PROYECTO FIN DE CARRERA

IMPLANTACIÓN DE MODELOS DE MANTENIMIENTO EN HOJAS DE CÁLCULO

ALUMNO: MIGUEL COLLANTES CRUZ   DNI: 15443673R

INGENIERO INDUSTRIAL (PLAN 98)

TUTOR: ADOLFO CRESPO MÁRQUEZ

DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN Y GESTIÓN DE EMPRESAS I

ÍNDICE

1. FINALIDAD DEL MODELO Y LIMITACIONES DE ÉSTE

La finalidad de estos modelos en hojas de cálculo tales como Excel o calc de open office es mejorar el aprendizaje de los alumnos que cursen asignaturas de mantenimiento ya que gracias a dichos modelos pueden iniciarse en este ámbito de una manera más directa puesto que permiten ver rápidamente el efecto que produce en el comportamiento del sistema en cuestión cambiar unos parámetros de entrada u otros y además el modelo matemático de todos ellos con sus cálculos correspondientes en una herramienta al alcance de todos los alumnos y de gran popularidad.

Dichos modelos están destinados a mejorar la docencia y por tanto no tienen ningún fin comercial ya que no tendría utilidad para las empresas.

Para que fuese lo más didáctico posible se han discretizado el tiempo y todas las funciones continuas, como la función tasa de fallos, función de distribución …etc. Además se ha supuesto que se produce un solo fallo por periodo.

Una de las limitaciones del modelo es el número de intervalos de funcionamiento en que se divide el ciclo de vida del sistema.

Esta limitación lo que puede producir es que si dicho ciclo de vida del sistema es muy grande, cada intervalo de funcionamiento también lo sea y por tanto, puede ocurrir que se produzca más de un fallo en cada periodo de funcionamiento, lo que no concuerda con los modelados realizados en los cuales hemos supuesto un solo fallo por periodo.

2. BLOQUE I: MODELOS PARA LA OPTIMIZACIÓN DEL MANTENIMIENTO

2.1. INTRODUCCIÓN BLOQUE I

En este bloque nos vamos a centrar en los factores clave a considerar cuando se modela el problema del mantenimiento de equipos desde la perspectiva de su fase operativa. Dos de los factores, los más elementales, a tener en cuenta son:

-El criterio de optimalidad elegido para valorar las políticas de mantenimiento.

-El horizonte temporal del estudio.

Por lo general, en la mayoría de los sistemas industriales se suelen utilizar criterios que reflejen aspectos económicos de la gestión. De esa manera, se cuantifican características para poder evaluar el rendimiento del sistema.

Existen también ocasiones en que la eficacia del sistema es proporcional a la cantidad de tiempo sin fallos. En tales casos una medida importante del rendimiento será algún ratio que evalúe la disponibilidad del equipo para realizar la función requerida en un determinado periodo de tiempo, por ejemplo:

$$Disponibilidad = \frac{T.Funcionamiento}{\{T.Funcionamiento + T.Averia\}}$$

Por lo general se suelen combinar los dos enfoques mencionados, es decir, el que mide el coste incurrido por la acción del mantenimiento y el que mide la falta de disponibilidad de los equipos, de la que se obtiene una valoración económica. Por tanto, se dirá que una política de mantenimiento será mejor que otra, cuando proporcione menor lucro cesante, debido a la indisponibilidad, para un mismo coste de mantenimiento.

Cuando el tiempo del análisis se hace más grande, se suelen considerar valores medios por período de tiempo de los costes de mantenimiento para valorar la optimalidad del proceso. Esto es viable en los casos en los que se supone que la estimación de estos costes es proporcional al tiempo y se ha alcanzado un régimen estacionario de funcionamiento.

El modelado matemático de este estado estacionario se podría obtener evaluando el número medio de intervenciones de mantenimiento correctivo y preventivo que fueran realizadas durante un periodo de tiempo de duración determinada y para un modo de fallo determinado.

Cuando el horizonte temporal al que se extiende el análisis es finito, la forma de abordar el problema tiene que ser distinta. El procedimiento anterior en el que se determina el estado estacionario ya no es válido. El nuevo modelo requiere un procedimiento mucho más preciso. Lo que se busca es simular el comportamiento del sistema a medida que avanza el tiempo, para una particular causa de fallo, y a partir de sus características estocásticas conocidas. Mientras más preciso sea el modelo, mejor analizadas serán las políticas de mantenimiento y menores serán las suposiciones establecidas a la hora de construir el modelo. Algunas veces es necesario escoger entre precisión y complejidad.

2.2. MODELOS DE SUSTITUCIÓN TOTAL

ÍNDICE

2.2.1. Descripción del modelo e hipótesis realizadas.

Los modelos de sustitución total se aplican a sistemas completos donde la sustitución se realiza bien tras producirse un fallo (sustitución correctiva, SC) o bien después de funcionar durante un periodo de tiempo determinado (sustitución preventiva, SP). Dentro de la segunda opción se puede optar entre dos políticas de sustitución preventiva:

-Sustitución a intervalos constantes.

-Sustitución basada en la edad.

Donde tanto la sustitución preventiva como la correctiva consisten en la sustitución del sistema completo.

En los modelos de sustitución total se realizan dos hipótesis:

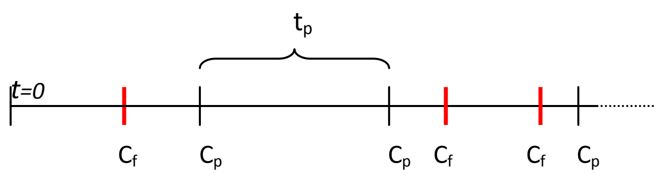
-El fallo se detecta en el momento de producirse.

-La sustitución se realiza instantáneamente.

2.2.2. Modelo de sustitución a intervalos constantes.

2.2.2.1. Discretización del tiempo, descripción del modelo, nomenclatura y ecuaciones utilizadas.

La sustitución se realiza bien al producirse el fallo (SC) o al agotarse un intervalo de tiempo de longitud constante (SP). El problema a resolver en estos modelos es determinar el intervalo de tiempo óptimo entre sustituciones preventivas, de manera que el coste total esperado por unidad de tiempo sea mínimo.



La nomenclatura utilizada es la siguiente:

C_p : coste de la SP,

C_c : coste de la SC,

t_p : tiempo al que realizar la SP,

$\lambda(t)$: función tasa de fallos,

$F(t)$: función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo,

$f(t)$: función de densidad de la probabilidad de tiempo hasta el fallo,

$R(t)$: función de fiabilidad, probabilidad de que el sistema no falle,

$N(t_p)$: número de fallos esperados en el intervalo $(0, t_p)$,

$CTE(t_p)$: coste total esperado por unidad de tiempo.

Las expresiones utilizadas son las siguientes:

$$R(t) = 1 - F(t) \qquad \lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t-1)} \qquad f(t) = R(t-1) - R(t)$$

$$N(t_p) = \int_0^{t_p} \lambda(t)$$

Por tanto:

$$N(t_p) = \int_0^{t_p} \lambda(t) = \int_0^{t_p} \frac{R(t-1) - R(t)}{R(t-1)}$$

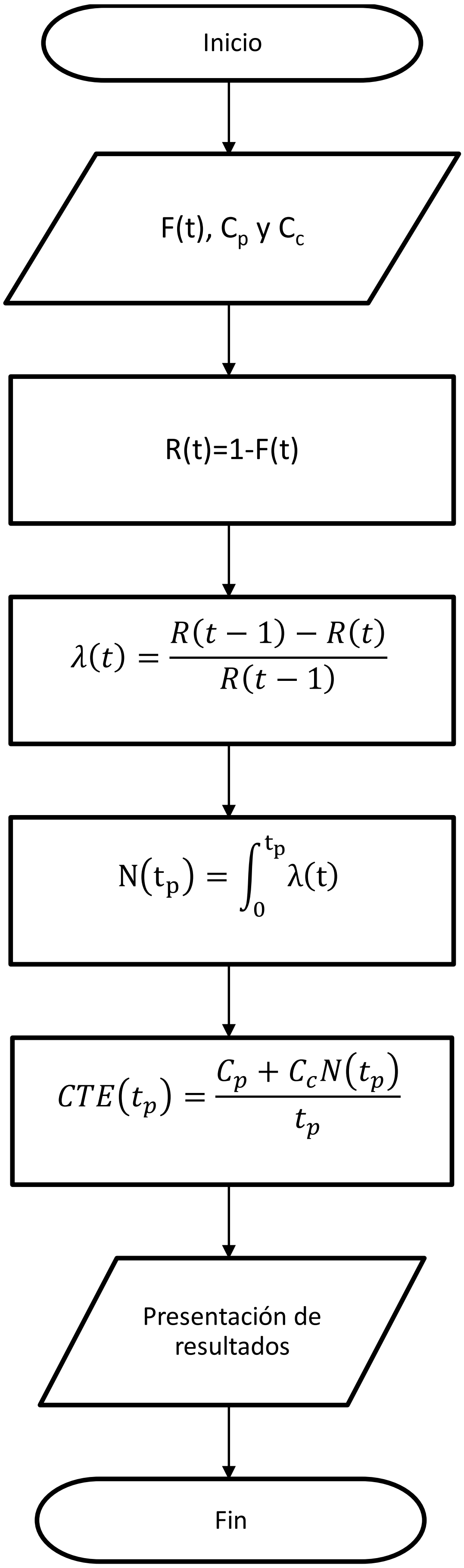
Donde las integrales se convierten en sumatorios debido a la discretización hecha del tiempo.

El fallo, si se produce, ocurrirá en algún punto del intervalo (0, t_p), y el coste total esperado por unidad de tiempo *CTE*(t_p), para el intervalo t_p, será entonces:

$$\mathrm{CTE(tp)} = \frac{\text{Coste total esperado en } (0, \mathrm{tp})}{\text{Longitud del intervalo } (0, \mathrm{tp})} = \frac{\mathrm{Cp} + \mathrm{Cc\,N(tp)}}{\mathrm{tp}}$$

Se ha discretizado el tiempo escogiendo 6 periodos de funcionamiento distintos de manera que al final del último el sistema va a fallar con probabilidad 1.

Una vez que ya tenemos dicha discretización (t=1,…,6) pasamos a implantar el modelo en Excel siguiendo el diagrama de flujo expuesto a continuación:


Inicio
F(t), C_p y C_c
R(t)=1-F(t)
$\lambda(t) = \frac{R(t-1) - R(t)}{R(t-1)}$
$N(t_p) = \int_0^{t_p} \lambda(t)$
$CTE(t_p) = \frac{C_p + C_c N(t_p)}{t_p}$
Presentación de resultados
Fin

2.2.2.2. Introducción de datos.

Debido a que hemos discretizado el tiempo en 6 periodos de funcionamiento distintos, los datos a introducir en el modelo son los valores de la función de distribución F(t) para cada periodo.

2.2.2.3. Cálculos del modelo y resolución.

Para cada periodo de funcionamiento del sistema y su correspondiente F(t), el modelo hace los cálculos indicados en el diagrama anterior:

$$F(t) \rightarrow R(t) \rightarrow \lambda(t) \rightarrow N(t) \rightarrow CTE(t)$$

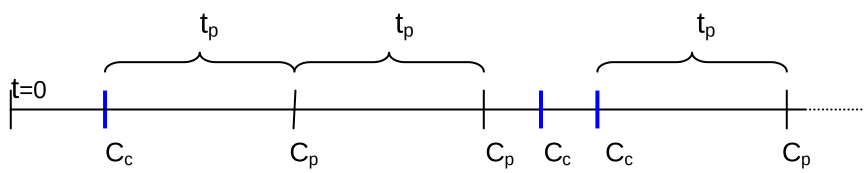
t	F(t)	R(t)	λ(t)	N(t)	CTE(t)
1	0,2	0,8	0,20	0,20	160,00
2	0,25	0,75	0,06	0,26	89,38
3	0,27	0,73	0,03	0,29	62,25
4	0,35	0,65	0,11	0,40	54,91
5	0,4	0,6	0,08	0,48	48,54
6	1	0	1	1,48	90,45

CP=	100
CC=	300

2.2.3. Modelo de sustitución a intervalos variables en función de la edad.

2.2.3.1. Discretización del tiempo, descripción del modelo, nomenclatura y ecuaciones utilizadas.

En la política de sustitución basada en la edad, la SP se realiza cuando el equipo alcanza una determinada edad, t_p. Si el sistema falla, se realiza una SC y la siguiente SP se hace a t_p unidades de tiempo posterior. El problema consiste en calcular el t_p que minimice el $CTE(t_p)$.



La nomenclatura utilizada es la siguiente:

C_p: coste de la SP,

C_c: coste de la SC,

t_p : tiempo al que realizar la SP,

λ(t): función tasa de fallos,

F(t) : función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo,

f(t): función de densidad de la probabilidad de tiempo hasta el fallo,

R(t): función de fiabilidad, probabilidad de que el sistema no falle,

$M(t_p)$: valor esperado de la distribución truncada en t_p,

$CTE(t_p)$: coste total esperado por unidad de tiempo.

Las expresiones utilizadas son las siguientes:

$$R(t) = 1 - F(t) \qquad \lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t-1)} \qquad f(t) = R(t-1) - R(t)$$

La longitud estimada de un ciclo de fallo puede ser determinada buscando el valor esperado de la distribución truncada en t_p.

$$M(t_p) = \int_{-\infty}^{t_p} \frac{t * f(t)}{F(t_p)}$$

Donde al discretizar el tiempo la integral se convierte en un sumatorio.

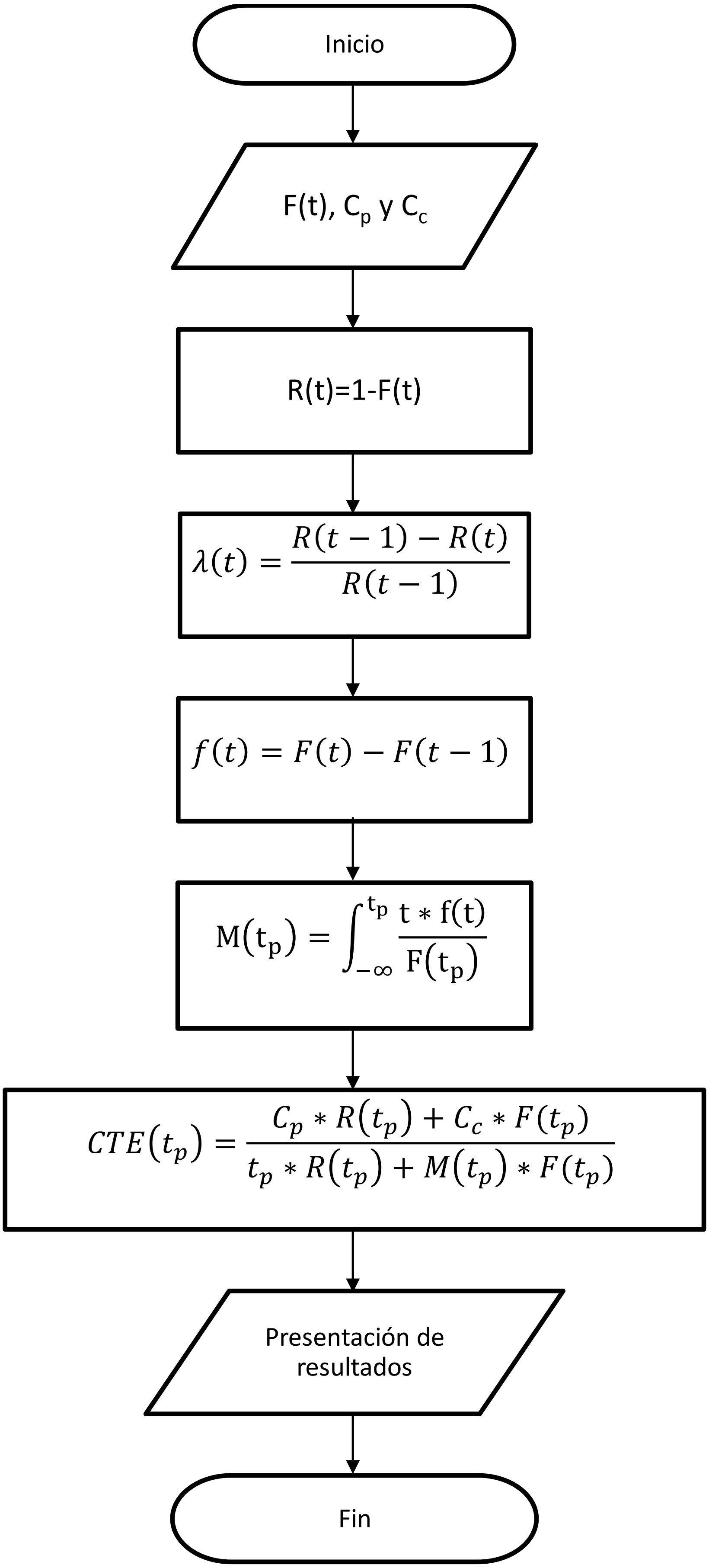
Por tanto:

$$CTE(tp) = \frac{\text{Coste total esperado en } (0, tp)}{\text{Longitud del intervalo } (0, tp)} = \frac{Cp * R(t_p) + \ Cc * F(tp)}{tp * R(t_p) + M(t_p) * F(t_p)}$$

Para obtener el óptimo de $CTE(t_p)$, se minimiza esta expresión respecto al tiempo t_p.

Se ha discretizado el tiempo escogiendo 6 periodos de funcionamiento distintos de manera que al final del último el sistema va a fallar con probabilidad 1.

Una vez que ya tenemos dicha discretización (t=1,…,6) pasamos a implantar el modelo en Excel siguiendo el diagrama de flujo expuesto a continuación:


Inicio
F(t), C_p y C_c
R(t)=1-F(t)
$\lambda(t) = \frac{R(t-1) - R(t)}{R(t-1)}$
$f(t) = F(t) - F(t-1)$
$M(t_p) = \int_{-\infty}^{t_p} \frac{t * f(t)}{F(t_p)}$
$CTE(t_p) = \frac{C_p * R(t_p) + C_c * F(t_p)}{t_p * R(t_p) + M(t_p) * F(t_p)}$
Presentación de resultados
Fin

2.2.3.2. Introducción de datos.

Debido a que hemos discretizado el tiempo en 6 periodos de funcionamiento distintos, los datos a introducir en el modelo son los valores de la función de distribución F(t) para cada periodo.

2.2.3.3. Cálculos del modelo y resolución.

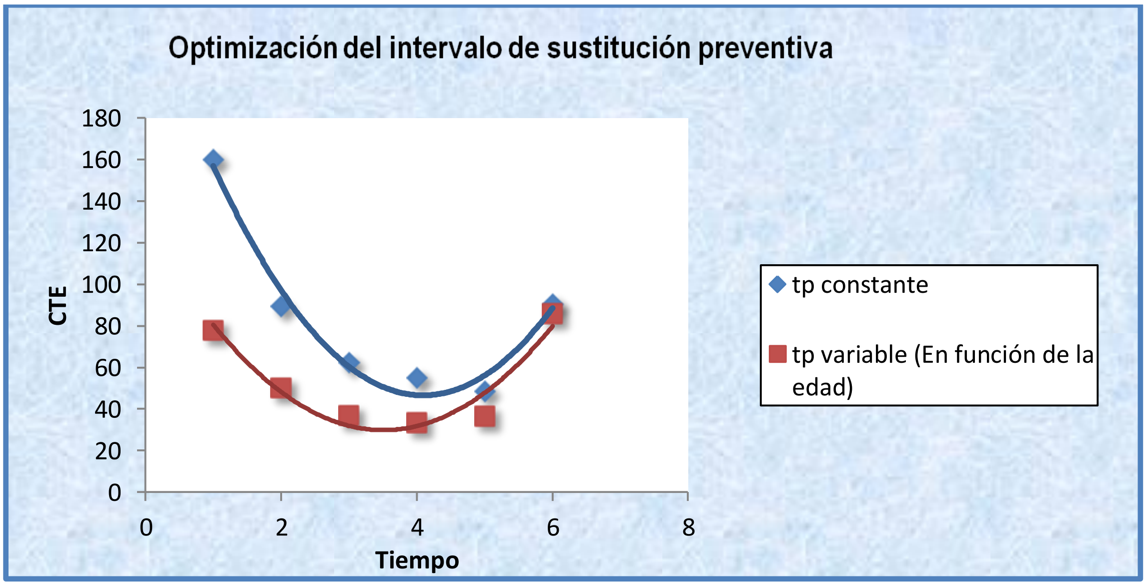
Para cada periodo de funcionamiento del sistema y su correspondiente F(t), el modelo hace los cálculos indicados en el diagrama anterior:

F(t)→R(t)→M(t)→CTE(t)

t	F(t)	R(t)	λ(t)	M(t)	CTE(t)	f(t)
1	0,2	0,8	0,20	5	77,78	0,2
2	0,25	0,75	0,06	6	50,00	0,05
3	0,27	0,73	0,03	7,41	36,75	0,02
4	0,35	0,65	0,11	7,14	33,33	0,08
5	0,5	0,5	0,23	6	36,36	0,15
6	1	0	1	3,5	85,71	0,5

CP=	100
CC=	300

2.2.4. Presentación de resultados.



Como se puede observar el coste total esperado es menor en el caso de sustitución total basada en la edad.

2.3. MODELOS DE SUSTITUCIÓN PARCIAL

ÍNDICE

2.3.1. Descripción del modelo e hipótesis realizadas.

Su formulación se basa en la idea de que la mayoría de las ocasiones en que falla un sistema no es necesaria la sustitución completa del mismo (ST) para que vuelva a condiciones adecuadas de funcionamiento, basta con la sustitución preventiva parcial (SPP) de alguno de sus componentes.

Las SPPs son intervenciones que se realizan llegada una determinada edad (T_i), y que devuelven la tasa de fallos del sistema completo a su valor inicial. Cuando se vayan a realizar SPPs es necesario considerar lo siguiente:

a. A partir de un cierto número de sustituciones preventivas parciales, estas resultarán más costosas que realizar una sustitución total del sistema.

b. El coste de la reparación de un sistema que ha fallado es a menudo más alto que la sustitución preventiva antes del fallo.

Los modelos de sustitución parcial se pueden clasificar en dos grupos:

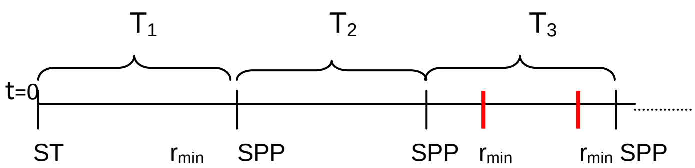
1. Modelos con sustituciones preventivas parciales y reparaciones mínimas.

2. Modelos con sustituciones preventivas parciales e intervenciones correctivas.

2.3.2. Modelo de sustituciones preventivas parciales con reparación mínima.

2.3.2.1. Descripción del modelo, nomenclatura, ecuaciones utilizadas y discretización del tiempo.

En este modelo suponemos que el reemplazo o la sustitución total del sistema (ST) se realiza después de (k-1) sustituciones preventivas parciales SPP. Para un sistema sujeto a (i-1) SPP con (i<k), se procederá a la SPP cuando se alcance la edad T_i desde la última SPP (o sustitución total en el caso i=1). En caso de fallo se realiza una reparación mínima, reparación que es más económica pero que no afecta a la tasa de fallo del sistema, es decir, no la restaura a su valor original (esto sí sucede para SPP y ST).



La nomenclatura utilizada es la siguiente:

C_{pp}: coste de la SPP,

C_s: coste de la ST,

C_{rm} : coste de la reparación mínima,

T_i : tiempo al que realizar la SPP,

F(t) : función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo,

λi(t) : tasa de fallo en el momento *t* para un sistema sometido a *(i-1)* SPPs,

k: SPP en la cual se hace la ST,

$CTE(k, T_1, \ldots, T_k)$: coste total esperado por unidad de tiempo.

