CAPÍTULO 1

TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS

1.1 INTRODUCCIÓN.

Un juego es una situación con ciertas reglas que envuelve a un grupo de agentes en la cual dichos agentes pueden obtener ciertos beneficios. En un juego cada agente intenta conseguir el mayor resultado posible, teniendo en cuenta que el resultado del juego depende tanto de sus acciones como de las acciones de otros agentes. Es ésta la característica de los juegos: tomar las decisiones que más convienen para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego, y sabiendo que los demás agentes también influyen en los resultados con sus decisiones.

En economía se estudian a menudo situaciones de decisión individual, en las que el agente intenta maximizar su utilidad, sin importar lo que hagan los otros. Por ejemplo:

- Elección de cantidades de cada bien a comprar por parte de un consumidor. Se suponen datos los precios de los bienes, así como la renta del consumidor.
- Elección de cantidades de un bien a producir por parte de una empresa. Se suponen dados los precios del bien y de los factores de producción y conocida la función de producción.
- Elección del precio de un bien por monopolista. Se suponen dados los precios de los factores de producción y la curva de demanda de dicho bien y conocida la función de producción.

Sin embargo, hay muchas otras situaciones en que la utilidad del resultado final no depende solo de la acción del agente, sino también de los otros agentes:

- Elección por la empresa A de la cantidad a producir de un bien o del precio de dicho bien, si también los produce la empresa B y ninguna más (duopolio). Los resultados finales para la empresa A dependen de sus propias decisiones y de las de B.
- Elección por una empresa de automóviles de un nivel de gasto en publicidad. Las consecuencias finales de dicho gasto dependen del gasto realizado en publicidad por las empresas competidoras.
- Elección por un coleccionista de su puja (cantidad de dinero que ofrece) en la subasta de un cuadro. Los resultados (consigue o no que se adjudiquen el cuadro subastado) dependen también de la puja de otros participantes.

El planteamiento según el cual no importa lo que hagan otros agentes es más bien una simplificación de la realidad. La *teoría de juegos* se ocupa, por tanto, del análisis riguroso y sistemático de esas situaciones, donde interfieren las acciones de los agentes. Así pues, la teoría de juegos podría llamarse teoría de la decisión interactiva, que es diferente de la teoría de la decisión individual. Fue introducida por Von

Neumann y Morgenstern [10] en 1944 y numerosos premios noveles de economía han trabajado sobre ello, Aumann, Sentel, Shapley.

Algunos aspectos básicos en un juego son los siguientes. Se denominan *jugadores* a los agentes del juego que toman las decisiones con el fin de maximizar su utilidad. Son dos o más. Las *acciones de cada jugador* son las decisiones que puede tomar cada jugador en cada momento que le toque jugar. El conjunto de acciones de un jugador en cada momento del juego puede ser finito o infinito. Una *estrategia* de un jugador es un plan completo de acciones con las que éste podría proponerse participar en dicho juego. Un perfil de estrategias es un conjunto de estrategias, una por cada jugador. Los jugadores pueden formar grupos que realicen acciones y estrategias conjuntas. A estos grupos se les llama *coaliciones*. Los *resultados del juego* son los distintos modos en los que puede concluir un juego. Cada resultado lleva aparejado unas consecuencias para cada agente. Cada jugador recibe un pago al acabar el juego, que depende de cuál haya sido el resultado del juego. El significado de dicho pago es la utilidad que cada jugador atribuye a dicho resultado; es decir, la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado en el juego.

Hay dos tipos de juegos básicos, o dicho de otro modo, dos enfoques diferentes en el análisis de un juego: cooperativos y no cooperativos.

En el enfoque *cooperativo* se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo. Dos aspectos son vitales en dicho análisis: qué coaliciones se formarán y cómo se repartirán los beneficios obtenidos.

Entre los juegos *no cooperativos* caben dos distinciones básicas: los juegos estáticos o dinámicos, y juegos con o sin información completa. En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones simultáneamente (cada jugador decide sin saber que han decidido los demás), mientras que en los dinámicos puede darse el caso de que un jugador conozca ya las decisiones de otro antes de decidir. En los juegos con información completa, todos los jugadores conocen las consecuencias, para sí mismos y para los demás, del conjunto de decisiones tomadas, mientras que en los juegos con información incompleta, algún jugador desconoce algunas de las consecuencias.

1.2 JUEGOS COOPERATIVOS.

Como se comentó antes existe la posibilidad de que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos vinculantes (a los que estarían obligados de manera eludible), que denominamos coaliciones. Si en el juego las únicas acciones posibles de los jugadores son la realización de cooperaciones con otros el juego se reduce a estudiar los resultados que puede obtener cada una de las coaliciones de jugadores que se puedan formar. Se trata de analizar cómo puede actuar un grupo de jugadores, interesándonos en los comportamientos colectivos y sin que haya falta de detenerse en las acciones individuales de cada uno de los miembros de la coalición. Dos preguntas han de responderse ante una situación como ésta: qué coaliciones se formarán y cómo se repartirán los beneficios obtenidos. En esta sección veremos cómo la teoría de juegos cooperativos responde a la segunda pregunta.

Sea $J = \{1, 2, .. n\}$ un conjunto finito de jugadores. Sea $P(J)$ el conjunto de las partes de J, que está formado por cada una de las posibles coaliciones que se pueden formar dentro de J (incluyendo la coalición sin jugadores que es $\emptyset$).

Haremos dos suposiciones más con la idea de reducir el problema. Consideramos que cada coalición puede determinar la mejor consecuencia que sus componentes pueden asegurarse teniendo en cuenta sus acciones y la de los jugadores exteriores. Supongamos además que las utilidades de los jugadores son transferibles, lo cual quiere decir que las ganancias o pérdidas que se obtienen al actuar como coalición pueden repartirse entre los jugadores que la componen; en ocasiones este reparto no es posible por lo que no existe una forma de transferir la unidad, problemas que no serán objeto del estudio. En un juego cooperativo de unidad transferible, se llama *función característica* a una función que asigna a cada coalición un número real, asignando al conjunto vacío el valor cero. Es decir,

$$v: P(J) \to \mathbb{R}$$

$$S \to v(S),$$

verificando que $v(\emptyset) = 0$. Esta última imposición sin interpretación posible es sólo una condición técnica.

