

2 FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO

Unless you try to do something beyond what you have already mastered, you will never grow.

- Ralph Waldo Emerson -

Actualmente no hay una confianza plena sobre la validez de los criterios de fallos para los materiales compuestos, ya que estos criterios no son capaces ni de predecir la resistencia a tracción con agujero ni la propagación de una grieta en los mismos. Por ello se desarrollan nuevos enfoques para llenar los vacíos que estos criterios dejan, así nace el enfoque de la Mecánica de la Fractura Finita la cual es capaz de dar una solución eficiente y precisa para a la aparición y propagación de una grieta en cualquier material.

1.1. La Mecánica de la Fractura

Dentro del campo de la mecánica de la fractura aparecen distintas ramas para el estudio de los fallos en un material, como pilar básico se encuentra la Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal (MFEL) desarrollada en primera instancia para materiales frágiles, siendo su mayor exponente el ingeniero aeronáutico inglés Griffith por su trabajo del balance energético en la grieta, posteriormente Irwin completó diversos trabajos de éste. Por otro lado se desarrolla la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica (MFEP) centrada para aquellos materiales donde la zona plástica es de especial importancia. En esta dirección se han venido definiendo diferentes conceptos como la tenacidad a fractura, la tasa de liberación de energía, la curva R, los modos de fractura,... Todo este desarrollo fue encaminado a contestar dos cuestiones básicas:

- Bajo qué condiciones de carga de propaga una grieta.
- Cuanto tiempo soporta las condiciones de carga con una grieta de tamaño dado.

Sin embargo, no son objeto de estudio las condiciones que tienen que darse para la aparición de una grieta en un material, esta cuestión la aborda la Mecánica de la Fractura Finita (MFF).

1.1.1. La Mecánica de la Fractura Finita

Este enfoque tiene como premisa inicial que la grieta aparece de manera espontánea con un tamaño dado para unas condiciones de tensión y energía dadas. Dicho modelo también cuenta con limitaciones, admitiendo su aplicación sólo en laminados compuestos con entallas que muestren una rotura frágil o pull-out de las fibras, no es aconsejable para delaminaciones. Por tanto éste será el modelo sobre el cimenta el trabajo, también existen otros modelos para la predicción del fallo como son el point stress model, average stress model, inherent flaw model,...

1.1.2. El criterio acoplado

La forma del criterio que se atañe no es más que una combinación entre dos criterios clásicos de la Mecánica de la Fractura, así pues, en primer lugar se deduce el criterio energético a través de un simple balance en el crecimiento de una grieta en un material elástico-lineal. Realizando el balance (1.1) donde se parte de un estado de equilibrio con una energía potencial dada y una energía cinética nula, tras esto se produce un crecimiento diferencial de la grieta preexistente así se llega al estado final.

$$\Delta\Pi + \Delta E_k + \Delta\Gamma = 0 \quad (1.1)$$

Donde $\Delta\Pi$ es la variación de energía potencial, ΔE_k la variación de energía cinética y $\Delta\Gamma$ la energía dedicada a la ruptura de los enlaces internos del material. Para la nueva superficie creada por el crecimiento de la grieta (1.2) el último término puede reescribirse como:

$$\Delta\Gamma = G_c \Delta S \quad (1.2)$$

En este caso G_c es la energía de fractura por unidad de superficie, y el otro término denota el incremento de superficie creada en el material. Ya que el estado inicial es de equilibrio, $\Delta E_k \geq 0$ además por definición la energía de la ruptura de enlaces también $\Delta\Gamma \geq 0$, por ello se deduce que:

$$\Delta\Pi = -(\Delta E_k + \Delta\Gamma) \leq 0 \quad (1.3)$$

En la mayoría de los casos la contribución de la energía cinética es despreciable y puede definirse el criterio energético (1.4) como sigue:

$$-\frac{\Delta\Pi}{\Delta S} = G \geq G_c \quad (1.4)$$

Una vez definido el criterio energético, se puede proseguir al tensional (1.5), donde se tiene admite que se produce una propagación de una grieta una vez que la tensión supera el valor crítico impuesto para la ruptura del material.

$$\sigma \geq \sigma_c \quad (1.5)$$

Se definan pues tanto el criterio energético (1.4) como el tensional (1.5), admitiendo que ambos son condiciones necesarias para la fractura pero por sí solos no suficientes (Leguillon, 2001). De esta forma el conjunto de inecuaciones definen el criterio acoplado formulación planteado en [1].