Las expresiones utilizadas son las siguientes:

$$\mathrm{CTE}(\mathrm{k}, \mathrm{T}_1, \dots \mathrm{T}_\mathrm{k}) = \frac{\text{Coste total esperado en } (0, \mathrm{T}_\mathrm{i})}{\text{Longitud del intervalo } (0, \mathrm{T}_\mathrm{i})} =$$

$$= \frac{(\mathrm{K}-1) * \mathrm{C}_{\mathrm{pp}} + \mathrm{C}_\mathrm{s} + \mathrm{C}_{\mathrm{rm}} * \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \int_0^{\mathrm{T}_\mathrm{i}} \lambda_\mathrm{i}(\mathrm{t})\mathrm{dt}}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{T}_\mathrm{i}}$$

Como:

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}_\mathrm{i}) = \int_0^{\mathrm{T}_\mathrm{i}} \lambda_\mathrm{i}(\mathrm{t})$$

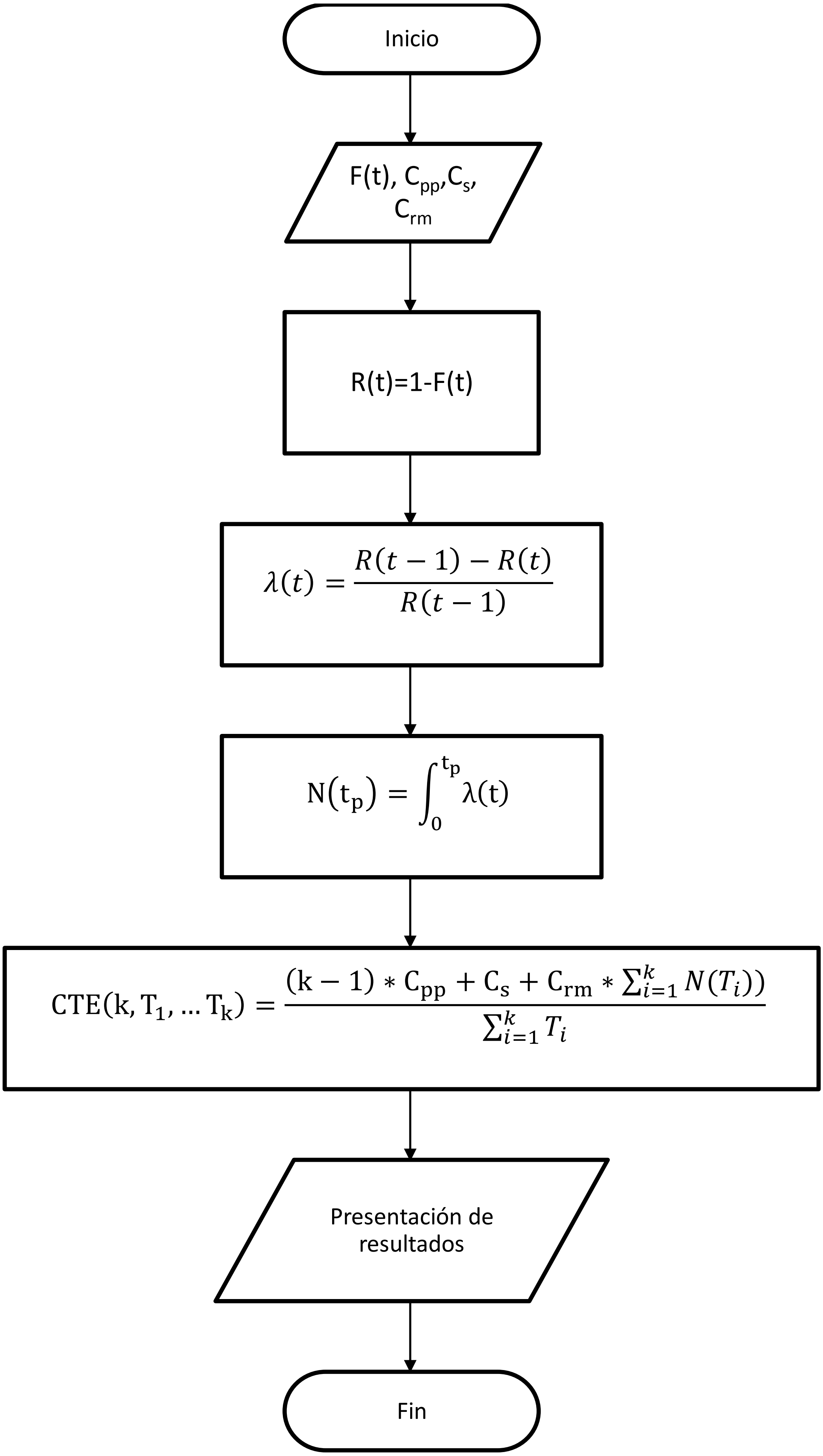
Tenemos:

$$\mathrm{CTE}(\mathrm{k}, \mathrm{T}_1, \dots \mathrm{T}_\mathrm{k}) = \frac{(\mathrm{K}-1) * \mathrm{C}_{\mathrm{pp}} + \mathrm{C}_\mathrm{s} + \mathrm{C}_{\mathrm{rm}} * \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{N}(\mathrm{T}_\mathrm{i})}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{T}_\mathrm{i}}$$

El problema a resolver consiste en encontrar el número óptimo de intervenciones parciales *k* y las edades de estas intervenciones T_i , con *i=1…k*, que minimizan el coste total esperado.

Se ha discretizado el tiempo escogiendo 6 periodos de funcionamiento distintos de manera que al final del último el sistema va a fallar con probabilidad 1.

Una vez que ya tenemos dicha discretización (t=1,…,6) pasamos a implantar el modelo en Excel siguiendo el diagrama de flujo expuesto a continuación:


Inicio
F(t), C_{pp}, C_s, C_{rm}
R(t)=1-F(t)
$\lambda(t) = \frac{R(t-1) - R(t)}{R(t-1)}$
$N(t_p) = \int_0^{t_p} \lambda(t)$
$CTE(k, T_1, \dots T_k) = \frac{(k-1) * C_{pp} + C_s + C_{rm} * \sum_{i=1}^{k} N(T_i))}{\sum_{i=1}^{k} T_i}$
Presentación de resultados
Fin

2.3.2.2. Introducción de datos.

Debido a que hemos discretizado el tiempo en 6 periodos de funcionamiento distintos, los datos a introducir en el modelo son los valores de la función de distribución F(t) para cada periodo.

2.3.2.3. Cálculos del modelo y resolución

Para cada periodo de funcionamiento del sistema y su correspondiente F(t), el modelo hace los cálculos indicados en el diagrama anterior:

$$F(t) \rightarrow R(t) \rightarrow \lambda(t) \rightarrow N(t) \rightarrow CTE(t)$$

a) Suponiendo tasa de fallo no varía al realizar la intervención parcial.

Cpp=	100
Cs=	300
Crm=	4

Con tasas de fallo iguales					k		
					1	2	3
t	**F(t)**	**R(t)**	**λ(t)**	**N(t)**	**CTE(T,K)**	**CTE(T,K)**	**CTE(T,K)**
1	0,2	0,8	0,20	0,20	300,80	200,00	166,67
2	0,25	0,75	0,06	0,26	150,53	100,00	83,33
3	0,37	0,63	0,16	0,36	100,48	66,67	55,56
4	0,38	0,62	0,02	0,22	75,22	50,00	41,67
5	0,5	0,5	0,19	0,39	60,31	40,00	33,33
6	1	0	1	1,20	50,80	33,33	27,78

b) Suponiendo tasa de fallos varía al realizar la intervención parcial.

Cpp=	100
Cs=	300
Crm=	4

Con diferentes tasas de fallo					**k**		
Tasa Primer período					1	2	3
t	**F(t)**	**R(t)**	**λ(t)**	**N(t)**	**CTE(T,K)**	**CTE(T,K)**	**CTE(T,K)**
1	0,2	0,8	0,20	0,20	300,00	200,80	168,67
2	0,25	0,75	0,06	0,26	150,00	100,43	84,53
3	0,37	0,63	0,16	0,36	100,00	66,95	56,37
4	0,38	0,62	0,02	0,22	75,00	50,30	42,42
5	0,5	0,5	0,19	0,39	60,00	40,27	34,27
6	1	0	1	1,20	50,00	34,13	28,78

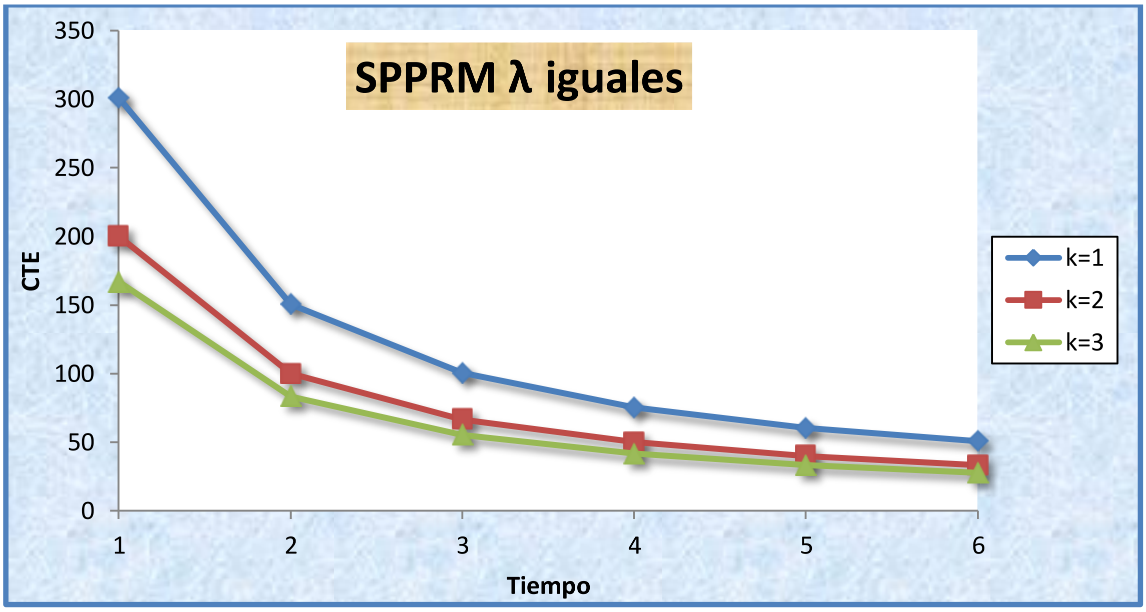
Tasa Segundo período

t	**F(t)**	**R(t)**	**λ(t)**	**N(t)**
1	0,2	0,8	0,20	0,20
2	0,21	0,79	0,01	0,21
3	0,22	0,78	0,01	0,21
4	0,3	0,7	0,10	0,30
5	0,4	0,6	0,14	0,34
6	1	0	1	1,20

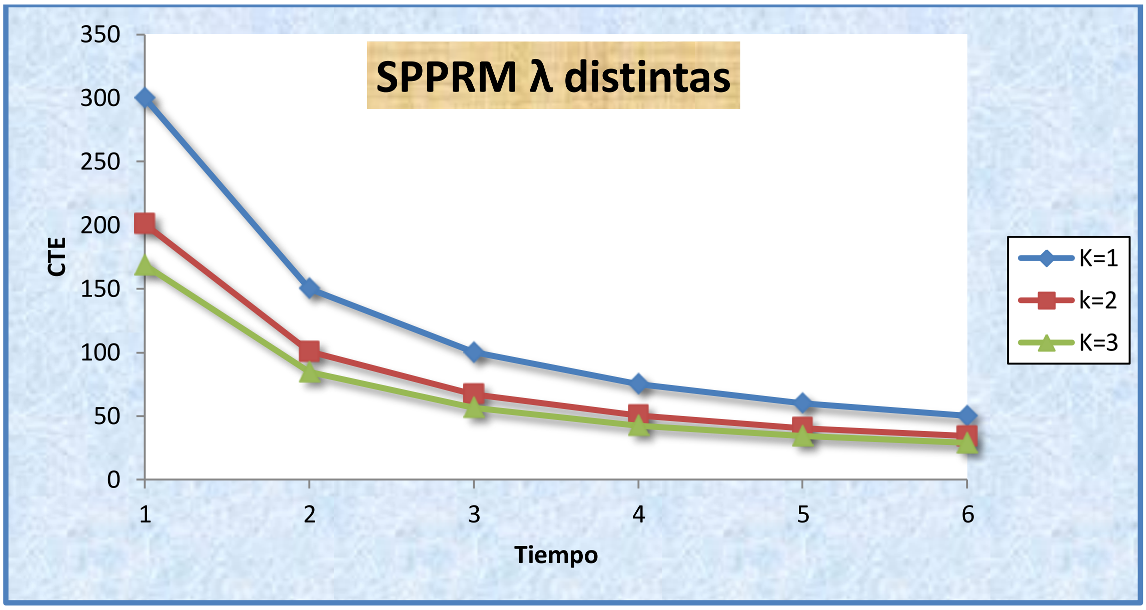
Tasa tercer período

t	**F(t)**	**R(t)**	**λ(t)**	**N(t)**
1	0,5	0,5	0,50	0,50
2	0,55	0,45	0,10	0,60
3	0,6	0,4	0,11	0,61
4	0,7	0,3	0,25	0,75
5	0,9	0,1	0,67	1,17
6	1	0	1	1,50

2.3.2.4. Presentación de resultados



Podemos observar que el mínimo CTE se produce para k=3 y t=6.

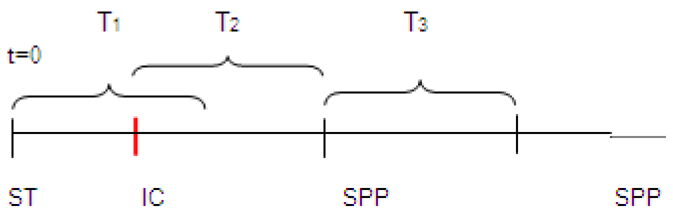


Al igual que en el caso anterior, podemos observar que el mínimo CTE se produce para k=3 y t=6.

2.3.3. Modelo de sustituciones preventivas parciales e intervenciones correctivas.

2.3.3.1. Descripción del modelo, nomenclatura y ecuaciones utilizadas y discretización del tiempo.

Este modelo considera que la sustitución total del sistema se realiza después de *(k-1)* sustituciones preventivas parciales (SPP). Para un sistema sujeto a *(i-1)* SPP, con i<k, se procederá a la intervención correctiva cuando llegue el próximo fallo, o se hará la SPP si el sistema alcanza la edad T_i (que ahora es el tiempo desde la última intervención que restauró la tasa de fallos del equipo), lo que ocurra primero.



La nomenclatura utilizada es la siguiente:

C_{pp}: coste de la SPP,

C_s: coste de la ST,

T_i : tiempo al que realizar la SPP,

F(t) : función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo,

λi(t) : tasa de fallo en el momento *t* para un sistema sometido a *(i-1)* SPPs,

k: SPP en la cual se hace la ST,

C_{ic} : coste de la intervención correctiva,

C_{eic} : coste extra de la intervención correctiva,

$Mi(T_i)$: media de la distribución truncada en T_i para un sistema sometido a *(i-1)* SPPs,

$CTE(k, T_1, \ldots, T_k)$: coste total esperado por unidad de tiempo, Siendo: $C_{ic} = C_{pp} + C_{eic}$

Las expresiones utilizadas son las siguientes:

$$\mathrm{M_i(T_i)} = \int_{-\infty}^{\mathrm{T_i}} \frac{\mathrm{t} * \mathrm{f_i(t)}}{\mathrm{F_i(T_i)}}$$

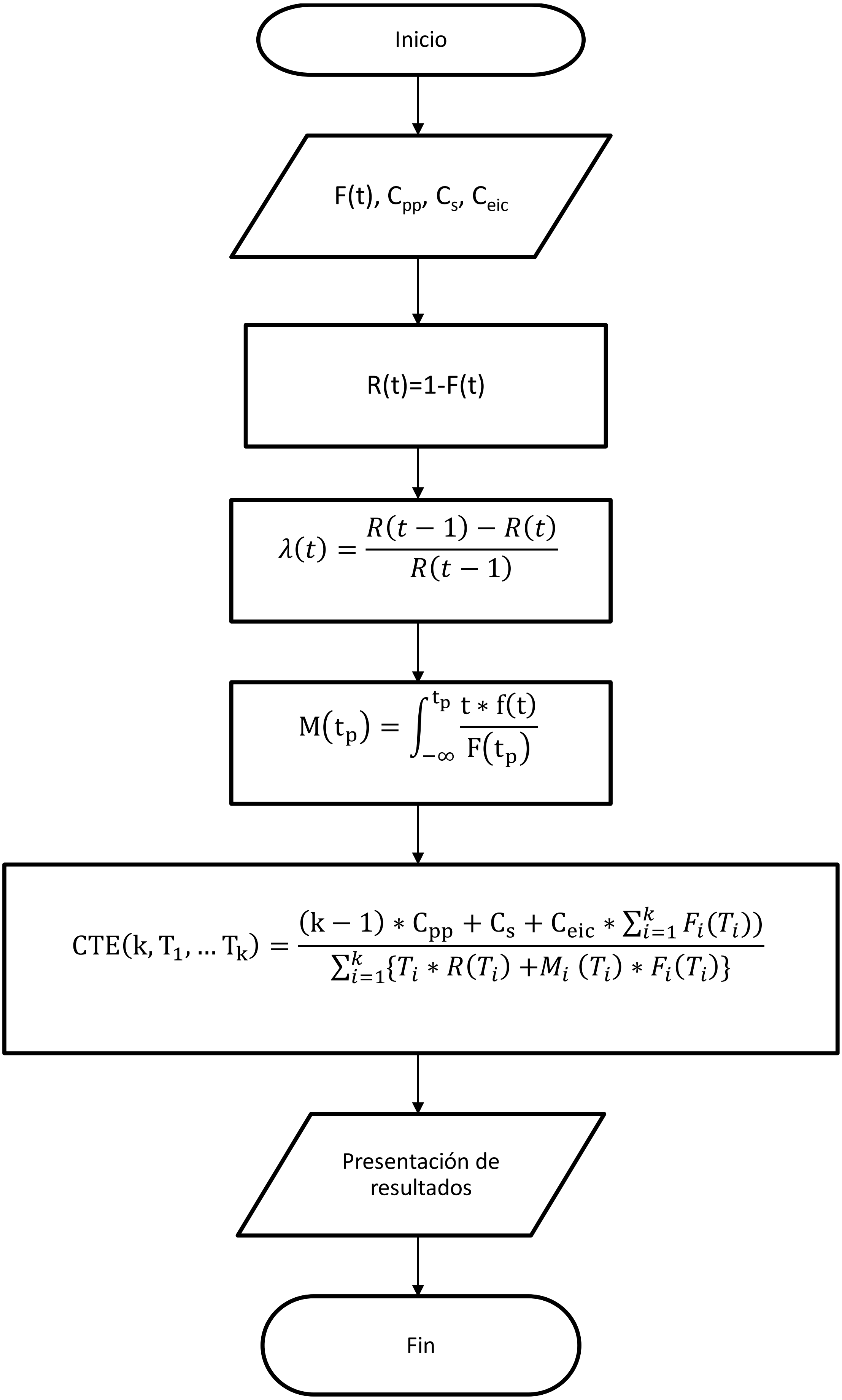
$$\mathrm{CTE(k, T_1, \ldots T_k)} = \frac{\text{Coste total esperado en } (0, \mathrm{T_i})}{\text{Longitud del intervalo } (0, \mathrm{T_i})} =$$

$$= \frac{(\mathrm{K} - 1) * \mathrm{C_{pp}} + \mathrm{C_s} + \mathrm{C_{eic}} * \sum_{i=1}^{k} \mathrm{F_i(T_i)}}{\sum_{i=1}^{k} \{\mathrm{T_i} * \mathrm{R(T_i)} + \mathrm{M_i(T_i)} * \mathrm{F_i(T_i)}\}}$$

El problema a resolver consiste en determinar el número óptimo de intervenciones parciales k y las edades de estas intervenciones que minimizan el coste total esperado.

Se ha discretizado el tiempo escogiendo 6 periodos de funcionamiento distintos de manera que al final del último el sistema va a fallar con probabilidad 1.

Una vez que ya tenemos dicha discretización (t=1,…,6) pasamos a implantar el modelo en Excel siguiendo el diagrama de flujo expuesto a continuación:


Inicio
$F(t), C_{pp}, C_s, C_{eic}$
$R(t)=1-F(t)$
$\lambda(t) = \frac{R(t-1) - R(t)}{R(t-1)}$
$M(t_p) = \int_{-\infty}^{t_p} \frac{t * f(t)}{F(t_p)}$
$CTE(k, T_1, \dots T_k) = \frac{(k-1) * C_{pp} + C_s + C_{eic} * \sum_{i=1}^{k} F_i(T_i))}{\sum_{i=1}^{k} \{T_i * R(T_i) + M_i (T_i) * F_i(T_i)\}}$
Presentación de resultados
Fin

2.3.3.2 Introducción de datos.

Debido a que hemos discretizado el tiempo en 6 periodos de funcionamiento distintos, los datos a introducir en el modelo son los valores de la función de distribución F(t) para cada periodo.

2.3.3.3 Cálculos del modelo y resolución.

Para cada periodo de funcionamiento del sistema y su correspondiente F(t), el modelo hace los cálculos indicados en el diagrama anterior:

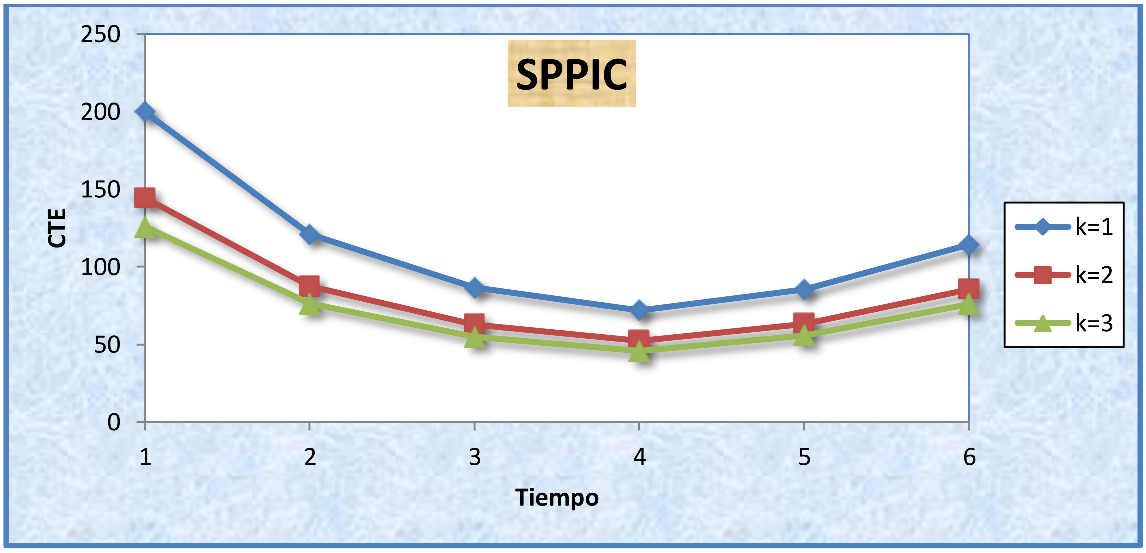
F(t)→R(t)→M(t)→CTE(t)

Tasas de fallo iguales por periodo					k		
					1	2	3
t	**F(t)**	**R(t)**	**λ(t)**	**M(t)**	**CTE(T,K)**	**CTE(T,K)**	**CTE(T,K)**
1	0,2	0,8	0,20	5,00	200,00	144,44	125,93
2	0,25	0,75	0,06	6,00	120,83	87,50	76,39
3	0,27	0,73	0,03	7,41	86,75	62,89	54,93
4	0,35	0,65	0,11	7,14	72,06	52,45	45,92
5	0,7	0,3	0,54	4,29	85,56	63,33	55,93
6	1	0	1	3,50	114,29	85,71	76,19

Para la resolución vamos a suponer que la tasa de fallos del sistema no varía al realizar la sustitución parcial.

Cpp=	150
Cs=	350
Ceic=	50

2.3.3.4 Presentación de resultados.



Podemos observar que el mínimo CTE se produce para k=3 y t=4.

2.4. Modelo de Mantenimiento Preventivo Imperfecto.

ÍNDICE

2.4.1. Descripción del modelo e hipótesis realizadas.

En muchas ocasiones, una situación más cercana a la realidad es aquella en la que el patrón de fallos cambia, en mayor o menor medida, tras un mantenimiento preventivo (MP).

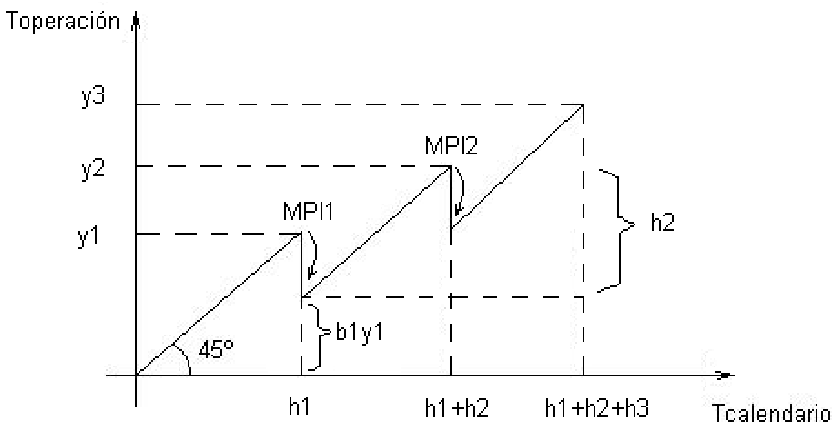
Para modelar esta situación podemos asumir que después de un MP la tasa de fallos del sistema queda en un término medio entre "tan bueno como nuevo" y "tan malo como viejo". Este concepto se denomina mantenimiento preventivo imperfecto (MPI).

