

Proyecto Fin de Carrera Ingeniería Industrial

Estudio de los efectos de las cargas de viento sobre la torre de un aerogenerador

Autor: Felipe Palero González

Tutor: Pedro Galvín Barrera

**Dep. Mecánica de los Medios Continuos y
Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016



Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Industrial

Estudio de los efectos de las cargas de viento sobre la torre de un aerogenerador

Autor:

Felipe Palero González

Tutor:

Pedro Galvín Barrera

Profesor titular

Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Proyecto Fin de Carrera: Estudio de los efectos de las cargas de viento sobre la torre de un aerogenerador

Autor: Felipe Palero González

Tutor: Pedro Galvín Barrera

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

A mi ti tutor Pedro Galvín, por toda su ayuda, paciencia e interés en todo momento
A mis padres y hermano por el cariño y la educación recibida a lo largo de todos estos años
A Laura, por todo el apoyo recibido

Resumen

El uso de aerogeneradores es el método más común de obtener energía eólica. Para poder diseñar un aerogenerador de manera eficaz es necesario realizar, como para cualquier tipo de estructura, un estudio que permita conocer su comportamiento como estructura. El principal agente que perturba dicha estructura, no es otro que el viento, el mismo viento del que está diseñado para obtener la energía.

En este proyecto se hará un recorrido a través de distintas teorías y métodos que permitirán comprender mejor el fenómeno de las cargas de viento. O lo que es lo mismo, como el viento en su paso a través de las palas del rotor genera una fuerza de empuje sobre la parte superior de la torre provocando el desplazamiento de la misma. Como se verá existen multitud de factores y elementos que intervienen en este fenómeno.

Por otro lado, otro de los objetivos es el de crear un documento que, además de servir como ayuda, pueda ser mejorado y completado por otras personas ajenas al mismo. Por ello se describe todo el proceso de forma detallada, argumentando los motivos que llevaron a tomar las decisiones durante el desarrollo.

ÍNDICE

Resumen	iii
Índice	iii
Índice de Tablas	v
Índice de Figuras	vii
1 Introducción	1
1.1 <i>Estado del arte</i>	1
1.2 <i>Objetivos del proyecto</i>	3
1.3 <i>Organización del texto</i>	3
2 Fundamentos teóricos	5
2.1 <i>Sistema de un grado de libertad</i>	5
2.2 <i>Sistema estocástico</i>	13
2.2.1 <i>Proceso estocástico</i>	13
2.2.2 <i>Conceptos básicos</i>	14
2.2.3 <i>El viento</i>	15
2.2.4 <i>Dominio del tiempo y ensamblado estadístico</i>	16
2.2.5 <i>Cruce del umbral y picos</i>	18
2.2.6 <i>Auto-Espectro</i>	19
2.3 <i>Blade element momentum</i>	25
2.3.1 <i>Teorema de la cantidad de movimiento</i>	26
2.3.2 <i>Teoría del momento cinético</i>	28
2.3.3 <i>Elemento pala</i>	29
2.3.4 <i>Método BEM</i>	32
3 Características de los elementos	35
3.1 <i>Viento</i>	35
3.1.1 <i>Condiciones nomales de viento</i>	36
3.1.2 <i>Modelos de turbulencia</i>	37
3.2 <i>Aerogenerador</i>	40
3.2.1 <i>Torre</i>	41
3.2.2 <i>Palas</i>	42
4 Resultados	47
4.1 <i>Modelo</i>	47
4.2 <i>Análisis estático</i>	48
4.2.1 <i>Resultados</i>	48
4.3 <i>Análisis modal</i>	51
4.3.1 <i>Resultados</i>	51
4.4 <i>Análisis transitorio</i>	53
4.4.1 <i>Entrada del sistema</i>	53
4.4.2 <i>Resultados</i>	56
5 Conclusiones y Desarrollos Futuros	61
5.1 <i>Conclusiones</i>	61
5.2 <i>Desarrollos futuros</i>	62
Referencias	65

Anexos	67
<i>Anexo A</i>	67
<i>Anexo B</i>	68
<i>Anexo C</i>	69
<i>Anexo D</i>	71
<i>Anexo E</i>	76
<i>Anexo F</i>	87
<i>Anexo G</i>	90
<i>Anexo H</i>	93

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1. Características de la densidad espectral.	21
Tabla 3-1. Parámetros clásicos para las clases de aerogeneradores.	37
Tabla 3-2. Parámetros espectrales de turbulencia para el modelo de Kaimal.	39
Tabla 3-3. Propiedades generales del aerogenerador.	40
Tabla 3-4. Características de la torre del aerogenerador.	41
Tabla 3-5. Características de las palas.	42
Tabla 4-1. Resultados del análisis estático.	49
Tabla 4-2. Frecuencias naturales.	52

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1. Sistema de un grado de libertad.	5
Figura 2-2. Función periódica. [10]	7
Figura 2-3. Función no periódica. [10]	8
Figura 2-4. Transformación de función no periódica en periódica. [10]	9
Figura 2-5. Respuesta en el dominio de la frecuencia, $H(f)$.	11
Figura 2-6. Respuesta simétrica de $H(f)$.	11
Figura 2-7. Aproximación mediante la transformada de Fourier	12
Figura 2-8. Comparación del método de aproximada y el método exacto.	12
Figura 2-9. Proceso estocástico con distribución de Gauss. [11]	14
Figura 2-10. Proceso estocástico en función de la altura. [11]	14
Figura 2-11. Distribución de Gauss para $\mu=0$; y $\sigma=1$; $\sigma=2$; y $\sigma=0,5$.	15
Figura 2-12. Distribución de Weibull para $\beta=1$; $\beta=2$ y $\beta=4$.	16
Figura 2-13. Estadística en el dominio del tiempo con distribución Rayleigh. [11]	16
Figura 2-14. Ensamblaje estadístico. [11]	17
Figura 2-15. Densidad espectral en función de la frecuencia.	20
Figura 2-16. Densidad espectral discretizada mediante el punto medio.	21
Figura 2-17. Componentes del ensamblaje estadístico, $x(t)$.	22
Figura 2-18. Representación de la variable $x(t)$.	23
Figura 2-19. Componentes de la variable estocástica, $x(t)$.	24
Figura 2-20. Valor de la variable estocástica, $X(t)$.	25
Figura 2-21. Tubo de aire a través del rotor. [12]	26
Figura 2-22. Estela de aire a través del rotor.	26
Figura 2-23. Salto de velocidad y presión a lo largo de la estela.	27
Figura 2-24. Giro del aire al atravesar el rotor. [12]	28
Figura 2-25. Teoría del elemento pala. [12]	29
Figura 2-26. Sección del elemento pala. [12]	30
Figura 2-27. Teoría aerodinámica. [12]	31
Figura 3-1. Modelo de Kaimal (naranja) y Mann para $\nu=3,9$ (azul).	40
Figura 3-2. Tipos de sección de la pala.	43
Figura 3-3. Modelización de la pala. [15]	44
Figura 3-4. Modelización de la pala 2. [15]	44
Figura 3-5. Coeficientes de sustentación (azul) y resistencia (rojo) en función del ángulo de ataque.	45
Figura 3-6. Fuerza ejercida por el viento en función de la velocidad.	46

Figura 4-1. Modelo simplificado del aerogenerador.	47
Figura 4-2. Modelo del aerogenerador.	48
Figura 4-3. Deformación de la torre.	49
Figura 4-4. Axil.	50
Figura 4-5. Cortantes y momentos flectores.	51
Figura 4-6. Modos de vibración.	52
Figura 4-7. Velocidad del viento.	54
Figura 4-8. Fuerza ejercida por el viento.	55
Figura 4-9. Dominio de la frecuencia del vector fuerza.	55
Figura 4-10. Desplazamiento de la góndola.	56
Figura 4-11. Comparación del análisis transitorio y estático.	56
Figura 4-12. Dominio de la frecuencia del desplazamiento	57
Figura 4-13. Velocidad y desplazamiento para $V = 5$ m/s.	58
Figura 4-14. Velocidad y desplazamiento para $V = 10$ m/s.	58
Figura 4-15. Velocidad y desplazamiento para $V = 15$ m/s.	58
Figura 4-16. Velocidad y desplazamiento para $V = 20$ m/s.	58
Figura 4-17. Velocidad y desplazamiento para $V = 25$ m/s.	59

1 INTRODUCCIÓN

La energía se ha convertido en un bien fundamental en el desarrollo económico y social de cualquier sociedad en los últimos siglos. Por ello el estudio de su obtención siempre ha sido de gran importancia. El objetivo era obtener la mayor cantidad de energía con el menor costo posible. Pero en las últimas décadas ha surgido otro factor clave en la obtención de energías y no es otro que el de *energías renovables*. El abuso de las fuentes de energía clásicas, como por ejemplo los combustibles fósiles, está provocando que se agoten debido al largo tiempo que es necesario para que se generen. Además, otro factor que ha provocado un aumento del interés por las energías renovables es la conciencia por el medioambiente y la gran contaminación que producen ciertas energías no renovables. Por todo esto el estudio de las fuentes de energía renovables está adquiriendo cada vez más importancia con el paso de los años. Una de estas energías renovables es la que produce el viento, la energía eólica. La energía eólica es la primera fuente de energía renovable en Europa [1]. Además, España es el segundo país en potencia instalada en Europa y el quinto del Mundo [2].

