

2. Modelos de circuito

En este capítulo se exponen las características de los modelos de circuito empleados, así como las ecuaciones utilizadas para abordar el problema de la determinación de los parámetros del modelo de circuito de las máquinas de inducción.

2.1. Elección del modelo

Un modelo es una representación físico-matemática de una serie de fenómenos que ocurren a nuestro alrededor provocados por la naturaleza o por la invención humana.

El modelo de circuito de un motor de inducción trata de representar, de forma simplificada, los fenómenos que suceden en su interior. La potencia absorbida de la red, en este estudio se ha considerado trifásica y alterna, es suministrada al devanado trifásico del estator. Este devanado, por el teorema de Ferraris, crea un flujo magnético giratorio. Por la ley de Ampère, se induce una f.e.m, de la misma pulsación que la corriente estatórica, en el circuito rotórico. Este circuito está cortocircuitado, tanto si se trata de un rotor en jaula de ardilla como de un rotor bobinado. Al estar cortocircuitado, comienza a circular una corriente por sus conductores. Por el mismo principio que gobierna la generación de un flujo magnético en el estator, se genera un flujo magnético rotórico. De forma que los dos flujos, estatórico y rotórico, interaccionan dando lugar a un flujo mutuo. El flujo cíclico mutuo atraviesa un material ferromagnético que da origen a pérdidas por corrientes parásitas y por histéresis. No todo el flujo establecido por el devanado estatórico necesariamente enlaza al devanado del rotor, y viceversa, existiendo sendas reactancias de fuga para estator y rotor. La interacción del campo del estator con las corrientes del rotor produce un par de giro. Por el principio de acción y reacción, el sentido de este par de giro será tal que trata de oponerse a la causa que lo ha generado, que no es más que el desplazamiento relativo de las líneas del campo respecto de los conductores rotóricos. Así, el rotor empezará a girar siguiendo al campo magnético en su giro. Incluso estando en vacío, siempre existirá al menos un pequeño par resistente debido a la fricción con el aire, los cojinetes, etcétera. Por este motivo la velocidad de giro del rotor nunca será igual a la del campo magnético (velocidad de sincronismo), pues si esto sucediera, no se induciría f.e.m en los conductores del rotor, no circularía corriente por ellos y el par se haría nulo, resultando en la detención de la

máquina. Esta diferencia de velocidades también debe ser modelada, y para ello se emplea una magnitud ficticia: el deslizamiento, s [2],[3]¹.

Mediante un modelo de circuito relativamente simple se intenta representar el comportamiento de todos estos fenómenos físicos que suceden en el interior de una máquina de inducción.

La elección del modelo de circuito depende del objetivo del estudio [4]. Por ejemplo, cuando son de interés las características del arranque es necesario usar un modelo de rotor de doble jaula. Por otro lado, cuando interesan las características desde la velocidad de sincronismo hasta la velocidad máxima, un modelo de jaula simple normalmente es suficiente. El modelo de jaula simple también puede ser adecuado en técnicas de control para motores con velocidad ajustable, donde las pérdidas en el hierro también son consideradas. Los parámetros del modelo de circuito de un motor de inducción, (de un modelo de jaula simple), se determinan normalmente mediante ensayos como la medida de la resistencia del estator, pruebas de funcionamiento en vacío y de rotor bloqueado.

El modelo de circuito de un motor de inducción más comúnmente usado, el de jaula simple, (Figura 2.1), consta de siete parámetros. Este modelo de circuito puede reproducir las características de un motor desde la velocidad de funcionamiento nominal hasta la velocidad de par máximo pero proporciona resultados con un mayor nivel de error durante los periodos de arranque y aceleración, es decir, a baja velocidad. Sin embargo, la característica par-deslizamiento, ($T-s$), a bajas velocidades juega un papel fundamental en el análisis del arranque y la aceleración. Asimismo, otros estudios sugieren que la mayoría de las máquinas empleadas tienen doble jaula o disponen de ranuras profundas, cuyos efectos son apreciables para deslizamientos más elevados [4]. Con el fin de obtener mejores resultados en el arranque y a bajas velocidades es necesario considerar un modelo de circuito de doble jaula. En algunos casos puede no existir un solo grupo de parámetros que pueda predecir las características de par, intensidad y factor de potencia en todo el rango de velocidades, incluso con un modelo de doble jaula [5]. En [4] y [6] los autores afirman que no es posible determinar todos los parámetros de forma unívoca. Se puede aspirar a encontrar una de las infinitas soluciones matemáticas disponibles. Esta solución dependerá principalmente del algoritmo empleado y de la solución inicial. Muchos estudios han solucionado este problema estableciendo relaciones entre algunos parámetros. En algunos casos esto se ha hecho debido a la falta de datos suficientes para encontrar todos los parámetros. En otros buscando la simplificación del modelo. En este trabajo se aborda el problema de la determinación de los parámetros empleando para ello un modelo completo. Sin relaciones entre parámetros, siempre que se disponga de los suficientes datos para ello.