Para una coalición $S \in P(J)$, al número $v(S)$ se le llama *valor* de la coalición y se interpreta como el valor mínimo que puede obtener la coalición S si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo. Se trata por tanto del valor que una coalición toma sus decisiones de forma adecuada. En este caso utilizaremos la interpretación de $v(S)$ como beneficios, aunque también mostraremos otras interpretaciones como la de costos.

Definición 1.1:

Un juego cooperativo de unidad transferible consiste, por tanto, en un par $G = (J, v)$ dado por:

- *Un conjunto finito de jugadores $J = \{1, 2, \dots n\}$.*
- *Una función característica, que asocia a cada subconjunto S de J (o coalición) un número real $v(S)$ (valor de la coalición), siendo $v(\emptyset) = 0$.*

Se dice que un juego $G = (J, v)$ es *monótono* si para todo $S, T \subseteq J$, con $S \subseteq T$, se verifica que:

$$v(S) \leq v(T).$$

Hablamos de un juego cooperativo monótono cuando al crecer el número de jugadores que forman una coalición el beneficio o pago de esta coalición no disminuye.

Definición 1.2:

Se dice que un juego es superaditivo si para todo $S, T \subseteq J$, *con* $S \cap T = \emptyset$, *se verifica que:*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T).$$

Es decir, si dos coaliciones disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior que la suma de los beneficios de las coaliciones originales. Nos interesan, por lo tanto, los juegos superaditivos. Si extendemos la condición de superaditivo a coaliciones no disyuntas obtenemos un tipo de juegos con grandes propiedades.

Uno de los problemas a resolver en este tipo de juegos es qué coaliciones se formarán. Para simplificar el problema consideramos que la coalición que se formará será J. Sin embargo la monotonía de v no garantiza el interés de los jugadores en J ya que pondrían de mutuo acuerdo grupos más pequeños cuya suma de pagos sea superior.

Definición 1.3:

Se dice que un juego $G = (J, v)$ *es convexo si para todo* $S, T \subset J$, *se verifica que*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

Esta inecuación se expresa de la forma

$$v(S) + v(T) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T)$$

Es decir, si dos coaliciones disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior que la suma de los beneficios de las coaliciones originales menos el valor de intersección entre dichas coaliciones.

Ambos conceptos son aplicables también a juegos de costos sin más que cambiar las desigualdades. El juego (J, v) es *subaditivo* si para todo $S, T \subseteq J$ con $S \cap T = \emptyset$ se tiene que $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$.

- Ejemplo 1:

Una finca rústica está valorada por su actual propietario en 350.000 euros. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 700.000 euros. Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor de la finca sería de 775.000 euros.

Representamos la situación de un juego cooperativo de utilidad transferible. Sea $J = \{1,2,3\}$ donde el jugador 1 es el empresario que ofrece acondicionar la finca como polígono industrial, la jugadora 2 es la empresa constructora y el jugador 3 es el propietario actual de la finca.

Función característica para este juego cooperativo:

Tanto el jugador 1 como el jugadora 2 necesitan el acuerdo del jugador 3 (el propietario) para poder utilizar la finca. Sin la participación del jugador 3 no se puede hacer nada, no se puede obtener ningún beneficio. Por consiguiente, se obtiene que

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{1,2\}) = 0.$$

Si el jugador 3 no coopera con ninguno de los otros dos jugadores mantiene la situación actual, es decir, mantiene la finca tal y como está, a la cual valora en 350.000 euros. Si llega a un acuerdo solo con el jugador 1 para obtener el mayor valor posible, obtendrán entre los dos 700.000 euros. Si llega a un acuerdo exclusivamente con la jugadora 2 para obtener el mayor valor posible obtendrán entre los dos 775.000 euros. Finalmente si cooperan los 3 jugadores y deciden llevar conjuntamente adelante el proyecto que dé mayor valor al mercado, obtendrán entre los tres, 775.000 euros. Es decir,

$$v(\{3\}) = 350,\ v(\{1,3\}) = 700,\ v(\{2,3\}) = 775,\ v(\{1,2,3\}) = 775.$$

En donde los valores de la función característica vienen expresados en miles de euros.

Por tanto, la representación del juego en forma coalicional es (J, v) en donde:

$$J = \{1, 2, 3\}$$

$$v: P(J) \to \mathbb{R}, \text{ con}$$

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 350,$$

$$v(\{1,2\}) = 0, v(\{1, 3\}) = 700, v(\{2, 3\}) = 775, v(\{1,2,3\}) = 775.$$

En donde los valores de la función característica vienen expresados en miles de euros.

Se trata de un juego de beneficios superaditivo pero no convexo.

- Ejemplo 2:

Tres comunidades cercanas a una gran ciudad consideran la posibilidad de desarrollar un sistema de tratamiento de aguas residuales. En ese momento dichas comunidades mandan sus aguas residuales a una planta de tratamiento situada en la gran ciudad, pagando por ello a las autoridades de la ciudad una tarifa mensual.

Un estudio realizado mediante la técnica de análisis de coste-beneficio estima el valor presente de estos pagos a lo largo del tiempo de vida habitual de una planta de tratamiento en 100 dólares por familia. Para construir y mantener una planta propia de tratamiento de aguas residuales para el mismo periodo se ha estimado el valor presente del coste en función del NFI (número de familias implicadas), habiéndose obtenido igual a:

$$500.000, \text{ si } 0 \leq NFI \leq 5.000,$$

$$600.000, \text{ si } 5.000 < NFI \leq 10.000,$$

$$700.000, \text{ si } 10.000 < NFI \leq 15.000$$

La comunidad 1 se estima que sirve de media a 5.000 familias durante el periodo sujeto a estudio. Análogamente la comunidad 2 sirve a 3.000 familias y la comunidad 3 a 4.000.

Juego en forma coalicional:

Sea $J = \{1, 2, 3\}$, donde la jugadora 1 es la comunidad 1, la jugadora 2 es la comunidad 2 y la jugadora 3 es la comunidad 3.