El método más común para la obtención de energía del viento es el uso de turbinas eólicas. Se trata de un sistema por el cual la fuerza del viento hace girar las palas del rotor, que a través de un generador producirá la energía eléctrica. Realmente, este sistema, que parece tan simple, está formado por subsistemas que trabajan de forma conjunta. Cada turbina debe adaptarse al emplazamiento teniendo presentes las características topográficas y meteorológicas del lugar. Por este motivo, el diseño de turbinas de eje horizontal tiene en cuenta multitud de aspectos que deben ser estudiados con tal de encontrar el modelo óptimo en precio y funcionamiento. El diseño multidisciplinar integra aerodinámica, mecánica, estudio de materiales y control. El objetivo de este estudio previo no es otro que el de maximizar la extracción de energía, reduciendo los costes y maximizando la vida del sistema.

En este contexto, el estudio aerodinámico juega un papel fundamental estimando la producción energética anual. El conocimiento de las cargas aerodinámicas y su interacción con las fuerzas dinámicas del sistema proporciona la información necesaria para predecir los costes de los componentes del aparato. Así como en cualquier estructura que se quiera realizar, es necesario conocer el comportamiento de la misma, para poder determinar de este modo el correcto uso de la misma. A este análisis, se le conoce como análisis estructural. Este tipo de análisis permite conocer todos los aspectos tanto en materia de esfuerzos internos: axiles, cortantes, flexores y torsores como en materia de desplazamientos: ya sean desplazamientos o giros. De este modo se conoce el comportamiento de la estructura.

Pero para conocer el efecto que el viento produce sobre la estructura de un aerogenerador es necesario realizar varios pasos previos. Todo este proceso puede ser dividido en tres grandes partes. Una primera parte será el estudio del viento y el tratamiento que se le dará al mismo. De este modo se puede conocer la evolución de la velocidad del viento a lo largo del tiempo. Otra parte, que permitirá conocer la interacción que se produce entre el viento y las palas del aerogenerador o, lo que es lo mismo, conocer la fuerza que el viento ejerce en su paso por el rotor. Y, por último, conocer el desplazamiento y los esfuerzos internos que se provocan en la estructura a causa de esta fuerza.

1.1 Estado del arte

En los últimos tiempos se utilizan distintos programas para el cálculo estructural debido a la gran velocidad de los mismos para obtener resultados. La mayor parte de ellos hacen uso del *Método de Elementos Finitos* (MEF), un método numérico que permite resolver estructuras incluso con geometrías complicadas aproximando éstas a geometrías más simples que siguen manteniendo las mismas características mecánicas que las originales. A esta aproximación se le conoce como *modelo* y es la parte fundamental del método, ya que de su correcta aplicación dependerá la mayor, o menor, similitud de los resultados obtenidos con los del problema real, o lo que es lo

mismo, la solución obtenida mediante el MEF es, tanto más buena cuanto mejor sea el modelo. En este aspecto, en este proyecto se usará la plataforma de ANSYS para poder realizar los cálculos oportunos.

Pero, además, otro aspecto de gran importancia es el estudio del viento. Para ello, se hará uso de la norma UNE-EN 61400-1:2006 *Aerogeneradores Parte 1: Requisitos de diseño* [3]. Esta norma es la versión oficial, en español, de la Norma Europea EN 61400-1:2005, que a su vez adopta la Norma Internacional IEC 61400-1:2005. También se ha tenido en cuenta la primera modificación de la misma UNE-EN 61400-1:2006/A1:2011 que complementa y modifica la anterior.

Según la normativa, el viento debe ser tenido en cuenta como un proceso estocástico. La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a unas leyes no determinísticas, esto es, de carácter aleatorio. Debe utilizarse un modelo reconocido para la coherencia, definida como la magnitud del espectro cruzado dividido por el auto-espectro para las componentes de la velocidad longitudinal (según la dirección de la velocidad media del viento) en puntos separados espacialmente en un plano normal a la dirección longitudinal. Además, la norma presenta dos modelos de turbulencia para el cálculo de las cargas de diseño. Las fluctuaciones de la velocidad turbulenta se simulan como un campo aleatorio estacionario cuyas componentes siguen una estadística Gaussiana de media cero. Estos modelos serán el *modelo de coherencia espectral y exponencial de Kaimal* [4] y el *modelo de cizallamiento uniforme de Mann* [5]. Uno de los principales cambios de esta norma con respecto a su versión anterior (UNE-EN 61400-2005, [6]) es la sustitución de este último modelo por el *modelo isotrópico de Von Karman* [7]. La diferencia entre ambos es que el modelo de Mann define un tensor espectral de velocidad tridimensional. Mientras que este modelo es más complejo que el modelo isotrópico de von Karman, contiene solamente un parámetro adicional, el parámetro de distorsión de cizallamiento, γ . Cuando este parámetro es cero, se recupera el modelo isotrópico. Según aumenta este parámetro, se incrementan las varianzas de las componentes de la velocidad longitudinal y lateral (horizontal y normal a la dirección longitudinal) mientras que disminuye la varianza de la componente de velocidad ascendente (normal a ambas direcciones longitudinal y lateral).

Pero para conocer el efecto que el viento provoca sobre la estructura del aerogenerador, debe conocerse la interacción entre ambos, el viento, y la estructura. O sea, calcular la fuerza que el viento ejerce sobre la parte superior de la torre (la góndola) en su paso a través del rotor del aerogenerador. Existen distintos métodos para describir este fenómeno. La gran mayoría de éstos utilizan la teoría *blade element momentum* (o por sus siglas, BEM) como modelo principal de cálculo, ya que aúna varios teoremas fundamentales de la física, como son la *teoría de la cantidad de movimiento*, la *teoría del momento cinético*, y la *teoría del elemento pala*. Además, este método requiere poco tiempo de cálculo. El uso de esta teoría posibilita la obtención de resultados bastante buenos en ciertas condiciones, mientras que en otras los resultados difieren de la realidad. Esto es debido a que durante la obtención de las ecuaciones se realizan multitud de simplificaciones que han de ser subsanadas con métodos correctivos.

Aun así, existen métodos más complejos que permiten describir el flujo tridimensional de manera más aproximada a la realidad. Algunos de estos métodos utilizan la *teoría del vórtice (vortex theory)* la cual establece un flujo potencial (según el cual el campo de velocidades del fluido es igual al gradiente de una función potencial que determina el movimiento de dicho fluido), para fluidos no viscosos y flujo no rotacional [8]. En los métodos que usan esta teoría la geometría de la estela (que describe del movimiento a lo largo del rotor) queda definida de manera libre (*free wake*) o bien, se impone dicha geometría (*prescribed wake*). La imposición de la geometría requiere menos tiempo de cálculo, pero requiere la obtención de medidas experimentales para su definición. Algunos de los métodos que utilizan esta teoría son el *método de paneles* o *teoría de la superficie sustentadora*. Según estos métodos, la estela y las palas vienen representadas mediante un conjunto de singularidades. Estas singularidades pueden ser un vórtice; un torbellino, una fuente; un doblete; o la combinación de ambos [9].

Finalmente, el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes permite el conocimiento completo de las fuerzas aerodinámicas en todos los casos de operación. La resolución de las ecuaciones se realiza por análisis numérico (CFD, Computational Fluid Dynamics) mediante la discretización de las ecuaciones en un dominio espacio-temporal. Sin embargo, el tiempo de ejecución es mucho mayor por lo que su uso se ha visto reducido a estudios muy concretos, convirtiéndolo en un método solo usado para el estudio de modelos avanzados.

1.2 Objetivos del proyecto

El objetivo de este proyecto consiste en el estudio de las cargas de viento sobre un aerogenerador. Pero para conocer cómo actúan estas cargas se requiere un largo estudio a través de todos los componentes que intervienen en dicho proceso.

Lo primero será conocer cómo se resuelve el sistema de un grado de libertad. Estos sistemas son los más simples en tener en cuenta rigidez, amortiguamiento y masa. Conocer la respuesta de este sistema a una entrada cualquiera, permitirá extrapolar esta solución a sistemas más complejos con N grados de libertad.

Por otro lado, será necesario estudiar cómo se resuelven los sistemas estocásticos. Esto permitirá conocer la distribución de la velocidad del viento a lo largo del tiempo. Esta será la velocidad que empujará el rotor en su paso a través del mismo.

Además, se pretende resolver el problema de conocer la fuerza que el viento ejerce efectivamente. Para ello se explicará un método de cálculo y se propondrá un modelo de resolución.

Todo esto, permitirá crear un modelo simplificado que aune todos los apartados anteriormente mencionados. La creación de este modelo permitirá resolver la totalidad del problema de las cargas de viento: conocida la velocidad media del viento, calcular el desplazamiento creado por el mismo en cada instante de tiempo.

Por último, se realizará un análisis con los datos finales, lo que permitirá obtener ciertas conclusiones del problema de las cargas de viento sobre la torre del aerogenerador.