¹ Debido al enfoque de este trabajo se emplearán los términos máquina de inducción y motor de inducción indistintamente, haciendo referencia a la misma realidad física, la máquina de inducción.

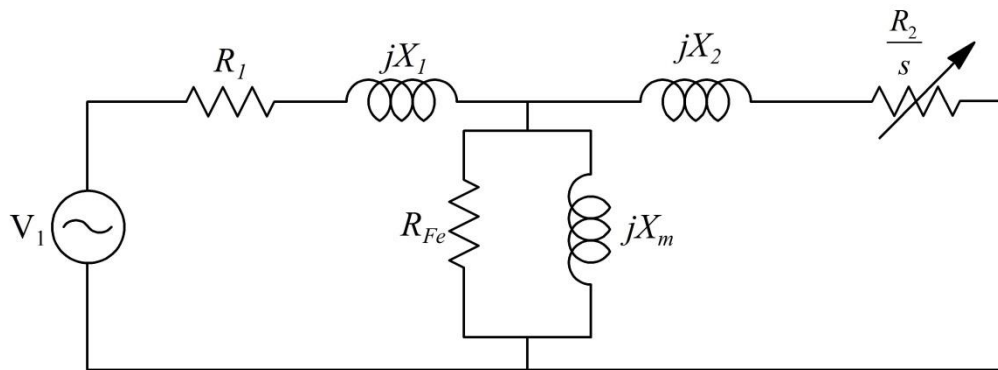


Figura 2.1. Modelo de circuito de jaula simple

Los elementos que componen el modelo de circuito de jaula simple, (Figura 2.1), son:

- Resistencia estatórica: R_1
- Reactancia estatórica: X_1
- Resistencia rotórica: R_2
- Reactancia rotórica: X_2
- Resistencia del hierro: R_{Fe}
- Reactancia de magnetización: X_m

En la región normal de operación, la frecuencia de la intensidad rotórica es muy baja y el *IEEE Standards 112* [7] recomienda hacer el ensayo de rotor bloqueado a baja frecuencia. Los parámetros del motor determinados a baja frecuencia no difieren mucho de los valores en corriente continua y pueden utilizarse desde el deslizamiento nominal al deslizamiento de par máximo. Sin embargo, al aumentar el deslizamiento y aumentar la frecuencia eléctrica del rotor, la combinación del flujo a través de las ranuras puede alterar significativamente el valor de los parámetros, especialmente en motores con barras de gran sección en el rotor. También se observa que los parámetros del rotor no son constantes sino dependientes del deslizamiento. El uso de parámetros fijos en el modelo de circuito de jaula simple es una de las principales razones de que se incremente el nivel de error (o de discrepancia entre simulación y medida) a bajas velocidades o grandes deslizamientos. Una forma de incorporar los efectos de la frecuencia rotórica a los parámetros del motor, es ajustar sus valores mediante fórmulas empíricas para predecir el par de arranque [8]. Mediante este ajuste, un modelo de circuito de jaula simple puede proporcionar una característica par-velocidad similar a la obtenida mediante un modelo de rotor de doble jaula.

2.2. Modelo de circuito de jaula simple con parámetros ajustados con el deslizamiento

Un modelo de circuito de jaula simple como el de la Figura 2.1 puede proporcionar una característica similar de par-velocidad a la de un modelo de doble jaula, cuando los parámetros del rotor, (R_2 y X_2), se ajustan en función del deslizamiento. El modelo de circuito de jaula simple con parámetros ajustados con el deslizamiento utilizado en este trabajo es el que se muestra en la Figura 2.2. El ajuste empírico de los parámetros utilizado es adecuado para motores NEMA de tipo B (diseño equivalente al N de IEC) y se describe en [8].