Para obtener la función característica: supongamos en primer lugar que la comunidad 1 va sola, sin formar coalición con ninguna otra comunidad. Como esta comunidad está formada por 5.000 familias, el valor presente de los pagos que están realizando (contando el período de tiempo de vida habitual de una planta de tratamiento) será de 5.000 (nº de familias) por 100 (pago por familia), igual a 500.000. Si se deciden a construir y mantener una planta propia, el valor presente del coste es igual a 500.000 dólares, por tratarse de 5.000 familias. A la comunidad 1 le cuesta lo mismo seguir como está que construir una planta propia, por lo que no gana nada construyendo una nueva planta y el valor de la coalición formada exclusivamente por la comunidad 1 es cero.

Si es la comunidad 2 la que va sola necesitaría 500.000 dólares para construir y mantener una planta propia, mientras que actualmente soporta un coste de 3.000 (nº de familias) por 100 (pago por familia) igual a 300.000. Por tanto le conviene seguir como está y eso supone que el valor de la coalición formada exclusivamente por la comunidad 2 es igual a cero. Análogamente, la comunidad 3 soporta actualmente un coste de 400.000, mientras que si tuviera que construir y mantener una planta propia tendría un coste de 500.000. Le conviene seguir como está y el valor que toma la función característica es también igual a cero: es decir,

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0.$$

Consideremos ahora la coalición formada por las comunidades 1 y 2. Ello supone que hay 8.000 familias implicadas. Actualmente soportan un coste de 8.000 multiplicando por 100, igual a 800.000. Si construyen una planta propia que sirva a las 8.000 familias implicadas tendría un coste de 600.000. Por tanto, les convendrá construir la nueva planta lo cual les supone una ganancia de 2 (en cientos de miles de dólares). Razonando de manera análoga para las otras dos coaliciones posibles formadas por dos comunidades tenemos:

$$v(\{1,2\}) = 2, v(\{1,3\}) = 3, v(\{2,3\}) = 1.$$

Por último, si las 3 comunidades deciden trabajar conjuntamente y formar una coalición hay 12.000 familias implicadas. Actualmente soportan un coste de 1.200.000 dólares, mientras que si construyen una nueva planta conjuntamente tendrán un coste de 700.000 dólares. Por tanto, les conviene construir la nueva planta y eso les supone una ganancia de 5 (en ciento de miles de dólares). Por tanto,

$$v(\{1,2,3\}) = 5.$$

Así el juego es el juego de costos subaditivo,

$$J = \{1,2,3\}$$

$$v: P(J) \to \mathbb{R}$$

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 2, v(\{1,3\}) = 3, v(\{2,3\}) = 1,$$

$$v(\{1,2,3\}) = 5.$$

- <u>Ejemplo 3:</u>

Dos centros de investigación, que designaremos como jugadores 1 y 2 respectivamente, han obtenido de manera independiente fórmulas muy parecidas de un nuevo fármaco para aliviar la jaqueca. El centro 1 ha patentado y homologado su fórmula para el conjunto de los países asiáticos y para Estados Unidos.

La comercialización de uno de los fármacos produciría unos beneficios de 7 billones de dólares en el mercado asiático, de 3 billones en el mercado europeo y de 3 billones en Estados Unidos. Si se comercializan a la vez los dos fármacos en un mismo mercado, los beneficios se repartirían a partes iguales.

Por otra parte, supongamos que hay dos empresas, jugadoras 3 y 4, que tienen los factores y la tecnología necesarios para la fabricación de los fármacos, pero que cada una de ellas tiene una limitación en la producción ya que sólo puede abastecer al mercado asiático y a uno de los otros mercados (europeo o americano).

La posesión de la fórmula magistral o de los medios de producción, por separado, no aporta valor. Cualquiera de las dos empresas puede fabricar y comercializar cualquiera de los dos fármacos pero cada uno delos centros que posee una de las fórmulas sólo puede conceder su licencia a una de las empresas, y cada empresa sólo puede obtener una licencia.

La representación del juego coalicional es la siguiente:

$$J = \{1,2,3,4\},$$

donde los jugadores están especificados en el enunciado.

Obtengamos la función característica: cada coalición en la que no hay al menos un centro de investigación y una empresa no puede tener ningún beneficio. Por tanto,

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 0, v(\{4\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 0, v(\{3,4\}) = 0.$$

Cuando un solo centro de investigación llega a un acuerdo de cooperación con una sola de las empresas, la coalición que se forma de centro con empresa se garantiza un beneficio de 3,5 (la mitad del beneficio del mercado asiático) más 3 (correspondiente al mercado europeo o al americano). Por tanto,

$$v(\{1,3\}) = v(\{1,4\}) = v(\{2,3\}) = v(\{2,4\}) = 6{,}5.$$

Cuando cooperan los dos centros de investigación con sólo una de las empresas (cualquiera que sea), alcanzan conjuntamente un beneficio de 7 (mercado asiático) más 3 (uno de los mercados europeo o americano). Por tanto,

$$v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2,4\}) = 10.$$

Cuando se forma una coalición formada por las dos empresas y un solo centro de investigación (cualquiera que sea), alcanzan conjuntamente un beneficio de 7 (mercado asiático) más 3 (mercado europeo si el centro 1 está en la coalición, mercado americano si el centro de investigación 2 está en la coalición). Por tanto,

$$v(\{1,3,4\}) = v(\{2,3,4\}) = 10.$$

Por último si deciden trabajar conjuntamente los dos centros de investigación y las dos empresas, alcanzarán conjuntamente un beneficio de 7 (mercado asiático) más 3 (mercado europeo) más 3 (mercado americano). Es decir,

$$v(\{1,2,3,4\}) = 13.$$

Por tanto, la representación de un juego en forma coalicional es:

$$J = \{1,2,3,4\}$$

$v: P(J) \to R$, con

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 0, v(\{4\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 0, v(\{3,4\}) = 0,$$

$$v(\{1,3\}) = 6{,}5\ v(\{1,4\}) = 6{,}5\ v(\{2,3\}) = 6{,}5\ v(\{2,4\}) = 6{,}5,$$

$$v(\{1,2,3\}) = 10\ v(\{1,2,4\}) = 10\ v(\{1,3,4\}) = 10\ v(\{2,3,4\}) = 10$$

$$v(\{1,2,3,4\}) = 13.$$

1.3 EL CONJUNTO DE IMPUTACIONES

Sea $G = (J, v)$ un juego cooperativo de utilidad transferible superaditivo, en donde $J = \{1,2 \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y v es la función característica. Si como hemos supuesto en el juego los jugadores deciden trabajar conjuntamente, es decir, cooperar, el único problema que se presenta consiste en cómo repartir el valor $v(J)$ entre los n jugadores.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector de distribución de pagos, en donde para cada $i = 1, 2, \dots, n$, x_i representa el pago que recibe el jugador $i \in J$. Para cualquier coalición $S \subseteq J$, se utilizará la siguiente notación:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \ .$$