1.2. El problema del agujero

Sea un laminado de material compuesto con comportamiento elástico-lineal, de espesor t dado, con un agujero central de radio R , y ancho W sometido a un estado de tensión unidireccional en dirección y .

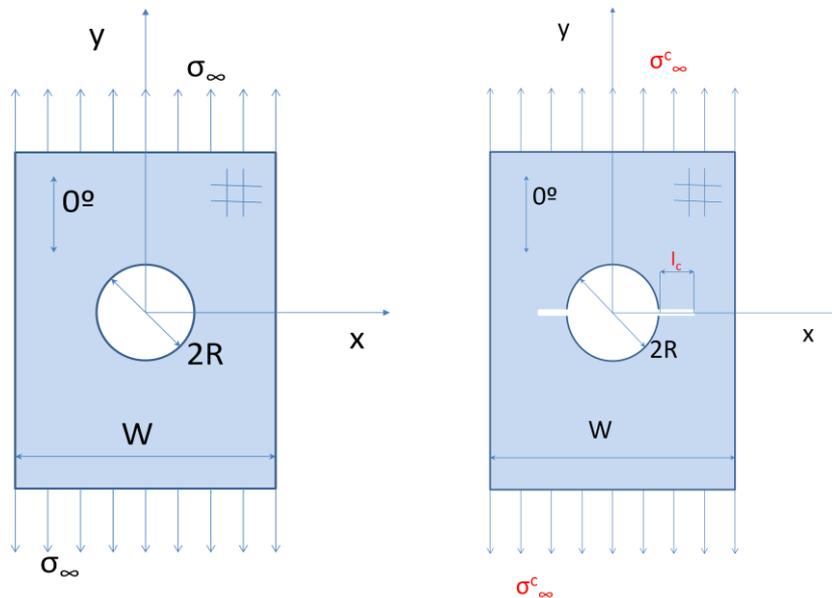


Figura 2-1. Modelo del problema.

Se aplicará el criterio acoplado, pero en este caso a nivel promedio. Cuando las tensiones promediadas a lo largo del camino potencial de la grieta alcancen el valor de la tensión de rotura y la energía disponible para la grieta sea igual a la tenacidad a la fractura del material se producirá la aparición de una grieta de tamaño finito. Esto quedará modelado mediante el par de criterios tensión-energía, cuando ambos se cumplan simultáneamente, se producirá el fallo del material.

Se asume la aparición de una grieta a cada lado del concentrador de manera espontánea con un crecimiento inestable, propagándose en la dirección perpendicular a la carga aplicada. Para el estudio se desprecian el campo de tensiones tridimensional y solo se considerará el modo I de fractura.

1.1.3. El criterio acoplado a nivel promedio

Para el problema planteado se va a recurrir a un análisis a nivel promedio de los criterios, es decir, cuando se cumplan de manera generalizada a lo largo de un camino y no a nivel de punto, admitiendo que el fallo en un punto no tiene por qué suponer el fallo de todo el material. Con esto se redefinen los criterios, en primer lugar, el tensional de puntual (1.6) a promedio (1.8):

$$\sigma_y \leq \sigma_{yc} \quad (1.6)$$

$$\int_R^{R+l} \sigma_y(x, y=0) \leq \int_R^{R+l} \sigma_{yc}(x, y=0) = l \cdot X_T \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{l} \int_R^{R+l} \sigma_y(x, y=0) = X_T \quad (1.8)$$

Donde ha considerado que la tensión que rige es fallo es en la componente normal en dirección y. Por otro lado, se redefine el criterio energético puntual (1.9) a promediado (1.12):

$$G \leq G_c \quad (1.9)$$

$$G(a) = -\frac{\partial \Pi}{\partial A} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} \frac{1}{t} \leq G_c \quad (1.10)$$

$$2 \int_R^{R+l} G(a) da \leq 2 \int_R^{R+l} G_c da = 2G_c l \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{l} \int_R^{R+l} G(a) da = G_c \quad (1.12)$$

De manera práctica, se reescribe en términos de la tenacidad de fractura mediante la relación de Irwin, quedando entonces como:

$$\frac{1}{l} \int_R^{R+l} K_I^2(a) da = K_{Ic}^2 \quad (1.13)$$

En conclusión, el sistema de ecuaciones (1.8) y (1.13) definen el criterio acoplado, cuando ambos se cumplan se producirá el fallo del material.

