# **5 PREDICCIONES**

Coming together is a beginning. Keeping together is progress. Working together is success.

-Henry Ford-

a búsqueda de una formulación sencilla, clara y eficiente que sea capaz de predecir la carga de rotura con el conocimiento sólo de dos propiedades del material supone la base del estudio fundamentado en la Mecánica de la Fractura Finita. Las predicciones se realizarán con diferentes metodologías de análisis del problema estudiando la idoneidad de cada una de ellas en función del error que cometan las mismas con respecto a los valores experimentales.

Se establece una ley de comportamiento de la tensión de rotura en función del tamaño del agujero y del ratio del espécimen. Tomando como variables de entrada tanto la resistencia a tracción del laminado como el de la tenacidad a fractura, se tienen los valores estimados para las cargas de rotura. Realizando un barrido para diferentes radios y ratios de probetas se tienen las siguientes predicciones en la región de tensiones admisibles de fallo (Figura 5-1).



Figura 5-1. Predicciones en la región de tensiones para el laminado cuasisótropo B.

# 1.10. La solución de la ecuación fundamental

En este apartado se detallan los resultados obtenidos al resolver la ecuación fundamental del problema de fractura, para su resolución se ha empleado un código de compilación en MATLAB. Mediante el método de Newton-Raphson se obtuvo una solución numérica de la ecuación para diferentes valores de ratio anchoagujero y tamaño de agujero. Hay que denotar que la solución de la ecuación proporciona un valor de la longitud crítica de la grieta, y conocido ésta el resto de incógnitas son fácilmente calculadas. Así pues, se analizarán la evolución de cada uno de los parámetros para cada laminado, respecto a una variación del tamaño y/o ratio.

Para obtener una rápida comprensión de los efectos de tamaño y geometría se opta por dar una solución gráfica al problema, dibujando tanto el criterio tensiónal dado por la ecuación (1.20) como el energético escalado por el número de fragilidad y dado por (1.22). Así en el caso del laminado cuasisótropo se tendría la siguiente solución de la figura 5-2:



Figura 5-2. Criterio acoplado para el laminado cuasisótropo B.

Tal y como se había descrito en la ecuación fundamental, cuando ambas curvas corten darán lugar a un punto solución. En el caso en que no se produjera el corte entre ambas gráficas y el criterio energético estuviera por encima del tensional, siendo el dominante habría que buscar el mínimo del mismo. Así pues, figura en rojo el criterio tensional y en azul diversos criterios energéticos que variaron en función de diferentes radios del agujero, estando la longitud crítica de la grieta adimensionalizada con respecto a la longitud libre para su propagación.

$$\begin{array}{c|c} X_{T} & s(l_{c}) - \gamma \sqrt{k(l_{c})} = 0 & \sigma_{\infty} \\ \hline K_{Ic} & l_{c} \end{array}$$

#### Variación del tamaño del agujero

Si se aumenta del número de fragilidad (aumento del tamaño del agujero) no hace más que reducir la carga crítica de fallo, así como reducir el tamaño de la grieta crítica tal y como se observa en la figura 5-3. Desde el punto de visto energético, el aumento del número de fragilidad disminuye la energía necesaria para la aparición de la grieta, lo que lleva a valores menores del tamaño de la misma. Esto lleva a la situación de que para espécimenes de grandes tamaños necesita una energía menor para que la grieta aparezca.



Figura 5-3. Criterio acoplado para el laminado anisótropo A.

#### Variación del ratio

Si se procede en cambio a una variación en el ratio, manteniendo el tamaño del agujero, no se observa una diferencia notable en la carga de fallo, pero sí en la longitud de la grieta (Figura 5-4).



Figura 5-4. Criterio acoplado para el laminado anisótropo A.(II)

### 1.10.1. Longitud crítica de grieta

Definida como la grieta que aparece de manera espontánea en el material para un valor crítico de la carga, el tamaño de la misma es de vital importancia, pues nos proporciona una idea del daño inicial producido en el seno del material. De la misma manera, si su tamaño es lo suficiente grande, puede observarse a simple vista, así se analizan los valores típicos estimados para los ensayos.

