuerza excitadora, u_i, t_i son los desplazamientos y las tensiones en dirección i del problema que se pretende resolver. u_{ji}^*, t_{ji}^* son los desplazamientos y las tensiones en dirección *i* de la solución fundamental cuando se aplica una carga puntual en dirección j, esto es, la solución de desplazamientos y tensiones que satisface la ecuación de (ecuación en gobierno de Navier) el dominio de frecuencia la $\mu \nabla^2 u_{ji}^* + (\lambda + \mu) \nabla e_{j,i}^* - \rho \, \omega^2 \, u_{ji}^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \delta_{ij}$ dónde se ha introducido la función delta de Dirac para darle un carácter puntual a la función excitadora.

2.4.1.2. Formulación integral en problemas escalares armónicos

La ecuación equivalente a la anterior en el caso de medios escalares que relaciona la presión en un punto k perteneciente al dominio Ω con las variables presión y su derivada en el contorno Γ , es:

$$p^{k} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)^{*} p \, d\Gamma = \int_{\Gamma} p^{*} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma$$
(2.38)

donde p^k es el valor de la presión en el punto interno k, **n** la normal al contorno y p^* es la solución fundamental que cumpla en Ω la ecuación de Helmholtz para una fuente puntual en k pulsando en un medio infinito con frecuencia ω :

$$\nabla^2 p^* + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = 0$$
(2.39)

2.4.1.3.Formulación integral en poroelasticidad armónica

La formulación integral para el caso de medios poroelásticos viene dada por las cuatro ecuaciones siguientes:

$$u_{j}^{k} + \int_{\Gamma} t_{ji}^{*} u_{i} d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{nj}^{*} \tau d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ji}^{*} t_{i} d\Gamma - \int_{\Gamma} \tau_{j}^{*} U_{n} d\Gamma$$
(2.40)

$$-J \tau^{k} + \int_{\Gamma} t_{oi}^{*} u_{i} d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(U_{no}^{*} - J X_{i}^{**} n_{i} \right) \tau d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{oi}^{*} t_{i} d\Gamma - \int_{\Gamma} \tau_{o}^{*} U_{n} d\Gamma$$
(2.41)

donde $J = \frac{1}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}$

Las tres ecuaciones (2.40) relacionan el desplazamiento en cada una de las tres direcciones (j=1, 2, 3) de un punto interno k del dominio Ω con el valor que adquieren los desplazamientos u_i , U_n y las tensiones t_i , τ en cada una de las fases del medio poroso en todo el contorno Γ siendo U_n el desplazamiento de la fase fluida normal al contorno. Los términos u_{ji}^* y t_{ji}^* constituyen los desplazamientos y tracciones de la matriz sólida en dirección i debidos a la carga puntual aplicada según j actuando en la matriz sólida. Por otra parte, para la misma carga, τ_j^* y U_{nj}^* representan la tensión equivalente y desplazamiento absoluto normal al contorno de la fase fluida. Estos términos, de valor conocido, corresponden a la solución fundamental cuando la carga está aplicada en un punto de la matriz sólida como ya se ha indicado (su

expresión figura en el apartado siguiente). La ecuación (2.41) corresponde a la representación integral de la tensión equivalente en un punto interno k del dominio Ω en la fase fluida del medio. En dicha ecuación se relaciona esta variable con el valor que adquieren los desplazamientos u_i , U_n y las tensiones t_i , τ en cada una de las fases del medio poroso en todo el contorno Γ . En este caso los términos u_{oi}^* y t_{oi}^* son la componente i de los desplazamientos y tracciones en el esqueleto sólido provocados por la fuente puntual colocada en un punto del fluido (El subíndice "o" que se corresponde con j = 4 indica que la carga está aplicada en la fase fluida). De otro lado, τ_o^* y U_{no}^* son la respuesta en tensión equivalente y desplazamiento normal del propio fluido a la misma solicitación. Al igual que antes, estos cuatro términos corresponden a la solución fundamental en el caso en que la carga esté aplicada en la fase fluida del medio.

2.4.2. Solución fundamental armónica

En la formulación integral para dada uno de los medios presentada en el apartado anterior aparecen una serie de términos que hacen referencia a lo que se denomina solución fundamental. El concepto de solución fundamental alude a una serie de problemas con solución conocida en los que existen pocas restricciones. Gracias a estas soluciones es posible, a través de la formulación integral del apartado anterior, plantear un sistema de ecuaciones integrales independientes en el contorno, que se puede resolver de manera aproximada mediante el Método de los Elementos de Contorno (MEC) tal y como se describirá en el siguiente apartado. Justificada su necesidad, se exponen a continuación los problemas y sus correspondientes soluciones para cada uno de los medios que se han ido describiendo a lo largo del presente capítulo.

2.4.2.1. Solución fundamental elastodinámica

En este caso el problema consiste en una carga puntual aplicada en un punto de un medio infinito, homogéneo, elástico, lineal e isótropo. Las tensiones y los desplazamientos resultantes constituyen un problema clásico que fue resuelto por Stockes (1849) en el dominio del tiempo, por Cruse & Rizzo (1968) en el dominio transformado de Laplace y algunos años antes por Kupradze (1963) para problemas armónicos. Para un punto x que dista una distancia r del punto de aplicación ξ , el desplazamiento en dirección k para una carga aplicada en dirección l viene dado por:

Ecuaciones de Onda en Problemas Escalares, Elásticos y Poroelásticos. Formulación Mediante el MEC

$$u_{lk}^*\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}\right) = \frac{1}{4\pi\,\mu} \left(\boldsymbol{\psi}\,\delta_{lk} - \boldsymbol{\chi}\,\boldsymbol{r}_{l}\,\boldsymbol{r}_{k}\right) \tag{2.42}$$

donde:

$$\Psi = \sum_{m=1}^{2} \left[1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 \delta_{m1} \right] \left(\frac{1}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + \delta_{m2} \right) E_m$$

$$\chi = \sum_{m=1}^{2} \left[1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 \delta_{m1} \right] \left(\frac{3}{z_m^2 r^2} - \frac{3}{z_m r} + 1 \right) E_m$$
(2.43)