Para $s > s_{max}$:

$$R_2(s) = \left(\beta_r + (1 - \beta_r) \cdot \sqrt{\frac{s}{s_{max}}} \right) \cdot R_{20} \triangleq f_r(s) \cdot R_{20} \quad (2.1)$$

$$X_2(s) = \left(\beta_x + (1 - \beta_x) \cdot \sqrt{\frac{s_{max}}{s}} \right) \cdot X_{20} \triangleq f_x(s) \cdot X_{20} \quad (2.2)$$

Para $s < s_{max}$:

$$R_2(s) = R_{20} \text{ y } X_2(s) = X_{20} \quad (2.3)$$

En (2.3), R_{20} y X_{20} son la resistencia rotórica y la reactancia de dispersión a baja frecuencia, respectivamente, y s_{max} es el deslizamiento correspondiente al punto de par máximo.

En diversos estudios [5][1] toman las variables β_r y β_x como constantes e iguales a 0.5 y 0.4, respectivamente. Por el contrario, en este trabajo se tomarán como variables adicionales dentro del problema de determinación de los parámetros internos del motor de inducción, siempre y cuando los datos disponibles lo permitan.

El equivalente Thévenin de la Figura 2.2 se muestra en la Figura 2.3 donde los parámetros, (V_{th} , R_{th} y X_{th}), vienen dados por:

$$V_{th} = \frac{V_1 \cdot Z_m}{Z_1 + Z_m} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{Z}_{th} = \frac{\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_m}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_m} \triangleq R_{th} + jX_{th} \quad (2.5)$$

dónde: $\mathbf{Z}_1 = R_1 + jX_1$ y $\mathbf{Z}_m = \frac{R_{Fe} \cdot jX_m}{R_{Fe} + jX_m}$

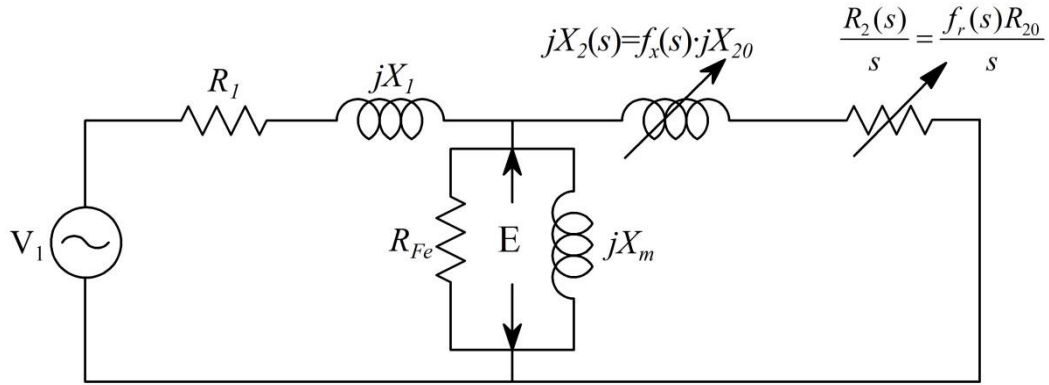


Figura 2.2. Modelo de circuito de jaula simple con parámetros ajustados con el deslizamiento

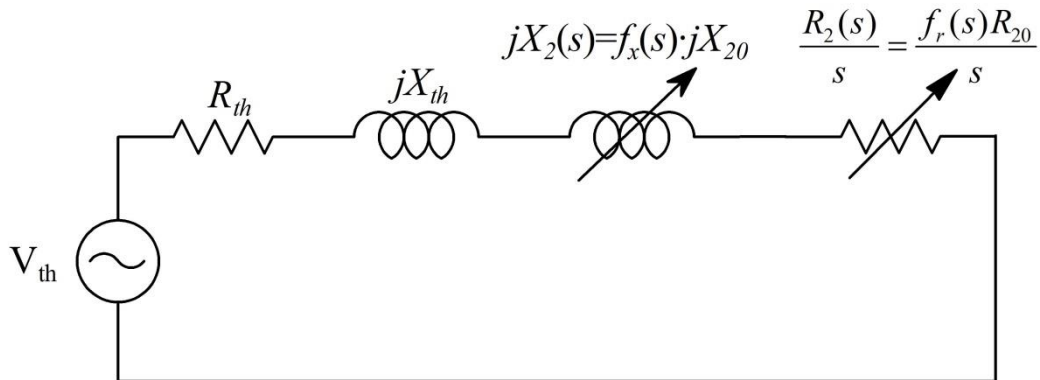


Figura 2.3. Equivalente Thévenin del modelo de circuito de jaula simple con parámetros ajustados con el deslizamiento