1.1.4. Variables e incógnitas

Es de notable importancia establecer con claridad cuales van a ser las incógnitas del problema y los datos desde los que se parten. Sea entonces el sistema de ecuaciones definido por el criterio acoplado (1.14), planteado ya por Cornetti en sus trabajos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_R^{R+l} \sigma_y(x, y=0) &= X_T \\ \frac{1}{l} \int_R^{R+l} K_I^2(a) da &= K_{Ic}^2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Como variables conocidas se tendrán las propiedades del material, su resistencia a tracción X_T y el valor de su tenacidad a la fractura K_{Ic} . Por otro lado como datos geométricos propios del espécimen a estudiar, el radio del agujero R y el ancho de la probeta W , aunque este último no aparezca de manera explícita en las ecuaciones.

Y como incógnitas a calcular se tendrán el tamaño crítico de la grieta l_c y la carga del fallo del material σ_{oc} siendo esta última la que nos interesa determinar en primera instancia.

1.1.5. La formulación adimensional

Para tener un planteamiento generalizado del problema se recurre a la definición de una serie de parámetros adimensionales:

$$\sigma_y = \sigma_\infty \cdot \hat{\sigma}_y \quad (1.15)$$

$$\sigma_\infty = X_T \cdot \hat{\sigma}_\infty \quad (1.16)$$

Donde la distribución de tensiones normales en la dirección y σ_y se adimensionaliza con respecto a la tensión aplicada en los extremos del espécimen (1.15), y a su vez dicha tensión se escala con la resistencia a tracción del laminado (1.16).

$$\gamma = \frac{K_{Ic}}{X_T \sqrt{R}} \quad (1.17)$$

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{R} \hat{K}_I \quad (1.18)$$

Se define el número de fragilidad del material γ (1.17) (puede encontrarse a veces como γ_{2R}), y una expresión adimensional para el factor de intensificación de tensiones K_{Ic} (1.18). Con estas expresiones, es inmediata la formulación generalizada del problema. Para el criterio tensional se procede como sigue:

$$\frac{1}{l} \int_R^{R+l} \sigma_y(x, y=0) dx = \frac{1}{l} \int_R^{R+l} \sigma_\infty \cdot \hat{\sigma}_y(x) dx = \frac{\sigma_\infty}{l} \int_R^{R+l} \hat{\sigma}_y(x) dx = X_T \quad (1.19)$$

$$\hat{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_\infty}{X_T} = \frac{l}{\int_R^{R+l} \hat{\sigma}_y(x) dx} = s(l) \quad (1.20)$$

Se tiene una expresión explícita $s(l)$ de la tensión adimensional escalada como función del valor de la longitud de la grieta crítica. Por otro lado queda redefinir el criterio energético, que de manera análoga podrá formularse de manera explícita:

$$\frac{1}{l} \int_R^{R+l} K_I^2(a) da = \frac{1}{l} \int_R^{R+l} \sigma_\infty \sqrt{R} \hat{K}_I(a)^2 da = \frac{\sigma_\infty \sqrt{R}^2}{l} \int_R^{R+l} \hat{K}_I^2(a) da = \quad (1.21)$$

$$= \frac{X_T \cdot \hat{\sigma}_\infty \sqrt{R}^2}{l} \int_R^{R+l} \hat{K}_I^2(a) da = K_{Ic}^2$$

$$\hat{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_\infty}{X_T} = \frac{K_{Ic}}{X_T \sqrt{R}} \sqrt{\frac{l}{\int_R^{R+l} \hat{K}_I^2(a) da}} = \gamma \sqrt{k(l)} \quad (1.22)$$

Queda definida otra nueva expresión explícita $k(l)$ de la tensión adimensional escalada y escalada por el número de fragilidad γ . Las funciones $s(l)$ y $k(l)$ definidas, a veces son denotadas como $s_{W2R}(l)$ y $k_{W2R}(l)$.

