

5. Ecuaciones

Este es un capítulo de introducción a los capítulos siguientes, en los que se desarrollan los algoritmos empleados, analizando los resultados obtenidos, así como llevando a cabo diversas comparativas. Por lo tanto, antes de abordar esos análisis y resultados, se requiere conocer el proceso de cálculo de los mismos. Dado que todos los algoritmos empleados en este trabajo para la determinación de los parámetros de la máquina de inducción emplean las mismas ecuaciones, se considera más conveniente dedicar un capítulo a la exposición y explicación de esos procesos de cálculo. Se recalca el hecho de que todos los algoritmos empleen las mismas ecuaciones, y esto es así porque las expresiones vienen impuestas por la física del problema. Así pues en este capítulo se vuelve a los modelos presentados en el Capítulo 2: *Modelos de circuito*, y a partir de ellos se presentan las ecuaciones que gobiernan el funcionamiento del motor de inducción. Sustituyendo los parámetros calculados por los algoritmos en dichas expresiones se determinan las magnitudes que se compararán con los datos del catálogo.

5.1. Modelo de circuito de jaula simple con parámetros ajustados con el deslizamiento

Como se analizó en el Capítulo 2: *Modelos de circuito*, el problema de la determinación de los parámetros del modelo de jaula simple con parámetros ajustados con el deslizamiento, (Figura 5.1), de un motor de inducción consiste en la determinación de 9 variables (6 parámetros, P_{mec} , β_r y β_x). En el Capítulo 4: *Adquisición de datos*, se expuso que según el catálogo empleado el número posible de parámetros a determinar sería diferente. A continuación se va a exponer qué parámetros se pueden determinar suponiendo que se cuenta con el catálogo más completo, y posteriormente, se indicará cuáles se pueden obtener si se dispone de información incompleta.

Estos parámetros se determinarán a partir de los siguientes datos de catálogo:

- Potencia útil nominal a plena carga, P_n
- Potencia activa nominal consumida a plena carga, $P_{in,FL}$
- Potencia reactiva nominal consumida a plena carga, $Q_{in,FL}$
- Potencia útil al 75% de carga, $P_{75\%}$
- Potencia activa consumida al 75% de carga, $P_{in,75\%}$

- Potencia reactiva consumida al 75% de carga, $Q_{in,75\%}$
- Potencia útil al 50% de carga, $P_{50\%}$
- Potencia activa consumida al 50% de carga, $P_{in,50\%}$
- Potencia reactiva consumida al 50% de carga, $Q_{in,50\%}$
- Par máximo, T_{max}
- Par de arranque, T_{st} , o intensidad de arranque, I_{st}

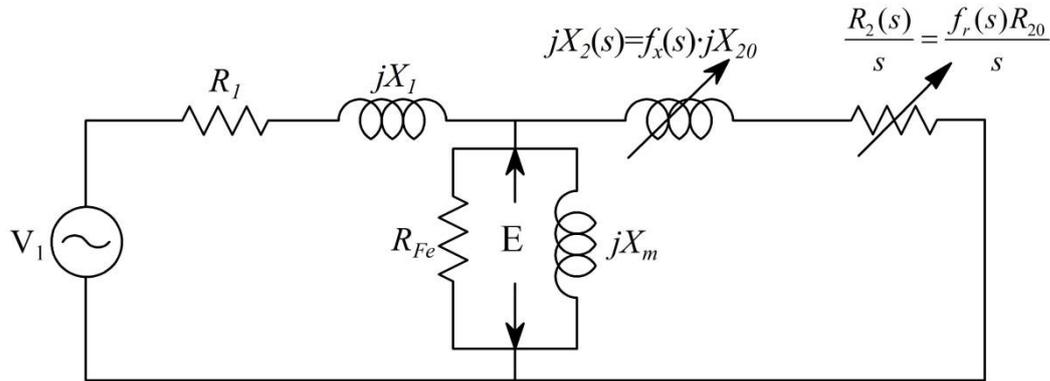


Figura 5.1. Modelo de circuito de jaula simple con parámetros ajustados con el deslizamiento

Los datos obtenidos directamente del catálogo son: P_n , T_{max} , T_{st} , I_{st} .

Las potencias útiles a cargas parciales se obtienen según:

$$P_{75\%} = \frac{3}{4} \cdot P_n \quad (5.1)$$

$$P_{50\%} = \frac{1}{2} \cdot P_n \quad (5.2)$$

Las potencias activas y reactivas consumidas en los distintos puntos de funcionamiento, nominal, 75% y 50%, se obtienen fácilmente a partir de los datos sobre el rendimiento (η) y el factor de potencia ($\cos\varphi$) en sus respectivos puntos de funcionamiento. Estos últimos datos se extraen directamente del catálogo:

$$P_{in,FL} = \frac{P_n}{\eta_{n,FL}} ; \quad P_{in,75\%} = \frac{P_{75\%}}{\eta_{75\%}} ; \quad P_{in,50\%} = \frac{P_{50\%}}{\eta_{50\%}} \quad (5.3)$$

$$Q_{in,FL} = P_{in,FL} \cdot \tan\varphi_{n,FL} ; \quad Q_{in,75\%} = P_{in,75\%} \cdot \tan\varphi_{75\%} ; \quad (5.4)$$

$$Q_{in,50\%} = P_{in,50\%} \cdot \tan\varphi_{50\%}$$

Siendo: $\varphi_{n,FL} = \varphi(s_n)$; $\varphi_{75\%} = \varphi(s_{75\%})$; $\varphi_{50\%} = \varphi(s_{50\%})$