El valor de s_{max} empleado en (2.1) y (2.2) viene dado por:

$$s_{max} = \frac{R_{20}}{\sqrt{R_{20}^2 + (X_{th} + X_{20})^2}} \quad (2.6)$$

La mayoría de los métodos para determinar los parámetros del motor a partir de los datos de catálogo ignoran las pérdidas en el hierro. Esto hace que los resultados de dichos estudios no puedan usarse para calcular el rendimiento del motor y, por tanto, la intensidad y factor de potencia. Sin embargo, la estimación del rendimiento es muy importante en aplicaciones como la gestión de la energía.

Un motor de inducción tiene cuatro componentes principales de pérdidas:

- Pérdidas en el hierro, P_{Fe}
- Pérdidas Joule en el estator y en el rotor, P_{j1} y P_{j2} , respectivamente.
- Pérdidas mecánicas (rozamiento y ventilación), P_{mec}

En general, la suma de P_{Fe} y P_{mec} puede considerarse constante en la región normal de operación, pero las pérdidas Joule dependen de la carga. En otros trabajos, la suma de P_{Fe} y P_{mec} en la región normal de operación se considera como una constante, (P_{cont}) [5][1]. Primero se determina a plena carga y posteriormente se divide en P_{Fe} y P_{mec} , usando unas constantes predefinidas basadas en la experiencia. Sin embargo, en este estudio, P_{mec} , será considerada como un parámetro más del motor de inducción, y por tanto se determinará con el resto de parámetros. Las pérdidas en el hierro serán calculadas conforme a la relación física pertinente.

Como se dijo anteriormente, el modelo de circuito de jaula simple tiene seis parámetros independientes cuando se desprecian las pérdidas en el hierro. Sin embargo, cuando estas pérdidas se tienen en cuenta, existen siete parámetros. Por tanto, para la determinación de los parámetros del modelo de circuito de la Figura 2.2, es necesario encontrar los valores de 9 variables, (6 parámetros, P_{mec} , β_r y β_x).

Las características del motor suministradas por el fabricante son menos sensibles a la resistencia del estator, (R_1), y por este motivo, algunos estudios [5][4][1] estiman que este parámetro puede considerarse como:

$$R_1 = \alpha_r \cdot R_{20} \quad (2.7)$$

Aquí α_r es una constante positiva. Tal y como se dijo, P_{const} se determina a plena carga y posteriormente se divide en P_{Fe} y P_{mec} . Por tanto, la segunda constante puede considerarse como:

$$P_{Fe} = \alpha_c \cdot P_{const} \Rightarrow (1 - \alpha_c) \cdot P_{const} \quad (2.8)$$

Aquí α_c es otra constante positiva cuyo valor se encuentra entre cero y uno. Conociendo P_{Fe} , el valor de R_{Fe} puede evaluarse mediante:

$$R_{Fe} = \frac{3 \cdot |E(s_n)|^2}{P_{Fe}} \quad (2.9)$$

Aquí $E(s_n)$ es la tensión en la rama de magnetización de la Figura 2.2 en el punto nominal.

Con las relaciones (2.7) y (2.8), el problema se transformaría en la determinación de 7 parámetros independientes: (X_1 , R_{20} , X_{20} , X_m), las pérdidas fijas P_{const} , β_r y β_x .

En este estudio, siempre que los datos disponibles lo permitan, las relaciones anteriores no se emplearán. Se han explicado para dejar claro que este estudio busca determinar los parámetros del motor de inducción sin emplear relaciones ficticias entre ellos. Relaciones que si bien muchos estudios demuestran que existen, no tienen por qué cumplirse en todos los casos de la realidad. Por este motivo considerar estas relaciones como válidas sesgaría los valores de los parámetros determinados.