1.3 Organización del texto

El proyecto se ha organizado como se indica a continuación. El capítulo 2 presenta los fundamentos teóricos de los que se hará uso a lo largo de todo el proyecto. En una primera parte se explicará cómo obtener la respuesta a un sistema de un grado de libertad; una segunda, donde se recogerán los fundamentos de un proceso estocástico; y una tercera parte donde se expondrá toda la teoría referente al método BEM. En el capítulo 3 se expondrá todas las características de los elementos de los que está compuesto el sistema. A grandes rasgos, se detallará el modelo de aerogenerador del que se hará uso para obtener los resultados; y el método por el cual se discretizará el viento. Los resultados obtenidos al realizar varios ensayos serán recogidos en el capítulo 4. Y, por último, se expondrán las conclusiones y desarrollos futuros que se podrán desarrollar en este ámbito.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En este capítulo se expondrán los principales fundamentos de los que se hará uso a lo largo del proyecto. Estos fundamentos ayudarán a comprender el problema que se presenta para poder, a su vez, entender como se ha de resolver. A grandes rasgos, se puede dividir este capítulo en tres grandes partes.

La primera, en la cual se verá cómo resolver el sistema más simple, el sistema de un grado de libertad. Conocido el método de resolución de este problema, éste puede ser extendido para casos más generales. En particular, la extensión de este método permitirá conocer el desplazamiento de la góndola en función de la fuerza que el viento ejerce sobre el mismo.

La segunda, en la que se explicará lo que es un proceso estocástico, y como resolverlo. El término estocástico, hace referencia a magnitudes aleatorias que varían con el tiempo. Según la Norma [3] la velocidad del viento deberá ser tenida en cuenta como variable estocástica.

La tercera y última parte tratará de explicar cómo, una vez obtenidas las características del viento, se pueden calcular las fuerzas que éste ejerce sobre el aerogenerador a través del empuje que realiza sobre las palas.

2.1 Sistema de un grado de libertad

Los sistemas de un grado de libertad (o SDOF, del inglés *Single Degree Of Freedom*) son de gran importancia en el estudio de la respuesta de un sistema ya que permiten reproducir de manera muy aproximada sistemas más complejos, siendo éste, el más simple en incluir amortiguamiento y masa. En la imagen a continuación se muestra, de manera ilustrativa, un sistema de un grado de libertad.

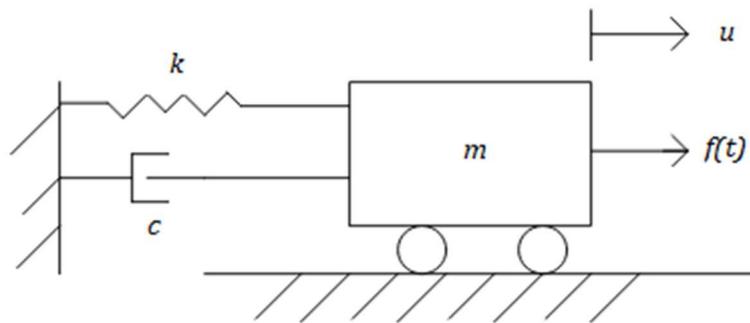


Figura 2-1. Sistema de un grado de libertad.

La ecuación que describe el movimiento de dicho sistema incluye la constante elástica k , el amortiguamiento c , la masa del sistema m , en función de la fuerza $f(t)$ que sería la entrada del sistema.

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = f(t) \quad (2-1)$$

En la ecuación (2-1), $u(t)$ es el desplazamiento en cada instante de tiempo, t , de la masa, m , desde la posición de equilibrio. Los puntos sobre el desplazamiento indican el grado de la derivada de la variable en el tiempo, representando la velocidad $\dot{u}(t) = dx/dt$ y la aceleración $\ddot{u}(t) = d^2x/dt^2$ respectivamente.

Introduciendo el *factor de amortiguamiento*, $\zeta = c/(2\sqrt{km})$, y la *frecuencia natural* del sistema, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, la ecuación (2-1) puede describirse como:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (2-2)$$

La solución de esta ecuación diferencial depende de la excitación del sistema $f(t)$ y del tipo que ésta sea, pero lo más interesante es conocer la solución para una entrada arbitraria y no periódica.

Para resolver la ecuación diferencial (2-2), la solución suele dividirse en dos partes, una homogénea, que será la solución a excitación nula, $f(t) = 0$, y la solución particular, para la excitación que existe efectivamente.

La solución de la homogénea deberá satisfacer:

$$m \ddot{u}_H(t) + c \dot{u}_H(t) + k u_H(t) = 0 \quad (2-3)$$

La solución homogénea será la respuesta a la vibración libre y puede expresarse como (Clough & Penzien [10])

$$u_H(t) = G e^{st} \quad (2-4)$$

donde G será una constante y e^{st} la función exponencial. Sustituyendo ésta ecuación en la ecuación (2-3) se obtiene:

$$(m s^2 + c s + k) \cdot G e^{st} = 0 \quad (2-5)$$

Y resolviendo se obtiene:

$$s^2 + \frac{c}{m} s + \omega_0^2 = 0 \quad (2-6)$$

donde se ha añadido la frecuencia natural del sistema. Una vez despejada la variable s y sustituida nuevamente en la ecuación (2-4) se obtiene que la solución del problema homogéneo es: [10]

$$u_H(t) = [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] e^{-i\omega_0 t} \quad (2-7)$$

Las constantes A y B dependerán de las condiciones iniciales del sistema $u(0)$ y $\dot{u}(0)$. Esta solución es válida para *sistemas subamortiguados*. Se ha añadido también la *frecuencia de amortiguamiento del sistema*, ω_D , definida como:

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2-8)$$

En cuanto a la solución particular, dependerá en gran medida del tipo de función que sea la entrada, $f(t)$, al sistema.

En el caso en el que la entrada sea una **función armónica** de frecuencia $\bar{\omega}$, por ejemplo:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t) \quad (2-9)$$

La solución particular del sistema será del tipo: [10]

$$u_p(t) = G_1 \cos(\bar{\omega} t) + G_2 \sin(\bar{\omega} t) \quad (2-10)$$

En este caso las constantes G_1 y G_2 dependerán de las características del sistema

$$G_1 = \frac{P_0}{k} \left[\frac{-2\zeta\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right] \quad (2-11)$$

$$G_2 = \frac{P_0}{k} \left[\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right] \quad (2-12)$$

donde se ha hecho uso de la relación entre frecuencias $\beta = \bar{\omega}/\omega_0$.

También, de manera más general podría escribirse la solución como

$$u_p(t) = G e^{i\bar{\omega}t} \quad (2-13)$$

$$G = \frac{P_0}{k} \left[\frac{1}{(1 - \beta^2) + i(2\zeta\beta)} \right] \quad (2-14)$$

En el caso en el que la entrada sea una **función periódica**, ésta siempre podrá ser escrita de la siguiente manera:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\bar{\omega}_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\bar{\omega}_n t) \quad (2-15)$$

Lo que significa que siempre podrá ser definida como la suma de n ecuaciones armónicas. Además, podrá definirse un periodo general de la función periódica, T_p . La imagen típica de una función periódica sería:

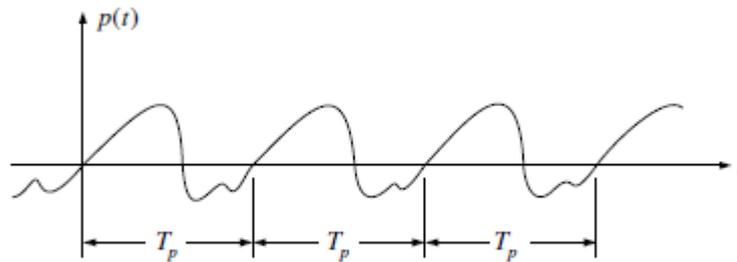


Figura 2-2. Función periódica. [10]

donde

$$\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1 = n \frac{2\pi}{T_p} \quad (2-16)$$

Y las amplitudes armónicas podrán ser evaluadas usando las siguientes expresiones [10]

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt \quad (2-17)$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos(\bar{\omega}_n t) dt \quad (2-18)$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin(\bar{\omega}_n t) dt \quad (2-19)$$

La ecuación (2-15) puede ser escrita también en su forma exponencial, usando la *fórmula de Euler*.

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (2-20)$$

En este caso las amplitudes serán:

$$P_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) e^{-i\bar{\omega}_n t} dt \quad (2-21)$$

o en el caso de escribirlo en modo discreto:

$$P_n = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} p(t_m) e^{-i\frac{2\pi n m}{N}} \quad (2-22)$$

donde T_p ha sido dividido en N partes de iguales Δt , ($T_p = N \cdot \Delta t$) y, a su vez, se ha aplicado el cambio de variable de la variable continua t por la variable discreta t_m que la discretiza en m partes iguales Δt ($t = t_m = m \cdot \Delta t$).

De este modo, la solución de la n -ésima función armónica (dentro de la función periódica) será (teniendo en cuenta (2-13) y (2-14)):

$$u_n(t) = H_n P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (2-23)$$

$$H_n = \frac{P_0}{k} \left[\frac{1}{(1 - \beta_n^2) + i(2\zeta\beta_n)} \right] \quad (2-24)$$

Y la solución particular de la función periódica:

$$u_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (2-25)$$

En el caso en el que se disponga de una **función no periódica**, siempre se puede aproximar ésta a una función periódica como se verá a continuación.