Se muestra a continuación en la figura 5-5, los valores teóricos calculados para el laminado anisótropo, en el que se hizo uso del cálculo de elementos finitos para la distribución de tensiones. En valores absolutos el valor de la grieta parece crecer o decrecer en función del ratio de trabajo, sin embargo algo es claro, que el tamaño relativo de la grieta frente al agujero  $\eta_F$  disminuye de manera estricta conforme el agujero sea mayor.



Figura 5-5. Longitudes críticas para el laminado anisótropo A.

Partiendo de este hecho se puede afirmar que para valores pequeños del agujero las grietas parecen ser del orden del 50-70% del tamaño del mismo, y conforme aumenta se llega a valores del entorno del 20%. Esto pone de manifiesto que para valores pequeños del agujero el criterio energético resulta muy dominante frente al tensional y se requiere la aparición de una grieta que sea suficientemente grande como para producirse la rotura. Por otra parte, para valores más elevados del agujero, no es necesario que la grieta sea tan grande, con valores bajos se consigue la rotura (pérdida de la influencia del criterio energético).

De manera análoga se desarrolla la solución para los laminados cuasisótropos. En este caso se puede ver como las grietas pasan del orden del 100 al 40% de manera similar con los laminados anteriores, observándose los mismos efectos que se han expuesto anteriormente.



Figura 5-6. Longitudes críticas para el laminado cuasisótropo B.

## 1.10.2. Carga de fallo

Junto con el tamaño de la grieta, la carga de fallo resulta ser la variable principal de interés en este estudio, puesto que es la que condiciona las características de diseño. Se realizan las estimaciones de carga para ambos laminados, en el que caso en que su modo de fallo sea por efecto del concentredor.

#### 1.10.2.1. Laminado A

Utilizando la formulación descrita para laminados anisótropos, se recurre al uso de un modelo de elementos finitos para el cálculo de la distribución de tensiones a lo largo del camino libre. Mediante NASTRAN-PATRAN se realiza un modelado de la probeta, donde se afina el mallado en las proximidades del agujero.



Figura 5-7. Mallado en Patran.

Según el grado de anisotropía del material, las aproximaciones realizadas serán mejores en mayor o menor medida, así pues aquí se muestra el campo de tensiones normales en el eje y, en donde la distribución no resulta ser simétrica por el efecto descrito. Sin embargo el efecto en este caso hace que el punto de tensiones máximas se desplace en torno a 5º lo que resulta admisible para la formulación planteada.



Figura 5-8. Campo de tensiones normales en el eje y.

Este modelo debe de realizarse para cada ratio, se ha estudiado para los ratios 5 y 10, en ambos se observa que su aplicabilidad es total.

Espécimen	W/2R	2R(mm)	σ∞(MPa)	$\sigma_{\infty}/X_{t}$
6	5	2.5	485.40	0.60
7	5	4.15	425.50	0.53
8	5	6	384.60	0.48
9	5	8	355.70	0.44
10	5	10	335.50	0.41
11	10	2.5	561.59	0.70
12	10	4.15	490.91	0.61
13	10	6	442.38	0.55
14	10	8	410.34	0.51

1 abia 3 - 1.1 real concontrol minimum 1	Tabla	5–1.	Predic	ciones	laminado	οA
--	-------	------	--------	--------	----------	----

Dichos valores han sido calculados acorde al procedimiento establecido en el apartado 1.2.3, se presenta a continuación los valores:



**Figura 5-9.** Evolución de la tensión crítica de fallo estimada en función del tamaño del agujero para el laminado A.

# 1.10.2.2. Laminado B

Espécimen	W/2R	2R(mm)	σ∞(MPa)	$\sigma_{\infty}/X_t$
1	2	2.5	443.92	0.55
2	2	4.15	423.51	0.52
3	2	6	447.68	0.55
4	2	8	397.47	0.49
5	2	10	420.54	0.52
6	4	2.5	728.82	0.67
7	4	4.15	558.35	0.62
8	4	6	490.70	0.58
9	4	8	466.71	0.54
10	4	10	464.69	0.51





Tabla 5–2. Predicciones laminado B

**Figura 5-10.** Evolución de la tensión crítica de fallo estimada en función del tamaño del agujero para el laminado B.

# 1.11. Validación del modelo

Dentro del siguiente apartado se llevará a cabo el contraste del modelo teórico con los datos obtenidos de los ensayos, debe recordarse que esto sólo se realizará para aquellos especímenes que hayan fallado por efecto del concentrador, no contempladose así los fallos por sección neta.