2.2.1. Análisis de un punto de funcionamiento

Para un deslizamiento dado, la impedancia de entrada es (Figura 2.2):

$$\mathbf{Z}_{in}(s) = \mathbf{Z}_1 + \frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{Z}_2(s)}{\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_2(s)} \quad (2.10)$$

Aquí $\mathbf{Z}_2(s)$ es la impedancia rotórica que viene dada por:

$$\mathbf{Z}_2(s) = \frac{R_2(s)}{s} + jX_2(s) \quad (2.11)$$

Las magnitudes de intensidad estatórica, I_1 , e intensidad rotórica, I_2 , vienen dadas por:

$$I_1(s) = |\mathbf{I}_1(s)| = \left| \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_{in}(s)} \right| \quad (2.12)$$

$$I_2(s) = |\mathbf{I}_2(s)| = \left| \frac{\mathbf{Z}_p}{\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_2(s)} \right| \cdot I_1(s) \quad (2.13)$$

La potencia del entrehierro, P_a es:

$$P_a(s) = 3 \cdot I_2^2(s) \cdot \frac{R_2(s)}{s} \quad (2.14)$$

La tensión en la rama de magnetización es:

$$\mathbf{E}(s) = |\mathbf{E}(s)| = |\mathbf{V}_1 - \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{I}_1(s) \cdot (\cos\varphi(s) - j\sin\varphi(s))| \quad (2.15)$$

$$\mathbf{E}(s) = |\mathbf{E}(s)| = |\mathbf{V}_1 - \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{I}_1(s)| \quad (2.16)$$

El ángulo del factor de potencia es el mismo ángulo de $\mathbf{Z}_{in}(s)$:

$$\varphi(s) = \arg(\mathbf{Z}_{in}(s)) \quad (2.17)$$

La potencia de pérdidas en el hierro es:

$$P_{Fe} = \frac{3 \cdot |\mathbf{E}(s_n)|^2}{R_{Fe}} \quad (2.18)$$

La potencia útil nominal es:

$$P_u(s_n) = (1 - s_n) \cdot P_a(s_n) - P_{mec} = 3 \cdot (1 - s_n) \cdot I_2^2(s_n) \cdot \frac{R_{20}}{s_n} - P_{mec} \quad (2.19)$$

Debido a que $s_n < s_{max}$, $R_2(s_n) = R_{20}$ según (2.1).

Las potencias activa y reactiva consumidas o absorbidas de la red, para deslizamientos inferiores al de par máximo, son:

$$P_{in}(s) = P_u(s) + 3 \cdot I_1^2(s) \cdot R_1 + 3 \cdot I_2^2(s) \cdot R_{20} + P_{Fe} + P_{mec} \quad (2.20)$$

$$Q_{in}(s) = 3 \cdot I_1^2(s) \cdot X_1 + 3 \cdot I_2^2(s) \cdot X_{20} + \frac{3 \cdot E^2(s)}{X_m} \quad (2.21)$$

El par máximo es:

$$T_{max} = T(s_{max}) = \frac{3}{2 \cdot \Omega_s} \cdot \frac{V_{th}^2}{R_{th} + \sqrt{R_{th}^2 + (X_{th} + X_{20})^2}} \quad (2.22)$$

Donde Ω_s es la velocidad de sincronismo en rad/s.

El par de arranque es:

$$T(1) = \frac{P_a(1)}{\Omega_s} = \frac{3 \cdot I_2^2(1) \cdot f_r(1) \cdot R_{20}}{\Omega_s} \quad (2.23)$$

En la Figura 2.3, el módulo de la intensidad rotórica en el arranque se puede escribir como:

$$I_2(1) = \frac{V_{th}}{\sqrt{(R_{th} + f_r(1) \cdot R_{20})^2 + (X_{th} + f_x(1) \cdot X_{20})^2}} \quad (2.24)$$

2.3. Modelo de circuito de doble jaula

El modelo de circuito de doble jaula mostrado en la Figura 2.4 consta de ocho parámetros diferentes:

- Resistencia estatórica: R_s
- Reactancia estatórica: X_{sd}
- Resistencia rotórica interna: R_1
- Resistencia rotórica externa: R_2
- Reactancia rotórica interna: X_{1d}
- Reactancia rotórica interna: X_{2d}
- Resistencia del hierro: R_{Fe}
- Reactancia de magnetización: X_m