En estas expresiones $E_m = \frac{1}{r}e^{-ik_m r}$, $r = |\mathbf{x} - \xi|$, $z_1 = -ik_1$, $z_2 = -ik_2$

Partiendo de la solución en desplazamientos (2.43) y haciendo uso de la ley de comportamiento del material, las tensiones para una superficie de normal n son:

$$t_{lk}^{*}\left(\mathbf{x},\xi,\omega\right) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left(A\,\delta_{lk} + B\,r_{l}\,r_{k}\right) + \left(A\,r_{k}\,n_{l} + C\,r_{l}\,n_{k}\right)\right]$$
(2.44)

siendo:

$$A = \frac{d\Psi}{dr} - \frac{\chi}{r}$$

$$B = 2\left(2\frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr}\right)$$

$$C = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - 2\frac{\chi}{r}\right) - 2\frac{\chi}{r}$$
(2.45)

2.4.2.2.Solución fundamental en problemas escalares de propagación de ondas

La presión en cualquier punto \mathbf{x} de un medio escalar como consecuencia de la aplicación de una fuente puntual en $\boldsymbol{\xi}$ viene dada por la expresión:

$$p^*(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}$$
(2.46)

donde $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ y $k = \frac{\omega}{c}$, siendo *c* la velocidad de propagación de las ondas en el medio. La variable derivada, esto es, el flujo de presión en una superficie con normal **n** viene dado por:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\mathrm{i}\,k}{r} \right) e^{-\mathrm{i}\,k\,r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tag{2.47}$$

En este tipo de medios a la hora de aplicar la ecuación (2.38) es posible no tener en cuenta algunos contornos si la solución fundamental empleada satisface la condición de contorno del problema real. Esto ocurre en el agua que forma parte de los modelos presentados, en los que aplicando la solución integral que se indica a continuación no es preciso considerar el contorno que forma la superficie libre del agua. Esto supone una considerable reducción en el número de grados de libertad a la hora de resolver el problema numéricamente mediante el MEC.

La obtención de esta solución fundamental modificada se basa en considerar dos fuentes puntuales: Una positiva aplicada en un punto del dominio ξ en el que se escribe la ecuación integral y una segunda negativa aplicada en un punto simétrico o imagen del anterior respecto a la superficie libre $\overline{\xi}$. La figura 2.3 muestra de forma gráfica los puntos de colocación indicados:



Figura 2.3. Posición de las cargas para la obtención de la solución fundamental fuente-imagen en problemas escalares.

Haciendo esta doble colocación de la fuente se llega a la siguiente solución fundamental, que obviamente conduce a presiones nulas en los puntos de la superficie libre del medio.

$$\hat{p}^*(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} e^{-ikr} - \frac{1}{\overline{r}} e^{-ik\overline{r}} \right)$$
(2.48)

Donde $\overline{r} = |\mathbf{x} - \overline{\xi}|$. Como se ha indicado ya, haciendo uso de \hat{p}^* solo es necesario aplicar la ecuación integral a la parte del contorno que en la figura aparece con la denominación $\Gamma_{\rm E}$.

2.4.2.3. Solución fundamental poroelástica

Se expone a continuación la solución fundamental de medios poroelásticos. En este caso la carga puede estar aplicada tanto en la matriz sólida como en la fase fluida del medio poroso lo que conduce, en función de la respuesta que se considere, a los valores contenidos en las tablas 2.8 y 2.9. Una completa descripción del proceso seguido para su obtención puede consultarse en Domínguez (1992) y Aznárez (2002).

Carga aplicada en dirección l en la matriz sólida. Respuesta en desplazamiento de la matriz sólida en $u_{lk}^*(\mathbf{x})$ dirección k .	$(\xi, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\tilde{\psi} \delta_{lk} - \tilde{\chi} r_{l} r_{k} \right)$	(2.49)
Carga aplicada en dirección l en la matriz sólida. Respuesta en tensión equivalente de la fase fluida.	$\tau_l^*(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{\mathrm{i}\omega\eta}{4\pi}\widetilde{\boldsymbol{\phi}} \ r_l$	(2.50)
Fuente puntual en la fase fluida. Respuesta en desplazamientos del sólido en dirección $k.$	$u_{ok}^{*}(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{\gamma}{4\pi} \widetilde{\phi} r_{,k}$	(2.51)
Fuente puntual en la fase fluida. Respuesta en tensión equivalente de la fase fluida.	$\tau_o^*(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi} \tilde{\kappa}$	(2.52)
$\widetilde{\Psi} = \sum_{m=1}^{3} \left[(-1)^m \frac{\mu}{\left(\lambda + 2\mu\right) z_{21}} \left(\frac{\mathrm{i}\omega}{K} - z_m^2\right) \left(\delta_{m1} + \delta_{m2}\right) + \delta_m \right]$	$\int_{n^3} \left[\left(\frac{1}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + \delta_{m^3} \right) E_m \right]$	
$\widetilde{\chi} = \sum_{m=1}^{3} \left[(-1)^m \frac{\mu}{\left(\lambda + 2\mu\right) z_{21}} \left(\frac{\mathrm{i}\omega}{K} - z_m^2 \right) \left(\delta_{m1} + \delta_{m2} \right) + \delta_{m2} \right] + \delta_{m2} \left(\delta_{m1} + \delta_{m2} \right) + \delta_{m2}$	$\mathcal{S}_{m3}\left[\left(\frac{3}{z_m^2 r^2} - \frac{3}{z_m r} + 1\right)E_m\right]$	(2 53)
$\widetilde{\phi} = \sum_{m=1}^{2} \frac{\left(-1\right)^{m+1}}{\left(\lambda + 2\mu\right) z_{21}} z_m \left(\frac{1}{z_m r} - 1\right)$	$\int E_m$	(2.33)
$\tilde{K} = \sum_{m=1}^{2} \frac{(-1)^{m+1}}{z_{21}} \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} z_3^2 - z_m^2 \right)$	$ ight) E_m$	

Tabla 2.8. Solución fundamental poroelástica en términos de las variables fundamentales: Desplazamientos de la matriz sólida y tensión equivalente en la fase fluida.