En el modelo de MPI, dichos MPIs se realizan a intervalos fijos h_k ($k = 1, 2, \dots, N-1$) y el sistema es sustituido en el MP número N. Si el sistema falla entre los MPIs, se realiza una reparación mínima. Al tratarse de MPI, la edad después del k-ésimo MPI se reduce a $b_k t$, cuando era t antes si el MP no fuera imperfecto.

En este modelo se realizan a las siguientes suposiciones:

a. Sobre el sistema se realizan intervenciones de MPI en los tiempos h_1, h_1+h_2, ..., donde h_i es la longitud del i-ésimo intervalo ($i = 1, 2, \dots, N-1$) y la sustitución total (ST) del sistema se realiza en el N-ésimo intervalo.

b. Los fallos del sistema entre intervenciones de MPI son resueltas mediante reparaciones mínimas. La edad del sistema después del k-ésimo MPI se sitúa en $b_k t$, siendo $0=b_0<b_1<b_2<\dots<b_{N-1}<1$, consiguiendo el sistema un rejuvenecimiento de $t(1-b_k)$ unidades de tiempo después del k-ésimo MPI. La reducción tras la sustitución es de t unidades.



c. Tras la ST el sistema llega a ser tan bueno como nuevo.

d. La tasa de fallo del sistema $\lambda(t)$ es continua y estrictamente creciente.

e. Los tiempos de utilizados para los MPI, reparación mínima o sustitución son despreciables.

f. El ciclo comienza con un sistema nuevo y termina después de N intervalos con la sustitución.

El problema a resolver consiste en encontrar los tamaños de los intervalos entre MPIs (h_k), y el número de MPIs (N-1) antes de la sustitución de manera que se minimice el coste total esperado por unidad de tiempo.

2.4.2. Modelo de mantenimiento preventivo imperfecto

2.4.2.1. Nomenclatura, ecuaciones utilizadas y discretización del tiempo.

La nomenclatura utilizada es la siguiente:

y_i : edad del sistema funcionando antes del *i* MPI,

C_{mpi} : coste del MPI,

C_s : coste de sustitución,

C_{rm} : coste de la reparación mínima tras el fallo,

F(t) : función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo,

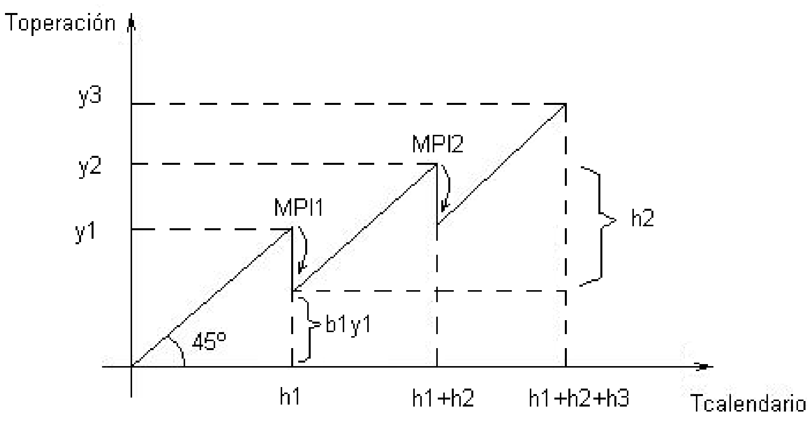
N: número de MPI en el cual se realiza la ST,

N(a,b): número de fallos en el intervalo (a,b),

La edad efectiva del sistema, y_k, antes del *k*-ésimo MPI es,

$$y_k = h_k + b_{k-1} * y_{k-1}$$

Así durante el intervalo *k*-ésimo la edad del sistema cambia desde $b_{k-1}y_{k-1}$ al inicio, hasta y_k al final.



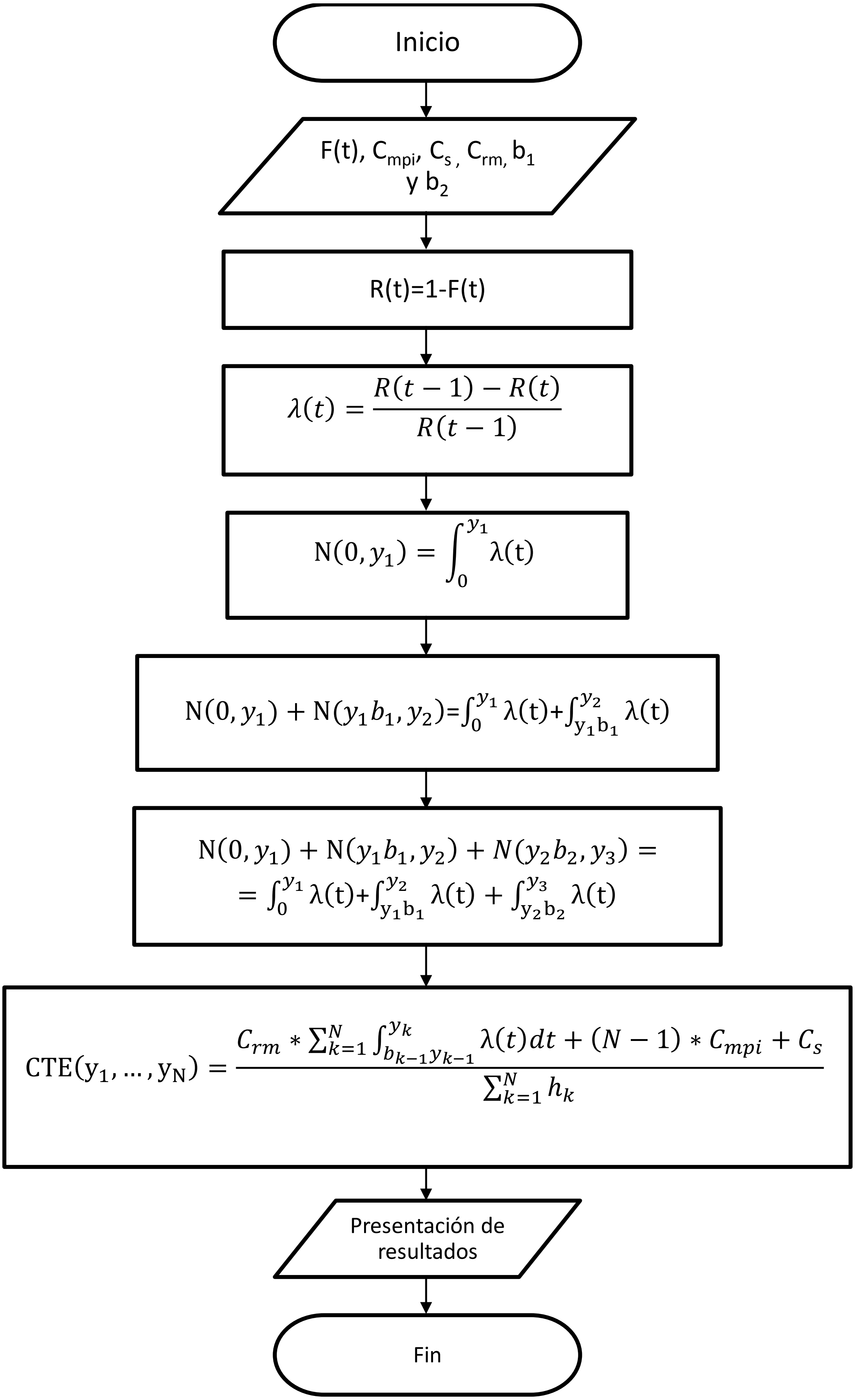
El coste total esperado será:

$$CTE(y_1, \dots, y_N) = \frac{CT(y_1, \dots, y_N)}{LE(T)} =$$

$$= \frac{C_{rm} * \sum_{k=1}^{N} \int_{b_{k-1} * y_{k-1}}^{y_k} \lambda(t)dt + (N-1) * C_{mpi} + C_s}{\sum_{k=1}^{N} h_k}$$

Se ha discretizado el tiempo escogiendo 6 periodos de funcionamiento distintos de manera que al final del último el sistema va a fallar con probabilidad 1.

Una vez que ya tenemos dicha discretización (t=1,…,6) pasamos a implantar el modelo en Excel siguiendo el diagrama de flujo expuesto a continuación:


Inicio
F(t), C_{mpi}, C_s , $C_{rm,}$ b_1
y b_2
R(t)=1-F(t)
$\lambda(t) = \frac{R(t-1) - R(t)}{R(t-1)}$
$N(0, y_1) = \int_0^{y_1} \lambda(t)$
$N(0, y_1) + N(y_1 b_1, y_2) = \int_0^{y_1} \lambda(t) + \int_{y_1 b_1}^{y_2} \lambda(t)$
$N(0, y_1) + N(y_1 b_1, y_2) + N(y_2 b_2, y_3) =$
$= \int_0^{y_1} \lambda(t) + \int_{y_1 b_1}^{y_2} \lambda(t) + \int_{y_2 b_2}^{y_3} \lambda(t)$
$CTE(y_1, \dots, y_N) = \frac{C_{rm} * \sum_{k=1}^{N} \int_{b_{k-1} y_{k-1}}^{y_k} \lambda(t) dt + (N-1) * C_{mpi} + C_s}{\sum_{k=1}^{N} h_k}$
Presentación de
resultados
Fin

2.4.2.2. Introducción de datos.

Debido a que hemos discretizado el tiempo en 6 periodos de funcionamiento distintos, los datos a introducir en el modelo son los valores de la función de distribución F(t) para cada periodo.

2.4.2.3. Cálculos del modelo y resultados.

Para cada periodo de funcionamiento del sistema y su correspondiente F(t), el modelo hace los cálculos siguientes:

1º) F(t)→R(t)→λ(t)

t/h	F(t)	R(t)	λ(t)
1	0,2	0,8	0,20
2	0,25	0,75	0,06
3	0,37	0,63	0,16
4	0,38	0,62	0,02
5	0,5	0,5	0,19
6	1	0	1,00

2º) b1→b1y1

b2→b2y2

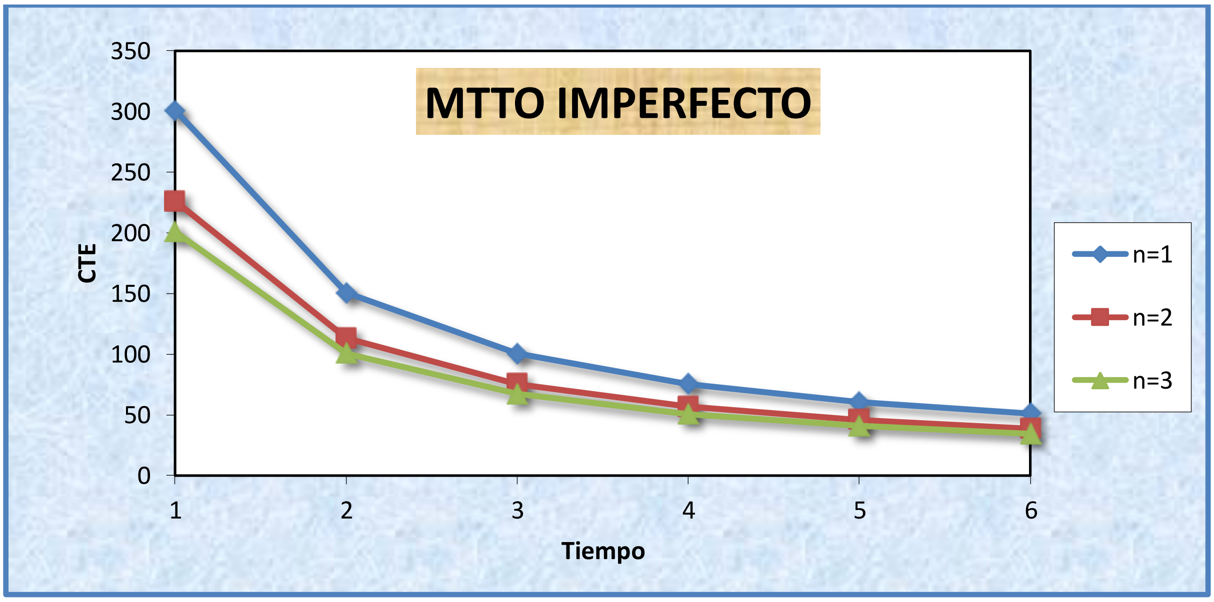
3º) N(0,y1)→ N(0,y1)+N(y1b1,y2)→ N(0,y1)+N(y1b1,y2)+N(y2b2,y3)→CTE(T,K)

	n			n		
	1	2	3	1	2	3
t/h	CTE(T,n)	CTE(T,n)	CTE(T,n)	N(0,y1)	N(0,y1)+N(y1b1,y2)	N(0,y1)+N(y1b1,y2)+N(y2b2,y3)
1	300,80	225,93	200,97	0,20	0,46	0,73
2	150,53	113,19	100,74	0,26	0,69	1,11
3	100,56	75,57	67,24	0,42	0,86	1,30
4	75,44	56,79	50,57	0,44	1,07	1,70
5	60,51	45,91	41,04	0,63	2,26	3,90
6	51,09	38,59	34,42	1,63	3,26	4,90

		b1		b2		
		0		0		
t/h	y0	y1	y1b1	y2	y2b2	y3
1	0	1	0	1	0	1
2	0	2	0	2	0	2
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	0	6	0	6

Cmpi=	150
Cs=	300
Crm=	4

2.4.2.4. Presentación de resultados.



Podemos observar que el mínimo CTE se produce para n=3 y t=6.

3. BLOQUE II: MODELOS PARA LA OPTIMIZACIÓN DE PROCESOS MARKOVIANOS

3.1. Introducción Bloque II.

En este bloque nos vamos a centrar en los procesos markovianos, cuya definición presentamos a continuación.

A principios del siglo XX el matemático ruso A. A. Markov (1856-1922) introdujo un tipo especial de proceso estocástico cuyo futuro comportamiento probabilístico queda determinado únicamente por el estado actual del proceso. Por lo tanto, este tipo de comportamiento no tiene memoria. El comportamiento de un gran número de sistemas puede incluirse dentro de esta categoría.

Un proceso estocástico de Markov, con un espacio discreto de estados y un espacio de tiempo también discreto se conoce con el nombre de *cadena de Markov*. Si el espacio de tiempo es continuo, entonces dicho proceso se denomina *proceso de Markov*.

Un modelo de Markov se define mediante un conjunto de probabilidades de transición:

$$p_{ij}, \qquad \text{donde } i,j = 1,2,.......n$$

que definen las probabilidades de transición desde el estado i hasta el estado j en un paso, o intervalo de tiempo específico. Para un sistema con n estados, estas probabilidades se pueden agrupar en una matriz, llamada *matriz estocástica de probabilidades de transición* que tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ . & . & & . \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento de la matriz **P** es una probabilidad, por lo que pij є [0,1]. También, dado que cada fila contiene las probabilidades de un conjunto finito de eventos se debe cumplir lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Sean S_1, S_2,..., S_n los estados posibles del sistema, y sea Δt un determinado intervalo de tiempo, entonces la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado S_j en el tiempo $(t+\Delta t)$, p_{Sj}, será:

$$p_{Sj}(t+\Delta t) = p_{1j} \times p_{S1}(t) + p_{2j} \times p_{S2}(t) + \dots\dots + p_{nj} \times p_{Sn}(t) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} p_{sj}(t)$$

Se denomina mediante **E**(*t*) al vector de probabilidades de cada estado en un determinado instante *t.* Este vector tiene, por tanto, tantas componentes como estados posibles tenga el sistema:

$$\mathbf{E}(t) = \{p_{S1}(t), p_{S2}(t), \dots\dots, p_{Sn}(t)\}$$

Cumpliéndose entonces que:

$$\mathbf{E}(t+\Delta t) = \mathbf{E}(t) \times \mathbf{P}$$

Debido a que, como mencionamos anteriormente, estos procesos no tienen memoria, pij depende sólo de los estados i y j además del tiempo que dura la transición entre dichos estados.

Dentro de los procesos de Markov, vamos a centrarnos en los siguientes:

Procesos homogéneos (o estacionarios): Todas las p_{ij} son independientes del tiempo y por tanto son iguales en el pasado que en el futuro.

Procesos ergódicos: Existe homogeneidad y la probabilidad de estar en algún estado es independiente de las condiciones iniciales.

La suma de ausencia de memoria y homogeneidad da lugar a que el comportamiento general del sistema no cambie con el tiempo (el sistema no envejece).

Uno de los aspectos a tener en cuenta en los procesos markovianos es la existencia de los llamados *estados absorbentes*. Un estado del sistema se denomina absorbente cuando desde él no se puede realizar la transición hacia ningún otro estado, por lo que si el sistema entra en uno de estos estados permanece en él. Por tanto, si el estado k es absorbente:

$$p_{kk} = 1 \text{ y } p_{ki} = 0, \quad \forall \text{ i excepto } i = k.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede demostrar que un proceso finito de estados es *ergódico* si cada uno de ellos puede alcanzarse desde otro cualquiera en un número finito de pasos con probabilidad distinta de cero. Para el caso de cadenas de Markov de procesos *homogéneos y ergódicos* se puede calcular el estado de equilibrio final del sistema (régimen permanente) solucionando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(t) \times \mathbf{P}$$

con la restricción adicional:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{s_i}(t) = 1$$

Además, Rozanov demostró a finales del siglo XX que en el caso de procesos ergódicos, la matriz estocástica de transición **P** es una matriz regular por lo que alguna de sus potencias, P^m, tiene todos sus elementos positivos. En tal caso, se puede comprobar que la secuencia:

$$\mathrm{P}^1, \mathrm{P}^2, \mathrm{P}^3, \ldots\ldots, \mathrm{P}^m, \ldots$$

tiende hacia la matriz **T,** cuyas filas son, cada una de ellas, el vector de probabilidades **E**(*t*) del régimen permanente.

Podemos concluir entonces que la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado Sj será igual a la j-ésima componente de **E**(*t*) en régimen permanente.

3.2. Modelo de un sistema al que sólo se le realiza mantenimiento correctivo.

ÍNDICE

3.2.1. Descripción del modelo e hipótesis realizadas.

Las hipótesis realizadas para desarrollar este modelo son:

-El tiempo medio de realización del mantenimiento del equipo es despreciable frente al tiempo medio entre fallos del equipo.

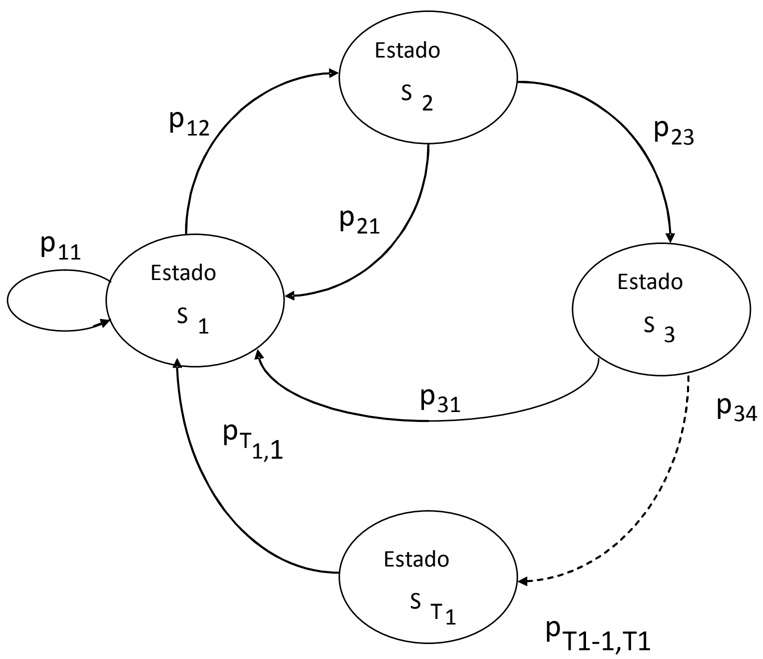
-La calidad de funcionamiento del sistema es independiente de su tiempo operativo.

-El sistema queda como nuevo después de realizar sobre él las operaciones de mantenimiento correctivo.

-Sólo es posible un fallo del sistema en una transición.

A continuación pasamos a describir el modelo de un sistema al que sólo se le realiza mantenimiento correctivo.

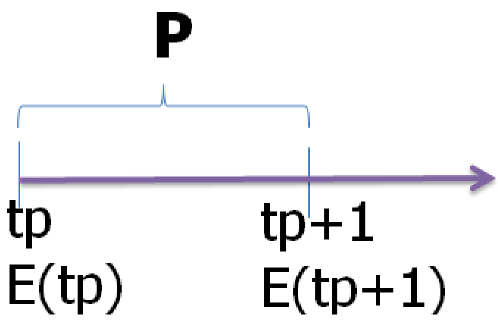
Para este modelo supónganse T_1 estados distintos, donde T_1 se define como el máximo número de intervalos de tiempo que el sistema puede estar funcionando sin que falle. El sistema alcanzará cada estado S_i cuando se encuentre en su i-ésimo intervalo de funcionamiento sin que se reproduzca el modo de fallo. Ahora i varía únicamente entre 1 y T_1. Supóngase además que cuando el sistema se avería se le realiza un mantenimiento correctivo y se coloca de nuevo en su estado S_1, o primer intervalo de funcionamiento sin fallo.



Siendo: $\quad p_{ij} = 1 - \lambda(i) \quad y \quad p_{i1} = \lambda(i)$

En este modelo no existen estados absorbentes en el proceso, y podemos ver que se cumple que cada estado puede alcanzarse desde cualquier otro en un número finito de pasos. El caso presente es claramente un proceso ergódico cuya matriz de transición tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ p_{T1-1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{T1-1,T1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$



Podemos entonces encontrar el vector límite de probabilidades de estado:

$\mathbf{E}^*(t) = \{p_{S1}^*(t), p_{S2}^*(t), \ldots\ldots\ldots, p_{ST1}^*(t)\}$

obteniendo los valores de $pS_i(t)$, que solucionan el sistema de ecuaciones siguiente:

$\mathbf{E}(t)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{P}$

con la restricción adicional:

$$\sum_{i=1}^{T_1} p_{S_i}(t) = 1$$

Una vez que se conoce el vector E(t), se puede determinar el coste promedio por período de esta política de mantenimiento correctivo, una vez que el sistema alcanza su estado límite o régimen permanente.

3.2.2. Modelado del sistema.

3.2.2.1. Nomenclatura, ecuaciones utilizadas y discretización del tiempo.

La nomenclatura utilizada en este modelo es la siguiente:

C_c : coste de la SC.

$p_{S1}^{*}(t)$: primera componente del vector de estado en régimen permanente que es el número estimado de operaciones correctivas realizadas en cada intervalo de tiempo al sistema, una vez este se encuentra en condiciones de régimen permanente.

T_1: máximo número de intervalos de tiempo que el sistema puede estar funcionando sin que falle.

P: Matriz de transición de estados.

λ(t): función tasa de fallos.

E*(t)*: Vector de estado.