La combinación de ambas expresiones define una ecuación no lineal con la única variable desconocida l_c , longitud crítica de la grieta. Quedando el problema cerrado por dicha ecuación que será denominada como ecuación fundamental del problema de fractura.

$$s(l_c) - \gamma \sqrt{k(l_c)} = 0 \quad (1.23)$$

Dicha ecuación puede ser resuelta mediante diversos métodos, en concreto puede utilizarse la regla de Simpson. Una vez obtenida la longitud crítica de la grieta se puede calcular el valor de la tensión de fallo.

1.3. La resolución del problema

Como ya se ha comentado antes sólo se necesitan un número muy reducido de datos para poder solucionar el problema, sin embargo esto no es del todo cierto, ya que existe una fuerte dependencia según la orientación que adquiera el laminado. Esto quiere decir que la complejidad y forma de la solución reside en la secuencia de apilado, comprendiendo que los siguientes desarrollos sólo serán válidos para laminados simétricos. El estudio únicamente de laminados balanceados o simétricos tiene la ventaja de un desacoplamiento entre los esfuerzos de laja y placa. Así pues, se van a exponer diferentes casos para resolver el problema según la isotropía del material.

Se utilizará la teoría general del laminado con la hipótesis de Kirchoff para placa delgada, además de trabajarse con un material homogéneo equivalente. En cada uno de los apartados se definirá las expresiones de la distribución de tensiones a nivel analítico o por elementos finitos y la del factor de intensificación de tensiones, habiéndose fundamentado en los trabajos realizados por Camanho en [2].

1.1.6. Laminado cuasi-isótropo

Se define un laminado cuasi-isótropo como aquel en que las propiedades no dependen de la dirección, no existiendo acoplamientos entre efectos normales y tangenciales. Son característicos aquellos con secuencias [0,45,-45,90] u otra combinación de las mismas. Es el caso más sencillo que se va a presentar, puesto que existen expresiones analíticas tanto para las tensiones como para el intensificador de tensiones.

- **Distribución de tensiones:** Isótropa (Analítica)

$$\sigma_y(x, 0) = R_K \frac{\sigma_\infty}{2} \left[2 + \xi^2 + 3\xi^4 \right], \quad \xi = \frac{R}{x} \quad (1.24)$$

donde R_K es el factor correctivo de tamaño finito:

$$R_K = \left\{ \frac{3(1-2R/W)}{2+(1-2R/W)^3} \right\}^{-1} \quad (1.25)$$

- **Factor intensificación de tensiones:** Isótropo (Analítica)

Se utiliza el intensificador de tensiones correspondiente a dos grietas simétricas que emanan de una placa con un agujero central:

$$K_I = f_w f_h \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (1.26)$$

donde f_h es el factor correctivo por presencia de agujero:

$$f_h = f_n \sqrt{1 - \frac{R}{a}} \quad (1.27)$$

$$f_n = 1 + 0.358\lambda + 1.425\lambda^2 - 1.578\lambda^3 + 2.156\lambda^4, \quad \lambda = R/a \quad (1.28)$$

y f_w el factor correctivo de tamaño finito:

$$f_w = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi R}{W}\right) \sec\left(\frac{\pi a}{W}\right)} \quad (1.29)$$

1.1.7. Laminado ortótropo

Para el siguiente tipo de laminado no existen acoplamientos entre efectos normales y tangenciales, siempre y cuando la carga a la que se somete se encuentre en los ejes de ortotropía del material. Por lo que se considerarán únicamente las tensiones normales en dirección y .