Carga aplicada en dirección l en la matriz sólida. Vector tensión en la matriz sólida en dirección $k.$	$t_{lk}^{*}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}\right) = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left(\tilde{A}\delta_{lk} + \tilde{B}r_{l}r_{k}\right) + \\ \left(\tilde{A}r_{k}n_{l} + \tilde{C}r_{l}n_{k}\right) \end{bmatrix}$	(2.54)
Fuente puntual en la fase fluida. Vector tensión en la matriz sólida en dirección $k.$	$t_{ok}^{*}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}\right) = \frac{\gamma}{4\pi} \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \ \tilde{F} \ r_{k} + \tilde{G} \ n_{k}\right)$	(2.55)
Carga aplicada en dirección l en la matriz sólida. Respuesta en desplazamientos en la fase fluida.	$U_{nl}^{*}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}\right) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tilde{D} r_{l} + \tilde{E} n_{l}\right)$	(2.56)
Fuente puntual en la fase fluida. Respuesta en desplazamientos en la fase fluida.	$U_{no}^* - J X_l n_l = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tilde{H}$	(2.57)
$\tilde{A} = \frac{d\tilde{\psi}}{dr} - \frac{\tilde{\chi}}{r}$ $\tilde{B} = 2\left(2\frac{\tilde{\chi}}{r} - \frac{d\tilde{\chi}}{dr}\right)$ $\tilde{C} = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{d\tilde{\psi}}{dr} - \frac{d\tilde{\chi}}{dr} - 2\frac{\tilde{\chi}}{r}\right) - 2\frac{\tilde{\chi}}{r} + \frac{Q}{R}i\omega\eta\tilde{\phi}$ $\tilde{D} = i\omega\etaJ\left(\frac{d\tilde{\phi}}{dr} - \frac{\tilde{\phi}}{r}\right) - \frac{Z}{\mu}\tilde{\chi}$	$\tilde{E} = i \omega \eta J \frac{\tilde{\phi}}{r} + \frac{Z}{\mu} \psi \tilde{\psi}$ $\tilde{F} = 2 \mu \left(\frac{d \tilde{\phi}}{dr} - \frac{\tilde{\phi}}{r} \right)$ $\tilde{G} = \lambda \left(\frac{d \tilde{\phi}}{dr} + 2 \frac{\tilde{\phi}}{r} \right) - 2 \mu \frac{\tilde{\phi}}{r} + \frac{Q}{R \gamma} \tilde{\kappa}$ $\tilde{H} = J \frac{d \tilde{\kappa}}{dr} + Z \gamma \tilde{\phi}$	(2.58)

Tabla 2.9. Solución fundamental poroelástica en términos de las variables derivadas: Vector tensión en la matriz sólida y desplazamiento normal en la fase fluida asociados a una superficie con normal exterior n.

En todas la ecuaciones anteriores $r = |\mathbf{x} - \xi|$, $E_m = \frac{1}{r}e^{z_m r}$, $z_m = -ik_m$ (m = 1, 2, 3), y $z_{21} = z_2^2 - z_1^2$.

2.4.3. Formulación Integral en el Contorno

La aplicación del MEC para la resolución numérica de problemas que implican a los distintos tipos de medios (viscoelásticos, escalares y poroelásticos) requiere que la formulación integral expresada por las ecuaciones [(2.37), (2.38), (2.40), (2.41)] implique únicamente variables en el contorno. Las ecuaciones citadas relacionan las variables fundamentales en puntos internos de Ω con los valores que adoptan éstas y sus derivadas en puntos del contorno Γ . Para hacer compatibles ambos aspectos es necesario que los puntos de colocación estén situados en el contorno. Existen, sin embargo, algunas dificultades asociadas a esta operación teniendo en cuenta que las expresiones de los integrandos son singulares en el punto de colocación.

La manera habitual de solventar este hecho es mediante un proceso de paso al límite, sustituyendo el contorno real Γ por otro aproximado que evita la singularidad, compuesto por dos contornos, $(\Gamma - \Gamma_e)$ y Γ_e , donde Γ_e es un volumen esférico infinitesimal de radio $\varepsilon \rightarrow 0$ con centro en el punto de colocación (figura 2.4). Con esta técnica cada una de las integrales de contorno pueden descomponerse en otras dos extendidas a los contornos $\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}$ y Γ_{ε} .



Figura 2.4. Descomposición en contornos $\Gamma - \Gamma_e$ y Γ_e para "esquivar" la singularidad.

Para describir el proceso se va aplicar este procedimiento al caso de regiones viscoelásticas. Partiendo de la ecuación integral (2.37) tenemos:

$$u_l^i + \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} t_{lk}^* u_k \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} t_{lk}^* u_k \, d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u_{lk}^* t_k \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_{lk}^* t_k \, d\Gamma$$
(2.59)

Con el fin de lograr nuestro objetivo de que únicamente aparezcan variables en el contorno, es necesario estudiar el comportamiento de estas integrales cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Así, las integrales sobre $\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}$ no presentan problemas ya que el contorno sobre el que se extienden no incluye la singularidad y en el límite han de entenderse en el sentido del Valor Principal de Cauchy (CPV) (ver p.e. (Doblaré & Gracia, 1998)).