Es muy importante destacar la presencia de nuevas variables que no se habían tenido en cuenta en el Capítulo 2: *Modelos de circuito*, ya que no se hizo mención a la forma de determinar los parámetros. Se ha expuesto que para determinar los parámetros del motor

de inducción se hará uso de los datos correspondientes a distintos puntos de funcionamiento. Esto implica que es estrictamente necesario conocer la velocidad de giro del rotor en esos puntos de funcionamiento. Estas incógnitas están representadas por los deslizamientos en los respectivos puntos de funcionamiento. Los catálogos sólo proporcionan el valor del deslizamiento nominal, s_n . De modo que es necesario tener en cuenta las nuevas variables, que son: $s_{75\%}$, $s_{50\%}$ y s_{max} .

Así pues hay 3 nuevas variables que sumadas a las 9 originales dan un total de 12 variables. Ahora queda claro que el problema a resolver es un problema bien condicionado, pues antes se expuso que se dispone de 12 datos independientes. En aquellos casos en los que la información de los catálogos no sea completa, habrá que reducir el número de parámetros a determinar, ya sea tomándolos como datos a partir de otras aproximaciones, explicadas más adelante, o estableciendo relaciones entre ellos.

Sin embargo, en el modelo de jaula simple no se han empleado simultáneamente los datos de par e intensidad en el arranque, ya que como se explicó en el Capítulo 2: *Modelos de circuito*, el modelo de jaula simple no es el más apto, a pesar incluso de emplear el modelo con parámetros ajustados con el deslizamiento, para determinar el comportamiento de la máquina en el arranque. Siendo más correcto el modelo de doble jaula.

Una vez establecido esto, queda claro que con un modelo de jaula simple sólo se pueden determinar 11 parámetros a lo sumo. Por lo tanto, el parámetro sacrificado será el deslizamiento en el punto de par máximo, s_{max} , que será calculado empleando el resto de parámetros, como se verá más adelante.

Por lo tanto, las 11 variables independientes (R_1 , X_1 , R_{20} , X_{20} , R_{Fe} , X_m , P_{mec} , β_r , β_x , $s_{75\%}$, $s_{50\%}$) pueden determinarse a partir de los datos de catálogo arriba expuestos. Para ello es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$f_1(x) = (P_n - P(s_n))/P_n \quad (5.5)$$

$$f_2(x) = (P_{in,FL} - P_{in}(s_n))/P_{in,FL} \quad (5.6)$$

$$f_3(x) = (Q_{in,FL} - Q_{in}(s_n))/Q_{in,FL} \quad (5.7)$$

$$f_4(x) = (P_{75\%} - P(s_{75\%}))/P_{75\%} \quad (5.8)$$

$$f_5(x) = (P_{in,75\%} - P_{in}(s_{75\%}))/P_{in,75\%} \quad (5.9)$$

$$f_6(x) = (Q_{in,75\%} - Q_{in}(s_{75\%}))/Q_{in,75\%} \quad (5.10)$$

$$f_7(x) = (P_{50\%} - P(s_{50\%}))/P_{50\%} \quad (5.11)$$

$$f_8(x) = (P_{in,50\%} - P_{in}(s_{50\%}))/P_{in,50\%} \quad (5.12)$$

$$f_9(x) = (Q_{in,50\%} - Q_{in}(s_{50\%}))/Q_{in,50\%} \quad (5.13)$$

$$f_{10}(x) = (T_{max} - T(s_{max}))/T_{max} \quad (5.14)$$

$$f_{11}(x) = (T_{st} - T(s=1))/T_{st} \quad \text{o} \quad f_{11}(x) = (I_{st} - I(s=1))/I_{st} \quad (5.15)$$

Este sistema puede escribirse de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ siendo

$$\mathbf{F} = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_{11}(\mathbf{x}))^T \text{ y } \mathbf{x} = (R_1, X_1, R_{20}, X_{20}, R_{Fe}, X_m, P_{mec}, \beta_r, \beta_x, s_{75\%}, s_{50\%})^T.$$

Nótese que cada una de las ecuaciones no lineales representa el error que se comete al calcular las distintas magnitudes, tomando como valor verdadero el dato de catálogo. En este punto es importante recordar que estos valores que se toman como verdaderos pueden no serlo, falseando enormemente los resultados.

Además es importante destacar que los errores calculados han sido normalizados. Puesto que las funciones representan magnitudes físicas, los datos pueden contribuir con distintos pesos al error. Por ello resulta esencial ajustar todas las funciones con una precisión similar, lo cuál se lleva a cabo normalizando las funciones [6].

Es necesario recordar en este punto, que el objetivo de los algoritmos presentados en este trabajo es el de determinar aquellos parámetros internos del motor de inducción que hagan que los errores anteriores sean nulos o lo más cercanos a cero. Es decir, aquéllos parámetros que minimicen el valor de la función objetivo del problema de optimización.

A continuación se desarrolla el proceso de cálculo de las distintas magnitudes, empleando para ello las variables que se desean determinar, los parámetros internos del motor de inducción.

$$Z_1 = R_1 + jX_1 \quad (5.16)$$

$$Z_2(s) = \frac{R_{20}}{s} + jX_{20} \quad (5.17)$$

$$Z_m = \frac{R_{Fe} \cdot jX_m}{R_{Fe} + jX_m} \quad (5.18)$$

La impedancia del rotor, $Z_2(s)$, corresponde al funcionamiento para deslizamientos inferiores al del punto de par máximo, como se vio en el Capítulo 2: *Modelos de circuito*. Esta impedancia deberá ser adaptada, a través del valor del deslizamiento, a cada punto de funcionamiento.