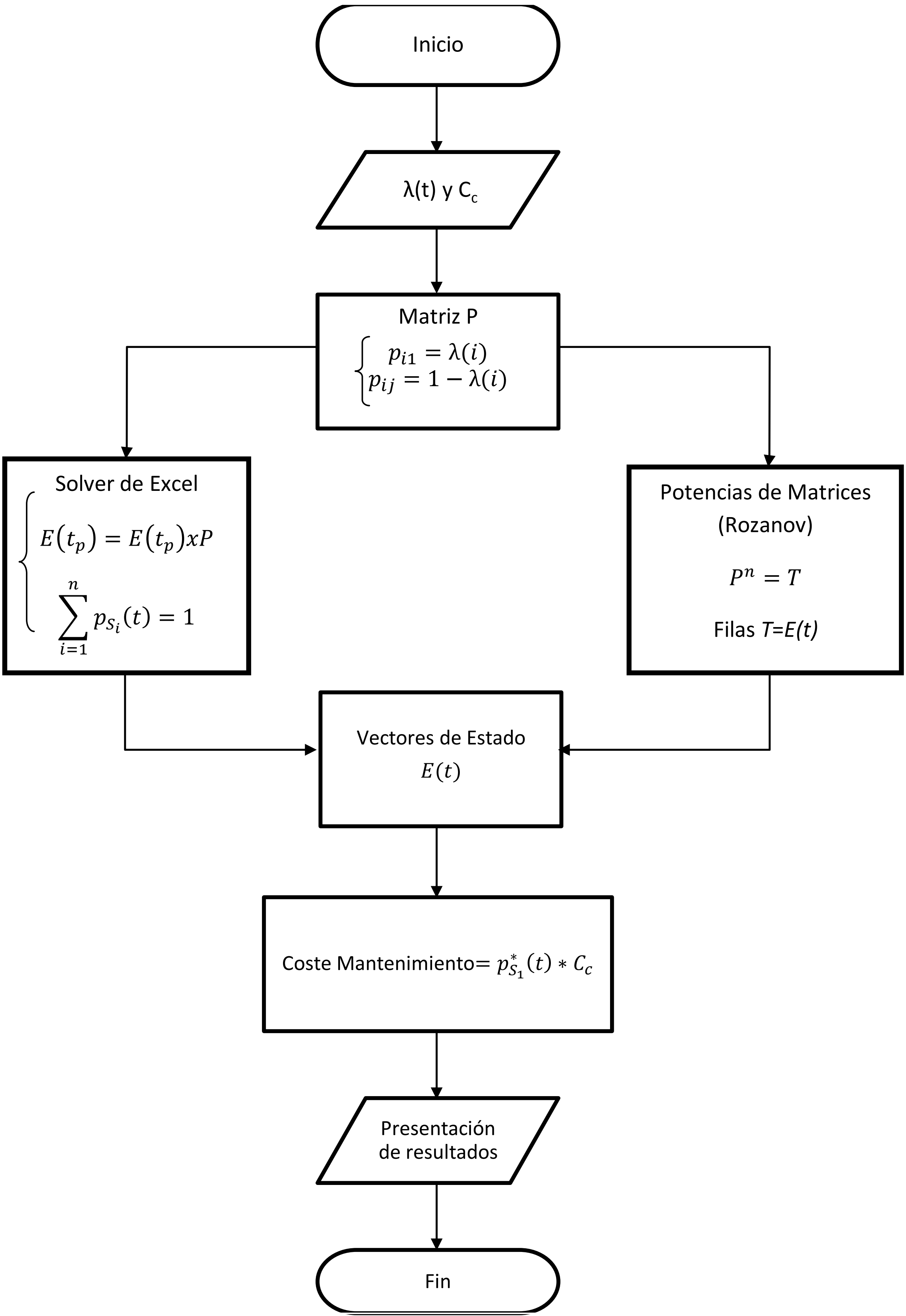
e_i: Componente i del vector de estado.

La expresión para calcular el coste promedio de una operación de mantenimiento correctivo queda de la siguiente forma:

$$\text{Coste promedio de mantenimiento por periodo} = \mathrm{p}_{\mathrm{S}_1}(\mathrm{t}) * \mathrm{C}_\mathrm{c}$$

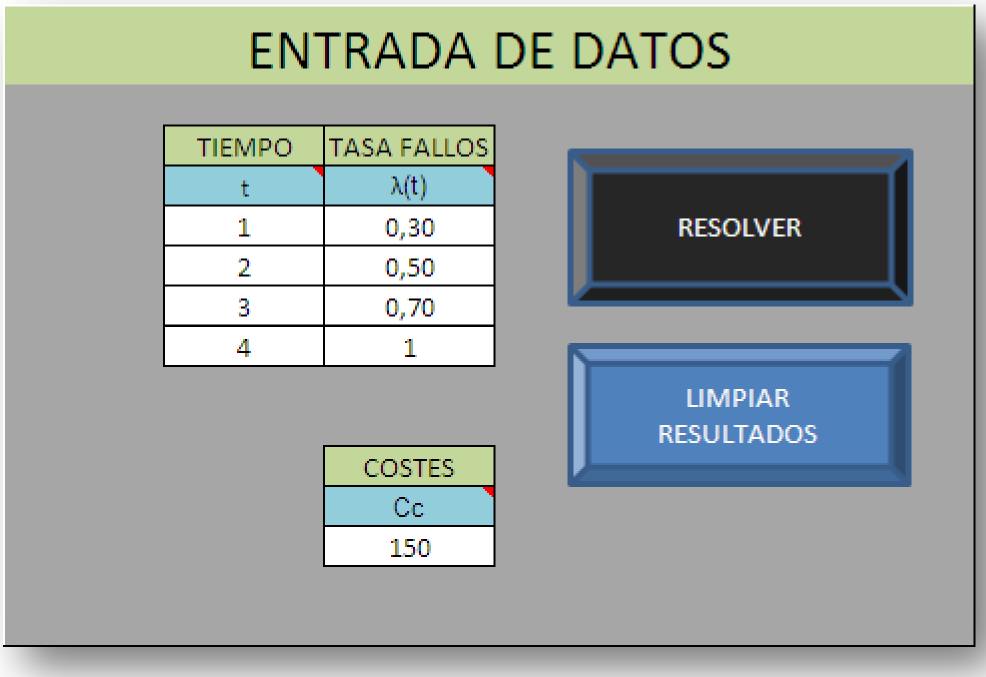
En cuanto a la discretización del tiempo, en este modelo se han tomado 4 periodos de funcionamiento distintos de manera que al final del último (T1=4) el sistema va a fallar con probabilidad 1.

Una vez que ya tenemos dicha discretización pasamos a implantar el modelo en Excel siguiendo el diagrama de flujo expuesto a continuación:


Inicio
$\lambda(t)$ y C_c
Matriz P
$p_{i1} = \lambda(i)$
$p_{ij} = 1 - \lambda(i)$
Solver de Excel
$E(t_p) = E(t_p)xP$
$\sum_{i=1}^{n} p_{S_i}(t) = 1$
Potencias de Matrices
(Rozanov)
$P^n = T$
Filas T=$E(t)$
Vectores de Estado
$E(t)$
Coste Mantenimiento= $p^*_{S_1}(t) * C_c$
Presentación
de resultados
Fin

3.2.2.2. Introducción de datos.

Debido a que hemos discretizado el tiempo en 4 periodos de funcionamiento distintos, los datos a introducir en el modelo son los valores de la función tasa de fallos λ(t) para cada periodo y el coste Cc del mantenimiento correctivo. Para ello la introducción de datos se hará mediante la siguiente interfaz:



3.2.2.3. Cálculos del modelo y resolución.

El modelo, partiendo de los datos introducidos, hace lo siguiente:

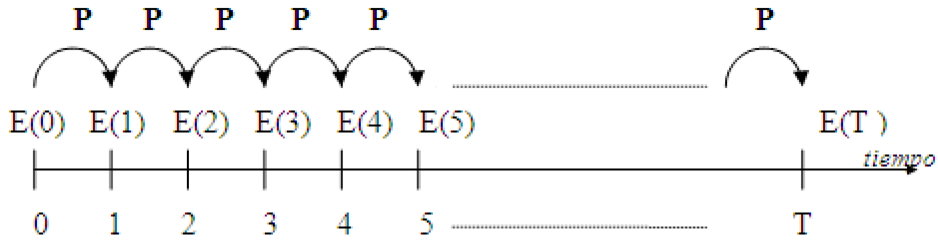
1º) Cálculo de la matriz de transición P.

	i = 1	2	3	4	j
	0,30	**0,70**	0,00	0,00	1
	0,50	0,00	**0,50**	0,00	2
P=	**0,70**	0,00	0,00	**0,30**	3
	1,00	0,00	0,00	0,00	4

2º)

a) Cálculo del vector de estado del primer punto del ciclo utilizando la demostración de Rozanov en la cual la secuencia: $P^1, P^2, P^3, \ldots\ldots,$

P^m ,...tiende hacia la matriz **T,** cuyas filas son, cada una de ellas, el vector de probabilidades **E**(*t*) del régimen permanente.



Para ello es necesario elevar la matriz **P** a una alta potencia:

$$P^{256} = \begin{bmatrix} 0{,}46 & 0{,}32 & 0{,}16 & 0{,}05 \\ 0{,}46 & 0{,}32 & 0{,}16 & 0{,}05 \\ 0{,}46 & 0{,}32 & 0{,}16 & 0{,}05 \\ 0{,}46 & 0{,}32 & 0{,}16 & 0{,}05 \end{bmatrix}$$

Con esto, el vector de estado queda:

	e*P	e*P
e1	0,464	0,464
e2	0,325	0,325
e3	0,162	0,162
e4	0,049	0,049
SUMA	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp)**

Habiéndose obtenido el vector de estado **E**(tp+1) multiplicando **E**(tp) por la matriz **P.**

b) Cálculo del vector de estado E(t) resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente utilizando Solver de Excel:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathrm{t}) = \mathbf{E}(\mathrm{t})\mathrm{x}\mathbf{P} & \text{Por ser estacionario} \\ \sum_{i=1}^{T1} p_{S_i}(t) = 1 & \end{cases}$$

Vector Estado	Variables		Valores introd	Igual a:
E(tp)	e1	0,464	0,4	0,0000
	e2	0,325	0,3	0,0000
	e3	0,162	0,3	0,0000
	e4	0,049	0,1	0,0000
	suma	1,00		

$$\boldsymbol{E}(t)x\boldsymbol{P} - \boldsymbol{E}(t) = 0$$

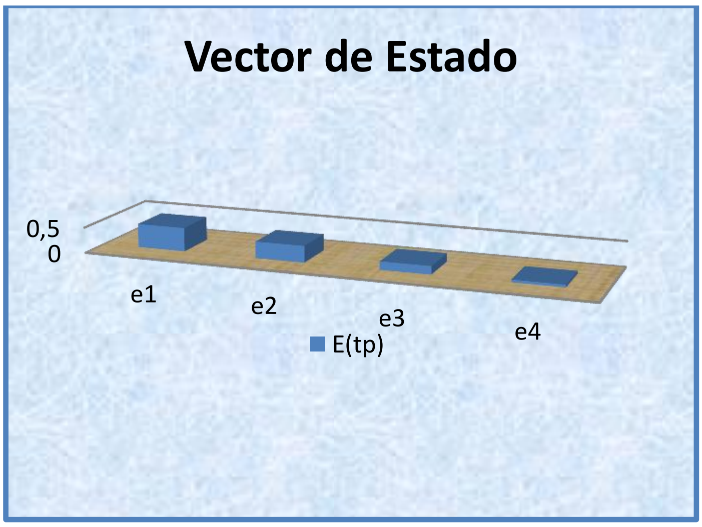
3º) Cálculo de los costes.

Se calculan los costes sabiendo que e1=$p_{S1}(t)$ es el número estimado de operaciones correctivas realizadas en cada intervalo de tiempo, en régimen permanente. Posteriormente multiplicamos e1 por Cc y obtenemos el CTE por periodo.

Por ciclo:

Prob correctivo por período en RP = $p_{S1}(t)$	0,46
Coste Esperado M. Correctivo = Cc*e1	69,61
Coste Esperado por Período	**69,61**

3.2.2.4. Presentación de resultados.



Coste Esperado por Período	**69,61**

3.3. Modelo de un sistema al que se le realiza mantenimiento correctivo y preventivo cíclico en el calendario.

ÍNDICE

3.3.1. Descripción del modelo e hipótesis realizadas.

Las hipótesis realizadas para desarrollar este modelo son:

-El tiempo medio de realización del mantenimiento del equipo es despreciable frente al tiempo medio entre fallos del equipo.

- La calidad de funcionamiento del sistema es independiente de su tiempo operativo.

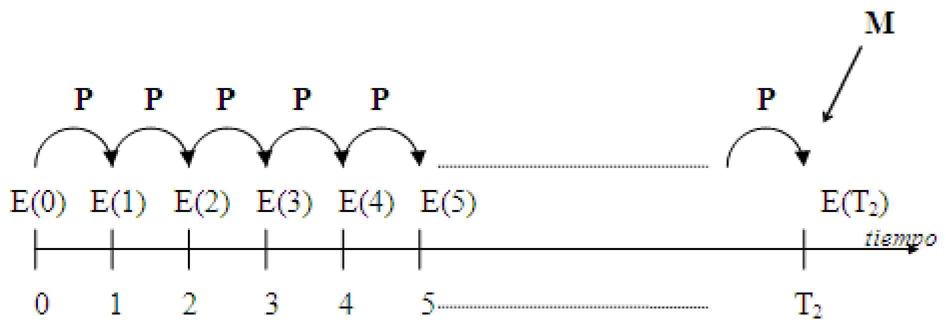
-El sistema queda como nuevo después de realizar sobre él las operaciones de mantenimiento preventivo y correctivo.

-Sólo es posible un fallo del sistema en una transición.

A continuación pasamos a describir el modelo de un sistema al que se le realiza mantenimiento correctivo y preventivo cíclico en el calendario.

El mantenimiento preventivo cíclico en el calendario tiene la ventaja del control exclusivo del calendario a la hora de programar las intervenciones preventivas, pero tiene también el inconveniente de que le resulta indiferente el estado del equipo a la hora de realizar dicho mantenimiento.

En cuanto al mantenimiento correctivo cabe destacar que se hará de manera inmediata e instantánea una vez que se produce el fallo.



donde:

P = Matriz de transición de estados

E( ) = Vector de probabilidades de estado

T_2 = Tiempo de ciclo de calendario

M = Matriz de mantenimiento

Según la política de mantenimiento seguida, cada T_2 períodos de tiempo (ciclo de mantenimiento preventivo) el vector de probabilidades de estado se "inicializa", es decir, una vez que se realiza de manera instantánea el mantenimiento preventivo, la probabilidad de que el sistema se encuentre en su primer período de funcionamiento sin fallo es la unidad. Por ello, la matriz de mantenimiento tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Este mantenimiento preventivo hace que se produzca una transición instantánea en el sistema que, desde cualquier estado posible del mismo, lo lleva al estado S_1 donde el sistema se encuentra en su primer período de funcionamiento sin fallo. En ese momento la condición del sistema se reinicializa y dará comienzo un nuevo ciclo.

En forma matemática, la evolución del sistema queda descrita de forma:

$$\mathbf{E}(i+1)=\mathbf{E}(i)\times\mathbf{P} \qquad , \qquad \text{con } i = 0,1,....,T_2-1$$

$$\mathbf{E}\,(0)=\mathbf{E}(T_2)\times\mathbf{M} \qquad , \qquad \text{con } \mathbf{E}\,(0) = \{ 1, 0,0,......,0\}$$

Debido a la forma en la que se lleva a cabo la política de mantenimiento preventivo, el sistema no tiende hacia un vector límite de probabilidades, sino que se repite en el tiempo una misma serie o secuencia de vectores de estado una vez que cada ciclo realiza el mantenimiento preventivo.

3.3.2. Modelado del sistema.

3.3.2.1. Nomenclatura, ecuaciones utilizadas y discretización del tiempo.

La nomenclatura utilizada en este modelo es la siguiente:

C_c : coste de la SC.

C_p : coste de la SP.

$p_{S1}(t)$: primera componente del vector de estado que es el número estimado de operaciones correctivas realizadas en cada intervalo de tiempo al sistema.

T_1: máximo número de intervalos de tiempo que el sistema puede estar funcionando sin que falle.

T_2: Tiempo de ciclo de calendario (ciclo de mantenimiento preventivo).

***P**:* Matriz de transición de estados.

***M**:* Matriz de mantenimiento.

$\lambda(t)$: función tasa de fallos.

***E**(t):* Vector de probabilidades de estado.

e_i: Componente i del vector de probabilidades de estado.

Se puede entonces obtener el coste promedio de la política de mantenimiento utilizada mediante la siguiente expresión:

Coste de mantenimiento promedio total por período =

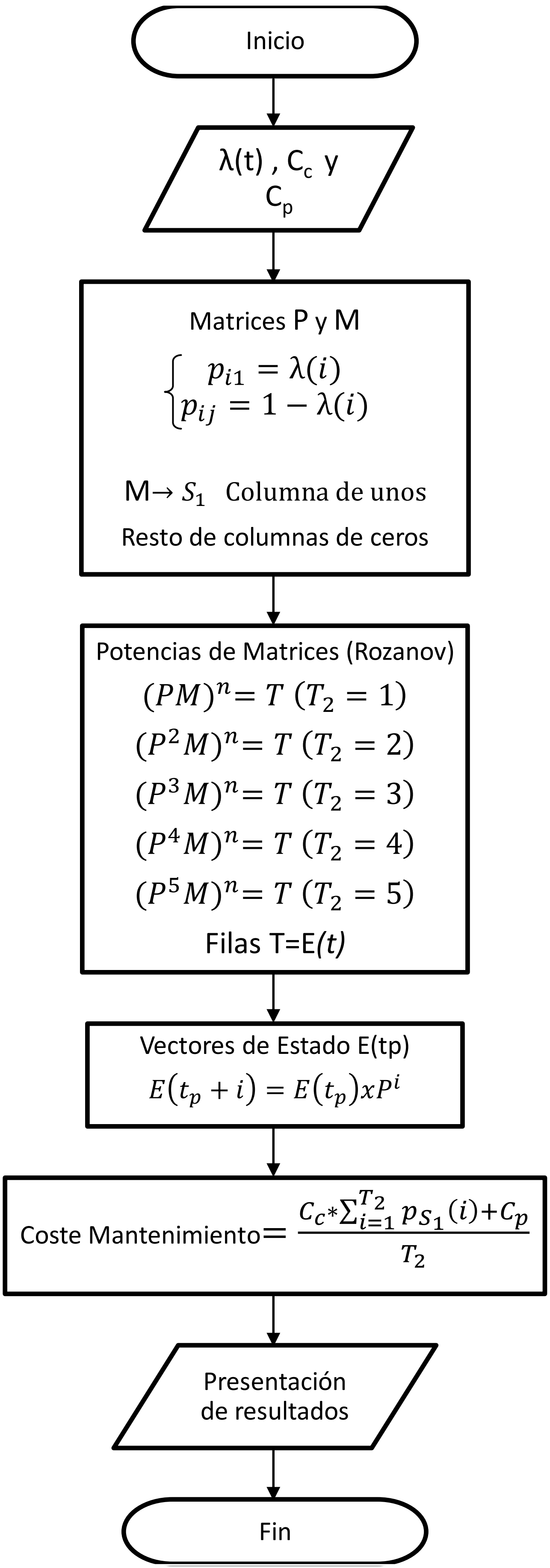
$$= \frac{C_c * \sum_{i=1}^{T2} p_{S_1}(i) + C_p}{T_2}$$

Resulta claro que en estas condiciones, existirá un valor de $T_2 \in [1, \infty)$, para el cual el valor del coste promedio obtenido sea óptimo.

En cuanto a la discretización del tiempo, en este modelo se han tomado 5 periodos de funcionamiento distintos de manera que al final del último (T_1=5) el sistema va a fallar con probabilidad 1.

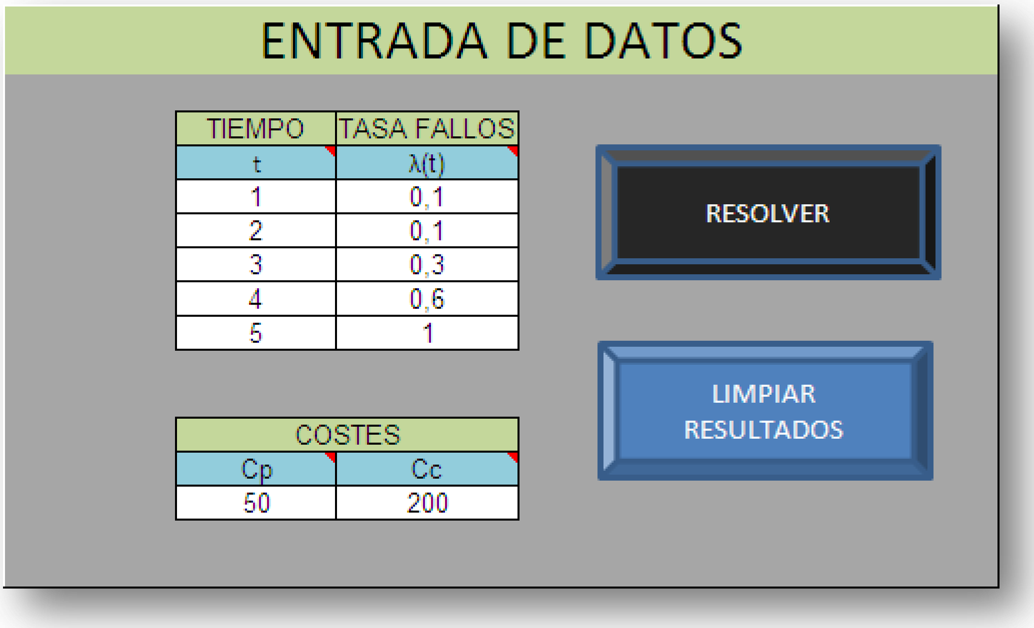
Los cálculos se van a hacer para cada valor de T_2 =1,…,5.

Una vez que ya tenemos dicha discretización pasamos a implantar el modelo en Excel siguiendo el diagrama de flujo expuesto a continuación:


Inicio
λ(t) , C_c y C_p
Matrices P y M
$\begin{cases} p_{i1} = \lambda(i) \\ p_{ij} = 1 - \lambda(i) \end{cases}$
M→ S_1 Columna de unos
Resto de columnas de ceros
Potencias de Matrices (Rozanov)
$(PM)^n = T\ (T_2 = 1)$
$(P^2M)^n = T\ (T_2 = 2)$
$(P^3M)^n = T\ (T_2 = 3)$
$(P^4M)^n = T\ (T_2 = 4)$
$(P^5M)^n = T\ (T_2 = 5)$
Filas T=E(*t*)
Vectores de Estado E(tp)
$E(t_p + i) = E(t_p)xP^i$
Coste Mantenimiento$= \frac{C_c * \sum_{i=1}^{T_2} p_{S_1}(i) + C_p}{T_2}$
Presentación de resultados
Fin

3.3.2.2. Introducción de datos.

Debido a que hemos discretizado el tiempo en 5 periodos de funcionamiento distintos, los datos a introducir en el modelo son los valores de la función tasa de fallos λ(t) para cada periodo, el coste Cc del mantenimiento correctivo y el coste Cp del mantenimiento preventivo. Para ello la introducción de datos se hará mediante la siguiente interfaz:



3.3.2.3. Cálculos del modelo y resolución.

El modelo, partiendo de los datos introducidos y utilizando macros de Excel, hace lo siguiente:

1º) Cálculo de la <u>matriz de transición</u> **P**.

i =	0	1	2	3	4	5	j
	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0
	0,10	0,00	**0,90**	0,00	0,00	0,00	1
P=	**0,10**	0,00	0,00	**0,90**	0,00	0,00	2
	0,30	0,00	0,00	0,00	**0,70**	0,00	3
	0,60	0,00	0,00	0,00	0,00	**0,40**	4
	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	5

2º) Cálculo de la matriz de mantenimiento **M**.

$$
\mathbf{M}= \begin{array}{c|cccccc|c}
i = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & j \\
\hline
 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

3º) Cálculo del vector de estado del primer punto del ciclo utilizando la demostración de Rozanov en la cual la secuencia: $P^1, P^2, P^3, \ldots\ldots, P^m, \ldots$tiende hacia la matriz **T,** cuyas filas son, cada una de ellas, el vector de probabilidades **E**(*t*) del régimen permanente. A partir de **E**(*t*) obtenemos los siguientes: **E**(t+1), **E**(t+2),…

Estos cálculos los vamos a hacer para cada valor de T_2 entre 1 y 5.