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} t_{lk}^* u_k \, d\Gamma = \operatorname{CPV} \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k \, d\Gamma$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u_{lk}^* t_k \, d\Gamma = \operatorname{CPV} \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k \, d\Gamma$$
(2.60)

Si se toman límites en las integrales a lo largo de Γ_e (ver (Domínguez J. , 1993)):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_{lk}^* t_k \, d\Gamma = 0$$

$$u_l^i + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} t_{lk}^* u_k \, d\Gamma = c_{lk}^i u_k^i$$
(2.61)

Dónde c_{lk}^i , denominado término libre, de valor igual al que aparece en elastostática, es una constante que depende de la geometría del contorno en el punto de aplicación de la carga ξ y de ν . Teniendo en cuenta (2.60) y (2.61) puede escribirse (2.59), omitiendo por comodidad el acrónimo "CPV" de las expresiones (2.60), del modo que sigue:

$$c_{lk}^{i} u_{k}^{i} + \int_{\Gamma} t_{lk}^{*} u_{k} d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^{*} t_{k} d\Gamma$$
(2.62)

O en notación de matricial más compacta en la que se recoge de forma conjunta la colocación en las tres direcciones:

$$\mathbf{c}^{i}\mathbf{u}^{i} + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^{*}\mathbf{u} \ d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^{*}\mathbf{p} \ d\Gamma$$
(2.63)

donde **u** y **p** serán los vectores de las variables de campo, **u**^{*} y **p**^{*} los tensores de la solución fundamental y \mathbf{c}^i el tensor del término libre elastostático en el punto de colocación (como resulta obvio $\mathbf{c}^i = \mathbf{I}$ si se trata de puntos internos):

$$\mathbf{c}^{i} = \begin{pmatrix} c_{11}^{i} & c_{12}^{i} & c_{13}^{i} \\ c_{21}^{i} & c_{22}^{i} & c_{23}^{i} \\ c_{31}^{i} & c_{32}^{i} & c_{33}^{i} \end{pmatrix}$$
(2.64)

Siguiendo un procedimiento análogo para problemas escalares de propagación de ondas partiendo de la ecuación (2.38), la formulación integral en el contorno queda en este caso:

$$c^{i} p^{i} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)^{*} p \ d\Gamma = \int_{\Gamma} p^{*} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \ d\Gamma$$
 (2.65)

donde el término libre toma el valor $c^i = \frac{\theta}{4\pi}$ (θ es el ángulo sólido del contorno en el punto).

En el caso de medios poroelásticos, llevando a cabo el paso al límite de las ecuaciones (2.40) y (2.41), se obtiene una ecuación matricial del tipo (2.63) donde el tensor correspondiente al término libre tiene una expresión del tipo:

$$\mathbf{c}^{i} = \begin{pmatrix} c_{11}^{i} & c_{12}^{i} & c_{13}^{i} & 0 \\ c_{21}^{i} & c_{22} & c_{23}^{i} & 0 \\ c_{31}^{i} & c_{32} & c_{33}^{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Jc^{i} \end{pmatrix}$$
(2.66)

En este caso \mathbf{c}^i depende de la geometría del contorno en \mathbf{x}_i , del coeficiente de Poisson del material drenado y del valor de $J = \frac{1}{i \omega b - \omega^2 \rho_{22}}$.

2.5.El Método de los Elementos de Contorno en Problemas Armónicos. Aspectos numéricos relevantes

La formulación integral en el contorno para cada uno de los medios junto con las condiciones de contorno y de interfase entre las regiones en contacto, que se tratan en apartado 2.6, permiten abordar la solución de cualquier modelo acoplado que incluya estos tres medios, en términos de variables en los contornos de los mismos. Salvo problemas muy sencillos la solución analítica del problema es inabordable. Como se verá a continuación el planteamiento numérico de estas ecuaciones haciendo uso del MEC se muestra como una estrategia adecuada.

2.5.1.Discretización del contorno

Para calcular las integrales extendidas al contorno que aparecen en la formulación integral de los distintos tipos de medio, el contorno Γ (figura 2.5) se divide en un número discreto de elementos NE, aproximándose los desplazamientos y las tensiones en función de los valores en los nodos de los elementos mediante funciones de interpolación.



Figura 2.5. Contorno tridimensional discretizado con elementos cuadráticos cuadriláteros y triangulares.

Así sobre un elemento genérico j se puede escribir:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}^{j} \qquad \mathbf{p} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{p}^{j} \tag{2.67}$$

donde \mathbf{u}^{j} y \mathbf{p}^{j} representan vectores de αNJ componentes y Φ una matriz de dimensión ($\alpha \times \alpha NJ$) cuyos términos son las funciones de forma del elemento NJ en el número de nodo del elemento J ($\alpha = 1$ para problemas escalares, 3 en sólidos viscoelásticos y 4 para medios poroelásticos).

La geometría del elemento (isoparamétrico) se aproximará de manera análoga:

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi} \, \mathbf{x}^{\,j} \tag{2.68}$$

donde \mathbf{x}^{j} contiene las 3NJ coordenadas de los nodos del elemento j. Los elementos empleados en la discretización del modelo son cuadráticos, cuadriláteros y triangulares de nueve y seis nodos respectivamente (figura 2.6). Las funciones de forma de los elementos empleados pueden verse en Domínguez (1993).



Figura 2.6. Elementos cuadráticos cuadriláteros y triangulares tridimensionales.