- **Distribución de tensiones:** Ortótropa (Analítica)

$$\sigma_y(x, 0) = R_K \frac{\sigma_\infty}{2} \left[2 + \xi^2 + 3\xi^4 - (K_T^\infty - 3)(5\xi^6 - 7\xi^8) \right], \quad \xi = \frac{R}{x} \quad (1.30)$$

donde K_T el concentrador de tensiones para una placa infinita con agujero y R_K es el factor correctivo de tamaño finito.

$$K_T^\infty = 1 + \sqrt{\frac{2}{A_{22}} \left(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12} + \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{2A_{66}} \right)} \quad (1.31)$$

$$R_K = \frac{K_T}{K_T^\infty} = \left\{ \frac{3(1-2R/W)}{2+(1-2R/W)^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{W} M \right)^6 K_T^\infty - 3 \left[1 - \left(\frac{2R}{W} M \right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (1.32)$$

$$M^2 = \frac{\sqrt{1-8 \left[\frac{3(1-2R/W)}{2+(1-2R/W)^3} - 1 \right]} - 1}{2(2R/W)^2} \quad (1.33)$$

- **Factor intensificación de tensiones:** Ortótropo (Analítica)

$$K_I = f_o f_w f_h \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (1.34)$$

donde f_o es el factor de ortotropía del material dado por Suo en [3]:

$$f_o = 1 + 0.1(\rho - 1) - 0.016(\rho - 1)^2 + 0.002(\rho - 1)^3 \quad (1.35)$$

$$\rho = \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2G_{xy}} - \sqrt{\nu_{xy} \nu_{yx}} \quad (1.36)$$

1.1.8. Laminado anisótropo

Es el caso de mayor complejidad que se va a presentar, puesto que los efectos normales y tangenciales tendrán lugar, sin embargo despreciaremos la acción de las tensiones tangenciales acopladas. De manera general no existen expresiones analíticas para estos casos, así que habrá que recurrir al uso de elementos finitos.

- **Distribución de tensiones:** Anisótropa (FEM)

Se desarrolla un modelo de elementos finitos para conocer la distribución de tensiones a lo largo del eje x , e interpolando los valores hallados. Es interesante detonar que habrá que resolver un problema para cada ratio agujero-ancho, ya que el escalamiento del modelo no influye en la forma del perfil.

$$\hat{\sigma}_y(\zeta) = \sum_{i=0}^n c_i \zeta^i \quad \zeta = \frac{W_0}{W} x \quad (1.37)$$

- **Factor intensificación de tensiones:** Aproximación a ortótropo (Analítica)

Se utilizarán las expresiones desarrolladas en el caso de un laminado ortótropo.

1.4. Modos de fallo

Se considerarán dos modos de fallo asociados a los ensayos que se van a realizar teniendo en cuenta la tipología de la carga establecida, siendo el fallo por concentrador de tensiones el primero de ellos y el fallo por sección neta el otro. Ambos fallos son excluyentes entre sí, o se produce uno u el otro, no se considerarán efectos mixtos. A continuación se definen para su posterior visualización en los análisis experimentales.

1.1.9. Fallo por sección neta

Para que se produzca, las tensiones deben tener un espacio corto para su regularización y por tanto asemejarse a un perfil plano, además de no alcanzar una condición crítica para la aparición de una grieta en la misma. La sección neta transversal de la probeta alcanza en su totalidad un nivel de tensión igual a la resistencia a tracción del laminado, el fallo se produce de manera generalizada. Se asume este fallo como una verificación del criterio de máxima tensión en la sección neta.

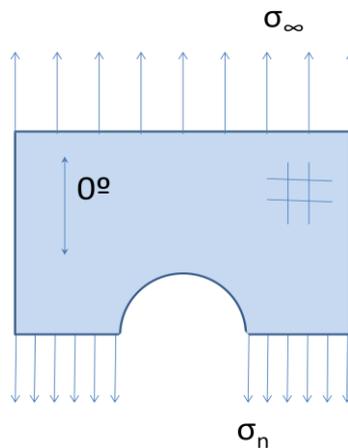


Figura 2-2. Modelo de sección neta.