Para ello es necesario elevar la matriz **P** a una alta potencia:

a) $T_2=1$:

$$
(\mathbf{PM})^{256} = \begin{array}{|cccccc|}
\hline
0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\
0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\
0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\
0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\
0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\
0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\
\hline
\end{array}
$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

	T2=1	
	e*P	**e*PM**
e0	0,10	0,00
e1	0,00	1,00
e2	0,90	0,00
e3	0,00	0,00
e4	0,00	0,00
e5	0,00	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp)**

Siendo: **E**(i+1)=**E**(i)×**P**

b) T_2=2:

$$(\mathbf{P}^2\,\mathbf{M})^{256} = \begin{bmatrix} 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

	T2=2		
	e*P	**e*P2**	**e*P2M**
e0	0,10	0,19	0,00
e1	0,00	0,00	1,00
e2	0,90	0,00	0,00
e3	0,00	0,81	0,00
e4	0,00	0,00	0,00
e5	0,00	0,00	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp)**

⇧

Siendo: $\mathbf{E}(i+1)=\mathbf{E}(i)\times\mathbf{P}$

c) T_2=3:

$$(\mathbf{P}^3\mathbf{M})^{256} = \begin{bmatrix} 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

	T2=3			
	e*P	**e*P2**	**e*P3**	**e*P3M**
e0	0,10	0,19	0,43	0,00
e1	0,00	0,00	0,00	1,00
e2	0,90	0,00	0,00	0,00
e3	0,00	0,81	0,00	0,00
e4	0,00	0,00	0,57	0,00
e5	0,00	0,00	0,00	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp+3)**	**E(tp)**

⇧

Siendo: $\mathbf{E}(i+1)=\mathbf{E}(i)\times\mathbf{P}$

d) <u>$T_2=4$</u>:

$$(\mathbf{P}^4\mathbf{M})^{256} = \begin{bmatrix} 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

	T2=4				
	e*P	**e*P2**	**e*P3**	**e*P4**	**e*P4M**
e0	0,10	0,19	0,43	0,77	0,00
e1	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
e2	0,90	0,00	0,00	0,00	0,00
e3	0,00	0,81	0,00	0,00	0,00
e4	0,00	0,00	0,57	0,00	0,00
e5	0,00	0,00	0,00	0,23	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp+3)**	**E(tp+4)**	**E(tp)**

Siendo: $\mathbf{E}(i+1)=\mathbf{E}(i)\times\mathbf{P}$

e) <u>$T_2=5$</u>:

$$(\mathbf{P}^5\mathbf{M})^{256} = \begin{bmatrix} 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

	T2=5					
	e*P	**e*P2**	**e*P3**	**e*P4**	**e*P5**	**e*P5M**
e0	0,10	0,19	0,43	0,77	1,00	0,00
e1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
e2	0,90	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
e3	0,00	0,81	0,00	0,00	0,00	0,00
e4	0,00	0,00	0,57	0,00	0,00	0,00
e5	0,00	0,00	0,00	0,23	0,00	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp+3)**	**E(tp+4)**	**E(tp+5)**	**E(tp)**

Siendo: **E**(i+1)=**E**(i)×**P**

4º) Cálculo de los costes.

- Probabilidad Correctivo = $\sum_{i=1}^{T2} p_{S_0}(t_p + T_2)$
- Probabilidad Preventivo = $p_{S_1}(tp) - p_{S_0}(t_p + T_2)$
- Coste Correctivos $= \text{Probabilidad Correctivo} * C_c$
- Coste Preventivos $= \text{Probabilidad Preventivos} * C_p$
- Coste Esperado por periodo = $\frac{\text{Coste Correctivos } + \text{Coste Preventivos}}{T_2}$

Los costes para cada valor de T2 son los presentados a continuación:

a) $T_2=1$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo=	0,10
Prob Preventivo=	0,90
Coste Correctivos=	20,00
Coste Preventivo=	45,00
Coste Esperado por Período	**65,00**

b) $T_2=2$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo=	0,29
Prob Preventivo=	0,81
Coste Correctivos=	58,00
Coste Preventivo=	40,50
Coste Esperado por Período	**49,25**

c) $T_2=3$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo=	0,72
Prob Preventivo=	0,57
Coste Correctivos=	144,60
Coste Preventivo=	28,35
Coste Esperado por Período	**57,65**

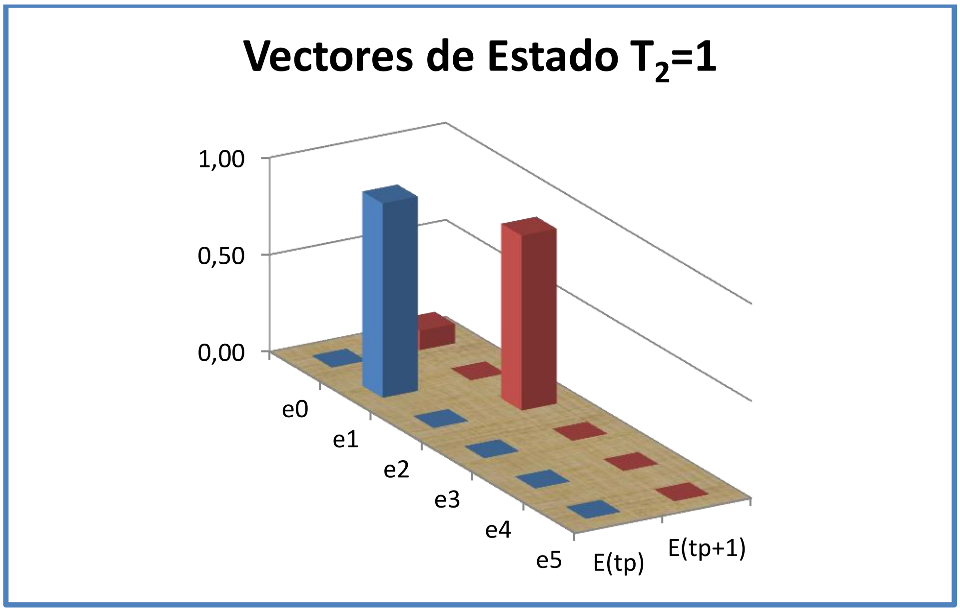
d) $T_2=4$:

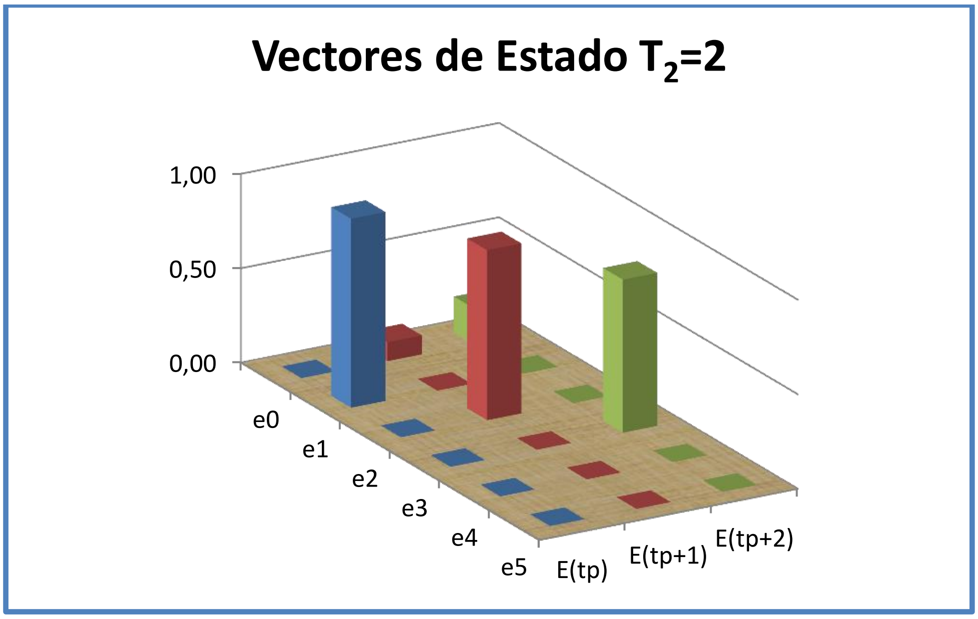
Por ciclo:	
Prob Correctivo=	1,50
Prob Preventivo=	0,23
Coste Correctivos=	299,24
Coste Preventivo=	74,81
Coste Esperado por Período	**93,51**

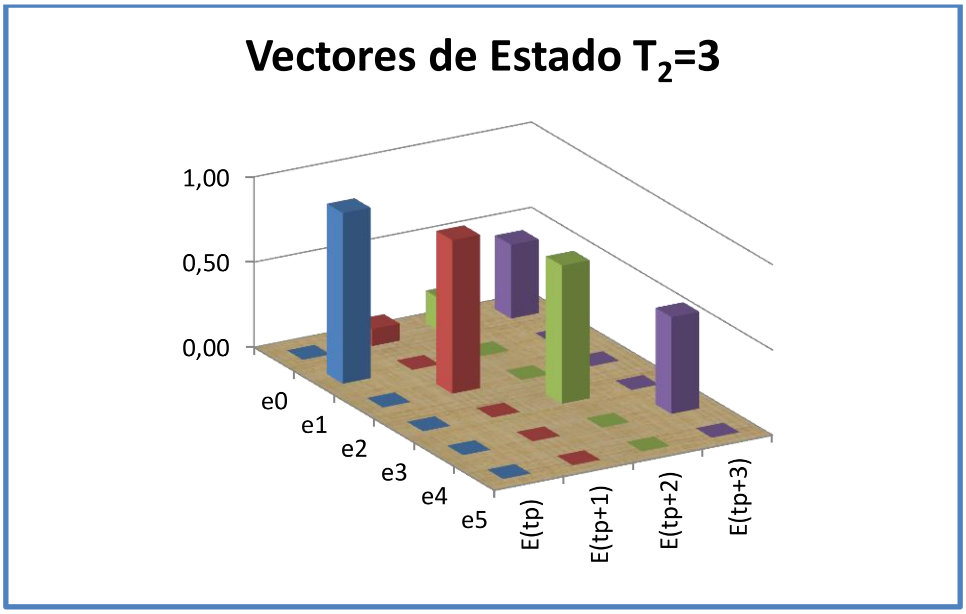
e) $T_2=5$:

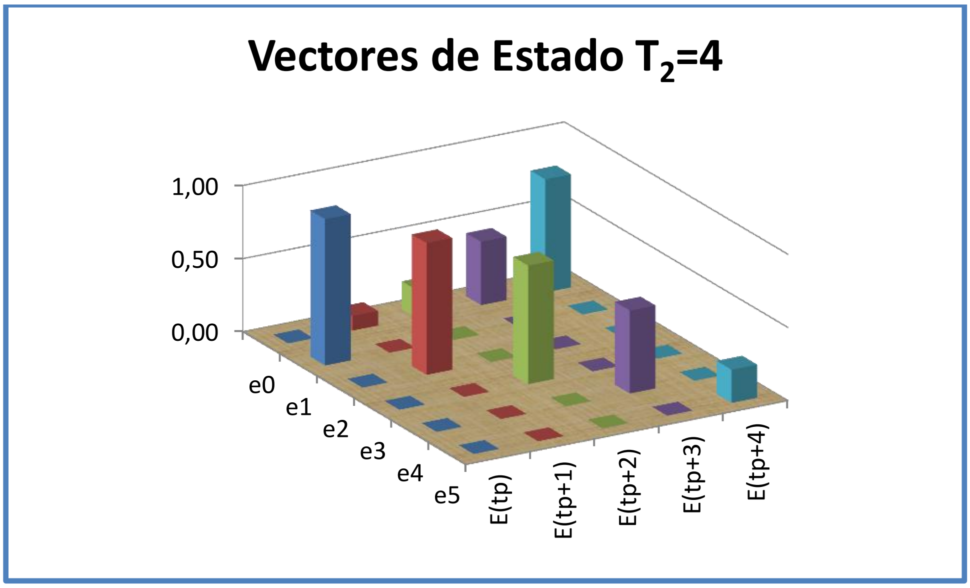
Por ciclo:	
Prob Correctivo=	2,50
Prob Preventivo=	0,00
Coste Correctivos=	499,24
CostePreventivo=	0,00
Coste Esperado por Período	**99,85**

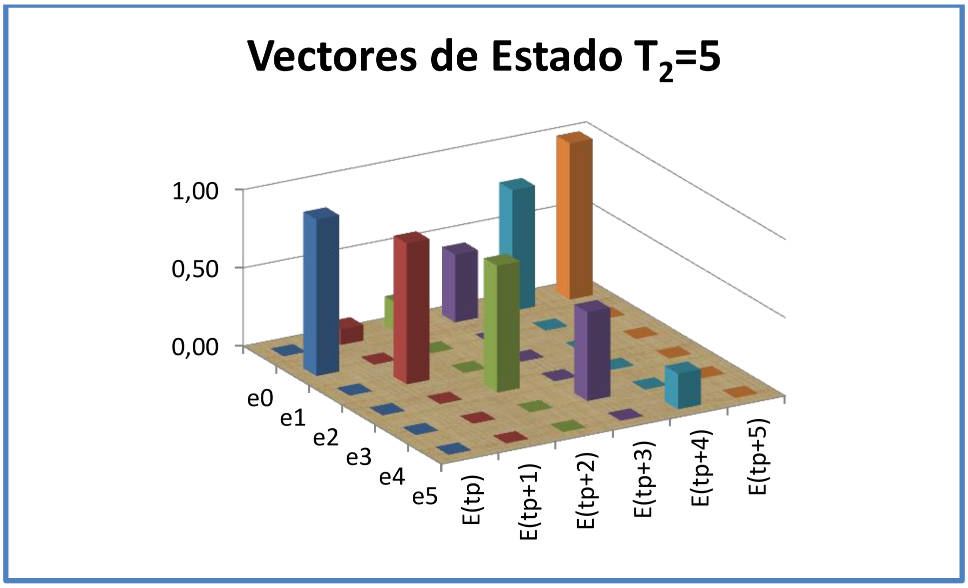
3.3.2.4. Presentación de resultados.

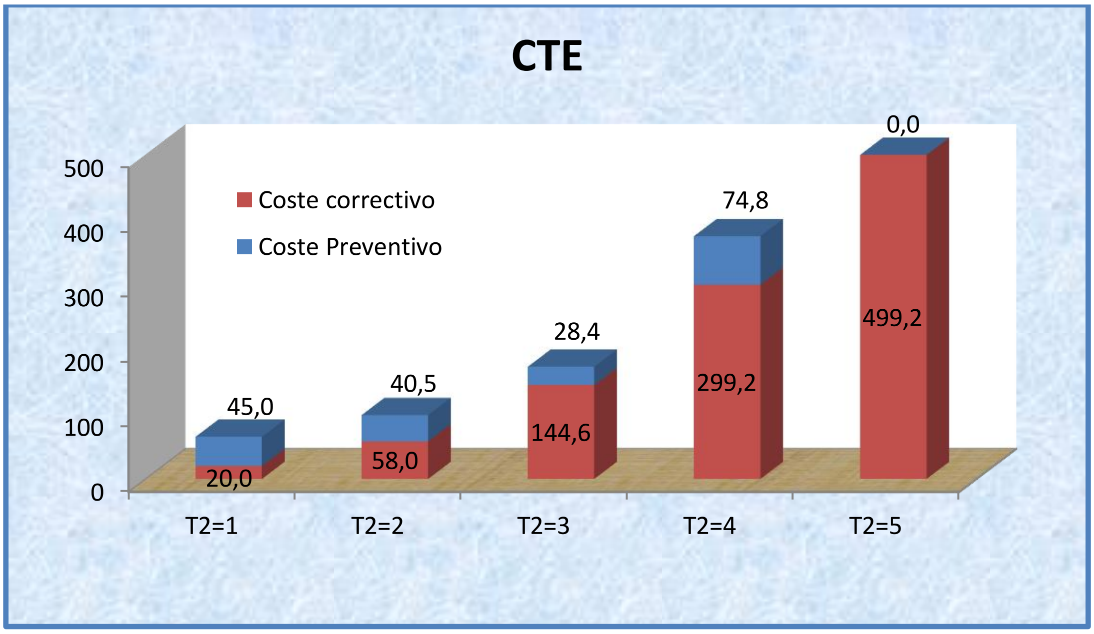





Vectores de Estado T_2=3
1,00
0,50
0,00
e0
e1
e2
e3
e4
e5
E(tp)
E(tp+1)
E(tp+2)
E(tp+3)


Vectores de Estado T_2=4
1,00
0,50
0,00
e0
e1
e2
e3
e4
e5
E(tp)
E(tp+1)
E(tp+2)
E(tp+3)
E(tp+4)





Podemos observar que al aumentar T_2 se eleva el CTE debido a que el mantenimiento se hace más tarde y por tanto la probabilidad de fallar antes de llegar a dicho mantenimiento es mayor, y como el coste del correctivo es mucho mayor que el del preventivo, ahí estaría la gran diferencia en dicho CTE.

3.4. Modelo de un sistema al que se le realiza mantenimiento correctivo y preventivo cíclico en función del nº de periodos de funcionamiento sin fallo.

ÍNDICE

3.4.1. Descripción del modelo e hipótesis realizadas.

Las hipótesis realizadas para desarrollar este modelo son:

-El tiempo medio de realización del mantenimiento del equipo es despreciable frente al tiempo medio entre fallos del equipo.

- La calidad de funcionamiento del sistema es independiente de su tiempo operativo.

-El sistema queda como nuevo después de realizar sobre él las operaciones de mantenimiento preventivo y correctivo.

-Sólo es posible un fallo del sistema en una transición.

A continuación pasamos a describir el modelo de un sistema al que se le realiza mantenimiento correctivo y preventivo cíclico en función al nº de periodos de funcionamiento sin fallos.

La política de mantenimiento preventivo cíclico del apartado anterior que es función únicamente del tiempo de calendario lleva a cabo las actividades de mantenimiento preventivo programadas independientemente del estado en que se encuentre el sistema. A continuación desarrollaremos un modelo que corrija este aspecto. Lo que se busca es que se realice el mantenimiento preventivo de forma cíclica en el calendario, pero sólo si el sistema lleva funcionando sin fallo más de un determinado número de intervalos de tiempo. Para ello definimos el siguiente parámetro:

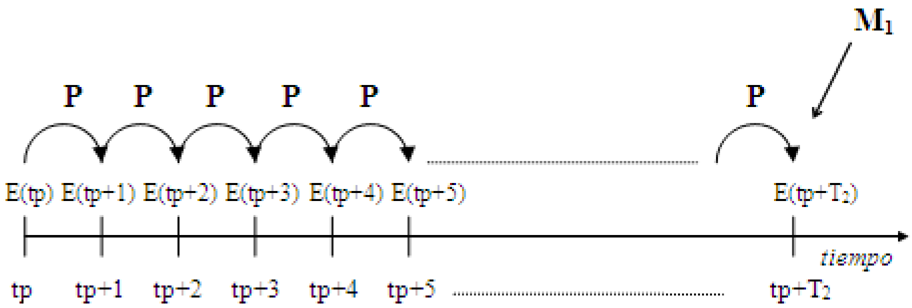
$T_{3:}$ Número de intervalos de funcionamiento sin fallo por encima del cual se realizará mantenimiento preventivo al sistema.

La evolución del sistema en el tiempo es la misma que en el caso anterior salvo una serie de excepciones:

$$
\mathbf{M_1} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|cccc} & & & T_3 & T_3+1 & & & \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

1º) La matriz de mantenimiento del nuevo caso, M_1, es distinta. Debido a que la nueva política tiene en cuenta la edad del equipo para someterlo o no a mantenimiento, la matriz será ahora diagonal hasta la fila T_3 porque si no supera dicha edad el sistema se queda en el mismo estado en el que está. A partir de la fila T_3 los elementos de la primera columna son unos y los demás ceros ya que se realizaría el mantenimiento preventivo y el sistema iría al estado 1.

2º) Esta nueva matriz de mantenimiento M_1 no "reinicializa" ahora totalmente al vector de probabilidades de estado cada T_2 intervalos de tiempo. Ahora se compara el tiempo de funcionamiento sin fallos del sistema con valor de T_3 que se haya fijado en la política. Esto significa que pasados un número de ciclos de mantenimiento preventivo, el vector de probabilidades de estado del sistema alcanzará lo que se conoce como ciclo límite, o régimen permanente cíclico del sistema. Este régimen se caracteriza por la repetición de los valores que toma dicho vector de probabilidades de estado de forma cíclica en el tiempo. En la figura siguiente se ilustra esta idea.



donde:

- tp = Instante de comienzo de ciclo límite
- **P** = Matriz de transición de estados
- **E**( ) = Vector de probabilidades de estado
- T_2 = Tiempo de ciclo de calendario
- $\mathbf{M_1}$ = Matriz de mantenimiento

Lo primero que hay que hacer para obtener el coste promedio de mantenimiento por período es calcular el vector de probabilidades de estado para cada uno de los instantes de tiempo que componen el ciclo límite. Para ello utilizaremos las expresiones siguientes:

$$\mathbf{E}\,(tp+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{P}\,, \tag{3.4.1.1}$$

$$\mathbf{E}\,(tp+2)=\mathbf{E}(tp+1)\times\mathbf{P}=\mathbf{E}(tp)\times\mathbf{P}^2\,, \tag{3.4.1.2}$$

....

$$\mathbf{E}\,(tp+T_2)=\mathbf{E}(tp+T_2-1)\times\mathbf{P}=\mathbf{E}(tp)\times\mathbf{P}^{T2} \tag{3.4.1.3}$$

cuando se llega al ciclo límite deberá ocurrir entonces:

$$\mathbf{E}\,(tp)\times\mathbf{P}^{T2}\times\mathbf{M_1}=\mathbf{E}(tp) \tag{3.4.1.4}$$

por lo tanto se puede obtener el valor del vector de probabilidades de estado para el primer instante del ciclo límite (tp), solucionando el siguiente sistema de ecuaciones:

$\mathbf{E}(tp)[\mathbf{P}^{T2}\times\mathbf{M_1}\text{-}I] = \varnothing$ siendo $\varnothing$ la matriz nula,

cumpliéndose además la restricción:

$$\sum_{i=1}^{T_1} p_{S_i}(t_p) = 1$$

Una vez conocida la solución del sistema de ecuaciones E(tp), bastará con aplicar las ecuaciones (3.4.1.1) a (3.4.1.3) para obtener el valor del vector probabilidades de estado en los restantes instantes que componen el ciclo límite.

Existe la posibilidad de calcular el ciclo límite a partir de la obtención de cualquiera de los vectores de probabilidades de estado que lo componen, y no necesariamente a partir de E(tp) como aquí se hace.

3.4.2. Modelado del sistema.

3.4.2.1. Nomenclatura, ecuaciones utilizadas y discretización del tiempo.

La nomenclatura utilizada en este modelo es la siguiente:

C_c : coste de la SC.

C_p : coste de la SP.

$p_{S1}(t)$: primera componente del vector de estado que es el número estimado de operaciones correctivas realizadas en cada intervalo de tiempo al sistema.

T_1: máximo número de intervalos de tiempo que el sistema puede estar funcionando sin que falle.

T_2: Tiempo de ciclo de calendario (ciclo de mantenimiento preventivo).

T_3: Número de intervalos de funcionamiento sin fallo (edad del equipo) por encima del cual se realizará mantenimiento preventivo al sistema.

P: Matriz de transición de estados.

$\mathbf{M_1}$: Matriz de mantenimiento.

λ(t): función tasa de fallos.

E*(t)*: Vector de probabilidades de estado.

e_i: Componente i del vector de probabilidades de estado.