Tras el proceso de discretización y con colocación en un nodo genérico i, la ecuación (2.63) que emplearemos ahora como representativa de cualquiera de los tres tipos de medio (elástico, poroelástico o escalar) se convierte en:

$$\mathbf{c}^{i}\mathbf{u}^{i} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} \mathbf{p}^{*} \mathbf{\Phi} \ d\Gamma \right\} \mathbf{u}^{j} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} \mathbf{u}^{*} \mathbf{\Phi} \ d\Gamma \right\} \mathbf{p}^{j}$$
(2.69)

siendo Γ_j la superficie del contorno asociado al elemento j genérico. La ecuación (2.69) es ya una ecuación algebraica cuyos coeficientes dependen del nodo de colocación de la solución fundamental. Aplicando la carga/fuente en todos y cada uno de los nodos que constituyen la discretización del contorno, se obtiene un sistema de ecuaciones independientes de la forma:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} \tag{2.70}$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{t} son los vectores que contienen todos los valores nodales del problema. A los coeficientes de \mathbf{H} y \mathbf{G} nos referiremos en adelante como *núcleos de integración* o *coeficientes integrales*. Una vez aplicadas las condiciones de contorno puede reordenarse la ecuación (2.70) y escribir el sistema resultante:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{2.71}$$

donde X es el vector de incógnitas (componentes de \mathbf{u} o \mathbf{p} según el caso) y F el vector de coeficientes que se obtiene de multiplicar las correspondientes columnas de H y G por las componentes conocidas de \mathbf{u} y \mathbf{p} respectivamente. Por lo tanto para tener el problema completamente planteado únicamente falta abordar el cálculo de las matrices H y G.

2.5.2. Evaluación de las Integrales en el Contorno

Se aborda en este apartado el cálculo de las integrales extendidas a los elementos en los que se discretiza el contorno que figuran en la ecuación (2.69). Sobre cada elemento j, para un nodo de aplicación de la carga i de la discretización, las integrales a resolver son del tipo:

$$\mathbf{G}\mathbf{W}^{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{\Phi} \ d\Gamma$$

$$\mathbf{H}\mathbf{W}^{ij} = \int_{\Gamma_i} \mathbf{p}^* \mathbf{\Phi} \ d\Gamma$$
(2.72)

Cuando se va colocando la carga en todos los nodos a lo largo de la discretización, se presentan dos casos, dependiendo de dónde se aplique la carga en relación con los nodos que forman parte del elemento sobre el que se está realizando la integración. En uno, el nodo de aplicación i no forma parte del elemento j; en el otro, el nodo de aplicación i si forma parte del elemento j.

En el primero de los casos las integrales (2.72) pueden ser evaluadas numéricamente haciendo uso de una cuadratura gaussiana estándar sobre elementos rectangulares o triangulares según el caso (ver p.e. (Stroud & Secrest, 1966) o (Abramowitz & Stegun, 1972)). Hay que hacer un cambio en el sistema de referencia al estar expresadas las cuadraturas en función del sistema de referencia intrínseco al elemento (ξ_1, ξ_2) lo cual exige la transformación de las variables geométricas del mismo a este sistema de referencia. Una vez expresadas las ecuaciones (2.72) en el sistema de referencia indicado quedan como sigue:

$$\mathbf{G}\mathbf{W}^{ij} = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \mathbf{u}^* \mathbf{\Phi} \left| J_A \right| d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{H}\mathbf{W}^{ij} = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \mathbf{p}^* \mathbf{\Phi} \left| J_A \right| d\xi_1 d\xi_2$$

(2.73)

donde $\left|J_{\scriptscriptstyle A}\right|$ el jacobiano de la transformación que en este caso toma el valor:

$$\left|J_{A}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_{2}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{3}}{\partial \xi_{2}} - \frac{\partial x_{3}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{2}}{\partial \xi_{2}}\right)^{2} + \left(\frac{\partial x_{3}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{1}}{\partial \xi_{2}} - \frac{\partial x_{1}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{3}}{\partial \xi_{2}}\right)^{2} + \left(\frac{\partial x_{1}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{2}}{\partial \xi_{2}} - \frac{\partial x_{2}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{1}}{\partial \xi_{2}}\right)^{2}}$$
(2.74)

Las ecuaciones (2.73) así expresadas ya están listas para su evaluación. Los límites de integración para elementos cuadriláteros serán -1 y 1 siendo para el caso de elementos triangulares 0 y 1.

En el segundo caso, cuando el punto de colocación *i* forma parte del elemento *j* sobre el que se integra, los núcleos \mathbf{u}^* y \mathbf{p}^* presentan singularidades de $O(\frac{1}{r})$ y/o $O(\frac{1}{r^2})$, lo que impide realizar una cuadratura de forma directa como en el caso anterior. El proceso para llevar a cabo la integración requiere de un tratamiento numérico previo más complejo a medida que aumenta el orden de la singularidad.

2.5.2.1.Integración de los términos con singularidad débil ($O(\frac{1}{r})$)

El procedimiento para evaluar este tipo de términos consiste en lograr que el subintegrando sea regular a base de realizar un cambio de sistema de referencia. Para que el cambio anule la singularidad es necesario que el jacobiano de transformación de un sistema de referencia a otro sea de orden O(r). Este tipo de estrategias fueron propuestas por Lachat & Watson (1976) siendo revisadas posteriormente por ((Li, Han, & Mang, 1985), (Telles, 1987) y (Cerrolaza & Alarcón, 1989)) entre otros. La aplicación detallada de esta técnica sobre elementos cuadriláteros puede verse en detalle en Maeso (1992) y sobre elementos triangulares en Domínguez (1993).