Si deseamos hacer un reparto del valor de J entonces debemos exigir el "principio de eficiencia", esto es que:

$$x(J) = v(J).$$

Por otro lado, ningún jugador admitiría que su situación individual fuese mejor que su pago en la coalición, esto es para todo $i \in J$ se verifica el "principio de racionalidad individual" de que

$$x_i \geq v(\{i\}).$$

Definición 1.4:

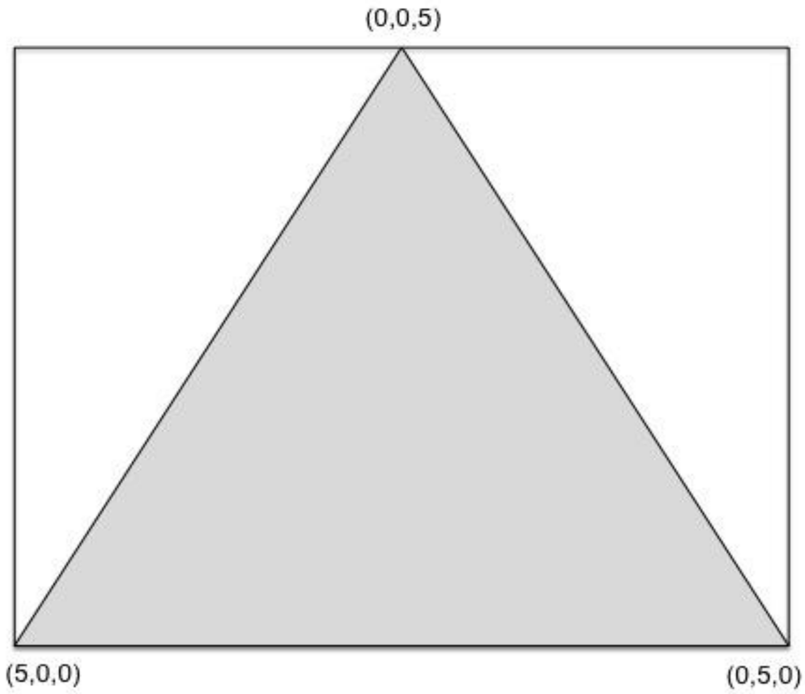
El conjunto de imputaciones de un juego cooperativo en su forma coalicional es

$$I(J, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(J) = v(J), x_i \geq v(\{i\}) \ \forall i \in J\}.$$

En las siguientes figuras mostramos el conjunto de imputaciones para cada juego cooperativo correspondiente a los distintos ejemplos.

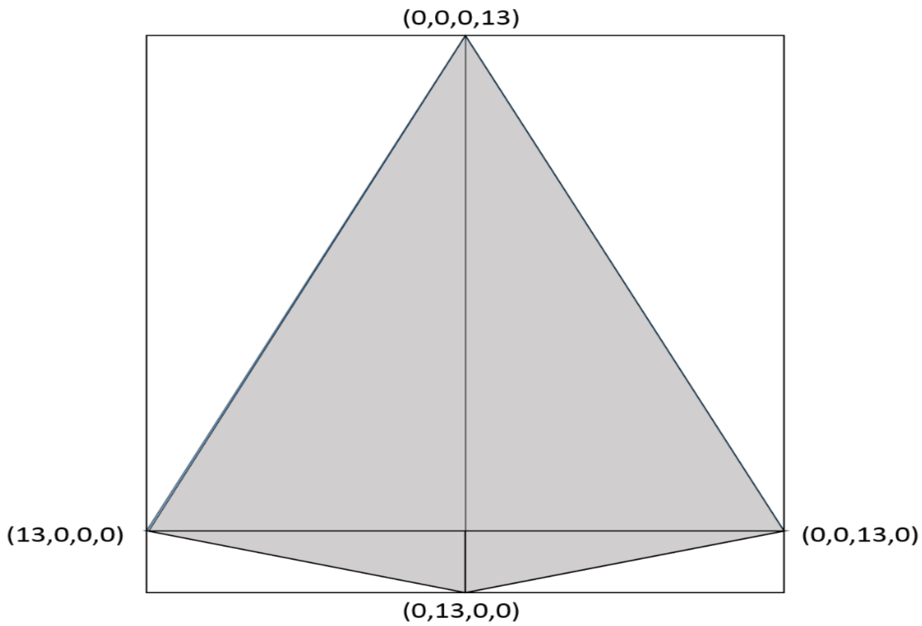
- <u>Ejemplo 1:</u>

- <u>Ejemplo 2:</u>



En el caso de un juego de costos, $I(J, v) = \{x \in \mathbb{R}^n: x(J), x_i \leq v(\{i\}) \forall i \in J\}$

- Ejemplo 3:



Sin embargo, la exigencia de más condiciones puede no ser básicas para todas las situaciones de beneficios y costos. Por ello, hablamos en esos casos de conceptos de solución. En las siguientes tres secciones veremos tres distintos conceptos de solución.

1.4 EL CORE

Siguiendo con el principio de racionalidad individual, podemos pensar exigir la "racionalidad condicional", esto es, para todo $S \subseteq J$ ocurre que $x(S) \geq v(S)$.