Se puede entonces obtener el coste promedio de la política de mantenimiento utilizada mediante las siguientes expresiones:

Coste promedio por período de mantenimiento correctivo =

$$= \mathrm{C_c} * \frac{\sum_{\mathrm{i=t_p+1}}^{\mathrm{t_p+T_2}} \mathrm{p_{S_1}(i)}}{\mathrm{T_2}}$$

Coste promedio por período de mantenimiento preventivo =

$$= C_p * \frac{p_{S_1}(t_p) - p_{S_1}(t_p + T_2)}{T_2}$$

Lo que es equivalente a lo siguiente:

$$C_p * \frac{\sum_{i=t_p+T_3+1}^{t_p+T_1} p_{S_i}(t_p + T_2)}{T_2}$$

Por tanto:

Coste de mantenimiento promedio total por período =

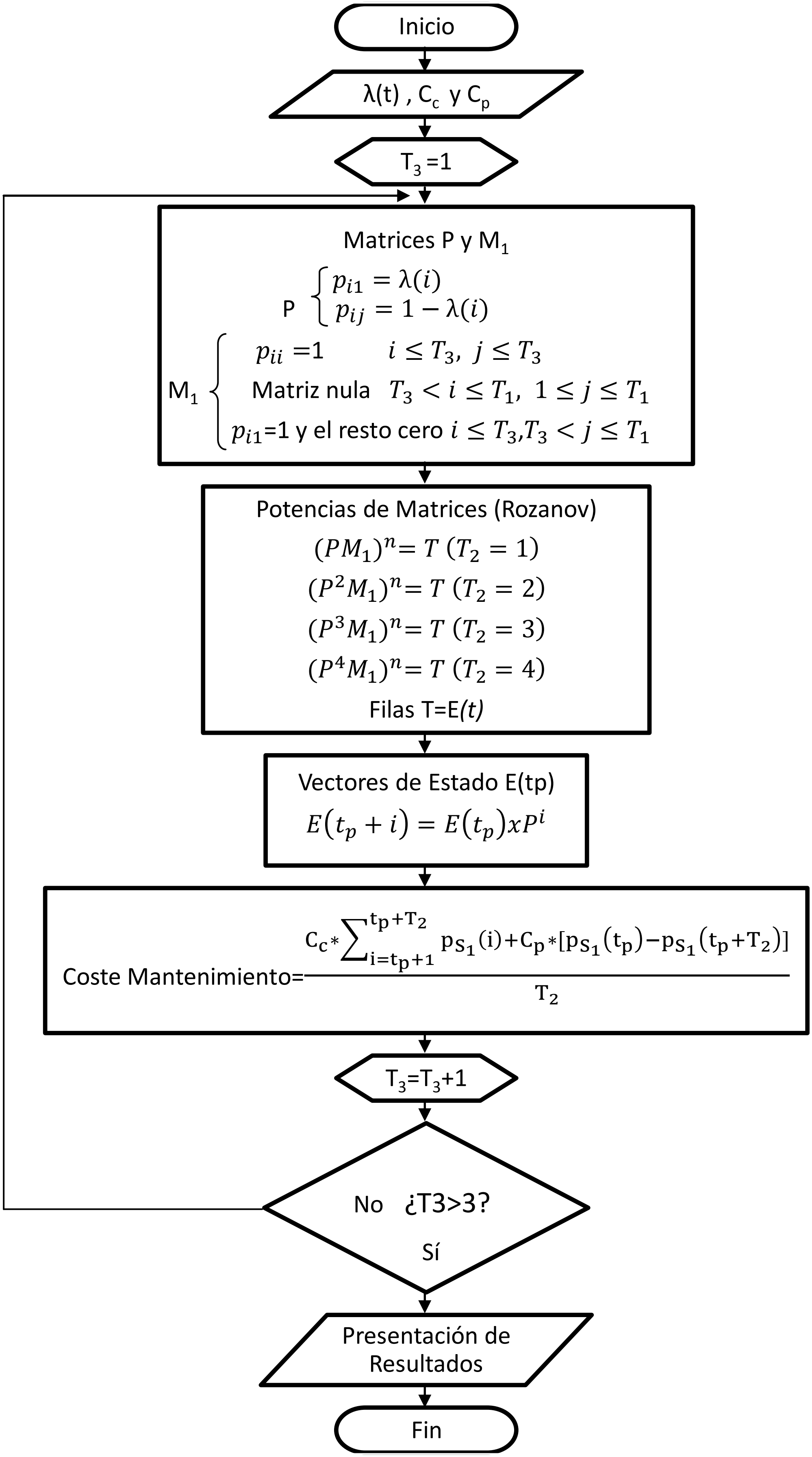
$$\frac{C_c * \sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} p_{S_1}(i) + C_p * [p_{S_1}(t_p) - p_{S_1}(t_p + T_2)]}{T_2}$$

Para resolver el problema es necesario encontrar los valores de T_2 y T_3 que minimicen esta expresión.

En cuanto a la discretización del tiempo, en este modelo se han tomado 4 periodos de funcionamiento distintos de manera que al final del último (T_1=4) el sistema va a fallar con probabilidad 1.

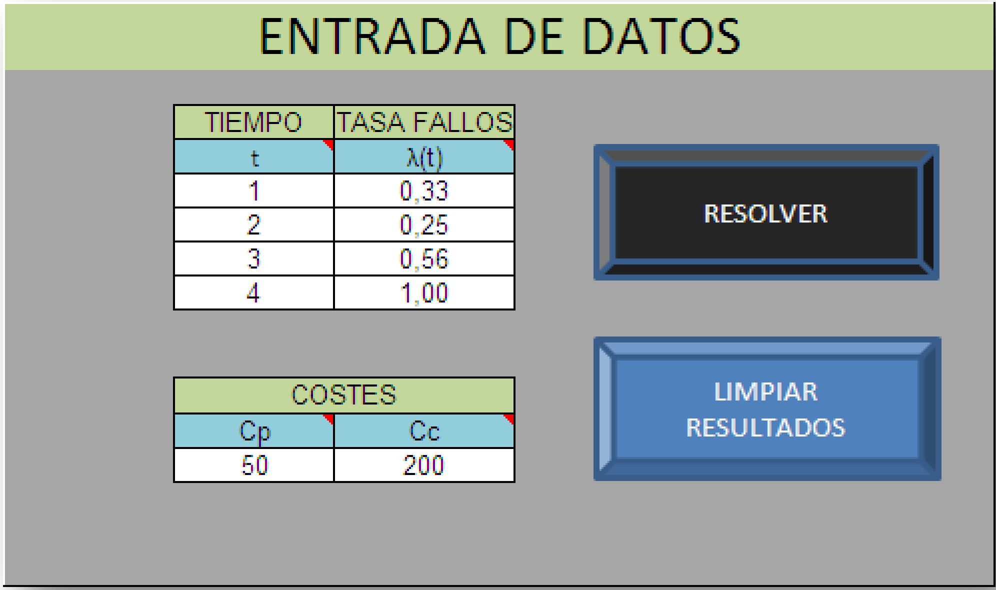
Los cálculos se van a hacer para cada valor de T_2 =1,…,4 y T_3 =1,…,3.

Una vez que ya tenemos dicha discretización pasamos a implantar el modelo en Excel siguiendo el diagrama de flujo expuesto a continuación:


Inicio
$\lambda(t)$, C_c y C_p
T_3 =1
Matrices P y M_1
P $\begin{cases} p_{i1} = \lambda(i) \\ p_{ij} = 1 - \lambda(i) \end{cases}$
M_1 $\begin{cases} p_{ii} = 1 & i \leq T_3,\ j \leq T_3 \\ \text{Matriz nula} & T_3 < i \leq T_1,\ 1 \leq j \leq T_1 \\ p_{i1}=1 \text{ y el resto cero} & i \leq T_3, T_3 < j \leq T_1 \end{cases}$
Potencias de Matrices (Rozanov)
$(PM_1)^n = T\ (T_2 = 1)$
$(P^2M_1)^n = T\ (T_2 = 2)$
$(P^3M_1)^n = T\ (T_2 = 3)$
$(P^4M_1)^n = T\ (T_2 = 4)$
Filas T=E(*t*)
Vectores de Estado E(tp)
$E(t_p + i) = E(t_p) x P^i$
Coste Mantenimiento= $\dfrac{C_c * \sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} ps_1(i) + C_p * [ps_1(t_p) - ps_1(t_p+T_2)]}{T_2}$
T_3=T_3+1
No ¿T3>3?
Sí
Presentación de Resultados
Fin

3.4.2.2. Introducción de datos.

Debido a que hemos discretizado el tiempo en 4 periodos de funcionamiento distintos, los datos a introducir en el modelo son los valores de la función tasa de fallos λ(t) para cada periodo, el coste Cc del mantenimiento correctivo y el coste Cp del mantenimiento preventivo. Para ello la introducción de datos se hará mediante la siguiente interfaz:



3.4.2.3. Cálculos del modelo y resolución.

El modelo, partiendo de los datos introducidos y utilizando macros de Excel, hace lo siguiente:

1º) Cálculo de la matriz de transición **P**.

i =	1	2	3	4	j
Matriz de	**0,33**	**0,67**	0,00	0,00	1
Transición	**0,25**	0,00	**0,75**	0,00	2
P=	**0,56**	0,00	0,00	**0,44**	3
	1,00	0,00	0,00	0,00	4

2º) Cálculo de la matriz de mantenimiento **M_1**.

$T_3=1$

$$\begin{array}{c|cccc|c} i= & 1 & 2 & 3 & 4 & j \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ M_1= & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

$T_3=2$

$$\begin{array}{c|cccc|c} i= & 1 & 2 & 3 & 4 & j \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ M_1= & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

$T_3=3$

$$\begin{array}{c|cccc|c} i= & 1 & 2 & 3 & 4 & j \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ M_1= & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

3º) Cálculo del vector de estado del primer punto del ciclo utilizando la demostración de Rozanov en la cual la secuencia: $P^1, P^2, P^3, \ldots\ldots, P^m, \ldots$tiende hacia la matriz **T,** cuyas filas son, cada una de ellas, el vector de probabilidades **E**(t_p) del régimen permanente. A partir de **E**(t_p) obtenemos los siguientes: **E**(t_p+1), **E**(t_p+2),… **E**(t_p+T_2).

Estos cálculos los vamos a hacer para cada valor de $T_2 \in [1,4]$ y $T_3 \in [1,3]$.

Para ello es necesario elevar la matriz **P** a una alta potencia:

$T_3=1$

a) $T_2=1$:

$$(PM_1)^{256}= \begin{array}{|cccc|} \hline 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ \hline \end{array}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=1

	e*P	e*PM
e1	0,33	1,00
e2	0,67	0,00
e3	0,00	0,00
e4	0,00	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp)**

Siendo: $\mathbf{E}(tp+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{P}$

b) T₂=2:

$$(\mathbf{P}^2\mathbf{M}_1)^{256} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=2

	e*P	e*P2	e*P2M
e1	0,33	0,28	1,00
e2	0,67	0,22	0,00
e3	0,00	0,50	0,00
e4	0,00	0,00	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp)**

Siendo: $\mathbf{E}(tp+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{P}$

$\mathbf{E}(tp+2)=\mathbf{E}(tp+1)\times\mathbf{P}$

c) T_2=3:

$$(\mathbf{P}^3\mathbf{M}_1)^{256} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

	T2=3			
	e*P	**e*P2**	**e*P3**	**e*P3M**
e1	0,33	0,28	0,43	1,00
e2	0,67	0,22	0,19	0,00
e3	0,00	0,50	0,17	0,00
e4	0,00	0,00	0,22	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp+3)**	**E(tp)**

⇧

Siendo: **E** (tp+1)=**E**(t)×**P** **E** (tp+3)=**E**(tp+2)×**P**

E (tp+2)=**E**(tp+1)×**P**

d) $T_2=4$:

$$(\mathbf{P^4M_1})^{256} = \begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

	T2=4				
	e*P	**e*P2**	**e*P3**	**e*P4**	**e*P4M**
e1	0,33	0,28	0,43	0,50	1,00
e2	0,67	0,22	0,19	0,29	0,00
e3	0,00	0,50	0,17	0,14	0,00
e4	0,00	0,00	0,22	0,07	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp+3)**	**E(tp+4)**	**E(tp)**

⇧

Siendo: **E**(tp+1)=**E**(t)×**P** **E** (tp+3)=**E**(tp+2)×**P**

E (tp+2)=**E**(tp+1)×**P** **E** (tp+4)=**E**(tp+3)×**P**

$T_3=2$

a) $T_2=1$:

$$(PM_1)^{256} = \begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}00 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=1

	e*P	**e*PM**
e1	0,30	0,60
e2	0,40	0,40
e3	0,30	0,00
e4	0,00	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp)**

Siendo: $\mathbf{E}(tp+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{P}$

b) $T_2=2$:

$$(\mathbf{P^2 M_1})^{256} = \begin{bmatrix} 0{,}79 & 0{,}21 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}79 & 0{,}21 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}79 & 0{,}21 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}79 & 0{,}21 & 0{,}00 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=2

	e*P	**e*P2**	**e*P2M**
e1	0,31	0,32	0,79
e2	0,53	0,21	0,21
e3	0,16	0,40	0,00
e4	0,00	0,07	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp)**

Siendo: $\mathbf{E}(tp+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{P}$

$\mathbf{E}(tp+2)=\mathbf{E}(tp+1)\times\mathbf{P}$

c) $\underline{T_2=3}$:

$$(P^3M_1)^{256} = \begin{array}{|cccc|} 0,78 & 0,22 & 0,00 & 0,00 \\ 0,78 & 0,22 & 0,00 & 0,00 \\ 0,78 & 0,22 & 0,00 & 0,00 \\ 0,78 & 0,22 & 0,00 & 0,00 \end{array}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=3

	e*P	e*P2	e*P3	e*P3M
e1	0,31	0,32	0,45	0,78
e2	0,52	0,21	0,22	0,22
e3	0,16	0,39	0,16	0,00
e4	0,00	0,07	0,17	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp+3)**	**E(tp)**

Siendo: **E** (tp+1)=**E**(t)×**P** **E** (tp+3)=**E**(tp+2)×**P**

E (tp+2)=**E**(tp+1)×**P**

d) $\underline{T_2=4}$:

$$(P^4M_1)^{256} = \begin{array}{|cccc|} 0,69 & 0,31 & 0,00 & 0,00 \\ 0,69 & 0,31 & 0,00 & 0,00 \\ 0,69 & 0,31 & 0,00 & 0,00 \\ 0,69 & 0,31 & 0,00 & 0,00 \end{array}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=4

	e*P	e*P2	e*P3	e*P4	e*P4M
e1	0,31	0,35	0,46	0,45	0,69
e2	0,46	0,20	0,23	0,31	0,31
e3	0,23	0,35	0,15	0,17	0,00
e4	0,00	0,10	0,15	0,07	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp+3)**	**E(tp+4)**	**E(tp)**

Siendo: **E** (tp+1)=**E**(t)×**P** **E** (tp+3)=**E**(tp+2) ×**P**

E (tp+2)=**E**(tp+1)×**P** **E** (tp+4)=**E**(tp+3) ×**P**

$T_3=3$

a) $T_2=1$:

$$(\mathbf{PM_1})^{256}=\begin{bmatrix}0{,}46 & 0{,}31 & 0{,}23 & 0{,}00\\ 0{,}46 & 0{,}31 & 0{,}23 & 0{,}00\\ 0{,}46 & 0{,}31 & 0{,}23 & 0{,}00\\ 0{,}46 & 0{,}31 & 0{,}23 & 0{,}00\end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=1

	e*P	e*PM
e1	0,36	0,46
e2	0,31	0,31
e3	0,23	0,23
e4	0,10	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp)**

Siendo: **E** (tp+1)=**E**(t)×**P**

b) $T_2=2$:

$$(\mathbf{P^2\,M_1})^{256}=\begin{bmatrix}0{,}50 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}00\\ 0{,}50 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}00\\ 0{,}50 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}00\\ 0{,}50 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}00\end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=2

	e*P	e*P2	e*P2M
e1	0,37	0,42	0,50
e2	0,34	0,25	0,25
e3	0,18	0,25	0,25
e4	0,11	0,08	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp)**

Siendo: **E** (tp+1)=**E**(t)×**P**

E (tp+2)=**E**(tp+1)×**P**

c) T_2=3:

$$(P^3M_1)^{256} = \begin{bmatrix} 0{,}56 & 0{,}27 & 0{,}17 & 0{,}00 \\ 0{,}56 & 0{,}27 & 0{,}17 & 0{,}00 \\ 0{,}56 & 0{,}27 & 0{,}17 & 0{,}00 \\ 0{,}56 & 0{,}27 & 0{,}17 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=3

	e*P	e*P2	e*P3	e*P3M
e1	0,35	0,40	0,43	0,56
e2	0,37	0,23	0,27	0,27
e3	0,20	0,28	0,17	0,17
e4	0,08	0,09	0,12	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp+3)**	**E(tp)**

⇧

Siendo: **E** (tp+1)=**E**(t)×**P** **E** (tp+3)=**E**(tp+2)×**P**

E (tp+2)=**E**(tp+1)×**P**

d) T_2 =4:

$$(P^4M_1)^{256} = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=4

	e*P	e*P2	e*P3	e*P4	e*P4M
e1	0,35	0,41	0,43	0,42	0,50
e2	0,34	0,24	0,28	0,29	0,29
e3	0,22	0,25	0,18	0,21	0,21
e4	0,09	0,10	0,11	0,08	0,00
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp+3)**	**E(tp+4)**	**E(tp)**

⇧

Siendo: **E** (tp+1)=**E**(t)×**P** **E** (tp+3)=**E**(tp+2)×P

E (tp+2)=**E**(tp+1)×**P** **E** (tp+4)=**E**(tp+3)×P

4º) Cálculo de los costes.

- Probabilidad Correctivo $= C_c * \sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} p_{S_1}(i)$
- Probabilidad Preventivo $= p_{S_1}(tp) - p_{S_1}(t_p + T_2)$
- Coste Correctivos $= \text{Probabilidad Correctivo} * C_c$
- Coste Preventivos $= \text{Probabilidad Preventivos} * C_p$
- Coste Esperado por periodo $= \dfrac{\text{Coste Correctivos } + \text{Coste Preventivos}}{T_2}$

Los costes para cada valor de T2 y T_3 son los presentados a continuación:

$T_3=1$

a) $T_2=1$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo =	0,33
Prob Preventivo =	0,67
Coste Correctivos =	66,00
Coste Preventivo =	33,50
Coste Esperado por Período	**99,50**

b) T_2=2:

Por ciclo:	
Prob Correctivo =	0,61
Prob Preventivo =	0,72
Coste Correctivos=	121,28
Coste Preventivo =	36,18
Coste Esperado por Período	**78,73**

c) T_2=3:

Por ciclo:	
Prob Correctivo =	1,03
Prob Preventivo =	0,57
Coste Correctivos =	206,41
Coste Preventivo =	28,72
Coste Esperado por Período	**78,38**

d) T_2=4:

Por ciclo:	
Prob Correctivo =	1,53
Prob Preventivo =	0,50
Coste Correctivos =	306,85
Coste Preventivo =	24,89
Coste Esperado por Período	**82,94**

T_3 =2

a) T_2=1:

Por ciclo:	
Prob Correctivo =	0,30
Prob Preventivo =	0,30
Coste Correctivos =	59,58
Coste Preventivo =	15,04
Coste Esperado por Período	**74,63**

b) $T_2=2$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo =	0,64
Prob Preventivo =	0,47
Coste Correctivos =	127,27
Coste Preventivo =	23,35
Coste Esperado por Período	**75,31**

c) $T_2=3$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo =	1,09
Prob Preventivo =	0,33
Coste Correctivos =	217,60
Coste Preventivo =	16,59
Coste Esperado por Período	**78,06**

d) $T_2=4$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo =	1,56
Prob Preventivo =	0,24
Coste Correctivos =	312,19
Coste Preventivo =	12,08
Coste Esperado por Período	**81,07**

$T_3=3$

a) $T_2=1$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo=	0,36
Prob Preventivo=	0,10
Coste Correctivos=	71,50
Coste Preventivo=	5,14
Coste Esperado por Período	**76,64**

b) $T_2=2$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo=	0,79
Prob Preventivo=	0,08
Coste Correctivos=	157,40
Coste Preventivo=	4,10
Coste Esperado por Período	**80,75**

c) $T_2=3$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo=	1,18
Prob Preventivo=	0,12
Coste Correctivos=	235,89
Coste Preventivo=	6,24
Coste Esperado por Período	**80,71**

d) $T_2=4$:

Por ciclo:	
Prob Correctivo=	1,62
Prob Preventivo=	0,08
Coste Correctivos=	324,71
Coste Preventivo=	3,95
Coste Esperado por Período	**82,16**

3.4.2.4. Presentación de resultados.

Los cálculos realizados con anterioridad se resumen a la perfección en el siguiente gráfico:

RESULTADOS			
COSTE MANTENIMIENTO TOTAL POR PERIODO			
T2=4	82,94	81,07	82,16
T2=3	78,38	78,06	80,71
T2=2	78,73	75,31	80,75
T2=1	99,50	74,63	76,64
	T3=1	T3=2	T3=3

Se puede observar que el mínimo CTE se produce para T_3 =2 y T_2 =1 y el máximo en T_3 =1 y T_2 =1 debido a que supondría un gasto excesivo de recursos ya que se siempre se aplicaría mantenimiento al final del periodo.

3.5. Modelo de un sistema al que se le realiza mantenimiento correctivo y preventivo cíclico en función del nº de periodos de funcionamiento sin fallo y al resultado de una inspección.

ÍNDICE

3.5.1. Descripción del modelo e hipótesis realizadas.

Las hipótesis realizadas para desarrollar este modelo son:

-El tiempo medio de realización del mantenimiento del equipo es despreciable frente al tiempo medio entre fallos del equipo.

- La calidad de funcionamiento del sistema es independiente de su tiempo operativo.

-El sistema queda como nuevo después de realizar sobre él las operaciones de mantenimiento preventivo y correctivo.

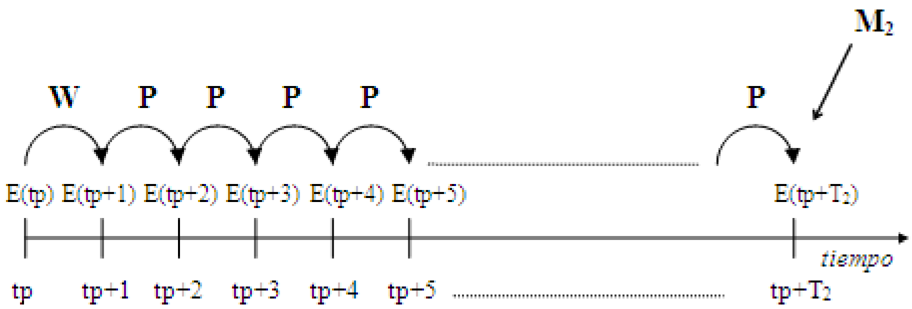
-Sólo es posible un fallo del sistema en una transición.

A continuación pasamos a describir el modelo de un sistema al que se le realiza mantenimiento correctivo y preventivo cíclico en función al nº de periodos de funcionamiento sin fallo y al resultado de una inspección.

Lo que se pretende en este modelo es mejorar la eficacia del mantenimiento a través de la realización de inspecciones periódicas que determinen si es necesario llevar a cabo el mantenimiento preventivo. Mediante dichas inspecciones se puede prever si el sistema va a fallar en un futuro cercano.

Para tener en cuenta el efecto de la inspección definimos el coste de dicha inspección como C_i.

El comportamiento en el tiempo del vector de probabilidades de estado del sistema se muestra a continuación:



donde: tp = Instante de comienzo de ciclo límite

P = Matriz de transición de estados

E( ) = Vector de probabilidades de estado

T_2 = Tiempo de ciclo de calendario

M_2 = Matriz de mantenimiento

W = Matriz de actualización

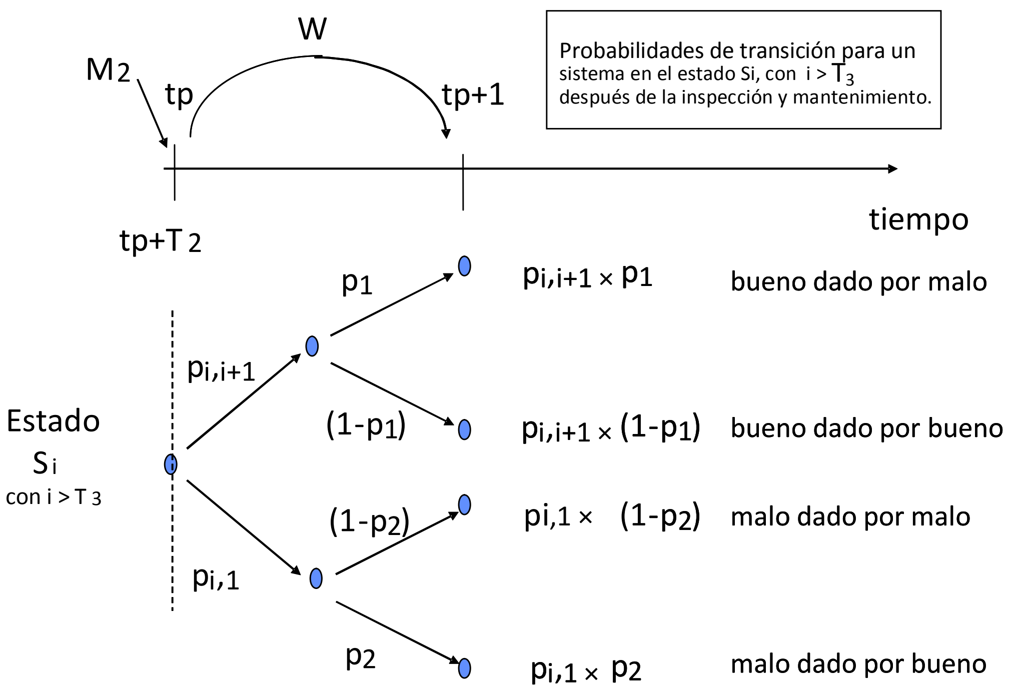
Las diferencias introducidas respecto al caso anterior son las siguientes:

1º) La matriz de mantenimiento es distinta ya que incorpora el efecto de la inspección en la evolución del sistema. Dicho efecto sólo se notará en el caso en que el sistema lleve funcionando más de T_3 intervalos de tiempo sin fallar.

$$
\mathbf{M}_2 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \phantom{m_{T_3+1,1}} & & & T_3 & T_3+1 & & \phantom{m_{T_I-1,T_I-1}} & \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
m_{T_3+1,1} & 0 & \cdots & 0 & m_{T_3+1,T_3+1} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
m_{T_I-1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & m_{T_I-1,T_I-1} & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Donde $m_{i,1}$, para $i > T_3$, representa la probabilidad de que un sistema sea mantenido una vez que se le realiza la inspección en su i-ésimo intervalo de funcionamiento sin fallo.