Supóngase una función como la que aparece en la Figura 2-3

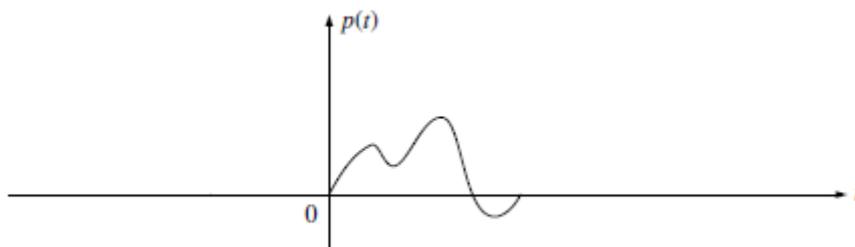


Figura 2-3. Función no periódica. [10]

Esta función, si bien es no periódica, podría transformarse en una función periódica de periodo T_p .

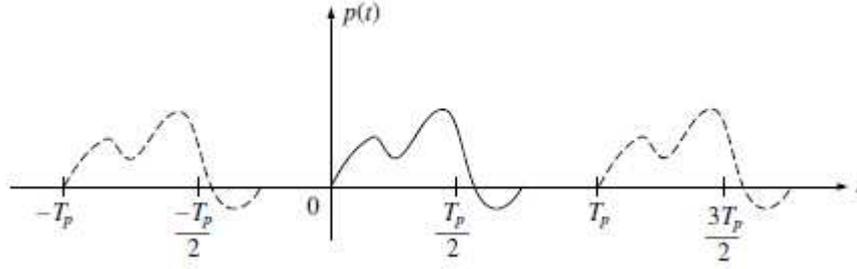


Figura 2-4. Transformación de función no periódica en periódica. [10]

Es fácil ver que si en esta función periódica, el periodo es $T_p \rightarrow \infty$ la función se convierte en la función original, no periódica. Al igual que en el caso de una función periódica se tendrá, ecuación (2-16)

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\bar{\omega}_1}{2\pi} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \quad (2-26)$$

$$\bar{\omega}_n = n\Delta\bar{\omega} = n\bar{\omega}_1 \quad (2-27)$$

Y de la ecuación (2-21)

$$P_n T_p \equiv P(i\bar{\omega}_n) \quad (2-28)$$

Con lo cual se tiene:

$$p(t) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} P(i\bar{\omega}_n) e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (2-29)$$

$$P(i\bar{\omega}_n) = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} p(t) e^{-i\bar{\omega}_n t} dt \quad (2-30)$$

Si el periodo tiende a infinito $T_p \rightarrow \infty$, es simple ver que la variación de frecuencia se hará infinitesimal, $\Delta\bar{\omega} \rightarrow d\bar{\omega}$, y que la discretización de la frecuencia se convertirá en una función continua, $\bar{\omega}_n \rightarrow \bar{\omega}$. Con lo cual, las ecuaciones (2-29) y (2-30) serán rescritas como:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(i\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega} \quad (2-31)$$

$$P(i\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\bar{\omega} t} dt \quad (2-32)$$

Y, finalmente, aplicando lo mismo a la ecuación (2-25):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(i\bar{\omega}) P(i\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega} \quad (2-33)$$

$$H(i\bar{\omega}) = \frac{P_0}{k} \left[\frac{1}{(1 - \beta^2) + i(2\zeta\beta)} \right] \quad (2-34)$$

Y esta será la solución del sistema de un grado de libertad para cualquier excitación.

Ejemplo 2-1. En este ejemplo se va a resolver un sistema de un grado de libertad usando la *transformada rápida de Fourier* (FTT) y a comparar los resultados con la solución exacta para poder validar lo visto anteriormente.

Para ello se va a resolver el caso más simple, y es aquel en el que la fuerza aplicada será un impulso de valor unidad, $1 N$. Se escoge este impulso, ya que la transformada de Fourier de un impulso, es la misma unidad. Con lo cual:

$$p(t) = \delta(t) \quad (2-35)$$

donde

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (2-36)$$

De este modo, al resolver la ecuación se tendría:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = \delta(t) \quad (2-37)$$

La solución de esta ecuación para los casos subamortiguados, $|\zeta| < 1$, será del tipo:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A \cos(\omega_d t) + B \text{sen}(\omega_d t)) \quad (2-38)$$

donde $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la frecuencia de resonancia del sistema amortiguado. A y B son dos constantes cuyo valor dependerá de las condiciones iniciales que se impongan al sistema. Para simplificar aún más el ejemplo se establecerá como condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u(t=0) = 0 \\ \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} = m^{-1} \end{cases} \quad (2-39)$$

De este modo, la solución exacta del sistema será:

$$u(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\omega_d m} \sin(\omega_d t) \quad (2-40)$$

Para representar la respuesta del sistema se debe, además, elegir las constantes que lo diferenciarán de otro sistema:

$$\begin{cases} k = 10 \text{ N/m} \\ m = 1 \text{ kg} \\ \zeta = 5 \% \end{cases} \quad (2-41)$$

Llegados a este punto, se verá cómo obtener la solución mediante la FFT. En la Figura 2-5 se muestra el valor de $H(f)$ resolviendo la ecuación (2-34). Se ha preferido trabajar con la frecuencia en Hz, aplicando el cambio de variable: $\omega = 2\pi f$.

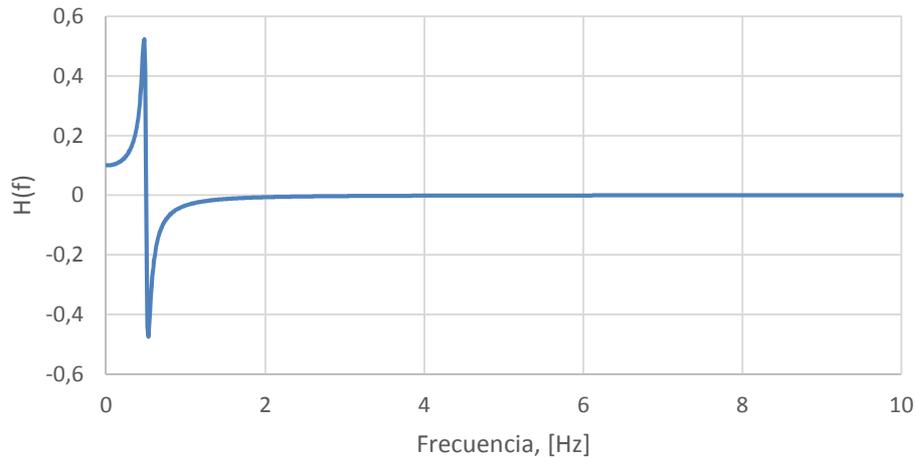


Figura 2-5. Respuesta en el dominio de la frecuencia, $H(f)$.

En esta gráfica se puede observar la frecuencia natural del sistema donde la función tiene un pico, $f \approx 0,5$ Hz.

Una vez representado el tramo que interesa, se debe tener cuenta que la *transformada de Fourier* da como resultado una función simétrica con respecto a $f_s/2$, siendo f_s la *frecuencia de Nyquist* calculada como:

$$f_s = \frac{1}{\Delta T} \quad (2-42)$$

donde ΔT representa el paso de tiempo que se desea obtener en la función final $u(t)$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, la *transformada inversa de Fourier* (que permitirá calcular $u(t)$ conocida $H(\omega)$) deberá realizarse sobre una función simétrica. Aplicando esto se obtiene:

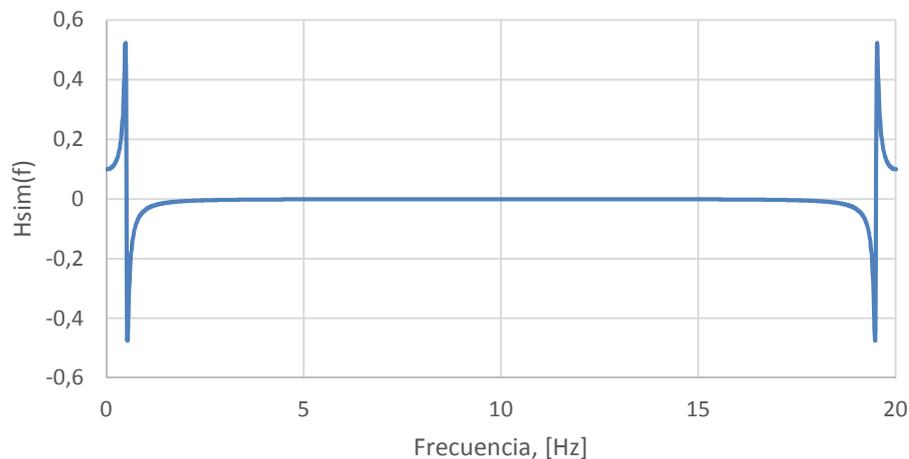


Figura 2-6. Respuesta simétrica de $H(f)$.