Definición 1.5:

El core de un juego $G = (J, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de pagos:

$$C(J, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x(J) = v(J), x(S) \geq v(S), \forall\ S \epsilon P(J)\}$$

El core anterior es utilizado para problemas de beneficios. Cuando el problema es de costos, el core de un juego $G = (J, v)$, sería:

$$C(J, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x(J) = v(J), x(S) \leq v(S), \forall\, S \in P(J)\}$$

Sea $G = (J, v)$ un juego cooperativo. El conjunto $C(J, v)$ es cerrado, acotado y convexo. Sin embargo, el principal problema del core es que puede ser o muy grande o bien incluso vacío. Si el core es vacío tendremos que olvidar la búsqueda de soluciones racionales para todas las coaliciones. Si es grande, la cuestión es cuál de sus vectores de pagos escoger.

Veamos una condición equivalente a que el core sea no vacío. Una familia $\{S_1, \dots S_n\}$ de subconjuntos de J, distintos y no vacíos, es *equilibrada* sobre J si existen números positivos $\alpha_1, \dots \alpha_m$, denominados pesos, tales que para todo $i \in J$ verifican:

$$\sum_{\{j : i \in S_j\}} \alpha_j = 1 \,.$$

Se dice que un juego es *equilibrado* si para una familia equilibrada $\{S_1, \dots, S_m\}$ sobre J, con pesos $\alpha_1, \dots \alpha_m$ se verifica que:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, v(S_j) \leq v(J) \,.$$

Esto es, ninguna partición ponderada de J obtiene mejores beneficios.

<u>Teorema 1.6:</u>

Un juego es equilibrado si y sólo si el core es no vacío.

- <u>Ejemplo 1:</u>

Obtenemos el core del juego de la finca rústica del ejemplo anterior.

Pertenecerán al core los puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfagan las siguientes restricciones:

$x_1 + x_2 + x_3 = 775$ (principio de eficiencia)

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 350$ (racionalidad individual),

$x_1 + x_2 \geq 0,\ \ x_1 + x_3 \geq 700,\ \ x_2 + x_3 \geq 775$ (racionalidad para las coaliciones formadas por dos jugadores)

Es decir, los elementos del core son los puntos que pertenecen al conjunto de imputaciones del juego y, además, verifican las restricciones correspondientes a la racionalidad para las coaliciones de los dos jugadores.

Teniendo en cuenta la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = 775$ (principio de eficiencia), se tiene que

$$x_1 + x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 775 - x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 775$$

$$x_1 + x_3 \geq 700 \Leftrightarrow 775 - x_2 \geq 700 \Leftrightarrow x_2 \leq 75$$

$$x_2 + x_3 \geq 775 \Leftrightarrow 775 - x_1 \geq 775 \Leftrightarrow x_1 \leq 0$$

Por tanto, $C(J, v)$ está formado por los vectores de pago $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$ verificando

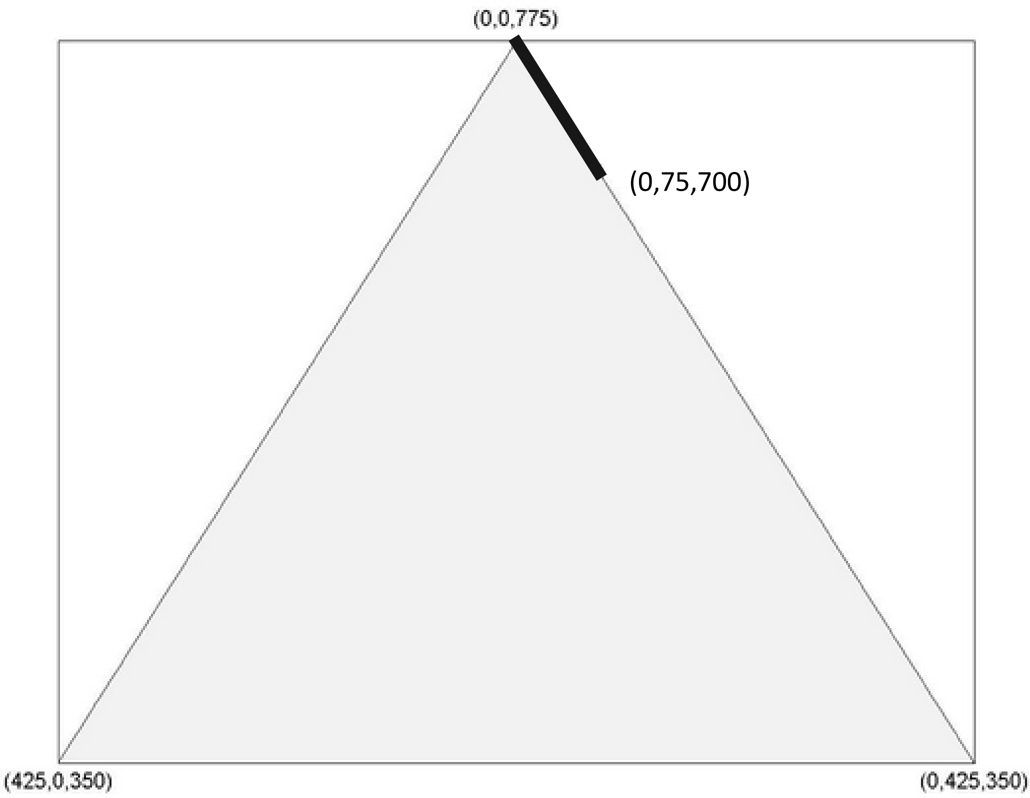
$\{ x_1 + x_2 + x_3 = 775\ , x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 350 \leq x_3 \leq 775\} = \{ x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 350 \leq 775 - x_2 \leq 775, x_3 = 775 - x_2\} = \{ x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 0 \leq x_2 \leq 425, , x_3 = 775 - x_2\} = \{(0, x_2, 775 - x_2) : 0 \leq x_2 \leq 75\}$

Las distribuciones de pagos (x_1, x_2, x_3) que cumplen el principio de eficiencia y no pertenecen al core son inaceptables para alguna coalición que se pueda formar y consigue mejores resultados de los que se obtienen con(x_1, x_2, x_3) . Así por ejemplo:

- (50, 75,650) no interesaría a la coalición {2, 3}, que puede obtener por sí misma 775, que es mayor que 75+650=725, cantidad que obtiene con la distribución de pagos (50, 75,650).