2.5.2.2.Integración de los términos con singularidad fuerte ($O(\frac{1}{r^2})$)

Existe en la bibliografía un gran número de estrategias que abordan la evaluación de este tipo de términos, bien de forma indirecta (ver p.e. (Brebbia & Domínguez, 1992)) o bien en forma directa ((Li, Han, & Mang, 1985), (Giuggiani & Casalini, 1987) o (Giuggiani & Gigante, 1990)). El procedimiento seguido en nuestro caso va en la línea de mostrar que la singularidad es "ficticia" al desvanecerse a medida que se incorporan las

contribuciones de los elementos adyacentes. La técnica es válida para elementos curvos de cualquier orden y tipo y se basa en la identificación concreta de los términos con singularidad fuerte, que serán regularizados directamente en coordenadas cartesianas de forma conveniente para obtener una integral de superficie y otra de línea extendida al perímetro del elemento, ambas no singulares y evaluables mediante cuadratura estándar. La aplicación del procedimiento citado puede verse en detalle en Chirino, Maeso, & Aznárez (2000) y Aznárez (2002).

2.6.Modelo acoplado. Condiciones de contorno y formulación de las condiciones en las interfases

Dado que los modelos planteados involucran diferentes regiones en contacto, para tener definido completamente el problema dinámico en el dominio de la frecuencia, es necesario imponer condiciones de contorno en términos de las variables primarias o de sus derivadas. Al haber eliminado la dependencia temporal en las ecuaciones de gobierno es innecesaria la aplicación de condiciones iniciales.

En la tabla 2.10 figura la definición del vector tensión en función del medio involucrado en un punto x del contorno Γ con normal exterior n.

Sólidos viscoelásticos	$t_i^s(\mathbf{x},\omega) = \sigma_{ij}^s(\mathbf{x},\omega) n_j(\mathbf{x}) \mathbf{x} \in \Gamma$ donde σ_{ij}^s es el tensor de tensiones del sólido	(2.75)
Regiones poroelásticas (esqueleto sólido)	$t_i^e(\mathbf{x}, \omega) = \tau_{ij}(\mathbf{x}, \omega) \ n_j(\mathbf{x}) \mathbf{x} \in \Gamma$ $\tau_{ij} \text{ es el tensor de tensiones equivalente sobre la matriz sólida}$	(2.76)
Regiones poroelásticas (material homogéneo)	$t_i^p(\mathbf{x},\omega) = t_i^e(\mathbf{x},\omega) + \tau(\mathbf{x},\omega) n_j(\mathbf{x}) \mathbf{x} \in \Gamma$	(2.77)

Tabla 2.10. Definición del vector tensión en función del tipo de región.

2.6.1.Condiciones exteriores

En general, y estudiando el comportamiento dinámico de cualquiera de los medios tratados, existirá una zona del contorno (Γ_1) donde serán conocidas las variables fundamentales (condiciones de contorno naturales) y una zona complementaria (Γ_2) en la que son dato las variables derivadas (condiciones de contorno esenciales).

Para sólidos viscoelásticos en los que el desplazamiento es la variable fundamental y la tensión es la variable derivada:

$$u_i^s = \overline{u}_i^s$$
 en Γ_1
 $t_i^s = \overline{t_i}^s$ en Γ_2

siendo $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Para medios fluidos la presión (p^w) es la variable fundamental. La variable derivada es el flujo de presión en el contorno $(q^w = p_{,n})$ equivalente al desplazamiento normal de las partículas de fluido (U_n^w) al estar ambas variables relacionadas a través de la ecuación $q^w = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \rho \, \omega^2 U_n^w$. Así:

> $p^{w} = \overline{p}^{w}$ en Γ_{1} $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \overline{q}^{w}$ en Γ_{2}

En el caso de medios poroelásticos, las variables fundamentales adoptadas serán el vector desplazamiento en el esqueleto sólido (\mathbf{u}^{e}) y la tensión equivalente en el fluido (τ) . Las variables derivadas son el vector tensión en el esqueleto (\mathbf{t}^{e}) y el desplazamiento normal al contorno del fluido (U_n) . En este tipo de medios se puede distinguir entre contornos permeables e impermeables. Los primeros se caracterizan porque en ellos la presión de poro es nula $(\tau = 0)$. En este caso, puede ser conocido el vector desplazamiento de la fase sólida $(u_i^e = \overline{u_i}^e)$ o la tensión equivalente sobre ella $(t_i^e = \overline{t_i}^e)$. Si el contorno es impermeable, en él son iguales las componentes normales del desplazamiento en ambas fases $(u_n^e = U_n)$. Esto último puede ser conocido $(u_n^e = U_n = \bar{u}_n)$ y las incógnitas serán las tensiones equivalentes en ambas fases o bien será conocida la tensión total sobre el contorno $(t_i^p = \overline{t_i}^p)$ y el desplazamiento incógnita. En ingeniería sísmica pueden plantearse ambos tipos de condición de contorno para la superficie del semi-espacio. Ambas representan los dos extremos de la realidad física del problema (ver por ejemplo (Deresiewicz & Rice, 1962) y (Deresiewicz & Skalak, 1963)). En el caso impermeable, puede pensarse que la fase líquida del medio está de alguna forma atrapada en el esqueleto sólido. En este problema $p \neq 0$ en la superficie, lo cual puede dar inicio a un proceso conocido como licuefacción que no es más que la pérdida de tensión efectiva entre las particular de un esqueleto sólido

granular. Interesante es la cuantificación de la influencia de ambas condiciones de contorno para el problema de un semi-espacio poroelástico sometido a ondas planas que puede verse en (Lin, Lee, & Trifunac, 2001).

2.6.2.Condiciones en las interfases

El análisis dinámico de modelos donde coexisten los tres tipos de medios (viscoelásticos, escalares y poroelásticos) debe tener en cuenta el efecto de interacción entre ellos a través de las interfases o contornos comunes a dos de estas regiones. Esta interacción se establece matemáticamente a través del cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio de tensiones y compatibilidad de desplazamientos de ambos medios en todos los puntos de estos contornos.