La fuerza electromotriz inducida en la rama de magnetización, para deslizamiento nominal a plena carga es:

$$E_{FL} = |V_1 - Z_1 \cdot I_{1,FL} \cdot (\cos\varphi_{n,FL} - j\text{sen}\varphi_{n,FL})| \quad (5.19)$$

En la que:

V_1 , es la tensión nominal de fase y viene dada por: $V_1 = \frac{V}{\sqrt{3}}$, siendo V la tensión nominal de línea, dato del catálogo.

$I_{1,FL}$, es la intensidad estatórica nominal a plena carga, dato de catálogo.

La intensidad estatórica en los otros puntos de funcionamiento se calcula según:

$$I_{1,75\%} = \frac{P_{in,75\%}}{\sqrt{3} \cdot V \cdot \cos\varphi_{75\%}} \quad (5.20)$$

$$I_{1,50\%} = \frac{P_{in,50\%}}{\sqrt{3} \cdot V \cdot \cos\varphi_{50\%}} \quad (5.21)$$

Esto permite determinar la fuerza electromotriz establecida en la rama de magnetización en los respectivos puntos de funcionamiento a carga parcial:

$$E_{75\%} = |V_1 - Z_1 \cdot I_{1,75\%} \cdot (\cos\varphi_{75\%} - j\sin\varphi_{75\%})| \quad (5.22)$$

$$E_{50\%} = |V_1 - Z_1 \cdot I_{1,50\%} \cdot (\cos\varphi_{50\%} - j\sin\varphi_{50\%})| \quad (5.23)$$

Según el equivalente Thévenin del circuito de la Figura 5.1, se tiene:

La tensión del equivalente Thévenin:

$$V_{th} = \left| \frac{V_1 \cdot Z_m}{Z_m + Z_1} \right| \quad (5.24)$$

La impedancia del mismo:

$$Z_{th} = R_{th} + jX_{th} \triangleq \frac{Z_m \cdot Z_1}{Z_1 + Z_m} \quad (5.25)$$

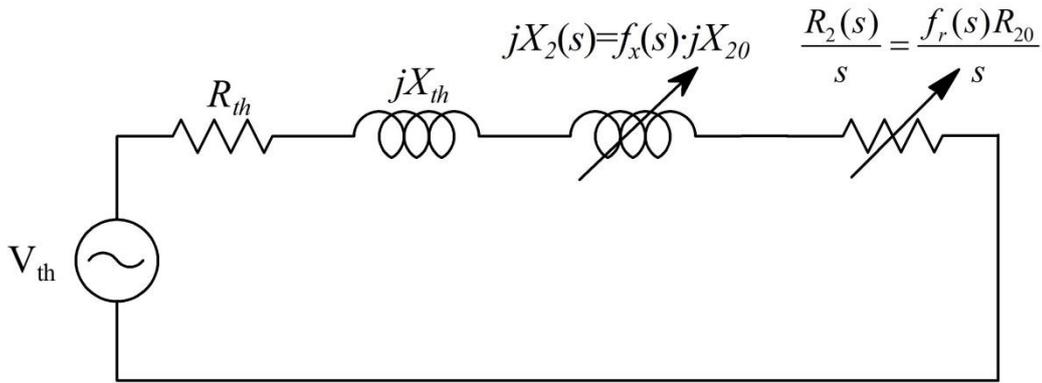


Figura 5.2. Equivalente Thévenin del modelo de circuito de jaula simple con parámetros ajustados con el deslizamiento

La intensidad que circula por el rotor en cada uno de los puntos de funcionamiento de los que se tienen datos suficientes se calcula según:

$$I_{2,FL} = I_{1,FL} \cdot \left| \frac{Z_m}{Z_m + Z_2(s_n)} \right| \quad (5.26)$$

$$I_{2,75\%} = I_{1,75\%} \cdot \left| \frac{Z_m}{Z_m + Z_2(s_{75\%})} \right| \quad (5.27)$$

$$I_{2,50\%} = I_{1,50\%} \cdot \left| \frac{Z_m}{Z_m + Z_2(s_{50\%})} \right| \quad (5.28)$$

Para determinar la intensidad que circula por el rotor en el arranque, primero hay que calcular $f_r(s)$ y $f_x(s)$, puesto que $s = 1 > s_{max}$:

$$f_r(s = 1) = \beta_r + (1 - \beta_r) \cdot \sqrt{\frac{s = 1}{s_{max}}} \quad (5.29)$$

$$f_x(s = 1) = \beta_x + (1 - \beta_x) \cdot \sqrt{\frac{s_{max}}{s = 1}} \quad (5.30)$$

Siendo el deslizamiento del punto de par máximo:

$$s_{max} = \frac{R_{20}}{\sqrt{R_{20}^2 + (X_{th} + X_{20})^2}} \quad (5.31)$$

Finalmente:

$$I_{2,s=1} = \frac{V_{th}}{\sqrt{(R_{th} + f_r(1) \cdot R_{20})^2 + (X_{th} + f_x(1) \cdot X_{20})^2}} \quad (5.32)$$