Hay que tener en cuenta que a la hora de realizar la simetría de la función $H(f)$ el punto final de dicha función será $f_s/2$.

Y una vez calculada la función simétrica, $H_{sim}(f)$, basta realizar la *transformada inversa de Fourier*, para obtener el desplazamiento, u , en función del tiempo, t ; $u(t)$.

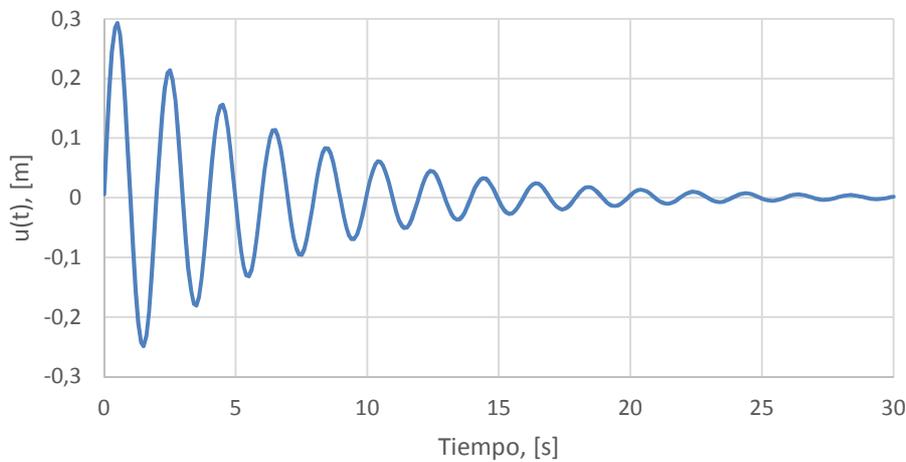


Figura 2-7. Aproximación mediante la transformada de Fourier

Una vez obtenido éste resultado, basta compararlo con la solución exacta, ecuación (2-40) para comprobar la validez de este método.

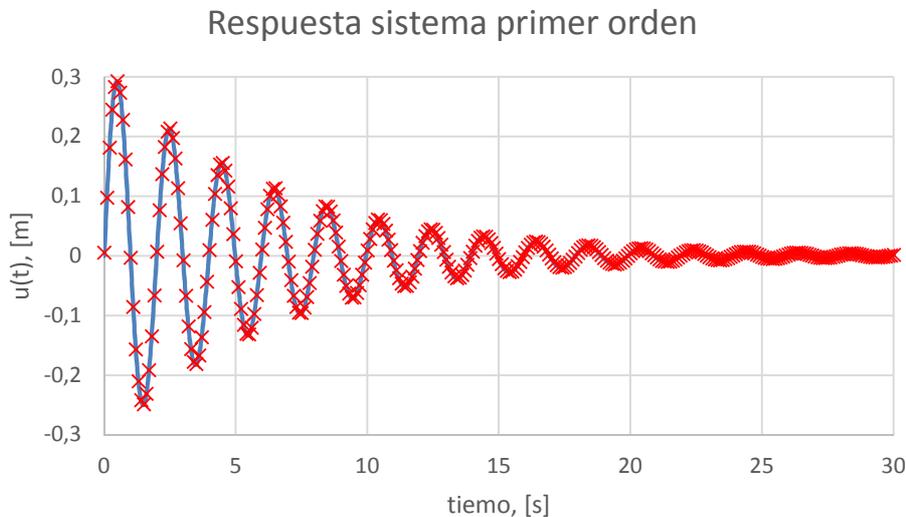


Figura 2-8. Comparación del método de aproximada y el método exacto.

En esta gráfica se observa en línea continua y azul la solución exacta al sistema de primer orden y con cruces rojas la solución obtenida trabajando en el dominio de la frecuencia a partir de la transformada inversa de Fourier. Se ve claramente como la aproximación mediante la FFT es del todo válida y, por tanto, es válido este método de resolución. En el Anexo A se adjunta el código que se ha utilizado para resolver un SDOF usando la FFT.

Para terminar este apartado se dirá, como se dijo al principio, que el sistema de un grado de libertad es el sistema más simple para describir el movimiento incluyendo la rigidez, la amortiguación y la masa. A partir de él se pueden generalizar cualquier tipo de movimiento, incluso de mecanismos mucho más complejos, por ejemplo, el movimiento de la torre de un generador provocado por la fuerza del viento. Obviamente, al tratarse de mecanismos más complejos, los cálculos necesarios requieren mucho más tiempo, por ello, hoy en día se utilizan programas que agilizan dichos cálculos. Esto viene explicado de manera mucho más extensa en su apartado correspondiente, el capítulo 4. Pese a todo ello, la teoría para resolver cualquier tipo de problema radica en la expuesta en este primer capítulo.

2.2 Sistema estocástico

En ingeniería el viento es representado mediante un vector de tres componentes ortogonales según la dirección del mismo: U , en la dirección principal a lo largo del viento longitudinal; v , en la dirección transversal a la dirección principal; y w , en la dirección vertical. A su vez, la componente principal del viento, U , es dividida en dos: la velocidad media, V , cuyo valor variará solo con la altura; y una componente oscilatoria, u . Las variables u , v y w representan la turbulencia atmosférica. La turbulencia atmosférica es una agitación de la atmósfera, que se aprecia en una capa, próxima al suelo y de espesor variable; se caracteriza por un cambio repentino de dirección e intensidad del viento en una corta distancia en sentido vertical. La turbulencia, entonces, puede considerarse como una fluctuación aleatoria sobrepuesta a los valores medios de una magnitud termodinámica medida en la atmósfera. Con lo cual la turbulencia es un proceso estocástico.

2.2.1 Proceso estocástico

Un proceso es llamado estocástico cuando describe a lo largo del tiempo, o del espacio, un sistema cuya evolución es no determinista, o lo que es lo mismo, aleatoria. De este modo, lo único que se podrá conocer es su probabilidad.

La forma habitual de describir la evolución del sistema es mediante sucesiones o colecciones de variables aleatorias. De esta manera, se puede estudiar cómo evoluciona una variable aleatoria a lo largo del tiempo. Por tanto, para cada instante t se tendrá una variable aleatoria distinta representada por X_t , cuya distribución de probabilidad podrá, o no, estar relacionada con la de las demás variables. En otras palabras, la variable aleatoria dependerá del fenómeno probabilístico y del tiempo.

Teniendo en cuenta esto último y lo dicho anteriormente, es fácil ver que el viento puede ser tratado como un proceso estocástico. De este modo, se puede describir la velocidad en la dirección principal del viento como:

$$X_k = \bar{x}_k + x_k(t) \quad (2-43)$$

donde \bar{x}_k , representa la velocidad media en la dirección principal del viento y $x_k(t)$ representa la oscilación del viento, o sea, la turbulencia a lo largo de esta dirección.

En la Figura 2-9 se representa la variable X_k para un proceso estocástico cuya distribución probabilística corresponde a una distribución de Gauss.

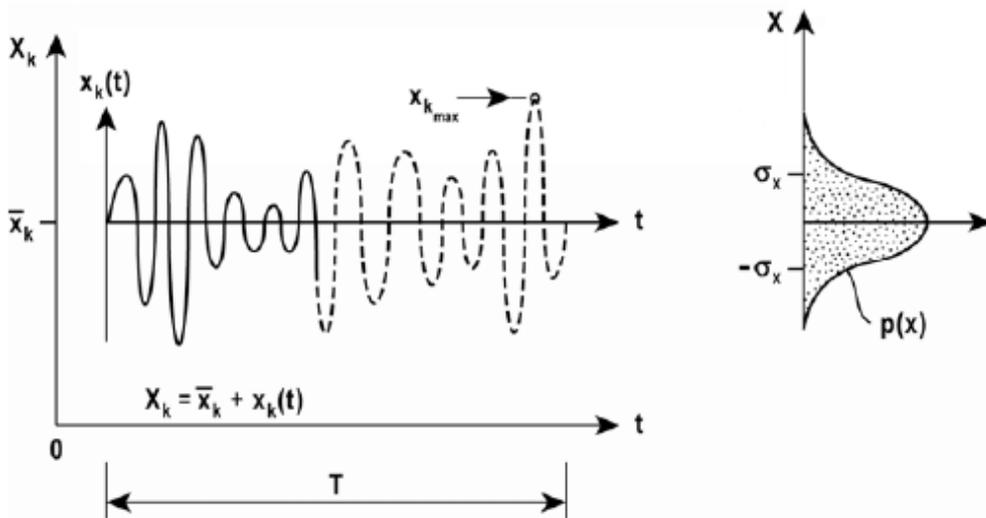


Figura 2-9. Proceso estocástico con distribución de Gauss. [11]

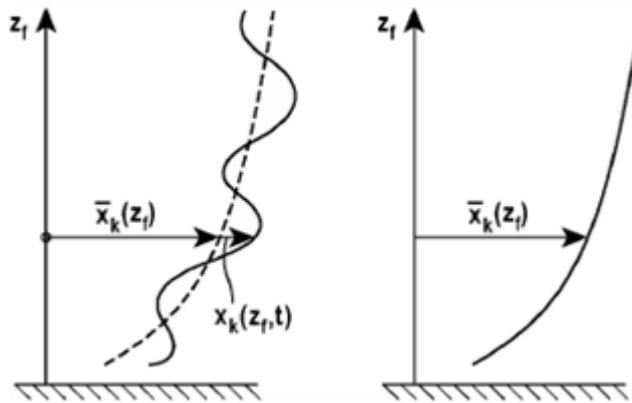


Figura 2-10. Proceso estocástico en función de la altura. [11]