Existen seis tipos de interfases en los modelos presentados dependiendo de la naturaleza de los medios que interactúan, a saber: viscoelástico-viscoelástico, fluido-fluido, viscoelástico-fluido, viscoelástico-poroelástico, poroelástico-fluido y poroelástico-poroelástico. En la tabla 2.11 se resumen las condiciones tanto de equilibrio como de compatibilidad para cada uno de los casos citados.

Tipo de interfase	Ecuaciones de equilibrio	Ecuaciones de compatibilidad
sólido viscoelástico(^{s1}) sólido viscoelástico(^{s2})	$\mathbf{t}^{s1} + \mathbf{t}^{s2} = 0$	$\mathbf{u}^{s1} = \mathbf{u}^{s2}$
agua (^{w1}) agua (^{w2})	$p^{w_1} = p^{w_2}$	$U_n^{w1} + U_n^{w2} = 0$
sólido viscoelástico(^s) agua (^w)	$\mathbf{t}^s - p^w \mathbf{n}^w = 0$	$\mathbf{u}^s \mathbf{n}^s + U_n^w = 0$
	Condición impermeable	Condición Impermeable
sólido viscoelástico(^s)	$\mathbf{t}^s + \mathbf{t}^e + \tau \mathbf{n}^p = 0$	$\mathbf{u}^s = \mathbf{u}^e \ y \ \mathbf{u}^e \mathbf{n}^p = U_n^p$
material poroelástico(^P)	Condición permeable	Condición permeable
	$\mathbf{t}^s + \mathbf{t}^e = 0 y \tau = 0$	$\mathbf{u}^s = \mathbf{u}^e$
material poroelástico (^p) agua (^w)	$\frac{\tau^p}{\phi} = p^w$ $\mathbf{t}^e - (1 - \phi) p^w \mathbf{n}^w 0$	$U_n^w + [\mathbf{u}^e \mathbf{n}^p (1-\phi) + U_n^p \phi] = 0$
material poroelástico (^{p1}) material poroelástico (^{p2})	$\frac{\tau^{p_1}}{\phi^{p_1}} = \frac{\tau^{p_2}}{\phi^{p_2}}$ $\mathbf{t}^{p_1} + \tau^{p_1} \mathbf{n}^{p_1} + \mathbf{t}^{p_2} + \tau^{p_2} \mathbf{n}^{p_2} = 0$	$\mathbf{u}^{e_1} = \mathbf{u}^{e_2}$ $\phi^{p_1}(U_n^{p_1} - \mathbf{u}^{e_1}\mathbf{n}^{p_1})$ $+\phi^{p_2}(U_n^{p_2} - \mathbf{u}^{e_2}\mathbf{n}^{p_2}) = 0$

Tabla 2.11. Condiciones de equilibrio y compatibilidades en las interfases.

2.6.3.Duplicación de nodos en bordes angulosos y estrategia de colocación no nodal

Como ya se ha puesto de manifiesto a lo largo de los epígrafes precedentes, el fin de este trabajo consiste en la resolución de modelos acoplados que involucren los tres tipos de medios cuya formulación se ha ido desgranando. Hasta ahora se ha estudiado cómo una vez discretizado el contorno se aplica sobre cada región su ecuación integral de gobierno en puntos exclusivamente del contorno y cómo abordar la evaluación de las integrales en cada caso. Además se ha puesto de manifiesto el vínculo (equilibrio y compatibilidad) que debe haber en los nodos que pertenecen simultáneamente a elementos de regiones distintas. Con todo, falta construir la matriz global del sistema cuya resolución conduce a la solución del problema. La dificultad de generar esta matriz resulta evidente si se analiza la complejidad del problema: Por un lado, puede existir nodos situados en "bordes angulosos", es decir nodos que pertenece simultáneamente a dos o más elementos con vectores normales asociados distintos lo que implica una falta de continuidad en las tensiones o flujos (derivadas de la variables primarias). Por otro, un nodo puede pertenecer a regiones de distinta naturaleza lo que conlleva a que presente distinto número de grados de libertad si se considera como perteneciente a una u otra región. Toda esta casuística complica enormemente idear un procedimiento que tenga en cuenta todas las combinaciones posibles. Una técnica que simplifica esta tarea, ya empleada por Medina (1987) en problemas de interacción 2D y por Maeso (1992) en un modelo acoplado 3D, consiste en duplicar los nodos que forman parte de la intersección de contornos con diferentes restricciones tantas veces como interfases confluyan, logrando de esta forma desvincular los grados de libertad correspondiente a cada región (figura 2.7). Esta técnica, que resulta muy práctica a la hora de montar la matriz del sistema, presenta el inconveniente que supone aumentar el número de nodos del modelo en lo relativo al incremento de grados de libertad y por tanto del tamaño del sistema de ecuaciones a resolver. Teniendo en cuenta que el número de nodos duplicados es bajo en relación con el número total de nodos del modelo, la técnica resulta del todo conveniente.



Figura 2.7. Duplicación de nodo en problemas de borde.

Matemáticamente al duplicar el nodo duplicamos la variable primaria **u** y su derivada **t** en dicho borde $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ lo que permite plantear la ecuación integral discretizada con colocación en el nodo duplicado:

donde en \mathbf{h}_{11} y \mathbf{h}_{22} se incluye el término libre y en $\overline{\mathbf{f}}$ se recoge el producto de los valores impuestos ($\overline{\mathbf{u}}$ y $\overline{\mathbf{t}}$) en todo el contorno y los coeficientes de integración correspondientes.