A continuación se presentan las expresiones empleadas para calcular las potencias útil, activa y reactiva absorbidas, en los distintos puntos de funcionamiento:

- Para funcionamiento a plena carga:

$$P(s_n) = 3 \cdot \frac{R_{20} \cdot (1 - s_n)}{s_n} \cdot I_{2,FL}^2 - P_{mec} \quad (5.33)$$

$$P_{in}(s_n) = P(s_n) + 3 \cdot R_1 \cdot I_{1,FL}^2 + 3 \cdot R_{20} \cdot I_{2,FL}^2 + P_{Fe}(s_n) + P_{mec} \quad (5.34)$$

Dónde:

$$P_{Fe}(s_n) = 3 \cdot \frac{E_{FL}^2}{R_{Fe}} \quad (5.35)$$

$$Q_{in}(s_n) = 3 \cdot X_1 \cdot I_{1,FL}^2 + 3 \cdot X_{20} \cdot I_{2,FL}^2 + 3 \cdot \frac{E_{FL}^2}{X_m} \quad (5.36)$$

- Para funcionamiento al 75% de carga:

$$P(s_{75\%}) = 3 \cdot \frac{R_{20} \cdot (1 - s_{75\%})}{s_{75\%}} \cdot I_{2,75\%}^2 - P_{mec} \quad (5.37)$$

$$P_{in}(s_{75\%}) = P(s_{75\%}) + 3 \cdot R_1 \cdot I_{1,75\%}^2 + 3 \cdot R_{20} \cdot I_{2,75\%}^2 + P_{Fe}(s_{75\%}) + P_{mec} \quad (5.38)$$

Dónde:

$$P_{Fe}(s_{75\%}) = 3 \cdot \frac{E_{75\%}^2}{R_{Fe}} \quad (5.39)$$

$$Q_{in}(s_{75\%}) = 3 \cdot X_1 \cdot I_{1,75\%}^2 + 3 \cdot X_{20} \cdot I_{2,75\%}^2 + 3 \cdot \frac{E_{75\%}^2}{X_m} \quad (5.40)$$

- Para funcionamiento al 50% de carga:

$$P(s_{50\%}) = 3 \cdot \frac{R_{20} \cdot (1 - s_{50\%})}{s_{50\%}} \cdot I_{2,50\%}^2 - P_{mec} \quad (5.41)$$

$$P_{in}(s_{50\%}) = P(s_{50\%}) + 3 \cdot R_1 \cdot I_{1,50\%}^2 + 3 \cdot R_{20} \cdot I_{2,50\%}^2 + P_{Fe}(s_{50\%}) + P_{mec} \quad (5.42)$$

Dónde:

$$P_{Fe}(s_{50\%}) = 3 \cdot \frac{E_{50\%}^2}{R_{Fe}} \quad (5.43)$$

$$(5.44)$$

$$Q_{in}(s_{50\%}) = 3 \cdot X_1 \cdot I_{1,50\%}^2 + 3 \cdot X_{20} \cdot I_{2,50\%}^2 + 3 \cdot \frac{E_{50\%}^2}{X_m}$$

Para calcular el par máximo, primero hay que determinar la intensidad rotórica en el punto de par máximo:

$$I_{2,s_{max}} = \frac{V_{th}}{\sqrt{(R_{th} + \frac{R_{20}}{s_{max}})^2 + (X_{th} + X_{20})^2}} \quad (5.45)$$

Ahora sí, el par máximo se calcula como:

$$T(s_{max}) = 3 \cdot I_{2,s_{max}}^2 \cdot \frac{R_{20}}{\Omega_s \cdot s_{max}} \quad (5.46)$$

Siendo: Ω_s la velocidad angular de sincronismo.

Por último se calculan las magnitudes en el arranque. Éstas son el par y la intensidad absorbida en el estator.

$$T(s = 1) = 3 \cdot I_{2,s=1}^2 \cdot \frac{f_r(s = 1) \cdot R_{20}}{\Omega_s} \quad (5.47)$$

$$I(s = 1) = \left| \frac{Z_2(s = 1)}{Z_m} + 1 \right| \cdot I_{2,s=1} \quad (5.48)$$

Siendo: $Z_2(s = 1) = f_r(s = 1) \cdot R_{20} + j f_x(s = 1) \cdot X_{20}$ ya que $s = 1 > s_{max}$.

Adicionalmente, hay que tener presente que: $s_n > s_{75\%} > s_{50\%}$. Algunos algoritmos, calculan los parámetros de forma que estas inecuaciones se cumplen sin necesidad de añadir restricciones adicionales a la programación. Pero otros no, requiriendo de funciones extra que fueren el cumplimiento de estas restricciones físicas. El detalle de esto se presentará con los algoritmos correspondientes.

Como se comentó en el Capítulo 4: *Adquisición de datos*, no todos los catálogos disponen de información completa que permita determinar las 12 variables necesarias para conocer el modelo de circuito del motor de inducción. Se establecido que según la información disponible el número de parámetros que pueden ser determinados será diferente. A continuación se relacionan los parámetros que se pueden determinar, para el modelo de jaula simple, según la información disponible:

- Catálogo de 9 datos: sólo es posible determinar R_1 , X_1 , R_{20} , X_{20} , R_{Fe} , X_m , P_{mec} , $s_{75\%}$. Es decir, 8 de los 11 parámetros. Esto es así porque se estableció que con el modelo de jaula simple no se emplearían simultáneamente el valor del par y la intensidad de arranque, y además no se tiene información sobre el punto de funcionamiento al 50% de carga. En esta situación se hace necesario fijar el valor de β_r y β_x . De acuerdo con [5], el par de valores que mejores

resultados proporciona es: $\beta_r = 0.5$ y $\beta_x = 0.4$, tomándose, por tanto dichos valores.