Actualización del sistema después del mantenimiento



Descomponiendo esta probabilidad conforme a sus propiedades bayesianas, puede obtenerse la siguiente expresión para la misma

$$m_{i,1}= p_{i,1}\times(1-p_2)+p_{i,i+1}\times p_1$$

donde p_1 es la probabilidad de que a un equipo bueno se le dé por malo en la inspección, es decir, se dictamine que fallará en el siguiente intervalo de funcionamiento y p_2 es la probabilidad de que un equipo malo se dé por bueno, es decir, se dictamine con la inspección que funcionará al menos durante un intervalo de tiempo más sin fallos, cuando realmente el equipo fallará. De la misma forma se puede calcular $m_{i,i}$, para $i>T_3$, que representará la probabilidad de que un sistema no sea mantenido una vez que se le realiza la inspección en su i-ésimo intervalo de funcionamiento sin fallo, y por lo tanto continúe en el mismo estado. Resultará en tal caso:

$$m_{i,i}= p_{i,1}\times p_2+p_{i,i+1}\times(1-p_1)$$

2º) En segundo lugar, después de efectuar la inspección el mantenimiento a realizar sería más selectivo, ya que sólo se llevaría a cabo si el sistema da señales de estar en malas condiciones. Entonces, cabe esperar que el comportamiento del sistema después del mantenimiento sea mejor que en las políticas anteriores (en el caso extremo de que la inspección fuera perfecta, $p_2=p_1=0$, el sistema dado por bueno no fallaría en el intervalo de tiempo siguiente a la misma). En general, la transición que se produce en el intervalo de tiempo siguiente a la realización del mantenimiento será distinta a la que normalmente se modela mediante la matriz **P**, pues claramente existe la posibilidad de que la inspección de por bueno a un sistema que está en malas condiciones, y que por tanto fallará en su primer intervalo de tiempo de funcionamiento. Por ello es necesaria la definición de la matriz de actualización **W** para modelar la transición después de la inspección. Esta matriz tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} \phantom{w_{T_1-1,1}} & & & T_3 & T_3+1 & & & \end{array} \\
\mathbf{W}= & \left[\begin{array}{cccc|cccc}
p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
p_{2,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \iddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\
p_{T_3,1} & 0 & \cdots & 0 & p_{T_3,T_3+1} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
w_{T_3+1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & w_{T_3+1,T_3+2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
w_{T_1-1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & w_{T_1-1,T_1} \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

Donde:

$$p_{ij} = 1 - \lambda(i) \quad \text{y} \quad p_{i1} = \lambda(i)$$

Los nuevos elementos que aparecen en esta matriz se definen de la forma siguiente:

$$W_{i,1} = \frac{p_{i,1} * p_2}{p_{i,1} * p_2 + p_{i,i+1} * (1 - p_1)}$$

que indica la probabilidad de que después de la inspección falle el sistema cuando había sido dado por bueno.

$$W_{i,i+1} = \frac{p_{i,i+1} * (1 - p_1)}{p_{i,1} * p_2 + p_{i,i+1} * (1 - p_1)}$$

que indica la probabilidad de que el sistema continúe funcionando después de la inspección.

Para determinar el coste promedio de mantenimiento por período, es necesario conocer el vector de probabilidades de estado para cada uno de los intervalos de tiempo que componen el ciclo límite. Para ello utilizaremos las siguientes expresiones:

$\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P} = \mathbf{E}(t_p)\times\mathbf{W}\times\mathbf{P}$

....

$\mathbf{E}(t_p+T_2)=\mathbf{E}(t_p+T_2-1)\times\mathbf{P}=\mathbf{E}(t_p)\times\mathbf{W}\times P^{T2-1}$

Por tanto, cuando se llega al ciclo límite deberá ocurrir entonces:

$\mathbf{E}(t_p)\times\mathbf{W}\times P^{T2-1}\times\mathbf{M_2}=\mathbf{E}(t_p)$

De tal manera que se puede obtener el valor del vector de probabilidades de estado para el primer instante del ciclo límite (tp) solucionando el siguiente sistema de ecuaciones:

$\mathbf{E}(t_p)[(\mathbf{W}\times P^{T2-1}\times\mathbf{M_2})-\mathbf{I}]=\varnothing$ siendo $\varnothing$ la matriz nula,

cumpliéndose además la restricción:

$$\sum_{i=1}^{T_1} p_{S_i}(t_p) = 1$$

3.5.2. Modelado del sistema.

3.5.2.1. Nomenclatura, ecuaciones utilizadas y discretización del tiempo.

La nomenclatura utilizada en este modelo es la siguiente:

C_c : coste de la SC.

C_p : coste de la SP.

Ci : coste de la inspección.

$p_{S1}(t)$: primera componente del vector de estado que es el número estimado de operaciones correctivas realizadas en cada intervalo de tiempo al sistema.

T_1: máximo número de intervalos de tiempo que el sistema puede estar funcionando sin que falle.

T_2: Tiempo de ciclo de calendario (ciclo de mantenimiento preventivo).

T_3: Número de intervalos de funcionamiento sin fallo (edad del equipo) por encima del cual se realizará mantenimiento preventivo al sistema.

$\mathbf{P}$: Matriz de transición de estados.

$\mathbf{M_2}$: Matriz de mantenimiento.

$\lambda(t)$: función tasa de fallos.

$\mathbf{E}(t)$: Vector de probabilidades de estado.

e_i: Componente i del vector de probabilidades de estado.

p_1: probabilidad de que a un equipo bueno se le dé por malo en la inspección.

p_2: probabilidad de que a un equipo malo se le dé por bueno en la inspección.

Se puede entonces obtener el coste promedio de la política de mantenimiento utilizada mediante las siguientes expresiones:

Coste promedio por período de mantenimiento correctivo =

$$= C_c * \frac{\sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} p_{S_1}(i)}{T_2}$$

Coste promedio por período de mantenimiento preventivo =

$$= C_p * \frac{p_{S_1}(t_p) - p_{S_1}(t_p + T_2)}{T_2}$$

Lo que es equivalente a lo siguiente:

$$C_p * \frac{\sum_{i=t_p+T_3+1}^{t_p+T_1} p_{S_i}(t_p + T_2)}{T_2}$$

en este coste no se incluye el coste de la inspección, que aunque es una actividad preventiva tiene aquí una consideración especial.

Coste medio por período de inspección =

$$= C_i * \frac{\sum_{i=t_p+T_3+1}^{t_p+T_1-1} p_{S_i}(tp + T_2)}{T_2}$$

Coste de mantenimiento promedio total por período =

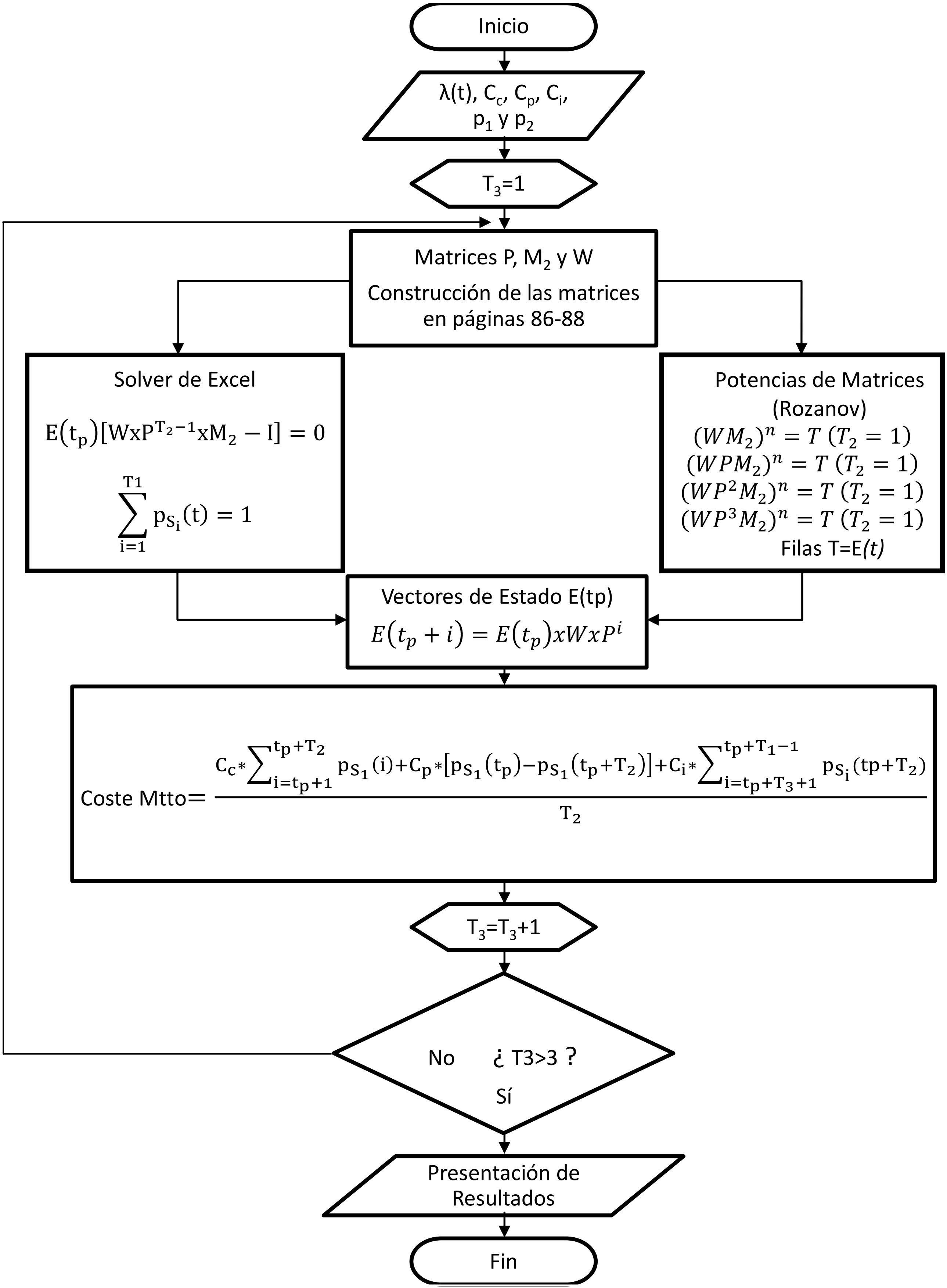
$$= \frac{C_c * \sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} p_{S_1}(i) + C_p * [p_{S_1}(t_p) - p_{S_1}(t_p + T_2)] + C_i * \sum_{i=t_p+T_3+1}^{t_p+T_1-1} p_{S_i}(tp + T_2)}{T_2}$$

Para resolver el problema es necesario encontrar los valores de T_2 y T_3 que minimicen esta expresión.

En cuanto a la discretización del tiempo, en este modelo se han tomado 5 periodos de funcionamiento distintos de manera que al final del último (T_1=5) el sistema va a fallar con probabilidad 1.

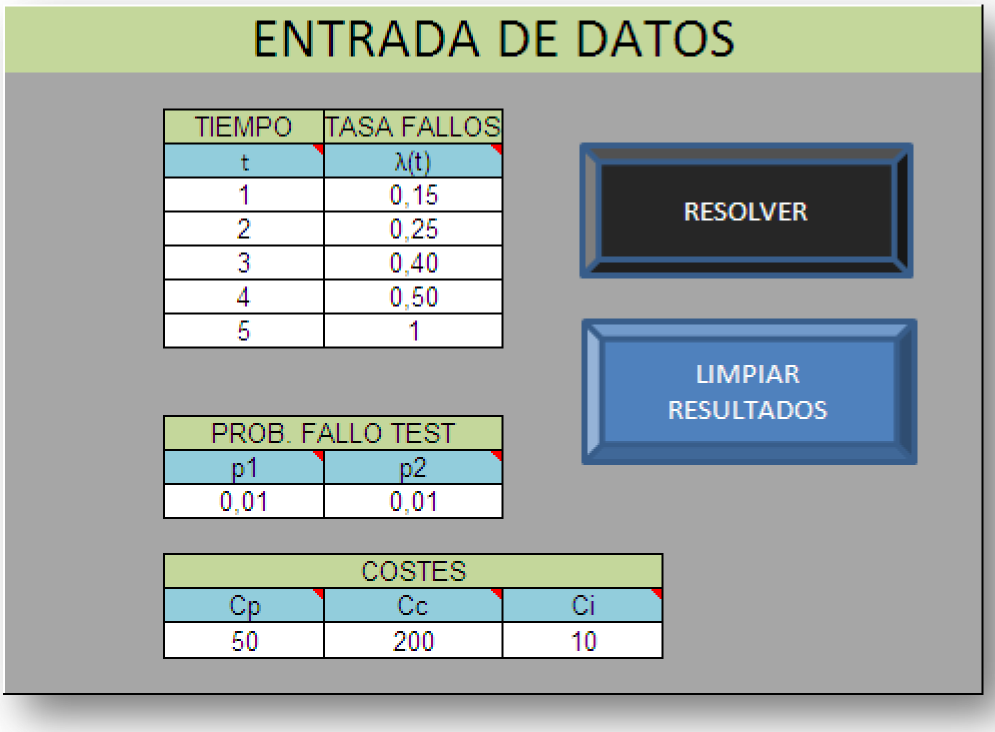
Los cálculos se van a hacer para cada valor de T_2 =1,…,4 y T_3 =1,…,3.

Una vez que ya tenemos dicha discretización pasamos a implantar el modelo en Excel siguiendo el diagrama de flujo expuesto a continuación:


Inicio
$\lambda(t)$, C_c, C_p, C_i,
p_1 y p_2
$T_3=1$
Matrices P, M_2 y W
Construcción de las matrices en páginas 86-88
Solver de Excel
$E(t_p)[WxP^{T_2-1}xM_2 - I] = 0$
$\sum_{i=1}^{T1} p_{S_i}(t) = 1$
Potencias de Matrices (Rozanov)
$(WM_2)^n = T\ (T_2 = 1)$
$(WPM_2)^n = T\ (T_2 = 1)$
$(WP^2M_2)^n = T\ (T_2 = 1)$
$(WP^3M_2)^n = T\ (T_2 = 1)$
Filas T=E(*t*)
Vectores de Estado E(tp)
$E(t_p + i) = E(t_p)xWxP^i$
Coste Mtto= $\frac{C_c * \sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} p_{S_1}(i) + C_p * [p_{S_1}(t_p) - p_{S_1}(t_p+T_2)] + C_i * \sum_{i=t_p+T_3+1}^{t_p+T_1-1} p_{S_i}(tp+T_2)}{T_2}$
$T_3=T_3+1$
No
¿ T3>3 ?
Sí
Presentación de Resultados
Fin

3.5.2.2. Introducción de datos.

Debido a que hemos discretizado el tiempo en 5 periodos de funcionamiento distintos, los datos a introducir en el modelo son los valores de la función tasa de fallos λ(t) para cada periodo, el coste Cc del mantenimiento correctivo y el coste Cp del mantenimiento preventivo. Para ello la introducción de datos se hará mediante la siguiente interfaz:



3.5.2.3. Cálculos del modelo y resolución.

El modelo, partiendo de los datos introducidos y utilizando macros de Excel, hace lo siguiente:

1º) Cálculo de la <u>matriz de transición</u> **P**.

$$
\begin{array}{rccccc c}
i = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & j \\
\mathbf{P=} & 0{,}15 & 0{,}85 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0{,}25 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 & 2 \\
 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 3 \\
 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 4 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{array}
$$

2º) Cálculo de la matriz de mantenimiento **M₂**.

$T_3 = 1$

$$M_2 = \begin{array}{c|cccc|c} i = & 1 & 2 & 3 & 4 & j \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0,255 & 0,745 & 0 & 0 & 2 \\ & 0,402 & 0 & 0,598 & 0 & 3 \\ & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 4 \end{array}$$

$T_3 = 2$

$$M_2 = \begin{array}{c|cccc|c} i = & 1 & 2 & 3 & 4 & j \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & 0,402 & 0 & 0,598 & 0 & 3 \\ & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 4 \end{array}$$

$T_3 = 3$

$$M_2 = \begin{array}{c|cccc|c} i = & 1 & 2 & 3 & 4 & j \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 4 \end{array}$$

3º) Cálculo de la matriz de actualización **W**.

$T_3 = 1$

$$W = \begin{array}{c|ccccc|c} i = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & j \\ \hline & 0,15 & 0,85 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0,003 & 0 & 0,997 & 0 & 0 & 2 \\ & 0,007 & 0 & 0 & 0,993 & 0 & 3 \\ & 0,010 & 0 & 0 & 0 & 0,990 & 4 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

$T_3 = 2$

$$W = \begin{array}{c|ccccc|c} i = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & j \\ \hline & 0,15 & 0,85 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0,250 & 0 & 0,750 & 0 & 0 & 2 \\ & 0,007 & 0 & 0 & 0,993 & 0 & 3 \\ & 0,010 & 0 & 0 & 0 & 0,990 & 4 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

$T_3 = 3$

	i = 1	2	3	4	5	j
W=	0,15	0,85	0	0	0	1
	0,250	0	0,750	0	0	2
	0,400	0	0	0,600	0	3
	0,010	0	0	0	0,990	4
	1	0	0	0	0	5

4º)

- Cálculo del vector de estado del primer punto del ciclo utilizando la demostración de Rozanov en la cual la secuencia: $P^1, P^2, P^3, \ldots\ldots, P^m, \ldots$tiende hacia la matriz **T,** cuyas filas son, cada una de ellas, el vector de probabilidades **E**(t_p) del régimen permanente. A partir de **E**(t_p) obtenemos los siguientes: **E**(t_p+1), **E**(t_p+2),… **E**(t_p+T_2).

Estos cálculos los vamos a hacer para cada valor de T_2 entre 1 y 4 y para cada valor de T_3 entre 1 y 3.

Para ello es necesario elevar la matriz **P** a una alta potencia:

$T_3 = 1$

a) $T_2 = 1$:

$$(WM)^{256} = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,29 & 0,17 & 0,09 & 0,00 \\ 0,45 & 0,29 & 0,17 & 0,09 & 0,00 \\ 0,45 & 0,29 & 0,17 & 0,09 & 0,00 \\ 0,45 & 0,29 & 0,17 & 0,09 & 0,00 \\ 0,45 & 0,29 & 0,17 & 0,09 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=1

	e*W	e*WM
e1	0,071	0,455
e2	0,387	0,288
e3	0,287	0,172
e4	0,171	0,085
e5	0,084	0,000
SUMA	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp)**

Siendo: **E**(t_p+1)=**E**(t)×**W**

b) $T_2=2$:

$$(WPM_2)^{256} = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,06 & 0,25 & 0,02 & 0,00 \\ 0,66 & 0,06 & 0,25 & 0,02 & 0,00 \\ 0,66 & 0,06 & 0,25 & 0,02 & 0,00 \\ 0,66 & 0,06 & 0,25 & 0,02 & 0,00 \\ 0,66 & 0,06 & 0,25 & 0,02 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=2

	e*W	e*WP	e*WPM
e1	0,102	0,327	0,663
e2	0,564	0,086	0,064
e3	0,064	0,423	0,253
e4	0,251	0,038	0,019
e5	0,019	0,126	0,000
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp)**

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P}$

c) $T_2=3$:

$$(WP^2M)^{256} = \begin{pmatrix} 0,61 & 0,24 & 0,04 & 0,12 & 0,00 \\ 0,61 & 0,24 & 0,04 & 0,12 & 0,00 \\ 0,61 & 0,24 & 0,04 & 0,12 & 0,00 \\ 0,61 & 0,24 & 0,04 & 0,12 & 0,00 \\ 0,61 & 0,24 & 0,04 & 0,12 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=3

	e*W	e*WP	e*WP2	E*WP2M
e1	0,094	0,372	0,320	0,612
e2	0,520	0,080	0,316	0,235
e3	0,235	0,390	0,060	0,036
e4	0,036	0,141	0,234	0,117
e5	0,116	0,018	0,070	0,000
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	E(tp+2)	E(tp+3)	E(tp)

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$ $\mathbf{E}(t_p+3)=\mathbf{E}(t_p+2)\times\mathbf{P}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P}$

d) $T_2=4$:

$$(\mathbf{WP^3M_2})^{256} = \begin{bmatrix} 0,63 & 0,23 & 0,12 & 0,02 & 0,00 \\ 0,63 & 0,23 & 0,12 & 0,02 & 0,00 \\ 0,63 & 0,23 & 0,12 & 0,02 & 0,00 \\ 0,63 & 0,23 & 0,12 & 0,02 & 0,00 \\ 0,63 & 0,23 & 0,12 & 0,02 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=4

	e*W	e*WP	e*WP2	E*WP3	E*WP3M
e1	0,097	0,318	0,358	0,335	0,634
e2	0,539	0,082	0,270	0,304	0,227
e3	0,226	0,404	0,062	0,203	0,121
e4	0,120	0,135	0,242	0,037	0,019
e5	0,018	0,060	0,068	0,121	0,000
SUMA	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	E(tp+1)	E(tp+2)	E(tp+3)	E(tp+4)	E(tp)

⇧

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$ $\mathbf{E}(t_p+3)=\mathbf{E}(t_p+2)\times\mathbf{P}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P}$ $\mathbf{E}(t_p+4)=\mathbf{E}(t_p+3)\times\mathbf{P}$

$T_3=2$

a) $T_2=1$:

$$(\mathbf{WM})^{256} = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,35 & 0,16 & 0,08 & 0,00 \\ 0,41 & 0,35 & 0,16 & 0,08 & 0,00 \\ 0,41 & 0,35 & 0,16 & 0,08 & 0,00 \\ 0,41 & 0,35 & 0,16 & 0,08 & 0,00 \\ 0,41 & 0,35 & 0,16 & 0,08 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=1

	e*W	e*WM
e1	0,152	0,413
e2	0,351	0,351
e3	0,263	0,157
e4	0,156	0,078
e5	0,077	0,000
SUMA	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp)**

⇧

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$

b) $T_2=2$:

$$(\mathbf{WPM_2})^{256}=\begin{pmatrix} 0,63 & 0,10 & 0,24 & 0,02 & 0,00 \\ 0,63 & 0,10 & 0,24 & 0,02 & 0,00 \\ 0,63 & 0,10 & 0,24 & 0,02 & 0,00 \\ 0,63 & 0,10 & 0,24 & 0,02 & 0,00 \\ 0,63 & 0,10 & 0,24 & 0,02 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=2

	e*W	e*WP	e*WPM
e1	0,123	0,327	0,632
e2	0,537	0,104	0,104
e3	0,078	0,403	0,241
e4	0,239	0,047	0,023
e5	0,023	0,120	0,000
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp)**

⇧

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P}$

c) $T_2=3$:

$$(\mathbf{WP^2M})^{256}=\begin{pmatrix} 0,53 & 0,31 & 0,06 & 0,10 & 0,00 \\ 0,53 & 0,31 & 0,06 & 0,10 & 0,00 \\ 0,53 & 0,31 & 0,06 & 0,10 & 0,00 \\ 0,53 & 0,31 & 0,06 & 0,10 & 0,00 \\ 0,53 & 0,31 & 0,06 & 0,10 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=3

	e*W	e*WP	e*WP2	E*WP2M
e1	0,158	0,359	0,322	0,533
e2	0,453	0,134	0,305	0,305
e3	0,229	0,340	0,101	0,060
e4	0,060	0,137	0,204	0,102
e5	0,101	0,030	0,069	0,000
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	E(tp+2)	E(tp+3)	E(tp)

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$ $\mathbf{E}(t_p+3)=\mathbf{E}(t_p+2)\times\mathbf{P}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P}$

d) $T_2=4$:

$$(\mathbf{WP^3M_2})^{256} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,30 & 0,12 & 0,03 & 0,00 \\ 0,55 & 0,30 & 0,12 & 0,03 & 0,00 \\ 0,55 & 0,30 & 0,12 & 0,03 & 0,00 \\ 0,55 & 0,30 & 0,12 & 0,03 & 0,00 \\ 0,55 & 0,30 & 0,12 & 0,03 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=4

	e*W	e*WP	e*WP2	E*WP3	E*WP3M
e1	0,158	0,320	0,350	0,333	0,551
e2	0,468	0,134	0,272	0,297	0,297
e3	0,223	0,351	0,101	0,204	0,122
e4	0,121	0,134	0,211	0,060	0,030
e5	0,030	0,061	0,067	0,105	0,000
SUMA	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	E(tp+1)	E(tp+2)	E(tp+3)	E(tp+4)	E(tp)

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$ $\mathbf{E}(t_p+3)=\mathbf{E}(t_p+2)\times\mathbf{P}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P}$ $\mathbf{E}(t_p+4)=\mathbf{E}(t_p+3)\times\mathbf{P}$