Como objeto se establece aclarar los posibles errores derivados del método y maneras de mejorar su precisión a la hora de estimar las cargas de fallo.

## 1.11.1. Laminado anisótropo A

Para la estimación de valores en este tipo de laminado se hicieron varias hipótesis simplificatorias que serán las que llevarán aparejadas los errores en las aproximaciones teóricas. Se realizan dos tipos de estimaciones, siendo la primera de ellas la reflejada por FFM (1) haciendo referencia a la formulación realizada en [1] para laminados cuasisótropos, ya que esta es una aproximación muy fuerte para el mismo, y por otro lado la desarrollada para laminados anisótropos.

FFM	Predicción (1)	Predicción (2)
Distribución de tensiones	Ortótropa	Anisótropa
Factor de intensidad	Isótropa	Ortótropa
Modo de fractura	I	I
Criterio	Acoplado	Acoplado

Tabla 5–3. Predicciones laminado A

Se detalla a continuación en las gráficas, los valores estimados dentro de la nube de puntos experimentales calculados, donde el error calculado hace referencia al relativo con respecto al valor experimental ensayado:

Espécimen	W/2R	2R(mm)	σ∞ (MPa)	σ∞ (1) (MPa)	σ∞ (2) (MPa)	Error (%) (1)	Error (%) (2)
6	5	2.5	483.74	492.72	511.66	1.86	5.77
7	5	4.15	483.18	432.93	443.91	10.40	8.13
8	5	6	446.78	391.79	398.72	12.31	10.76
9	5	8	504.02	363.29	367.18	27.92	27.15
10	5	10	442.32	343.86	345.29	22.26	21.94
11	10	2.5	577.82	524.31	566.22	9.26	2.01
12	10	4.15	558.72	455.76	494.88	18.43	11.43
13	10	6	510.31	410.22	445.43	19.61	12.71
14	10	8	495.90	379.18	412.75	23.54	16.77

#### Tabla 5-4. Contraste laminado A

Todas las predicciones se mantienen por debajo de valor real de fallo, por lo tanto dichas predicciones están por el lado de la seguridad. Se puede añadir que se produce un incremento en el error estimado conforme crece el tamaño de los especímenes. De manera global, la mejor modelación del problema hace mejorar las predicciones de fallo reduciéndose los errores.

Es de esperar que las predicciones mejoran al considerarse los efectos de anisotropía del laminado, en partinal una mejora del perfil de tensiones en el laminado y de la evaluación del concentrador de tensiones parece ser dominante para determinar el fallo.

Se queda por debajo porque existe una mayor resistencia a la propagación de la grieta al poder ser regida por el modo II. Además considerando un modo mixto de fallo de modo I y II.



Figura 5-11. Validación del modelo para ratio 5 en el laminado anisótropo A.



Figura 5-12. Validación del modelo para ratio 10 en el laminado anisótropo A.

# 1.11.2. Laminado cuasisótropo B

En el siguiente caso, sólo hará falta un tipo de predicción, la desarrollada para laminados cuasisótropos. Donde se evaluará los especímenes de ratio 2 y 4, estos últimos fueron los que en su mayoría fallaron por efecto del concentrador.

Tabla 5–5. Contraste laminado B

Espécimen	W/2R	2R(mm)	σ∞(MPa)	<b>σ</b> ∞ (1) (MPa)	Error (%) (1)
1	2	2.5	443.92	325.91	26.58
2	2	4.15	423.51	308.13	27.24
3	2	6	447.68	291.05	34.99
4	2	8	397.47	276.57	30.41
5	2	10	420.54	265.37	36.90
6	4	2.5	728.82	544.17	25.34
7	4	4.15	558.35	505.10	9.56
8	4	6	490.70	468.70	4.48
9	4	8	466.71	437.89	6.17
10	4	10	464.69	413.90	10.93



Figura 5-13. Validación del modelo para ratio 2 en el laminado cuasisótropo B.



Figura 5-14. Validación del modelo para ratio 4 en el laminado cuasisótropo B.

Parece adaptarse bien, el valor para el laminado pequeño no habría que tenerse en cuenta al romper éste por sección neta, por tanto a partir de 4.15 los valores son próximos y los errores bajos.