- (0, 100,675) no interesaría a la coalición {1,3}, que puede obtener por sí misma 700, que es mayor que 0+675=675, que obtiene dicha coalición con la distribución de pagos dada.
- $(\frac{775}{3}, \frac{775}{3}, \frac{775}{3})$ no interesaría a la coalición {2,3}, que puede obtener por sí misma 775, que es una cantidad mayor que $\frac{775}{3} + \frac{775}{3}$, cantidad que obtiene dicha coalición con la distribución de pagos dada.

En la siguiente figura, el core es el segmento resaltado en uno de los lados del conjunto de imputaciones, entre los vértices (0,0,775) y (0,75,700).



- Ejemplo 2:

Para el problema de costos y razonando de la misma forma que para el problema anterior, obtenemos el core:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 \leq 0; x_2 \leq 0;\ x_3 \leq 0;$$

$$x_1 + x_2 \leq 2;\ x_1 + x_3 \leq 3;\ x_2 + x_3 \leq 1$$

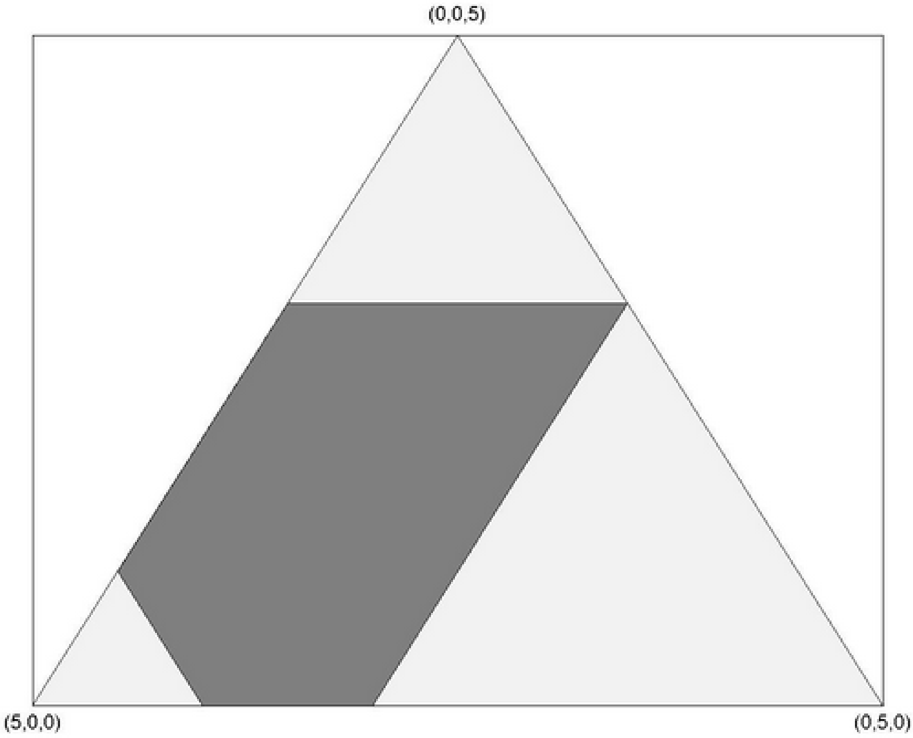
Teniendo en cuenta $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ (principio de eficiencia), se tiene que:

$x_1 + x_2 \leq 2 \rightarrow 5 - x_3 \leq 2;\ x_3 \geq 3$

$x_1 + x_3 \leq 3 \rightarrow 5 - x_2 \leq 3;\ x_2 \geq 2$

$x_2 + x_3 \leq 1 \rightarrow 5 - x_1 \leq 1;\ x_1 \geq 4$

$$C(J, v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 5; 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 3\}$$



- <u>Ejemplo 3:</u>

Las restricciones que deben cumplir los elementos del core en este caso son las siguientes:

Principio de eficiencia: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13,$

Racionalidad individual: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$

Racionalidad de las coaliciones formadas por dos jugadores:

$x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + x_3 \geq 6.5, x_1 + x_4 \geq 6.5, x_2 + x_3 \geq 6.5, x_2 + x_4 \geq 6.5, x_3 + x_4 \geq 0,$

Racionalidad de las coaliciones formadas por tres jugadores:

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10, x_1 + x_2 + x_4 \geq 10, x_1 + x_3 + x_4 \geq 10, x_2 + x_3 + x_4 \geq 10,$

Utilizando la igualdad del principio de eficiencia en las desigualdades correspondientes a la racionalidad de coaliciones de tres jugadores, queda:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \Leftrightarrow 13 - x_4 \geq 10 \Leftrightarrow x_4 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 + x_4 \geq 10 \Leftrightarrow 13 - x_3 \geq 10 \Leftrightarrow x_3 \leq 3$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \geq 10 \Leftrightarrow 13 - x_2 \geq 10 \Leftrightarrow x_2 \leq 3$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 10 \Leftrightarrow 13 - x_1 \geq 10 \Leftrightarrow x_1 \leq 3$$

Es imposible que $x_1 \leq 3, x_3 \leq 3$ y a la vez $x_1 + x_3 \geq 6.5$. Por tanto, el core de este juego es el conjunto vacío. Sin embargo este juego sí tiene imputaciones, como se vio antes.

1.5. EL NUCLEOLO

Supongamos un juego con core no vacío, buscamos ahora una solución determinada. El concepto de nucléolo propone una solución única que pertenece al core si éste es no vacío.

Sea un juego (J, v) el *exceso* o queja de una coalición S con respecto a una imputación $x \in I(J, v)$ es la diferencia entre el valor de la coalición S y lo que recibe dicha coalición por la distribución x. Es decir:

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i \ .$$

Se trata de una medida del grado de insatisfacción de la coalición S con la imputación x.