2.2.2 Conceptos básicos

Para una variable aleatoria continua \$X\$ su función de densidad de probabilidad \$p(x)\$ se define como:

$$\Pr[x \leq X \leq x + dx] = P(x + dx) - P(x) = \frac{dP(x)}{dx} dx = p(x)dx \tag{2-44}$$

donde \$P(x)\$ es la función de probabilidad acumulada

$$\Pr[X \leq x] = P(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx \tag{2-45}$$

La media y la varianza de \$X\$ vienen dadas por

$$E[x] = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \quad (2-46)$$

$$Var(x) = \sigma_x^2 = E[(X - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot p(x) dx \quad (2-47)$$

Definiciones equivalentes se usan para una variable discreta, Y . Si esta variable está compuesta de N datos Y_k , cada uno de los mismos con la misma probabilidad, la media y la varianza serán:

$$E[y] = \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k \quad (2-48)$$

$$Var(y) = \sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Y_k - \bar{y})^2 \quad (2-49)$$

2.2.3 El viento

En materia de viento, principalmente se usan tres funciones de probabilidad, Gaussiana, Weibull y Rayleigh. Cada una de ellas definida a continuación:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}\right)^2\right] \quad (2-50)$$

$$p(x) = \beta \frac{x^{\beta-1}}{\gamma^\beta} \exp\left[-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\beta\right] \quad (2-51)$$

$$p(x) = \frac{x}{\gamma^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^2\right] \quad (2-52)$$

En la siguiente ilustración se representa cada una de estas distribuciones

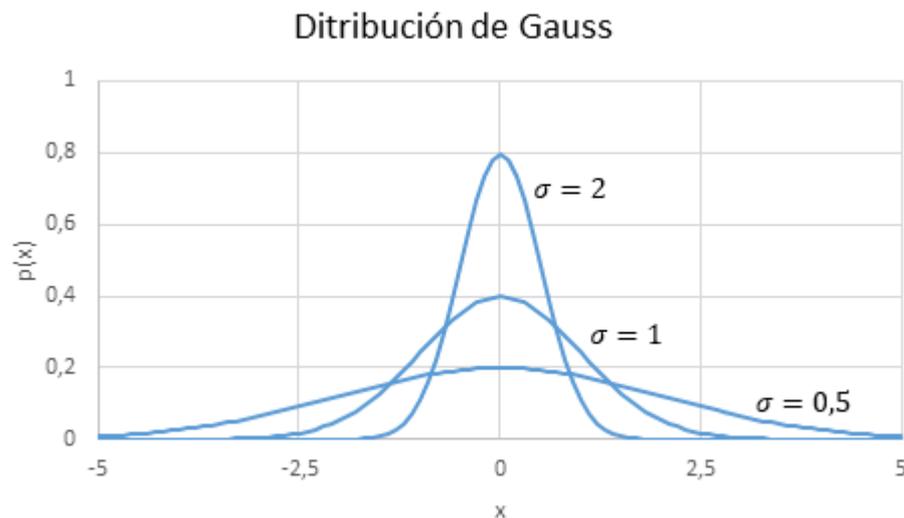


Figura 2-11. Distribución de Gauss para $\mu=0$; y $\sigma=1$; $\sigma=2$; y $\sigma=0,5$.

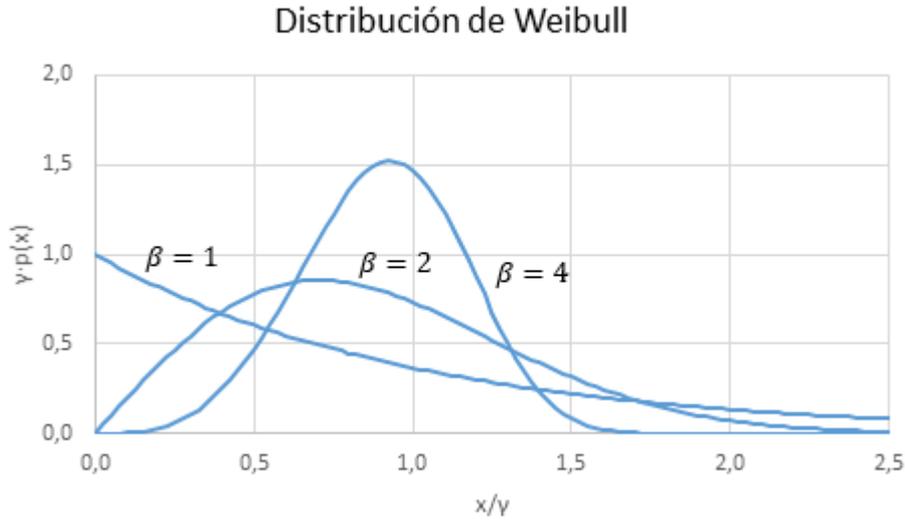


Figura 2-12. Distribución de Weibull para $\beta=1$; $\beta=2$ y $\beta=4$.

Notar que la distribución Rayleigh es equivalente a la distribución Weibull para $\beta = 2$.

2.2.4 Dominio del tiempo y ensamblado estadístico

Según lo dicho anteriormente existen dos procesos a usar en el estudio del viento desde un punto de vista ingenieril. Éstos son *la estadística en el dominio del tiempo y el ensamble estadístico*.

En el primero, la estadística en el dominio del tiempo, se representa la evolución de la variable estocástica en un periodo T como:

$$X = \bar{x} + x(t) \tag{2-53}$$

En la Figura 2-13 se representa la forma típica de un proceso de estas características.

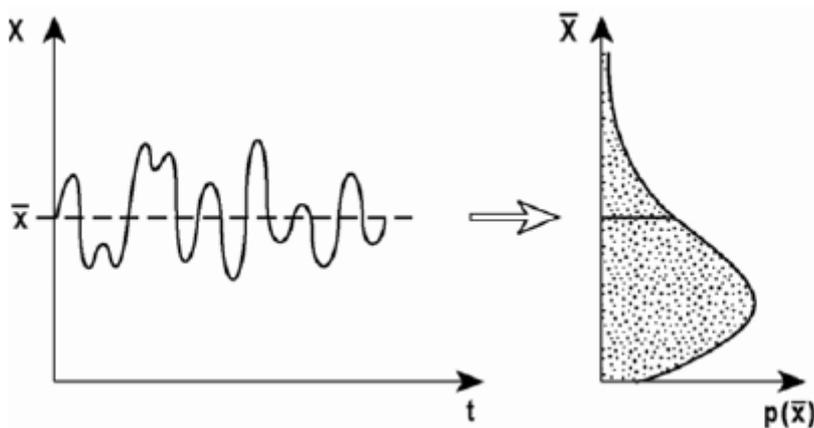


Figura 2-13. Estadística en el dominio del tiempo con distribución Rayleigh. [11]

El segundo proceso es el ensamblaje estadístico, en el cual se realiza el estudio de la variable X , en distintos puntos, ya sean separados en el espacio o en el tiempo. De este modo la variable X , será definida como un conjunto de variables X_k , para $k = 1, \dots, N$. Todo ellas deberán representarse por el mismo periodo de tiempo T . En la figura 2-9 se representa un proceso de este tipo.

$$X = \sum_{k=1}^1 X_k, \quad X_k = \bar{x}_k + x_k(t) \quad (2-54)$$

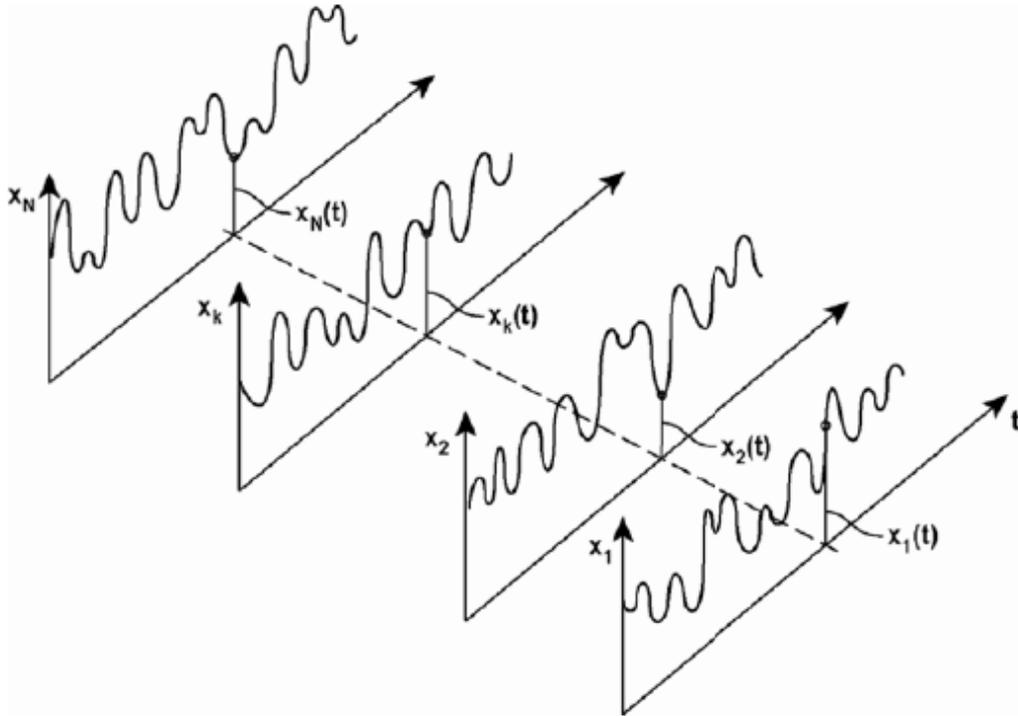


Figura 2-14. Ensamblaje estadístico. [11]