# 1.12. Teoría del weakest link

A la hora de medir las propiedades de resistencia de un material cualesquiera, en la elaboración de la probeta es de esperar que ésta cuente con defectos internos en la misma y sean estos mismo los que promuevan el fallo de la misma ante un estado de carga. La coalescencia de pequeños defectos unidos en cadena o incluso de un gran defecto son causa del fallo del material. Centrándose en el ensayo de tracción, se fabrica una probeta de dimensiones dadas y se somete a un estado de carga uniaxial en la dirección longitudinal. Si el objeto es la medida de su resistencia a tracción se ha de llevar la probeta hasta su carga última, la dispersión de resultados en el valor de esta carga es algo de especial interés.

En el caso de que se tuviera un material sin defectos es de esperar que dicho valor sea mayor que en aquellos en los que puede haber defectos presentes, de ahí esta dispersión (teniendo en cuenta de que el ensayo se realice en las misma condiciones, temperatura, velocidad de carga, operario encargado,...) Esto anima a pensar en la siguiente paradoja, sea una placa con agujero sometida a tracción uniaxial, la misma a nivel de tensión neta es capaz de llegar a soportar hasta un 30% por encima de su carga, ¿cómo es esto posible? ¿Si se cumple el criterio de máxima tensión cómo es que puede sobrepasarse?

Para responder a estas preguntas hay que suponer el siguiente caso, sea una probeta con ciertos defectos que se ensaya y se mide su resistencia a tracción, el valor proporcionado es el de una probeta que ha fallado en una zona con defectos internos. Ahora bien sea otra probeta con agujero donde en su dirección perpendicular a la carga no existen defectos, entonces es de esperar que a nivel local la resistencia in situ sea mayor, por tanto que pueda llegar a sobrepasar la medida en el ensayo de tracción. Es por esto que debe entrar en juego la estadística para predecir esta variabilidad en la resistencia a tracción.

Como se observó anteriormente, hay ciertos valores que han sobrepasado el umbral definido por la curva de sección neta, por ello es interesante realizar una redefinición del valor de la resistencia a tracción del laminado en función de una probeta ensayada. Dicha probeta será denominada como probeta referencia, como características debe tener una ínfima influencia del criterio energético, es decir, una amplia dominación del tensional por lo que debe ser una placa que se pueda considerar de tamaño infinito (2R alto) y con 2R/W<<1.

Para ello se vuelve a montar el sistema de ecuaciones del criterio acoplado, tomando como incógnitas la longitud crítica de la grieta y la resistencia a tracción, y como datos la tenacidad a fractura y la carga crítica. Se definen entonces para cada ratio de probetas ensayo un nuevo valor de la resistencia a la tracción, que será denominada resistencia a tracción in situ  $X_{Ts}$ . Hay que hace notar que este nuevo plateamiento acepta la idoneidad de la medida de la tenacidad a fractura del laminado y la siguiente expresión:

# 1.12.1. Weakest link ratio 2

En este caso se realizará esta redefinición de la resistencia para el laminado cuasisótropo B con ratio W/2R= 2 y como referencia la probeta de mayor tamaño con 2R=10mm. Como solución al sistema planteado la resistencia a tracción pasa de un valor de 811.34 MPa a 1580.5 MPa, un aumento del casi 100% del propio valor de la resistencia, dicho aumento era de esperar ya se había subestimado la medida, de esta forma el punto de referencia será predicho con error nulo, quedando las predicciones como sigue:

Espécimen	W/2R	2R(mm)	σ∞(MPa)	<b>σ</b> ∞ (I) (MPa)	Error (%) (I)
1	2	2.5	443.92	521.82	17.55
2	2	4.15	423.51	475.95	12.38
3	2	6	447.68	448.69	0.22
4	2	8	397.47	431.52	8.57
5	2	10	420.54	420.54	0.00

Tabla 5-6.	Weakest link	para ratio 2
------------	--------------	--------------

Representando los valores de la predicción referenciada con su propio ratio se consigue mejorar los valores de los mismos disminuyéndose así el error.



Figura 5-15. Validación del modelo para ratio 4 en el laminado cuasisótropo B.