Para dicha imputación $x \in I(J,v)$, se define el *vector de excesos* como el siguiente vector $\theta(x)$, con componentes:

$$\theta(x) = (e(S,x))_{S\in P(J)} = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_{2^n}(x)),$$

donde $\theta_k(x) \geq \theta_{k+1}(x),\ \forall k = 1,2,\dots,2^n - 1$

Se considera el orden lexicográfico entre las imputaciones que definimos formalmente a continuación:

Sean $x, x' \in I(J,x)$ dos imputaciones,

a) $\theta(x) <_L \theta(x') \iff \theta_1(x) < \theta_1(x')$, o bien, para $\theta_j(x) < \theta_j(x')$ y $\theta_i(x) = \theta_i(x')$, para $i = 1, \dots, j-1$
b) $\theta(x) =_L \theta(x') \Leftrightarrow \theta_j(x) = \theta_j(x'), \forall j$
c) $\theta(x) \leq_L \theta(x') \Leftrightarrow \theta(x) <_L \theta(x')$ o bien $\theta(x) =_L \theta(x')$

Por tanto dos vectores de excesos, para compararlos según el orden lexicográfico, se observan sólo las dos primeras componentes; si la primera componente de un vector es menor que la primera componente del otro vector el primer vector es menor que el segundo según el orden lexicográfico definido. Si los dos vectores tienen iguales sus primeras componentes se comparan sus segundas componentes siendo menor según el orden lexicográfico aquel vector cuya segunda componente sea menor. Si sus segundas componentes son iguales se comparan sus terceras componentes y así sucesivamente.

Definición 1.7:

El nucleolo de un juego (J,v) es el conjunto $N(J,v)$ definido de la siguiente forma:

$$N(J,v) = \{x \in I(J,v) : \theta(x) \leq_L \theta(y), \forall y \in I(J,v)\}$$

Por tanto, se puede decir que el nucleolo contiene aquellas distribuciones de pagos que son imputaciones, y para las cuales se minimiza el mayor de los grados de insatisfacción.

Teorema 1.8:

Sea (J,v) un juego esencial (lo cual quiere decir que su conjunto de imputaciones es no vacío). Entonces se verifica que el nucleolo existe y es único.

Proposición 1.1:

Una condición suficiente para que el nucleolo exista y sea único es que:

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J).$$

Se dice que dos jugadores i,j son simétricos en un juego (J,v) si realizan aportaciones equivalentes para cada coalición. Es decir, si se cumple que:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \text{ para todo } S \in P(J), \text{ con } i,j \notin S.$$

Se dice que el jugador i es un *jugador pasivo* en el juego (J,v) si no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores. Es decir, si se cumple que:

$$v(S) = v(S\{i\}) + v(\{i\}), \forall\, S \text{ con } i \in S.$$

Proposición 1.2:

Se considera el juego (J,v). El nucleolo $N(J,v)$ verifica las siguientes propiedades:

1) *Si el core del juego es no vacío, entonces $N(J,v) \in C(J,v)$.*
2) *Si i,j son simétricos en (J,v) entonces $N_i(J,v) = N_j(J,v)$*
3) *Si i es pasivo en (J,v) entonces $N_i(J,v) = v(\{i\})$.*

- Ejemplo 1:

Cálculo del nucleolo del juego de la finca rústica.

En el apartado anterior se ha calculado el core de dicho juego:

$$C(J, v) = \{(0, x_2, 775 - x_2): 0 \leq x_2 \leq 75\}$$

Como se sabe que el nucleolo existe y es único, es uno de los puntos del core. Por tanto, es de la forma $x = (0, a, 775 - a)$, con $0 \leq a \leq 75$.

Aplico la definición de nucleolo. Para cada uno de los puntos candidato a nucléolo calculamos el exceso:

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_{i.}$$

Recordamos la representación del juego en forma coalicional:

$$J = \{1, 2, 3\}$$

$$v: P(J) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con}$$

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 350,$$

$$v(\{1,2\}) = 0, v(\{1,3\}) = 700, v(\{2,3\}) = 775, v(\{1,2,3\}) = 775$$

Sabemos que $e(\emptyset, x) = e(J, x) = 0$, para todo x.

Los valores de $e(S, x)$ para $S \in P(J)$, con $S \neq \emptyset$ y $S \neq J$, para cada $0 \leq a \leq 75$, son los siguientes:

	$v(S)$	$x(S)$	$e(S,x)$
$\emptyset$	0	0	0
{1}	0	0	0
{2}	0	a	$-a$
{3}	350	$775 - a$	$a - 425$
{1,2}	0	a	$-a$
{1,3}	700	$775 - a$	$a - 75$
{2,3}	775	775	0

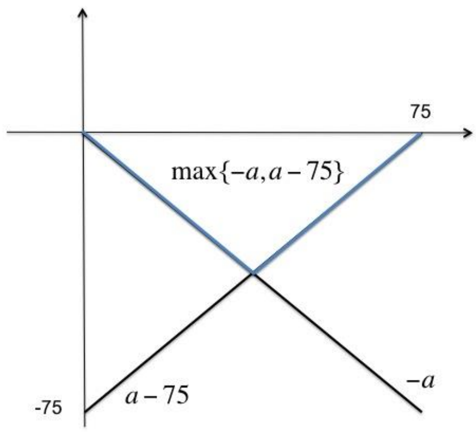
Ahora hay que comparar los vectores de excesos para los distintos candidatos a nucleolo, para lo cual solo interesan aquéllos excesos que dependen de a. El nucleolo será el vector $x = (0, a, 775 - a)$, con $0 \leq a \leq 75$, correspondiente al valor de a que sea solución óptima del siguiente problema:

$$\min_{0 \leq a \leq 75}\{\max\{-a, a - 475, a - 75\}\}.$$

Como es evidente que $a - 475 < a - 75$, el problema anterior se puede expresar como:

$$\min_{0 \leq a \leq 75}\{\max\{-a, a - 75\}\}.$$

Se resuelve fácilmente con una representación gráfica. Se representa la variable a en abcisas y para los valores de a comprendidos entre 0 y 75 se representa las funciones $-a \ y \ a - 75$. A la vista de las gráficas de las dos funciones represento con trazo grueso la función $M(a) = \max\{-a, a - 75\}$. Finalmente se resuelve el problema $\min_{0 \leq a \leq 75} M(a)$ obteniéndose que el valor óptimo es a^*=37,5; por lo que el nucléolo del juego es $N(J, v) = (0, 37.5, 737.5)$.