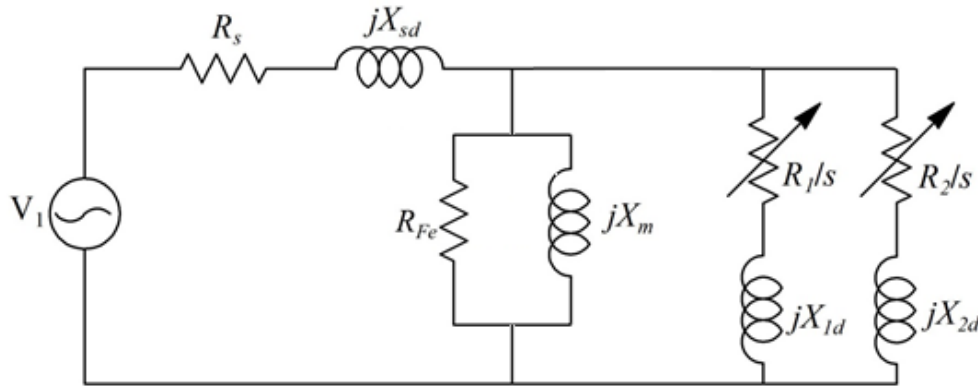


Figura 2.4. Modelo de circuito de doble jaula

La jaula interna, está representada por los parámetros R_1 y X_{1d} , y la jaula externa, por R_2 y X_{2d} . En aquellos trabajos en los que se imponía una relación entre las resistencias de estator y rotor, en el modelo de jaula simple, también se impone una relación entre la reactancia estatórica y la reactancia rotórica de la jaula externa:

$$X_{2d} = k_x X_{sd} \quad (2.25)$$

Sin embargo, en este estudio, como se comentó antes, este tipo de relaciones no se van a emplear.

El modelo de jaula doble presenta como ventaja no necesitar un ajuste empírico de sus parámetros por lo que es válido para casi cualquier tipo de motor de inducción tanto de doble jaula como de ranuras profundas. A diferencia de los modelos simplificados empleados en otros estudios, en este caso, este modelo también puede emplearse para

realizar análisis energéticos, puesto que se incluye la resistencia del hierro. Por otro lado, este modelo no tiene una expresión sencilla para el par máximo como sucede en el modelo de jaula simple, por lo que se necesita determinar en primer lugar los parámetros de un modelo de circuito de jaula simple, (Figura 2.5), para calcular el deslizamiento de par máximo y utilizarlo en la determinación de los parámetros del modelo de doble jaula, si no se dispone de información necesaria para incluirlo como variable. La expresión del deslizamiento de par máximo para el modelo de circuito de jaula simple es:

$$s_{max} = \frac{R_{20}}{\sqrt{R_{20}^2 + (X_{th} + X_{20})^2}} \quad (2.26)$$

Esta expresión se presentó más arriba (2.6), sin embargo, aquí:

$$\mathbf{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th} = \frac{1}{\frac{1}{R_s + jX_{sd}} + \frac{R_{Fe} \cdot jX_m}{R_{Fe} + jX_m}} \quad (2.27)$$

En algunos casos, no se emplea este deslizamiento calculado con el modelo de jaula simple, sino que se calculará con los parámetros del modelo de jaula doble. Esto es posible asociando las ramas en paralelo de la jaula rotórica, dando lugar a un circuito equivalente igual al de jaula simple. Aquellos casos para los que se emplee esta solución serán detallados en capítulos posteriores.

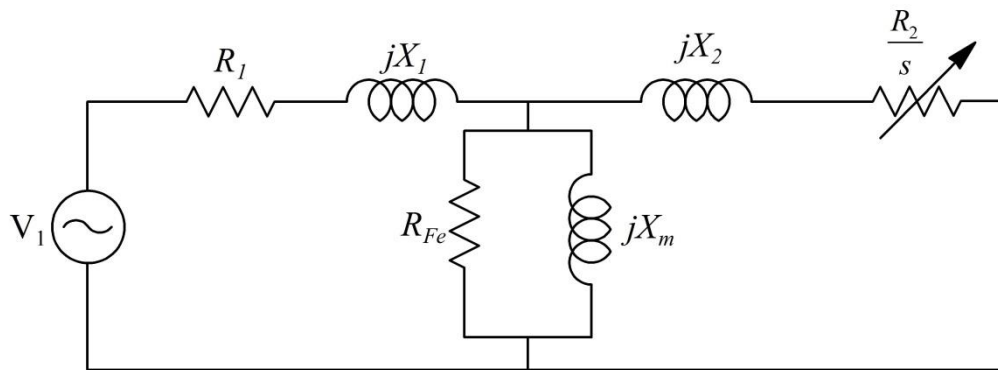


Figura 2.5. Modelo de circuito de jaula doble tras asociar las impedancias en paralelo del rotor, equivalente al modelo de circuito de jaula simple