Así también se practica con la región de tensiones admisibles últimas, donde se observa cómo ahora todos los puntos sobre la línea del concentrador, esto nos indica el valor poco idóneo que adopta la resistencia in situ, es esperable que este valor se encuentre por encima del real. Por ello se recurre a realizar el mismo estudio sobre el ratio 4 donde el efecto de escala es mucho más apreciable.



Figura 5-16. Validación del modelo para ratio 4 en el laminado cuasisótropo B.

## 1.12.2. Weakest link ratio 4

Por otra parte, se vuelve a redefinir el valor de la resistencia in situ para el ratio W/2R= 4 y 2R=10mm. Donde la resistencia pasa de un valor de 811.34 MPa a 1028.9 MPa, aumentando en torno a un 27% su valor, de nuevo crece el valor in situ. Quedando así las predicciones para el ratio propuesto:

Espécimen	W/2R	2R(mm)	σ∞(MPa)	σ∞ (II) (MPa)	Error (%) (II)
6	4	2.5	728.82	637.89	12.48
7	4	4.15	558.35	560.38	0.36
8	4	6	490.70	513.49	4.64
9	4	8	466.71	483.74	3.65
10	4	10	464.69	464.69	0.00

Tabla 5–7. Weakest link para ratio 4
--------------------------------------

La evolución del perfil se ajusta mucho mejor a los datos experimentales además el valor de la resistencia in situ ha aumentado pero no en demasía, como en el otro ratio que duplicaba su valor.



Figura 5-17. Predicción con weakest link para ratio 4 en el laminado cuasisótropo B.

Para conocer la idoneidad de la nueva resistencia in situ, se vuelve a dibujar la región de tensiones admisibles y a estudiar la nueva distribución de los puntos experimentales sobre la misma. Como se muestra en la figura 5-18, recordando cómo eran las predicciones que aparecían en la figura 5-1 en la que las curvas para diferentes tamños de agujero convergían hacia la derecha, ahora la forma de la distribución de los puntos lleva a pensar que nos encontramos con un valor de la resistencia aceptable. Esto se debe a que se cumplen dos premisas:

- Todos los puntos caen dentro de la región admisible.
- La convergencia de los puntos conforme el ratio 2R/W aumenta.



Figura 5-18. Validación del modelo para ratio 4 en el laminado cuasisótropo B.

## 1.12.3. El valor de la resistencia in situ

Una vez estudiado las nuevas predicciones para los valores de la resistencia in situ, resulta interesante cruzar las predicciones de los mismos, a fin de ver la idoneidad de cada una de ellas. En este caso al contar con pocos valores de los ratios, resulta insuficiente para elucidar si la resistencia in situ converge a un valor que resulta óptimo para todas las predicciones. Como resumen a las predicciones realizadas se tiene la siguiente tabla:

Weakest link	Predicción (I)	Predicción (II)
Probeta referencia	5	10
2R (mm)	10	10
W/2R	2	4
Xts (MPa)	1580.5	1028.9
<b>ΔX</b> t/Xt (%)	100%	27%

Tabla 5–8. Predicciones in situ para laminado B

Es importante diferenciar entre resistencia a tracción y resistencia in situ, la primera se puede medir en el laborario, mientras que la segunda se calcula a través de una serie de ensayos de manera indirecta. El valor real de la resistencia in situ puede acotarse si se fundamenta en las siguientes afirmaciones:

- El valor de la resistencia a tracción medida en el ensayo está subestimada, debido a las imperfecciones propias del material que lo hacen fallar por zonas más sensibles.
- El valor calculado para la resistencia del ratio 2 resulta ser demasiado elevado y lleva los puntos de ensayos fuera de la región de tensiones admisibles.

$$X_T \le X_{T_s} \le X_{T_s(W/2R=2)}$$
(1.57)

De esta forma se podría modelar un problema en el que la variable a calcular X<sub>Ts</sub> está acotada entre dos valores, lo que resulta mucho más sencillo que si sólo estuviera acotada inferiormente. Siendo la función objetivo del problema la minimización de los errores en las predicciones.