Cuando el problema sea de costos, el vector de excesos será de la siguiente forma:

$$e(S, x) = x(S) - v(S) = \sum_{i \epsilon S} x_i - v(S),$$

Y se obtendrá el máximo de los mínimos esfuerzos.

El nucleolo es una solución ideal puesto que siempre está en el core cuando existe, sin embargo su método de cálculo tiene una complejidad algorítmica muy alta. Veamos aquí otra opción de único vector de pagos.

- Ejemplo 3:

El core de este juego es el conjunto vacío. Por otra parte se cumple la condición que nos permite afirmar que el nucléolo existe y es único.

Sea $N(J, v) = (N_1, \dots, N_n)$ el nucleolo. Si 1 y 2, y, 3 y 4 son jugadores simétricos, entonces $N_1 = N_2$ y $N_3 = N_4$. Además el nucleolo es una imputación, por lo que debe cumplir el principio de eficiencia, verificándose por tanto, que $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = v(J) = 13$, así como el principio de racionalidad individual, por lo que debe ser $N_i \geq 0$, para todo $i = 1,2,3,4$.

Por tanto el nucleolo debe ser uno de los vectores de la siguiente familia:

$x = (a, a, 6.5 - a, 6.5 - a)$, con $0 \leq a \leq 6.5$.

Procediendo de la misma forma que en el ejemplo 1 se obtiene que el nucleolo del juego es: $N = (3.25, 3.25, 3.25, 3.25)$.

1.6 EL VALOR DE SHAPLEY

Se trata de hacer una distribución de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados criterios, llamados axiomas, previamente establecidos.

Sea $G = (J, v)$, un juego en forma coalicional, en donde $J = \{1, 2, \dots n\}$. Se considera la siguiente asignación de pagos para los n jugadores:

$$\Phi(J, v) = (\Phi_1(J, v), \Phi_2(J, v), \dots, \Phi_n(J, v)) \in \mathbb{R}^n$$

La función de asignación de pagos $\emptyset(J, v)$ debe cumplir los siguientes axiomas:

Axioma 1:

Eficiencia. La función de asignación $\emptyset(v)$ debe distribuir el pago total del juego. Es decir, debe ser:

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i (J, v) = v(J)$$

Axioma 2:

Simetría. Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición, es decir, tales que cumplan que:

$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, para todo $S \epsilon P(J)$, con $i, i \notin S$, debe ser $\Phi_i(J, v) = \Phi_j(J, v)$.

Axioma 3:

Tratamiento del jugador pasivo. Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores no debe recibir ningún pago coalicional. Es decir, para cada jugador $i \in J$, para el cual se verifica que:

$v(S) = v(S\{i\}) + v(\{i\})$, para toda coalición S con $i \in S$, debe ser $\Phi_i(J, v)$=$v(\{i\})$.

Axioma 4:

Aditividad. La función de designación $\emptyset$ debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Formalmente, dados dos juegos cualesquiera (J, v_1) y (J, v_2) debe ser:

$$\Phi(J, v_1 + v_2) = \Phi(J, v_1) + \Phi(J, v_2).$$

Existe una única asignación que verifica los axiomas 1, 2, 3 y 4.

Teorema 1.9:

La única asignación $\Phi(v) = (J, v)$ que verifica los axiomas 1,2, 3 y 4 es:

$$\Phi_i(J, v) = \sum_{S \epsilon P(J)} q(s)[v(S) - v(S\{i\})],$$

donde: $q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$, y siendo $s = |S|$, el número de jugadores que hay en la coalición S.

Definición 1.10:

El valor de Shapley de un juego $\Phi(J, v)$ es la única solución del teorena anterior.

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. En efecto, el valor $v(S) - v(S\{i\})$ es la contribución marginal efectiva de i al incorporarse a $S\{i\}$, mientras que el factor $q(S)$ es la probabilidad de que a i le toque incorporarse precisamente a $S\{i\}$.

- Ejemplo 1:

Calculo ahora el valor de Shapley para el juego de la finca rústica. Se trata de un juego de 3 jugadores y, por tanto, el valor de Shapley es

$$\Phi(J, v) = (\Phi_1(J, v), \Phi_2(J, v), \Phi_3(J, v))$$

En donde,

$$\Phi_1(J, v) = \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\})] - v(\{2,3\})] = \frac{1}{3}[0] + \frac{1}{6}[0 - 0] + \frac{1}{6}[700 - 350] + \frac{1}{3}[775 - 775] = \frac{350}{6}.$$

$$\Phi_2(J, v) = \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\})] - v(\{1,3\})] = \frac{1}{3}[0] + \frac{1}{6}[0 - 0] + \frac{1}{6}[775 - 350] + \frac{1}{3}[775 - 700] = \frac{425}{6} + \frac{75}{3} = \frac{575}{6}.$$

$$\Phi_3(J, v) = \frac{1}{3}v(\{3\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\})] - v(\{1,2\})] = \frac{1}{3}[350] + \frac{1}{6}[700 - 0] + \frac{1}{6}[775 - 0] + \frac{1}{3}[775 - 0] = \frac{3725}{6}.$$

Por tanto, el valor de Shapley del juego es

$$\Phi(J,v) = (\frac{350}{6},\frac{575}{6},\frac{3725}{6}).$$

El valor de Shapley tiene una formulación sencilla y manejable, pero sin embargo no siempre está en el core cuando éste es no vacío, como ocurre en el ejemplo 1.

- Ejemplo 3:

  Se trata de un juego de 4 jugadores:

  $$\Phi(J,v) = (\Phi_1(J,v),\Phi_2(J,v),\Phi_3(J,v),\Phi_4(J,v))).$$

  Actuando de la misma forma que en el ejemplo 1, el valor de Shapley de este juego sería:

  $$\Phi(J,v) = (\frac{13}{4},\frac{13}{4},\frac{13}{4},\frac{13}{4}).$$

Teorema 1.11:

Si (J,v) es un juego convexo entonces $\Phi(J,v) \in C(J,v)$.