Además de ajustar la variable aleatoria con la función probabilidad, estimando su valor principal y su varianza, es de gran interés el estudio de la correlación y la covarianza. Ambas ofrecen información muy útil sobre el comportamiento del sistema. Mientras que para el estudio de la correlación se usa el valor completo de la variable aleatoria X , la covarianza usa solo la componente aleatoria $x(t)$.

Dadas dos componentes del ensamblaje de la variable aleatoria X , por ejemplo $X_1(t)$ y $X_2(t)$, se define la correlación como:

$$R_{X_1 X_2} = E[X_1(t) \cdot X_2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_1(t) \cdot X_2(t) dt \quad (2-55)$$

Y la covarianza:

$$Cov_{X_1 X_2} = E[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) \cdot x_2(t) dt \quad (2-56)$$

De manera análoga se hará cuando se obtengan los datos de manera discreta:

$$R_{X_1 X_2} = E[X_1 \cdot X_2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_{1k} \cdot X_{2k} \quad (2-57)$$

$$Cov_{X_1 X_2} = E[(X_1 - \bar{x}_1) \cdot (X_2 - \bar{x}_2)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_{1k} - \bar{x}_1) \cdot (X_{2k} - \bar{x}_2) \quad (2-58)$$

Sin embargo, la correlación y la covarianza pueden ser calculadas sobre el proceso mismo. De este modo se define la variable τ , que corresponde a la variación temporal entre ambas variables:

$$R_x(\tau) = E[X(t) \cdot X(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \cdot X(t + \tau) dt \quad (2-59)$$

$$Cov_x(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (2-60)$$

2.2.5 Cruce del umbral y picos

Sea $x(t)$ el valor de la variable aleatoria, se definirá Δt suficientemente pequeño, para poder definir el momento inmediatamente siguiente como:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt} \cdot \Delta t = x(t) + \dot{x}(t) \cdot \Delta t \quad (2-61)$$

La probabilidad de que la variable supere un valor a será:

$$\Pr[x(t) \leq a \cap a \leq \dot{x}(t) + \Delta t] = f_x(a) \cdot \Delta t \quad (2-62)$$

donde

$$f_x(a) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\infty} \left[\int_{a - \dot{x} \cdot \Delta t}^a p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}) dx \right] d\dot{x} \quad (2-63)$$

De aquí se pueden obtener los valores máximos calculando la probabilidad de que un punto sea un máximo. De este modo se puede describir la ecuación como [11]:

$$x(t) = c_x \cdot \cos(\omega_x t), \quad 0 < t < T \quad (2-64)$$

donde c_x sería el valor máximo que podría alcanzar la función. Además, la relación entre la varianza y el valor máximo será: [11]

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [c_x \cdot \cos(\omega_x t)]^2 dt \quad (2-65)$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot T_x} \cdot n \cdot \int_0^{T_x} \left[c_x \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_x} t\right) \right]^2 dt = \frac{c_x^2}{2} \quad (2-66)$$

Con lo cual, se llega a la conclusión de que

$$x_{max} = c_x = \sigma_x \sqrt{2} \quad (2-67)$$

2.2.6 Auto-Espectro

El auto-espectro representa la contribución de cada una de las frecuencias que componen la variable.

Por ejemplo, dado una variable $x(t)$ definida durante un periodo T , utilizando la transformada de Fourier se aproximará la variable, $x(t)$, como sumatorio de funciones armónicas, $X_k(\omega_k, t)$. De modo que:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N X_k(\omega_k, t) \quad (2-68)$$

donde

$$X_k(\omega_k, t) = c_k \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k); \quad \begin{cases} \omega_k = k \cdot \Delta\omega \\ \Delta\omega = 2\pi/T \end{cases} \quad (2-69)$$

Las amplitudes y los desfases angulares se definirán como:

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (2-70)$$

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \quad (2-71)$$

Las contantes a_k y b_k podrán ser calculadas como:

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \begin{bmatrix} \cos(\omega_k t) \\ \sin(\omega_k t) \end{bmatrix} dt \quad (2-72)$$

El auto-espectro de $x(t)$ representará su distribución de la varianza en el dominio de la frecuencia. La definición del auto-espectro de un solo punto, S_x , asociado a la frecuencia ω_k es:

$$S_x(\omega_k) = \frac{E[X_k^2]}{\Delta\omega} = \frac{\sigma_{X_k}^2}{\Delta\omega} \quad (2-73)$$

para un T suficientemente grande:

$$S_x(\omega_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta\omega} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T [c_k \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k)]^2 dt \quad (2-74)$$

Introduciendo el periodo de la componente armónica, $T_k = 2\pi/\omega_k$:

$$S_x(\omega_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta\omega} \cdot \frac{1}{n \cdot T_k} \cdot n \int_0^{T_k} \left[c_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_k} t + \varphi_k\right) \right]^2 dt = \frac{c_k^2}{2\Delta\omega} \quad (2-75)$$

Usando las ecuaciones (2-47) y (2-49) se obtiene:

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sigma_{X_k}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N S_x(\omega_k) \cdot \Delta\omega \quad (2-76)$$

En un modelo continuo, o sea, cuando los valores de N y T se acercan a infinito, el auto-espectro se define como:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E[X^2(\omega, t)]}{\Delta\omega} \quad (2-77)$$

donde $X(\omega, t)$ es una componente arbitraria de $x(t)$. En el límite $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, y, por lo tanto, la varianza del proceso puede calcularse como:

$$\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (2-78)$$

En el Ejemplo 2-2 se resuelve un proceso estocástico conocida la densidad espectral $S_x(\omega)$

Ejemplo 2-2. Mientras que hasta ahora se ha explicado cómo obtener la densidad auto-espectral de una variable, la finalidad de este ejemplo es ilustrar el proceso contrario, obtener el valor de la variable conocido su espectro ya que esta será la situación que se presenta cuando se obtienen las cargas de viento que solicitan un aerogenerador.

Conocida la densidad auto-espectral, $S_x(\omega)$, de una variable aleatoria, x , por ejemplo, la mostrada en la siguiente figura

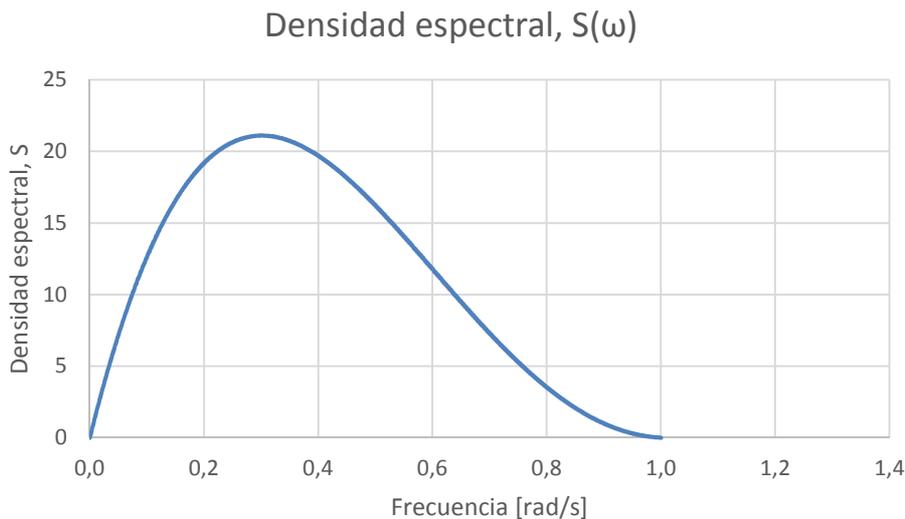


Figura 2-15. Densidad espectral en función de la frecuencia.