- Catálogo de 11 datos: se pueden determinar todos los parámetros internos, excepto el deslizamiento de par máximo, como ya se explicó. Sin embargo, al no disponer de datos sobre la intensidad de arranque, no es posible analizar los resultados obtenidos al emplear este dato en lugar del dato de par de arranque.
- Catálogo de 12 datos: en esta situación cabría pensar que se pueden determinar todos los parámetros, incluido el deslizamiento de par máximo. Sin embargo, esto no es posible debido a que no se utilizan los datos de par e intensidad de arranque a la vez con el modelo de jaula simple. Así pues, se determinan los mismos parámetros que en el caso de catálogo de 11 datos. La ventaja con respecto a dicho catálogo, es que ahora sí se pueden analizar los resultados obtenidos al emplear los datos de intensidad de arranque en lugar de los de par de arranque.

5.2. Modelo de circuito de doble jaula

En este caso el número de variables a determinar, considerando que se dispone de información completa, es 12 $R_s, X_{sd}, R_1, X_{1d}, R_2, X_{2d}, R_{Fe}, X_m, P_{mec}, s_{75\%}, s_{50\%}, s_{max}$. Para ello se usarán los mismos datos que para el modelo de jaula simple, aunque ahora sí se utilizan simultáneamente la intensidad y el par de arranque:

- Potencia útil nominal a plena carga, P_n
- Potencia activa nominal consumida a plena carga, $P_{in,FL}$
- Potencia reactiva nominal consumida a plena carga, $Q_{in,FL}$
- Potencia útil al 75% de carga, $P_{75\%}$
- Potencia activa consumida al 75% de carga, $P_{in,75\%}$
- Potencia reactiva consumida al 75% de carga, $Q_{in,75\%}$
- Potencia útil al 50% de carga, $P_{50\%}$
- Potencia activa consumida al 50% de carga, $P_{in,50\%}$
- Potencia reactiva consumida al 50% de carga, $Q_{in,50\%}$
- Par máximo, T_{max}
- Par de arranque, T_{st}
- Intensidad de arranque, I_{st}

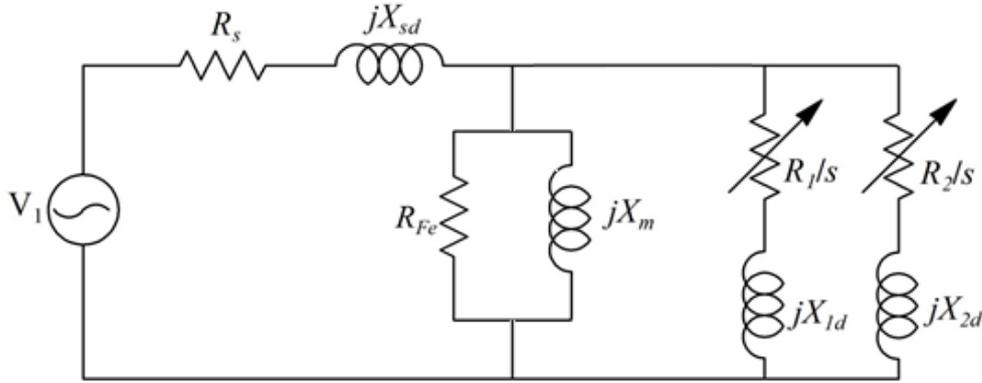


Figura 5.3. Modelo de circuito de doble jaula

Tal y como se explicó para el modelo de jaula simple, los algoritmos expuestos en este trabajo buscan resolver un problema de optimización. Esto es, encontrar aquellos valores de los parámetros internos del motor de inducción que, al emplearlos para calcular las magnitudes usadas como datos, la diferencia entre las calculadas y los datos sea lo menor posible. Es decir, minimizar el error cometido al calcular. Para ello hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$f_1(x) = (P_n - P(s_n))/P_n \quad (5.49)$$

$$f_2(x) = (P_{in,FL} - P_{in}(s_n))/P_{in,FL} \quad (5.50)$$

$$f_3(x) = (Q_{in,FL} - Q_{in}(s_n))/Q_{in,FL} \quad (5.51)$$

$$f_4(x) = (P_{75\%} - P(s_{75\%}))/P_{75\%} \quad (5.52)$$

$$f_5(x) = (P_{in,75\%} - P_{in}(s_{75\%}))/P_{in,75\%} \quad (5.53)$$

$$f_6(x) = (Q_{in,75\%} - Q_{in}(s_{75\%}))/Q_{in,75\%} \quad (5.54)$$

$$f_7(x) = (P_{50\%} - P(s_{50\%}))/P_{50\%} \quad (5.55)$$

$$f_8(x) = (P_{in,50\%} - P_{in}(s_{50\%}))/P_{in,50\%} \quad (5.56)$$

$$f_9(x) = (Q_{in,50\%} - Q_{in}(s_{50\%}))/Q_{in,50\%} \quad (5.57)$$

$$f_{10}(x) = (T_{max} - T(s_{max}))/T_{max} \quad (5.58)$$

$$f_{11}(x) = (T_{st} - T(s = 1))/T_{st} \quad (5.59)$$

$$f_{12}(x) = (I_{st} - I(s = 1))/I_{st} \quad (5.60)$$

Este sistema puede escribirse de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ siendo $\mathbf{F} = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_{12}(\mathbf{x}))^T$ y $\mathbf{x} = (R_s, X_{sd}, R_1, X_{1d}, R_2, X_{2d}, R_{Fe}, X_m, P_{mec}, s_{75\%}, s_{50\%}, s_{max})^T$.