# 1.13. La expresión empírica

Una vez estudiado el problema a fondo y viendo la respuesta de la carga de fallo al factor de escala y al de aspecto, puede proponerse una expresión para la evolución de la tensiones. De primera mano se han visto los efectos que ejercen un aumento del tamaño del agujero y de la variación del ratio por ello se sabe que:

- La expresión debe ser inversamente proporcional al valor del radio del agujero 2R.
- El aumento del ratio W/2R es directamente propocional con la carga de fallo.
- Para valores muy elevados del tamaño del agujero, el valor tiende la rotura por sensibilidad total al concentrador.
- Un aumento de la tenacidad a la fractura debe llevar aparejado un aumento de la carga de fallo.

Así queda la siguiente expresión propuesta:

$$\frac{\sigma_{\infty}}{X_T} = f\left(\frac{1}{2R}, \frac{W}{2R}\right) \cdot K_{Ic} + \frac{1}{K_{I\infty}}$$
(1.58)

donde la función *f* agrupa todos los efectos de la geometría de la probeta, la tenacidad a fractura es la base para el criterio energético y dicho criterio para valores elevados del tamaño de agujero pierde peso en favor del criterio tensional regido por el término del concentrador de tensiones.

Dicha expresión no tiene en cuenta el efecto que habría de modelarse cuando el agujero es muy pequeño y se alcanza el valor para rotura por sección neta. Esto podría incluirse dentro de la propia función f para que agrupase todos los casos.

Un pequeño ejemplo de cómo podría ser para un valor fijo del ratio sería el siguiente, donde las constantes *a* y *c* incluirán de manera implícita el valor del ratio.

$$\frac{\sigma_{\infty}}{X_{T}} = \frac{K_{lc}}{a(2R) + c} + \frac{1}{K_{to}}$$
(1.59)

Reesctructurando la expresión se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{K_{Ic}} \left( \frac{\sigma_{\infty}}{X_T} - \frac{1}{K_{I\infty}} \right) = \frac{1}{a(2R) + c} = \frac{1}{ax + c}$$
(1.60)

Tomando una serie de valores experimentales *a* y *c* pueden ser ajustados para que representen de manera adecuada la solución.

# 1.14. Conclusiones

El conjunto de los ensayos y su posterior procesamiento han dejado al descubierto numerosos caminos que realizar a la par que dar ideas de por donde debería abordarse el problema con una mayor precisión. De esta manera han podido aclararse los siguientes puntos:

- Existencia de un factor de escala 2*R* que modifica la carga de rotura del laminado con agujero, en la que se clarifica como un aumento del tamaño del espécimen reduce dicha carga.
- A partir de un cierto valor del agujero el valor de la carga de rotura tiende a un valor constante (dominación del criterio tensional) por lo que es definible un límite operacional a nivel práctico.
- La relación de aspecto o ratio de la probeta *W*/2*R* también tiene influencia sobre la carga de rotura de la misma, siendo en este caso directamente proporcional con la misma.
- Tanto la secuencia de apilado y así la isotropía del problema ejercen una fuerte influencia sobre la carga así como ser las responsables de la forma en que se propaga la grieta.
- La dispersión de los resultados es mucho mayor en especímenes pequeños, posiblemente debido a la presencia de microfallos en el material.
- El modo de fallo y la forma de propagación de la grieta en modo I, II o mixto está determinado por la secuencia de apilado, así quedan las diferencias apreciables entre el laminado A y B.
- La MFF es capaz de dar una solución rápida y efectiva sobre la carga de fallo.
- El modo de fallo del laminado define la aplicabilidad del método.
- La medida de la resistencia a la tracción está subestimada y la de la tenacidad a la fractura se encuentra sobreestimada.
- La acotación del valor de la resistencia in situ del laminado.
- Se puede definir una expresión empírica que ajuste los valores de los ensayos en función de los parámetros de trabajo.

# 1.15. Trabajos futuros

Con la conclusión del siguiente proyecto final de carrera se incluyen una serie de aspectos en los que se puede profundizar para seguir avanzando en el problema:

- Ajuste por mínimos cuadrados de los valores de resistencia y tenacidad a fractura que hagan la mejor predicción posible.
- Mejorar del ensayo de la tenacidad a fractura *K*<sub>k</sub> para su medida.
- Ajuste de una expresión empírica mejorada.
- Estudiar el posible el efecto de las tensiones tangenciales sobre la rotura así como la gobernancia de un modo II.
- Estudio del fallo lámina a lámina analizando los niveles tensionales que en cada una se alcanzan.
- Mejora de la acotación del valor de la resistencia in situ.