2.3.1. Análisis de un punto de funcionamiento

Para un deslizamiento dado, las intensidades estatórica, I_s , y rotórica I_r , son:

$$I_s(s) = |I_s(s)| = \left| \frac{V_1}{R_s + jX_{sd} + Z_{sp}(s)} \right| \quad (2.28)$$

$$I_r(s) = |I_r(s)| = \left| \frac{Z_{sp}(s) \cdot I_s(s)}{\frac{R_r}{s} + jX_{rd}} \right| \quad (2.29)$$

dónde:

$$Z_{sp} = \frac{1}{\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_m} + \frac{1}{\frac{R_r}{s} + jX_{rd}}} \quad (2.30)$$

Si bien en la figura aparecen R_2 y X_2 , en las ecuaciones estos parámetros son los que se obtienen tras realizar el paralelo entre las ramas rotóricas interna y externa. Es decir, R_2 y X_2 no son la resistencia y reactancia de la rama externa en la Figura 2.5, sino que son: $R_r = R_2$ y $X_{rd} = X_2$.

Par en función del deslizamiento:

$$T(s) = \frac{I_r^2(s) \cdot R_r}{\Omega_s \cdot s} \quad (2.31)$$

Par máximo:

$$T(s_{max}) = \frac{I_r^2(s_{max}) \cdot R_r}{\Omega_s \cdot s_{max}} \quad (2.32)$$

Empleando el circuito de la Figura 2.5, las potencias útil, activa y reactiva absorbidas, así como la del entrehierro, se calculan empleando las mismas expresiones que para el caso del modelo de jaula simple.

En el caso del modelo de circuito de doble jaula, (Figura 2.4), dado un punto de funcionamiento, las intensidades estatórica, I_s , y rotóricas, por las jaulas interna y externa, respectivamente, I_1 e I_2 :

$$I_s(s) = |I_s(s)| = \left| \frac{V_1}{R_s + jX_{sd} + \mathbf{Z}_{sh}(s)} \right| \quad (2.33)$$

$$I_1(s) = |I_1(s)| = \left| \frac{\mathbf{Z}_{sh}(s) \cdot I_s(s)}{\frac{R_1}{s} + jX_{1d}} \right| \quad (2.34)$$

$$I_2(s) = |I_2(s)| = \left| \frac{\mathbf{Z}_{sh}(s) \cdot I_s(s)}{\frac{R_2}{s} + jX_{2d}} \right| \quad (2.35)$$

dónde:

$$\mathbf{Z}_{sh}(s) = \frac{1}{\frac{1}{\mathbf{Z}_m} + \frac{1}{\frac{R_1}{s} + jX_{1d}} + \frac{1}{\frac{R_2}{s} + jX_{2d}}} \quad (2.36)$$

$\mathbf{Z}_m$, es la impedancia de la rama de magnetización.

Par en términos del deslizamiento:

$$T(s) = \frac{3}{\Omega_s} \cdot \left[\frac{I_1^2(s) \cdot R_1}{s} + \frac{I_2^2(s) \cdot R_2}{s} \right] \quad (2.37)$$

Par máximo:

$$T(s_{max}) = \frac{3}{\Omega_s} \cdot \left[\frac{I_1^2(s_{max}) \cdot R_1}{s_{max}} + \frac{I_2^2(s_{max}) \cdot R_2}{s_{max}} \right] \quad (2.38)$$

Intensidad estatórica de arranque:

$$I_s(s=1) = |I_s(s=1)| = \left| \frac{V_1}{R_s + jX_{sd} + \mathbf{Z}_{sh}(s=1)} \right| \quad (2.39)$$

Par de arranque:

$$T(1) = \frac{3}{\Omega_s} \cdot \left[\frac{I_1^2(s=1) \cdot R_1}{s=1} + \frac{I_2^2(s=1) \cdot R_2}{s=1} \right] \quad (2.40)$$