Cada una de estas ecuaciones tiene el mismo significado que para el modelo de jaula simple. Además, por el mismo motivo que se explicó, aquí también se normalizan los errores.

En este modelo de circuito es necesario atender a una serie de restricciones físicas que exigen una modificación del sistema de variables. Hay que tener en cuenta que el flujo de dispersión de la jaula interna siempre es mayor que el de la jaula externa. Por tanto, debe cumplirse que $X_{1d} > X_{2d}$. Cuando el motor arranca, (rotor bloqueado), la impedancia de la rama externa, (R_2 y X_{2d}), prevalece sobre la impedancia de la jaula interna, (R_1 y X_{1d}). Esto impone la condición sobre la resistencia, $R_2 > R_1$, donde R_2 puede ser hasta diez veces R_1 . Además hay que tener en cuenta que: $s_n > s_{75\%} > s_{50\%}$. Para incluir las inecuaciones $R_2 > R_1$, $X_{1d} > X_{2d}$ más las de los deslizamientos se hace el siguiente cambio de variables unido a $x_i > 0$:

$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \\ x_2 &= R_s - R_1 \\ x_3 &= R_2 - R_1 \\ x_4 &= R_{Fe} \\ x_5 &= X_m \\ x_6 &= X_{2d} \\ x_7 &= X_{sd} - X_{2d} \\ x_8 &= X_{1d} - X_{2d} \\ x_9 &= P_{mec} \\ x_{10} &= s_n - s_{75\%} \\ x_{11} &= s_{75\%} - s_{50\%} \\ x_{12} &= s_{max} - s_n \end{aligned}$		$\begin{aligned} R_1 &= x_1 \\ R_s &= x_1 + x_2 \\ R_2 &= x_3 + R_1 = x_3 + x_1 \\ R_{Fe} &= x_4 \\ X_m &= x_5 \\ X_{2d} &= x_6 \\ X_{sd} &= x_6 + x_7 \\ X_{1d} &= x_6 + x_8 \\ P_{mec} &= x_9 \\ s_{75\%} &= s_n - x_{10} \\ s_{50\%} &= s_{75\%} - x_{11} \\ s_{max} &= x_{12} + s_n \end{aligned}$
--	---	--

Para que se cumpla que $x_i > 0$, se utiliza como función de entrada el valor absoluto de las variables: $\mathbf{F}(|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_{12}|) = \mathbf{0}$

Las ecuaciones empleadas para calcular las magnitudes son las mismas que para el modelo de jaula simple. Aplicando lo expuesto en el Capítulo 2: *Modelos de circuito*, si se agrupan las ramas rotóricas interna y externa, se obtiene el circuito de la Figura 5.4:

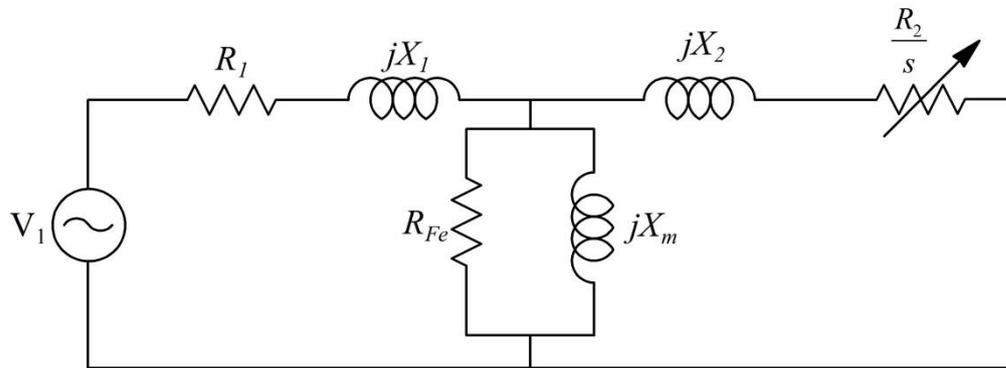


Figura 5.4. Modelo de circuito de jaula doble tras asociar las impedancias en paralelo del rotor, equivalente al modelo de circuito de jaula simple

Para llevar a cabo esto se hace:

$$\mathbf{Z}_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{s}{R_1} + jX_{1d}} + \frac{1}{\frac{s}{R_2} + jX_{2d}}} \quad (5.61)$$

Siendo \mathbf{Z}_m , la impedancia de la rama de magnetización.

A partir de aquí el proceso de cálculo es idéntico al empleado para el modelo de jaula simple.