Se puede establecer una relación entre la tensión a la que se somete la probeta en sus extremos con el valor promediado de la tensión en la sección neta, realizando un balance de fuerzas así se define así la tensión neta.

$$\sigma_n \leq X_T \quad (1.38)$$

$$(W - 2R) \cdot t \cdot \sigma_n = W \cdot t \cdot \sigma_\infty \quad (1.39)$$

$$\sigma_n = \frac{W}{W - 2R} \sigma_\infty \leq X_T \quad (1.40)$$

De manera clara se observa que no es más que la tensión en los extremos por un factor que magnifica dicha tensión para tener la neta. Depende únicamente de las características geométricas, sin entrar en las propiedades del material, en este paso se supone que los efectos normales y tangenciales se encuentran desacoplados (para el caso del laminado anisótropo es erróneo, por ello se toma esta hipótesis). Reescribiendo el criterio de máxima tensión en función de la tensión nominal se obtiene la expresión adimensional:

$$\sigma_\infty = \frac{W - 2R}{W} \sigma_n = \left(1 - \frac{2R}{W}\right) \sigma_n \quad (1.41)$$

$$\hat{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_\infty}{X_T} = \left(1 - \frac{2R}{W}\right) \quad (1.42)$$

Este modo de fallo no está contemplado dentro de la formulación del problema, puesto que no aparece grieta alguna, al ser una ruptura generalizada. De esta manera, los valores experimentales para los mismos no tendrán su correspondiente aproximación teórica.

1.1.10. Fallo por concentrador

En este modo de fallo se espera que aparezca una grieta de manera espontánea acorde con los principios establecidos en la Mecánica de la Fractura Finita cuando se cumple el criterio acoplado, y produciéndose de manera casi inmediata una propagación inestable de la grieta que lleva a la ruptura total del material.

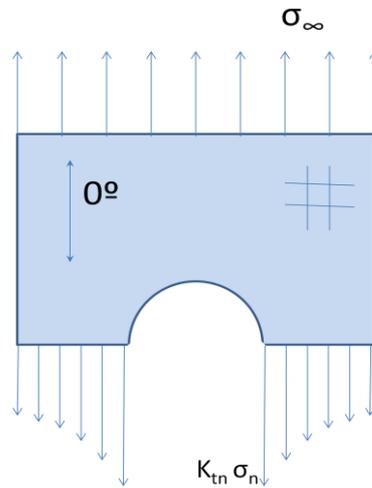


Figura 2-3. Modelo de concentrador.

El efecto en el perfil de tensiones por delante del agujero es el típico de un concentrador de tensiones que acentúa el perfil tendiendo el valor tensional al triple de su valor nominal, en el caso de materiales isotrópicos. Para otras configuraciones estos valores del concentrador K_t se mantienen cercanos a 3. Como antes se comentó al ser ambos fallos excluyentes, cuando uno de ellos se observe no habrá que estudiar el otro.

La definición del concentrador de tensiones tiene expresión para materiales ortótropos, esta será la que se utilice de aquí en adelante al aproximarse el laminado anisótropo a ortótropo. Teniendo esto en cuenta se define el valor del concentrador en la sección neta (1.43) siendo la referencia los apuntes de Bergsma en [4]:

$$K_m = C_l \cdot K_t \quad (1.43)$$

donde C_l es el factor de conversión a nivel neto:

$$C_l = \frac{1}{3} \left(2 + \left(1 - \frac{2R}{W} \right)^3 \right) \quad (1.44)$$

donde K_t es la expresión analítica del concentrador para un material ortótropo:

$$K_t = 1 + \sqrt{2 \left(\sqrt{\frac{E_y}{E_x} - \mu_{xy}} \right) + \frac{E_y}{G_{xy}}} \quad (1.45)$$

Una vez definido el valor de las tensiones por delante del agujero gracias al nivel de las tensiones, tomamos como criterio de fallo por concentrador el de máxima tensión aplicado en el fondo del agujero.

$$\sigma_{n(x=R)} = K_m \sigma_n \leq X_T \quad (1.46)$$

Esta definición del criterio puede ser reescrita en función de los valores de tensión nominales usando el balance de fuerzas sobre la placa:

$$K_m \frac{\sigma_\infty}{\left(1 - \frac{2R}{W}\right)} = X_T \quad (1.47)$$

Finalmente se obtiene una expresión analítica adimensionalizada para el criterio límite:

$$\hat{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_\infty}{X_T} = \frac{\left(1 - \frac{2R}{W}\right)}{K_m} = \frac{1}{K_{t\infty}} \quad (1.48)$$