Dependiendo del problema, esta estrategia como vamos a ver a continuación resulta insuficiente en determinados casos. Así por ejemplo, cuando ambos contornos pertenecen a la misma región y se duplica por problemas de continuidad en la normal, serán datos dos de las cuatro incógnitas. No existe ningún inconveniente cuando estos dos datos son las dos tensiones o una tensión y un desplazamiento, ya que resolviendo el sistema de ecuaciones (2.78) se pueden calcular las otras dos variables. El problema se da cuando son ambos desplazamientos los que son conocidos ($\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \overline{\mathbf{u}}$) debido a las condiciones de contorno. En este caso las dos ecuaciones (2.78) son iguales y el sistema es singular. Esta situación, que no es exclusiva del caso que ha servido de ejemplo, se presenta con relativa frecuencia y se conoce como "problema de esquina". Así, el problema aparece también en nodos que forman parte de interfases entre regiones distintas. Una técnica ya empleada por los mismos autores referenciados anteriormente que permite evitar este inconveniente se basa en la sustitución de una de las ecuaciones (o ambas) de (2.78) por otra en la que el punto de colocación se encuentre ligeramente desplazado. Haciendo esto, es evidente que el punto de colocación no coincide con

ningún nodo de la discretización, con lo que los coeficientes del sistema serán ligeramente diferentes y el sistema de ecuaciones resultante perderá su carácter singular. Este procedimiento, denominado "colocación no nodal", exige algunos retoques tanto en la igualdad integral discretizada como en los procedimientos para la evaluación numérica de los coeficientes integrales en el propio elemento y elementos cercanos. Además empleando este procedimiento se facilita el uso de discretizaciones no conformes que facilitan el mallado de los distintos contornos al poder disminuir o incluso eliminar elementos a la hora de realizar transacciones entre zonas de la discretización con distinto tamaño de elementos (figura 2.8).

La igualdad integral discretizada (2.69) para un punto de colocación i interior al elemento genérico Γ_k , queda modificada ligeramente quedando como sigue:

$$\mathbf{c}^{i} \mathbf{\Phi} \mathbf{u}^{k} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} \mathbf{p}^{*} \mathbf{\Phi} \ d\Gamma \right\} \mathbf{u}^{j} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} \mathbf{u}^{*} \mathbf{\Phi} \ d\Gamma \right\} \mathbf{p}^{j}$$
(2.79)

siendo \mathbf{u}^k el vector de desplazamientos nodales del elemento Γ_k y $\mathbf{\Phi}$ la matriz de funciones de forma particularizadas para las coordenadas naturales $\left(\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2\right)$ del punto de colocación. El término libre será siempre en estos casos $c_{lk}^i = 0.5 \delta_{lk}$. Todo lo relacionado con esta estrategia puede consultarse en Chirino, Maeso, & Aznárez (2000) y Aznárez (2002).



Figura 2.8. Estrategia de colocación no nodal en problemas de esquina (a) y en discretizaciones no conformes (b).

Índice

Capítulo 1: Introducción

1.1. El medio poroelástico
1.2. El Método de los Elementos de Contorno (MEC)
1.3. Cálculo de impedancias dinámicas de cimentaciones pilotadas en suelos
saturados
1.4. Respuesta sísmica de presas bóveda
1.5. Descripción de contenidos

Capítulo 2: Ecuaciones de Onda en Problemas Escalares, Elásticos y Poroelásticos. Formulación Mediante el MEC

2.1. Introducción
2.2. Ecuaciones de gobierno en elastodinámica, problemas escalares y
poroelasticidad armónica
2.2.1. Ecuaciones básicas en elastodinámica armónica
2.2.2. Ecuaciones básicas en medios escalares en dinámica
2.2.3. Ecuaciones básicas en poroelastodinámica armónica
2.3. Propagación de ondas en medios elásticos, escalares y poroelásticos 2-5
2.3.1. Propagación de ondas en medios elásticos
2.3.2. Propagación de ondas en medios escalares
2.3.3. Propagación de ondas en medios poroelásticos
2.4. Formulación integral y solución fundamental armónica
2.4.1. Formulación integral armónica
2.4.2. Solución fundamental armónica
2.4.3. Formulación Integral en el Contorno
2.5. El Método de los Elementos de Contorno en Problemas Armónicos.
Aspectos numéricos relevantes

2.5.1. Discretización del contorno
2.5.2. Evaluación de las Integrales en el Contorno
2.6. Modelo acoplado. Condiciones de contorno y formulación de las condiciones
en las interfases
2.6.1. Condiciones exteriores
2.6.2. Condiciones en las interfases
2.6.3. Duplicación de nodos en bordes angulosos y estrategia de
colocación no nodal
Capítulo 3: Problemas de Interacción Suelo Estructura: Impedancia de
Cimentaciones Pilotadas en Terrenos Saturados
3.1. Introducción
3.2. Aplicación del Modelo Acoplado MEC al problema. Sistema de ecuaciones
a resolver
3.3. Validación del modelo
3.3.1. Pilotes embebidos en un semi-espacio viscoelástico
3.3.2. Pilotes embebidos en un semi-espacio poroelástico lleno de fluido3-11
3.4. Análisis numérico y discusión de resultados
3.4.1. Influencia de la flexibilidad de los pilotes (pilote simple)
3.4.2. Influencia de la permeabilidad de suelo
(pilote simple y grupos de pilotes)
3.4.3. Influencia de la condición de contorno hidráulica a lo largo de la
interfase pilote-suelo (grupos de pilotes)
3.5. Conclusiones

Capítulo 4: Propagación de Ondas Planas Armónicas en el semiespacio Elástico. Ecuaciones de Campo

4.1. Introducción	I-1
4.2. Problema bidimensional con ángulo de incidencia general	1-1
4.2.1. Reflexión de ondas SH	1-4
4.2.2. Reflexión de ondas P	1-7