5.3. Evaluación de los algoritmos

En los puntos anteriores se ha explicado que el objetivo de los algoritmos expuestos en este trabajo es el de optimizar un problema. Este problema viene definido por el conjunto de ecuaciones no lineales expuesto en páginas anteriores. Para ello deben encontrar el conjunto de parámetros internos del motor de inducción tal que permita el cálculo de unas magnitudes externas del motor lo más cercanas a las de referencia, datos de catálogo. Con esto se consigue el objetivo de este trabajo, que no el de los algoritmos, que es determinar los parámetros internos del motor de inducción que más se aproximen a los reales. Para determinar la bondad de un algoritmo en la resolución de este problema, es necesario introducir una función o sistema de evaluación. De este modo la evaluación de la actuación de los algoritmos en la búsqueda del conjunto óptimo de parámetros se lleva a cabo a través del *error rms*. En primer lugar es

necesario determinar el error que se comete al calcular las magnitudes externas frente a los datos del catálogo, considerados como exactos:

$$error = \frac{valor\ real - valor\ calculado}{valor\ real} \quad (5.62)$$

Recordando la forma de cada una de las ecuaciones no lineales del sistema a resolver, se ve claramente que son el error. De hecho este concepto ya se introdujo cuando se expuso por primera vez el sistema de ecuaciones no lineales a resolver para el modelo de jaula simple. Así pues, se establece:

$$error = f(x_i) = \frac{Y - Y(s)}{Y} \quad (5.63)$$

Siendo Y , una magnitud externa real (dato de catálogo) e $Y(s)$ una magnitud externa calculada a partir de los parámetros internos del motor.

Finalmente, se define el *error rms* para los n casos (número de motores analizados) estudiados como:

$$error\ rms = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n error^2}{n}} \quad (5.64)$$

5.4. Selección de los valores iniciales

En este trabajo se han aplicado tres algoritmos diferentes para resolver el sistema de ecuaciones no lineales. Este sistema no tiene una solución analítica y, por lo tanto, debe resolverse de forma numérica por ordenador. Los procesos iterativos que incluyen los métodos de resolución aplicados proporcionarán, por tanto, resultados aproximados, afectados por una serie de errores ya expuestos anteriormente.

La selección de los valores iniciales es muy importante en todos los métodos iterativos, ya que condicionan tanto el grado de convergencia como la velocidad de ejecución. En este trabajo se han probado varias aproximaciones en la obtención de unos valores iniciales correctos. Se han empleado valores genéricos calculados empleando datos del catálogo. Otra opción tenida en cuenta ha sido la resolución previa de un modelo sencillo, y utilizar la solución proporcionada por este como solución inicial. Por último, para los algoritmos genéticos y los sistemas de partículas se ha probado a no emplear

solución inicial, pues estos métodos permiten la generación de un punto de partida aleatorio.

A continuación se explica cómo se obtiene una solución inicial a partir de los datos del catálogo. La resistencia rotórica puede estimarse a partir de la potencia nominal del motor, despreciando el conjunto de pérdidas fijas (pérdidas mecánicas y pérdidas en el hierro), considerando las pérdidas en el hierro como fijas. Con ello:

$$P_{a,n}(1 - s_n) = P_{mi,n} + (P_{Fe} + P_{mec}) \simeq P_n \quad (5.65)$$

Dónde: $P_{a,n}$, es la potencia del entrehierro nominal; $P_{mi,n}$, es la potencia mecánica interna nominal.

$$P_{a,n}(1 - s_n) \simeq \frac{3 \cdot R_{20}}{s_n} \cdot I_{1,FL}^2 \cdot (1 - s_n) \simeq (1 - s_n) \quad (5.66)$$

Despejando R_{20} de (5.66):

$$R_{20} \simeq \frac{s_n \cdot P_n}{3 \cdot I_{1,FL}^2 \cdot (1 - s_n)} \quad (5.67)$$

Aplicando la relación entre las resistencias estática y rotórica, establecida en modelos más sencillos, así como en otros muchos estudios:

$$R_1 = \alpha_r \cdot R_{20} \quad (5.68)$$

Con esto se pueden calcular valores iniciales para las resistencias de los dos devanados.

Los valores de las reactancias estática y rotórica pueden obtenerse a partir de la intensidad de arranque. Para ello basta despreciar el efecto de la rama de magnetización ($Y_m \rightarrow 0$), considerar que los valores de las resistencias estática y rotórica son despreciables frente a sus respectivas reactancias ($R_1 \ll X_1$, $R_{20} \ll X_{20}$) y que los valores de las ambas reactancias son aproximadamente iguales ($X_1 \approx X_{20}$).

$$I_{st} = \frac{V_1}{|Z(s=1)|} \simeq \frac{V_1}{|R_{RB} + jX_{RB}|} = \frac{U_{1N}}{|R_1 + R_{20} + j(X_1 + X_{20})|} \simeq \frac{V_1}{X_1 + X_{20}} \quad (5.69)$$

La intensidad de arranque suele ser de entre 6 y 10 veces la intensidad nominal, por tanto, considerando el valor inferior:

$$I_{st} \simeq \frac{V_1}{X_{RB}} = \frac{V_1}{X_1 + X_{20}} = 6 \cdot I_{1,FL} \quad (5.70)$$

$$X_{RB} = X_1 + X_{20} \simeq \frac{V_1}{6 \cdot I_{1,FL}} \quad (5.71)$$

$$X_1 = X_{20} = \frac{X_{RB}}{2} \simeq \frac{V_1}{2 \cdot 6 \cdot I_{1,FL}} = \frac{V_1}{12 \cdot I_{1,FL}} \quad (5.72)$$