1.1.11. Región de tensiones admisibles de fallo

Cada uno de los modos de fallos presentados responder a situaciones límites que pueden darse en los especímenes, por ello es de esperar que la mayoría de éstos se encuentren entre ambos. Por ello es resulta ilustrativo tener un esquema para ver de manera gráfica dichos modos. Se dibujan así los límites dados por los criterios de rotura:

- **Curva de sección neta:** Denominada como “*notch insensitive*”, se define para aquellas probetas en las que el concentrador de tensiones no ejerce efecto alguno en la rotura del material. Su expresión analítica viene dada por (1.42).
- **Curva de concentrador:** Denominada como “*notch sensitive*”, es el límite teórico definido para este modo de fallo en el que la rotura se produce en el fondo del agujero al cumplirse el criterio de máxima tensión (únicamente contemplando las tensiones normales en la dirección de aplicación de la carga). Dicha curva es función de las características elásticas del material siendo la expresión (1.48).

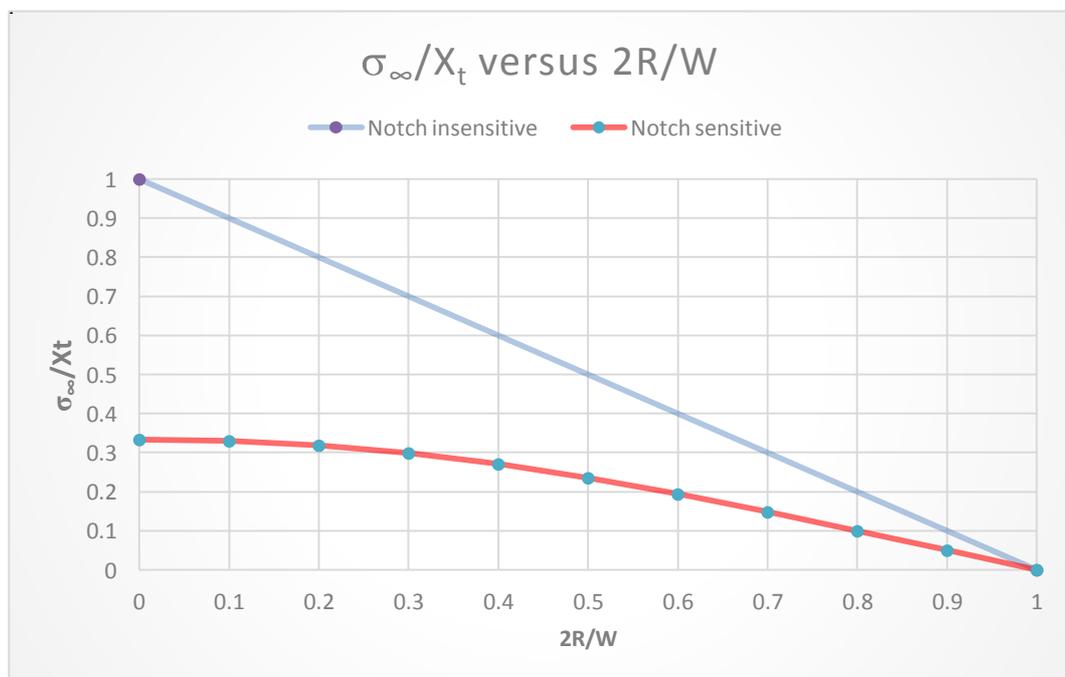


Figura 2-4. Región de tensiones de fallo para un material isótropo.

Siguiendo esta dinámica, se delimita una región de estados de tensiones de fallos posibles para las diferentes configuraciones de tamaño de agujero y ratios de los especímenes. Así todo punto debe encontrarse dentro de ésta región, según se acerque más a la curva del concentrador el modo de fallo habrá estado dominado en mayor medida por el mismo, lo que quiere decir una mayor sensibilidad a la entalla y viceversa para el caso contrario.