$T_3=3$

a) $T_2=1$:

$$(WM)^{256} = \begin{pmatrix} 0{,}37 & 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}07 & 0{,}00 \\ 0{,}37 & 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}07 & 0{,}00 \\ 0{,}37 & 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}07 & 0{,}00 \\ 0{,}37 & 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}07 & 0{,}00 \\ 0{,}37 & 0{,}32 & 0{,}24 & 0{,}07 & 0{,}00 \end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=1

	e*W	e*WM
e1	0,231	0,373
e2	0,317	0,317
e3	0,238	0,238
e4	0,143	0,071
e5	0,071	0,000
SUMA	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp)**

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$

b) $T_2=2$:

$$(WPM_2)^{256} = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 0{,}20 & 0{,}29 & 0{,}05 & 0{,}00 \\ 0{,}46 & 0{,}20 & 0{,}29 & 0{,}05 & 0{,}00 \\ 0{,}46 & 0{,}20 & 0{,}29 & 0{,}05 & 0{,}00 \\ 0{,}46 & 0{,}20 & 0{,}29 & 0{,}05 & 0{,}00 \\ 0{,}46 & 0{,}20 & 0{,}29 & 0{,}05 & 0{,}00 \end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=2

	e*W	e*WP	e*WPM
e1	0,237	0,327	0,460
e2	0,391	0,202	0,202
e3	0,151	0,293	0,293
e4	0,176	0,091	0,045
e5	0,045	0,088	0,000
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	**E(tp+2)**	**E(tp)**

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P}$

c) $T_2=3$:

$$(\mathbf{WP^2M})^{256}=\begin{pmatrix}0{,}48 & 0{,}30 & 0{,}13 & 0{,}09 & 0{,}00\\0{,}48 & 0{,}30 & 0{,}13 & 0{,}09 & 0{,}00\\0{,}48 & 0{,}30 & 0{,}13 & 0{,}09 & 0{,}00\\0{,}48 & 0{,}30 & 0{,}13 & 0{,}09 & 0{,}00\\0{,}48 & 0{,}30 & 0{,}13 & 0{,}09 & 0{,}00\end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=3

	e*W	e*WP	e*WP2	E*WP2M
e1	0,199	0,351	0,323	0,483
e2	0,410	0,169	0,299	0,299
e3	0,224	0,308	0,127	0,127
e4	0,076	0,134	0,185	0,092
e5	0,091	0,038	0,067	0,000
SUMA	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**
	E(tp+1)	E(tp+2)	E(tp+3)	E(tp)

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$ $\mathbf{E}(t_p+3)=\mathbf{E}(t_p+2)\times\mathbf{P}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P}$

d) $T_2=4$:

$$(\mathbf{WP^3M_2})^{256}=\begin{pmatrix}0{,}46 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}04 & 0{,}00\\0{,}46 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}04 & 0{,}00\\0{,}46 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}04 & 0{,}00\\0{,}46 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}04 & 0{,}00\\0{,}46 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}04 & 0{,}00\end{pmatrix}$$

Con esto, los vectores de estado quedan:

T2=4

	e*W	e*WP	e*WP2	E*WP3	E*WP3M
e1	0,224	0,323	0,341	0,330	0,462
e2	0,392	0,191	0,274	0,290	0,290
e3	0,217	0,294	0,143	0,206	0,206
e4	0,124	0,130	0,177	0,086	0,043
e5	0,042	0,062	0,065	0,088	0,000
SUMA	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	E(tp+1)	E(tp+2)	E(tp+3)	E(tp+4)	E(tp)

Siendo: $\mathbf{E}(t_p+1)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{W}$ $\quad\mathbf{E}(t_p+3)=\mathbf{E}(t_p+2)\times\mathbf{P}$

$\mathbf{E}(t_p+2)=\mathbf{E}(t_p+1)\times\mathbf{P}$ $\quad\mathbf{E}(t_p+4)=\mathbf{E}(t_p+3)\times\mathbf{P}$

- Cálculo del vector de estado del primer punto del ciclo resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente utilizando Solver de Excel:

$$\begin{cases} E(t_p)[WxP^{T_2-1}xM_2 - I] = 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{T1} p_{S_i}(t) = 1 \end{cases}$$

Resultando los mismos valores que utilizando la demostración de Rozanov.

4º) Cálculo de los costes.

- Probabilidad Correctivo $= \sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} p_{S_1}(i)$

- Probabilidad Preventivo $= p_{S_1}(tp) - p_{S_1}(t_p + T_2)$

- Probabilidad Inspección $= \sum_{i=t_p+T_3+1}^{t_p+T_1-1} p_{S_i}(tp + T_2)$

- Coste Correctivos $= \text{Probabilidad Correctivo} * C_c$

- Coste Preventivos $= \text{Probabilidad Preventivos} * C_p$

- Coste Inspección $= \text{Probabilidad Inspección} * C_i$

- Coste Esperado por periodo =

$$= \frac{\text{Coste Correctivos} + \text{Coste Preventivos} + \text{Coste Inspección}}{T_2}$$

Los costes para cada valor de T_2 y T_3 son los presentados a continuación:

$T_3=1$

a) $T_2=1$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,38
Prob Inspecciones =	0,84
Prob Correctivos =	0,07
Coste Esperado MP Cíclico =	19,19
Coste Esperado Inspecciones =	8,44
Coste Esperado Correctivos =	14,24
Coste Esperado por Período	41,87

b) $T_2=2$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,34
Prob Inspecciones =	0,88
Prob Correctivos =	0,43
Coste Esperado MP Cíclico =	16,85
Coste Esperado Inspecciones =	8,84
Coste Esperado Correctivos =	85,64
Coste Esperado por Período	55,66

c) $T_2=3$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,29
Prob Inspecciones =	1,00
Prob Correctivos =	0,79
Coste Esperado MP Cíclico =	14,60
Coste Esperado Inspecciones =	9,98
Coste Esperado Correctivos =	157,08
Coste Esperado por Período	60,55

d) $T_2=4$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,30
Prob Inspecciones =	0,91
Prob Correctivos =	1,11
Coste Esperado MP Cíclico =	14,94
Coste Esperado Inspecciones =	9,10
Coste Esperado Correctivos =	221,51
Coste Esperado por Período	61,39

$T_3=2$

a) $T_2=1$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,26
Prob Inspecciones =	0,42
Prob Correctivos =	0,15
Coste Esperado MP Cíclico =	13,08
Coste Esperado Inspecciones =	4,20
Coste Esperado Correctivos =	30,32
Coste Esperado por Período	47,59

b) $T_2=2$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,30
Prob Inspecciones =	0,71
Prob Correctivos =	0,45
Coste Esperado MP Cíclico =	15,24
Coste Esperado Inspecciones =	7,14
Coste Esperado Correctivos =	89,86
Coste Esperado por Período	56,12

c) $T_2=3$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,21
Prob Inspecciones =	0,47
Prob Correctivos =	0,84
Coste Esperado MP Cíclico =	10,55
Coste Esperado Inspecciones =	4,66
Coste Esperado Correctivos =	167,71
Coste Esperado por Período	60,97

d) $T_2=4$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,22
Prob Inspecciones =	0,42
Prob Correctivos =	1,16
Coste Esperado MP Cíclico =	10,88
Coste Esperado Inspecciones =	4,17
Coste Esperado Correctivos =	232,17
Coste Esperado por Período	61,80

$T_3=3$

a) $T_2=1$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,14
Prob Inspecciones =	0,14
Prob Correctivos =	0,23
Coste Esperado MP Cíclico =	7,10
Coste Esperado Inspecciones =	1,43
Coste Esperado Correctivos =	46,25
Coste Esperado por Período	54,78

b) $T_2=2$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos=	0,13
Prob Inspecciones =	0,14
Prob Correctivos =	0,56
Coste Esperado MP Cíclico =	6,67
Coste Esperado Inspecciones =	1,36
Coste Esperado Correctivos =	112,74
Coste Esperado por Período	60,38

c) $T_2=3$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,16
Prob Inspecciones =	0,28
Prob Correctivos =	0,87
Coste Esperado MP Cíclico =	7,97
Coste Esperado Inspecciones =	2,77
Coste Esperado Correctivos =	174,58
Coste Esperado por Período	61,78

d) $T_2=4$:

Por ciclo:	
Prob Preventivos Cíclicos =	0,13
Prob Inspecciones =	0,13
Prob Correctivos =	1,22
Coste Esperado MP Cíclico =	6,56
Coste Esperado Inspecciones =	1,29
Coste Esperado Correctivos =	243,69
Coste Esperado por Período	62,88

3.5.2.4. Presentación de resultados.

Los cálculos realizados con anterioridad se resumen a la perfección en el siguiente gráfico:

RESULTADOS			
COSTE MANTENIMIENTO TOTAL POR PERIODO			
T2=4	61,39	61,80	62,88
T2=3	60,55	60,97	61,78
T2=2	55,66	56,12	60,38
T2=1	41,87	47,59	54,78
	T3=1	T3=2	T3=3

Se puede observar que el mínimo CTE se produce para T_3 =1 y T_2 =1. Esto es debido a que al aumentar T_3 para un mismo T_2 se eleva el CTE ya que el mantenimiento preventivo se hace más tarde sobre el sistema y por tanto la probabilidad de que falle antes de dicho mantenimiento es mayor. Al aumentar T_2 también aumenta el CTE por la misma causa.

4. TABLA RESUMEN DE CADA MODELO

TABLA RESUMEN MODELO SUSTITUCIÓN TOTAL A INTERVALOS CONSTANTES

OBJETIVO
La sustitución se realiza bien al producirse el fallo (SC) o al agotarse un intervalo de tiempo de longitud constante (SP). El problema a resolver en estos modelos es determinar el intervalo de tiempo óptimo entre sustituciones preventivas, de manera que el coste total esperado por unidad de tiempo sea mínimo.
DATOS DE ENTRADA NECESARIOS
• ***F(t)*** **:** función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo • C_p **:** coste de la SP • C_c **:** coste de la SC
PRINCIPALES CÁLCULOS DEL MODELO
1º) $R(t)=1-F(t)$ 2º) $\lambda(t) = \frac{R(t-1)-R(t)}{R(t-1)}$ 3º) $N(t_p) = \int_0^{t_p} \lambda(t)$ 4º) $CTE(t_p) = \frac{C_p+C_c N(t_p)}{t_p}$
RESULTADOS DE SALIDA DEL MODELO
• Coste total esperado (CTE) • Gráfico CTE frente tiempo

TABLA RESUMEN MODELO SUSTITUCIÓN TOTAL A INTERVALOS VARIABLES EN FUNCIÓN DE LA EDAD

OBJETIVO
La sustitución preventiva (SP) se realiza cuando el equipo alcanza una determinada edad, t_p. Si el sistema falla, se realiza una SC y la siguiente SP se hace a t_p unidades de tiempo posterior. El problema consiste en calcular el t_p que minimice el coste total esperado $CTE(t_p)$.
DATOS DE ENTRADA NECESARIOS
• ***F(t)* :** función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo • **C_p :** coste de la SP • **C_c :** coste de la SC
PRINCIPALES CÁLCULOS DEL MODELO
1º) $R(t)=1-F(t)$ 2º) $\lambda(t) = \frac{R(t-1)-R(t)}{R(t-1)}$ 3º) $f(t) = F(t) - F(t-1)$ 4º) $M(t_p) = \int_{-\infty}^{t_p} \frac{t*f(t)}{F(t_p)}$ 5º) $CTE(t_p) = \frac{Cp*R(t_p)+ Cc*F(tp)}{tp*R(t_p)+M(t_p)*F(t_p)}$
RESULTADOS DE SALIDA DEL MODELO
• Coste total esperado (CTE) • Gráfico CTE frente tiempo

TABLA RESUMEN MODELO SUSTITUCIONES PREVENTIVAS PARCIALES Y REPARACIONES MÍNIMAS

OBJETIVO
La sustitución total del sistema (ST) se realiza después de (*k-1*) sustituciones preventivas parciales SPP. Para un sistema sujeto a (*i-1*) SPP con (*i<k*), se procederá a la SPP cuando se alcance la edad T_i desde la última SPP (o sustitución total en el caso *i=1*). El problema a resolver consiste en encontrar el número óptimo de intervenciones parciales *k* y las edades de estas intervenciones T_i, con *i=1…k*, que minimizan el coste total esperado.
DATOS DE ENTRADA NECESARIOS
• ***F(t)*** **:** función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo • C_{pp}**:** coste de la SPP • C_s**:** coste de la ST • C_{rm} **:** coste de la reparación mínima
PRINCIPALES CÁLCULOS DEL MODELO
1º) $R(t)=1-F(t)$ 2º) $\lambda(t) = \frac{R(t-1)-R(t)}{R(t-1)}$ 3º) $N(t_p) = \int_0^{t_p} \lambda(t)$ 4º) $CTE(k, T_1, \ldots T_k) = \frac{(k-1)*C_{pp}+C_s+C_{rm}*\sum_{i=1}^{k} N(T_i))}{\sum_{i=1}^{k} T_i}$
RESULTADOS DE SALIDA DEL MODELO
• Coste total esperado (CTE) • Gráfico CTE frente tiempo

TABLA RESUMEN MODELO SUSTITUCIONES PREVENTIVAS PARCIALES E INTERVENCIONES CORRECTIVAS

OBJETIVO
La sustitución total del sistema se realiza después de *(k-1)* sustituciones preventivas parciales (SPP). Para un sistema sujeto a *(i-1)* SPP, con i<k, se procederá a la intervención correctiva cuando llegue el próximo fallo, o se hará la SPP si el sistema alcanza la edad T_i, lo que ocurra primero. El problema a resolver consiste en determinar el número óptimo de intervenciones parciales k y las edades de estas intervenciones que minimizan el coste total esperado.
DATOS DE ENTRADA NECESARIOS
• ***F(t)*** **:** función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo • C_{pp}**:** coste de la SPP • C_s**:** coste de la ST • C_{eic} **:** coste extra de la intervención correctiva
PRINCIPALES CÁLCULOS DEL MODELO
1º) $R(t)=1-F(t)$ 2º) $\lambda(t) = \frac{R(t-1)-R(t)}{R(t-1)}$ 3º) $M(t_p) = \int_{-\infty}^{t_p} \frac{t*f(t)}{F(t_p)}$ 4º) $CTE(k, T_1, \dots T_k) = \frac{(k-1)*C_{pp}+C_s+C_{eic}*\sum_{i=1}^{k} F_i(T_i))}{\sum_{i=1}^{k}\{T_i*R(T_i)+M_i(T_i)*F_i(T_i)\}}$
RESULTADOS DE SALIDA DEL MODELO
• Coste total esperado (CTE) • Gráfico CTE frente tiempo

TABLA RESUMEN MODELO MANTENIMIENTO PREVENTIVO IMPERFECTO

OBJETIVO
Los MPIs se realizan a intervalos fijos h_k ($k = 1,2, ...,N-1$) y el sistema es sustituido en el MP número N. Si el sistema falla entre los MPIs, se realiza una reparación mínima. Al tratarse de MPI, la edad después del *k*-ésimo MPI se reduce a $b_k t$, cuando era t antes si el MP no fuera imperfecto. El problema a resolver consiste en encontrar los tamaños de los intervalos entre MPIs (h_k), y el número de MPIs ($N-1$) antes de la sustitución de manera que se minimice el coste total esperado por unidad de tiempo.
DATOS DE ENTRADA NECESARIOS
• ***F(t)* :** función de distribución de la probabilidad de tiempo hasta el fallo • **C_{mpi} :** coste del MPI • **C_s :** coste de sustitución • **C_{rm} :** coste de la reparación mínima tras el fallo
PRINCIPALES CÁLCULOS DEL MODELO
1º) $R(t)=1-F(t)$ 2º) $\lambda(t) = \frac{R(t-1)-R(t)}{R(t-1)}$ 3º) $N(0,y_1) = \int_0^{y_1} \lambda(t)$ 4º) $N(0,y_1) + N(y_1 b_1, y_2) = \int_0^{y_1} \lambda(t) + \int_{y_1 b_1}^{y_2} \lambda(t)$ 5º) $N(0,y_1) + N(y_1 b_1, y_2) + N(y_2 b_2, y_3) = \int_0^{y_1} \lambda(t) + \int_{y_1 b_1}^{y_2} \lambda(t) + \int_{y_2 b_2}^{y_3} \lambda(t)$ 6º) $CTE(y_1, \dots, y_N) = \frac{C_{rm} * \sum_{k=1}^{N} \int_{b_{k-1} y_{k-1}}^{y_k} \lambda(t)dt + (N-1) * C_{mpi} + C_s}{\sum_{k=1}^{N} h_k}$
RESULTADOS DE SALIDA DEL MODELO
• Coste total esperado (CTE) • Gráfico CTE frente tiempo

TABLA RESUMEN MODELO MARKOVIANO SÓLO MANTENIMIENTO CORRECTIVO

OBJETIVO

El objetivo de este modelo es conseguir los vectores de estado E(t) y una vez que se conoce dicho vector, se puede determinar el coste promedio por período de esta política de mantenimiento correctivo, cuando el sistema alcanza su estado límite o régimen permanente.

DATOS DE ENTRADA NECESARIOS

- **λ(t):** función tasa de fallos
- $\boldsymbol{C_c}$ **:** coste de la SC

PRINCIPALES CÁLCULOS DEL MODELO

1º) Matriz P

2ºa) Solver de Excel $\boldsymbol{E(t_p) = E(t_p)xP}$ $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} p_{S_i}(t) = 1}$

2ºb) Potencias de matrices (Rozanov) $\boldsymbol{P^n = T}$ Filas T=$E(t)$

$\Big\}$ $E(t)$

3º) Coste Mantenimiento= $\boldsymbol{p^*_{S_1}(t) * C_c}$

RESULTADOS DE SALIDA DEL MODELO

- Vector de estado $\boldsymbol{E(t_p)}$
- Coste de mantenimiento esperado por periodo

TABLA RESUMEN MODELO MARKOVIANO MANTENIMIENTO CORRECTIVO Y PREVENTIVO CÍCLICO EN EL CALENDARIO

OBJETIVO

Cada T_2 períodos de tiempo se realiza un mantenimiento preventivo independientemente de cómo se encuentre el equipo y en caso de fallo antes de que se llegue a T_2 se realiza un mantenimiento correctivo.
El objetivo del modelo es encontrar un valor de $T_2 \in [1,\infty)$, para el cual el valor del coste promedio obtenido sea óptimo.

DATOS DE ENTRADA NECESARIOS

- **λ(t):** función tasa de fallos
- C_c **:** coste de la SC
- C_p **:** coste de la SP

PRINCIPALES CÁLCULOS DEL MODELO

1º) Matrices P y M

2º) Potencias de matrices (Rozanov)

$$\left.\begin{bmatrix} (\boldsymbol{PM})^{n} = \boldsymbol{T}\ (\boldsymbol{T_2} = \mathbf{1}) \\ (\boldsymbol{P^2M})^{n} = \boldsymbol{T}\ (\boldsymbol{T_2} = \mathbf{2}) \\ (\boldsymbol{P^3M})^{n} = \boldsymbol{T}\ (\boldsymbol{T_2} = \mathbf{3}) \\ (\boldsymbol{P^4M})^{n} = \boldsymbol{T}\ (\boldsymbol{T_2} = \mathbf{4}) \\ (\boldsymbol{P^5M})^{n} = \boldsymbol{T}\ (\boldsymbol{T_2} = \mathbf{5}) \end{bmatrix}\right. \text{ Filas } T = E(t)$$

3º) Vectores de estado: $\boldsymbol{E(t_p + i) = E(t_p) x P^i}$

4º) Coste Mantenimiento $= \dfrac{\boldsymbol{C_c * \sum_{i=1}^{T_2} p_{S_1}(i) + C_p}}{\boldsymbol{T_2}}$

RESULTADOS DE SALIDA DEL MODELO

- Coste total mantenimiento esperado=Coste correctivo + Coste preventivo
- Gráfico coste total esperado frente a T_2

TABLA RESUMEN MODELO MARKOVIANO MANTENIMIENTO CORRECTIVO Y PREVENTIVO CÍCLICO EN FUNCIÓN DEL Nº DE PERIODOS DE FUNCIONAMIENTO SIN FALLO

OBJETIVO
Se realiza el mantenimiento preventivo de forma cíclica en el calendario (T_2), pero sólo si el sistema lleva funcionando sin fallo más de un determinado número de intervalos de tiempo T_3. El objetivo del modelo es encontrar los valores de T_2 y T_3 para los cuales el valor del coste promedio obtenido sea óptimo.
DATOS DE ENTRADA NECESARIOS
• **λ(t):** función tasa de fallos • $\boldsymbol{C_c}$ **:** coste de la SC • $\boldsymbol{C_p}$ **:** coste de la SP
PRINCIPALES CÁLCULOS DEL MODELO
1º) Matrices P y M_1 **2º)**Potencias de matrices (Rozanov) $\left\{\begin{matrix}(PM_1)^n = T\ (T_2 = 1)\\(P^2M_1)^n = T\ (T_2 = 2)\\(P^3M_1)^n = T\ (T_2 = 3)\\(P^4M_1)^n = T\ (T_2 = 4)\end{matrix}\right\}$ Filas $T=E(t)$ **3º)** Vectores de estado: $E(t_p+i) = E(t_p)xP^i$ **4º)** Coste Mantenimiento $= \dfrac{C_c * \sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} p_{S_1}(i) + C_p * [p_{S_1}(t_p) - p_{S_1}(t_p+T_2)]}{T_2} =$ $= \dfrac{C_c * \sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} p_{S_1}(i) + C_p * \sum_{i=t_p+T_3+1}^{t_p+T_1} p_{S_i}(t_p+T_2)}{T_2}$
RESULTADOS DE SALIDA DEL MODELO
• Gráfico coste total esperado para T_2=1,…,4 y T_3=1,…,3

TABLA RESUMEN MODELO MARKOVIANO MANTENIMIENTO CORRECTIVO Y PREVENTIVO CÍCLICO EN FUNCIÓN DEL Nº DE PERIODOS DE FUNCIONAMIENTO SIN FALLO Y DEL RESULTADO DE UNA INSPECCIÓN

OBJETIVO
Se realiza el mantenimiento preventivo de forma cíclica en el calendario (T_2), pero sólo si el sistema lleva funcionando sin fallo más de un determinado número de intervalos de tiempo T_3 y la inspección determina que el equipo está en mal estado. El objetivo del modelo es encontrar los valores de T_2 y T_3 para los cuales el valor del coste promedio obtenido sea óptimo.
DATOS DE ENTRADA NECESARIOS
• **λ(t):** función tasa de fallos • C_c **:** coste de la SC • C_p **:** coste de la SP • ***Ci*** **:** coste de la inspección • p_1**:** probabilidad de que bueno se dé por malo en la inspección • p_2**:** probabilidad de que malo se dé por bueno en la inspección
PRINCIPALES CÁLCULOS DEL MODELO
1º) Matrices P, M_2 y W **2ºa)** Solver de Excel: $\mathbf{E(t_p)[WxP^{T_2-1}xM_2 - I] = 0}$ $\quad \mathbf{\sum_{i=1}^{T1} p_{S_i}(t) = 1}$ **2ºb)**Potencias de matrices (Rozanov) $\begin{bmatrix} (WM_2)^n = T\ (T_2 = 1) \\ (WPM_2)^n = T\ (T_2 = 1) \\ (WP^2M_2)^n = T\ (T_2 = 1) \\ (WP^3M_2)^n = T\ (T_2 = 1) \end{bmatrix}$ Filas T=E(t) **3º)** Vectores de estado: $E(t_p + i) = E(t_p)xP^i$ **4º)**Coste Mantenimiento= $$\frac{C_c * \sum_{i=t_p+1}^{t_p+T_2} p_{S_1}(i) + C_p * \left[p_{S_1}(t_p) - p_{S_1}(t_p+T_2)\right] + C_i * \sum_{i=t_p+T_3+1}^{t_p+T_1-1} p_{S_i}(tp+T_2)}{T_2}$$
RESULTADOS DE SALIDA DEL MODELO
• Gráfico coste total esperado para T_2=1,…,4 y T_3=1,…,3

5. BIBLIOGRAFÍA Y FUENTES CONSULTADAS

- Ingeniería de mantenimiento: Técnicas y métodos de aplicación a la fase operativa de los equipos. Adolfo Crespo Márquez, Pedro Moreu de León y Antonio Sánchez Herguedas. AENOR ediciones. España.
- Curso Excel 2010 Avanzado. Youtube. Juan Gómez. España.
- Curso Programación del Excel con VBA. Youtube. Andrés Rojas Moncada. Colombia.