De igual forma, para las intensidades de arranque más elevadas resulta:

$$I_{st} \simeq \frac{V_1}{X_{RB}} = \frac{V_1}{X_1 + X_{20}} = 10 \cdot I_{1,FL} \quad (5.73)$$

$$X_{RB} = X_1 + X_{20} \simeq \frac{V_1}{10 \cdot I_{1,FL}} \quad (5.74)$$

$$X_1 = X_{20} = \frac{X_{RB}}{2} \simeq \frac{V_1}{2 \cdot 10 \cdot I_{1,FL}} = \frac{V_1}{20 \cdot I_{1,FL}} \quad (5.75)$$

En consecuencia:

$$\frac{V_1}{12 \cdot I_{1,FL}} \geq X_1 = X_{20} \geq \frac{V_1}{20 \cdot I_{1,FL}} \quad (5.76)$$

$$X_1 = X_{20} \in \left(\frac{V_1}{20 \cdot I_{1,FL}}, \frac{V_1}{12 \cdot I_{1,FL}} \right) \simeq 0.05 \cdot \frac{V_1}{I_{1,FL}} \quad (5.77)$$

El valor de la reactancia de magnetización puede obtenerse a partir del factor de la potencia reactiva absorbida en el punto nominal:

$$Q_{in,FL} \simeq \frac{3 \cdot |E(s_n)|^2}{X_m} + 3 \cdot X_{RB} \cdot I_{1,FL}^2 \simeq \frac{3 \cdot V_1^2}{X_m} + 3 \cdot X_{RB} \cdot I_{1,FL}^2 \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} X_m &\simeq \frac{3 \cdot V_1^2}{Q_{in,FL} - 3 \cdot X_{RB} \cdot I_{1,FL}^2} = \frac{3 \cdot V_1^2}{Q_{in,FL} - 3(X_1 + X_{20}) \cdot I_{1,FL}^2} = \\ &= \frac{3 \cdot V_1^2}{Q_{in,FL} - 6 \cdot X_1 \cdot I_{1,FL}^2} \end{aligned} \quad (5.79)$$

El conjunto de pérdidas fijas puede estimarse a partir del rendimiento:

$$\eta_{n,FL} = \frac{P_n}{P_n + P_p} \simeq \frac{P_n}{P_n + (P_{Fe} + P_{mec} + 3 \cdot R_{RB} \cdot I_{1,FL}^2)} \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} P_{const} &= P_{Fe} + P_{mec} \simeq P_n \left(\frac{1}{\eta_{n,FL}} - 1 \right) - 3 \cdot R_{RB} \cdot I_{1,FL}^2 = \\ &= P_n \left(\frac{1}{\eta_{n,FL}} - 1 \right) - 3(R_1 + R_{20}) \cdot I_{1,FL}^2 \end{aligned} \quad (5.81)$$

Se podría hacer ahora una separación de pérdidas considerando que las pérdidas en el hierro son iguales que las mecánicas, hecho que sólo se aplica para obtener unos valores iniciales:

$$P_{Fe} = P_{mec} \simeq \frac{P_{const}}{2} \quad (5.82)$$

Para calcular la resistencia del hierro se pueden emplear dos aproximaciones diferentes:

$$E_{FL} = |V_1 - Z_1 \cdot I_{1,FL} \cdot (\cos\varphi_{n,FL} - j\sin\varphi_{n,FL})| \quad (5.83)$$

Siendo: $Z_1 = R_1 + jX_1$

O bien considerar que: $E_{FL} \simeq V_1$

Aplicando esto:

$$R_{Fe} = \frac{3 \cdot E_{FL}^2}{P_{Fe}} \simeq \frac{3 \cdot V_1^2}{P_{Fe}} \quad (5.84)$$

Por último es necesario determinar unos valores iniciales para los deslizamientos en los puntos de carga parcial y en el punto de par máximo. Para los puntos de carga parcial, teniendo en cuenta [38], si la carga parcial es del 75% de plena carga, el deslizamiento será aproximadamente el 75% del nominal, debido a que existe una fuerte linealidad en esta zona de la curva par-deslizamiento. Lo mismo se aplica para la carga parcial al 50%. Así, se han tomado como valores iniciales:

$$s_{75\%} = 0.8 \cdot s_n \quad (5.85)$$

$$s_{50\%} = 0.55 \cdot s_n \quad (5.86)$$

Para el caso del deslizamiento en el punto de par máximo, una vez establecidos valores iniciales para el resto de parámetros, se puede determinar mediante la ecuación (5.31).

Todo lo anterior es válido para el modelo de jaula simple. Ahora bien, para el modelo de jaula doble hay que tener en cuenta algunos aspectos previos. Tras esto, es posible aplicar la misma metodología, pues como se vio el modelo de jaula doble se puede reducir al de jaula simple agrupando las ramas interna y externa del rotor.

Se mantienen los valores calculados para el modelo de jaula simple, esto es: $R_1 = R_{20}$ (del modelo de jaula simple), X_m y $X_{sd} = X_1$ (del modelo de jaula simple).

A eso hay que añadir:

- $R_2 = 5 \cdot R_1$, puesto que la resistencia de la rama externa tiene que ser mayor que la de la rama interna.
- $X_{1d} = X_{sd}$, ya que la reactancia de la rama interna suele ser la mayor de todas las reactancias.

Para la reactancia de la rama externa, se aplica otra relación impuesta en otros estudios: $X_{2d} = \alpha_x \cdot X_{1d}$, con $\alpha_x \in (0,1)$ pues la reactancia de la rama externa siempre es menor que la de la rama interna.

Para el resto de parámetros se aplican las mismas expresiones que en el caso del modelo de jaula simple.