El primer paso es discretizar la variable. En este ejemplo se discretizará en $N = 4$ partes separadas a una equidistancia $\Delta\omega_k = 0,2 \text{ rad/s}$. El método escogido, por su simplicidad, será el del punto medio. De este modo la función discretizada quedará:

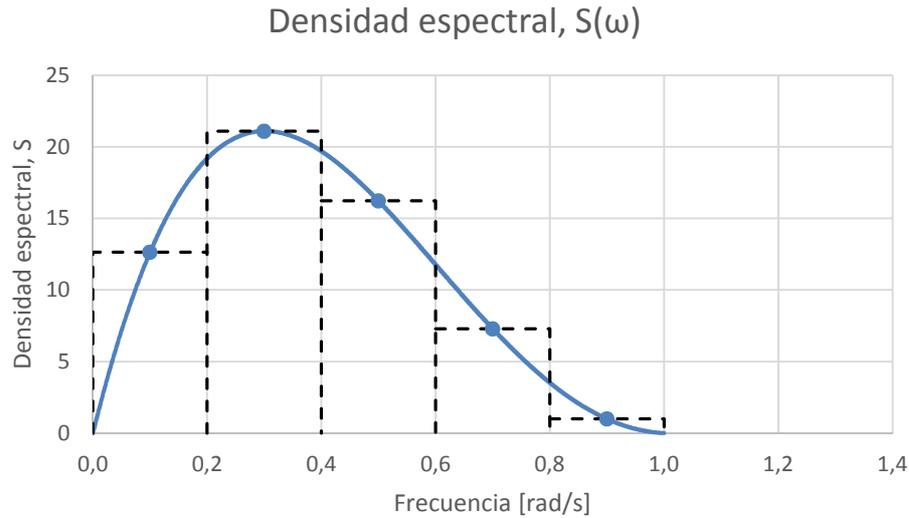


Figura 2-16. Densidad espectral discretizada mediante el punto medio.

Las características de estos tramos se recogen en la siguiente tabla.

Tabla 2-1. Características de la densidad espectral.

k	ω_k	$S_x(\omega_k)$	$\Delta\omega$	c_k
1	0,1	12,64	0,2	2,25
2	0,3	21,11	0,2	2,91
3	0,5	16,23	0,2	2,55
4	0,7	7,30	0,2	1,71
5	0,9	1,00	0,2	0,63

Para esta forma discreta del auto-espectro se define $S_x(\omega_k)$ como la varianza de cada componente armónica k -ésima. Del mismo modo que en la ecuación (2-75).

$$S_x(\omega_k) = \frac{c_k^2}{2\Delta\omega_k} \quad (2-79)$$

Con lo cual, se puede representar el valor de cada una de las componentes, x_k , de la variable, x , en el dominio del tiempo, t . Para ello, haciendo uso de la Eq. (2-69):

$$X_k(\omega_k, t) = c_k \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (2-80)$$

En este primer ejemplo no se hará uso de la componente aleatoria, teniendo ésta un valor nulo $\varphi_k = 0$. Esta componente se explicará en el siguiente ejemplo. De este modo se obtiene:

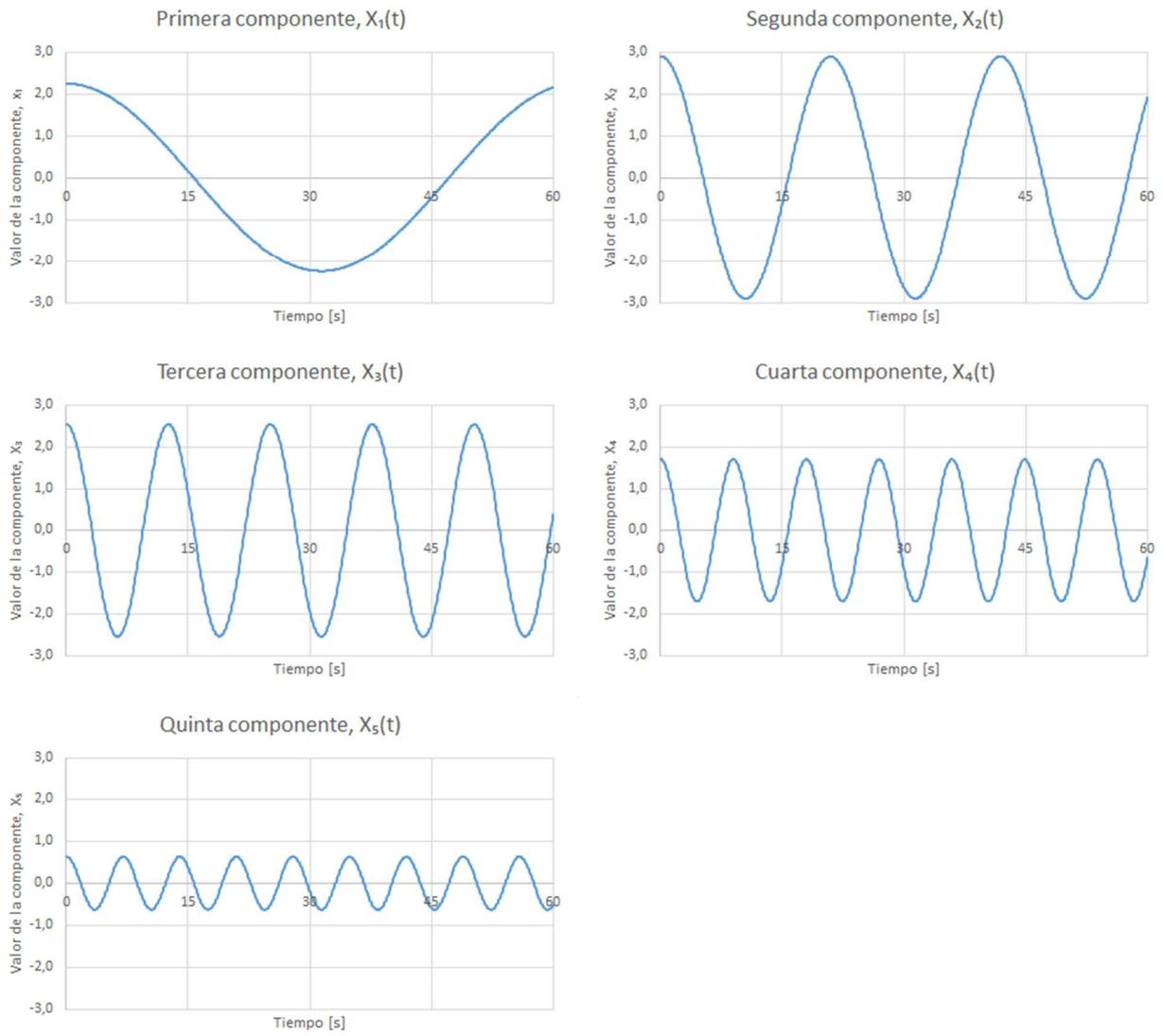


Figura 2-17. Componentes del ensamblaje estadístico, $x(t)$.

Y finalmente, haciendo uso de la ecuación (2-68):

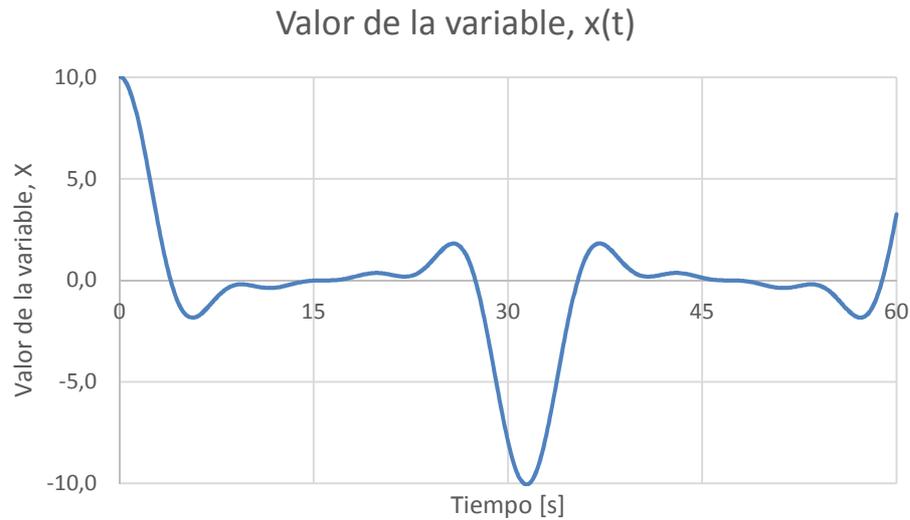


Figura 2-18. Representación de la variable $x(t)$.

Esta será la distribución a lo largo del tiempo de la variable aleatoria, $x(t)$.

Ejemplo 2-3. Con este ejemplo se pretende mostrar la importancia del término aleatorio en una variable estocástica.

Para ello, se hará uso de la misma densidad espectral que en el Ejemplo 2-2. La principal diferencia se encuentra en el uso de la ecuación (2-69)

$$X_k(\omega_k, t) = c_k \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (2-81)$$

donde, φ_k ya no es nulo. En este caso representa un desfase aleatorio, con valor entre $\varphi_k = 0$; $\varphi_k = 2\pi$. Ese valor es la componente que permite representar, efectivamente, un proceso estocástico. En el ejemplo anterior se escogió un valor nulo, mientras en este ejemplo se ha escogido

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0,83; \\ \varphi_2 = 5,92; \\ \varphi_3 = 6,01; \\ \varphi_4 = 3,61; \\ \varphi_5 = 0,38; \end{cases} \quad (2-82)$$

Aplicando esto se obtiene

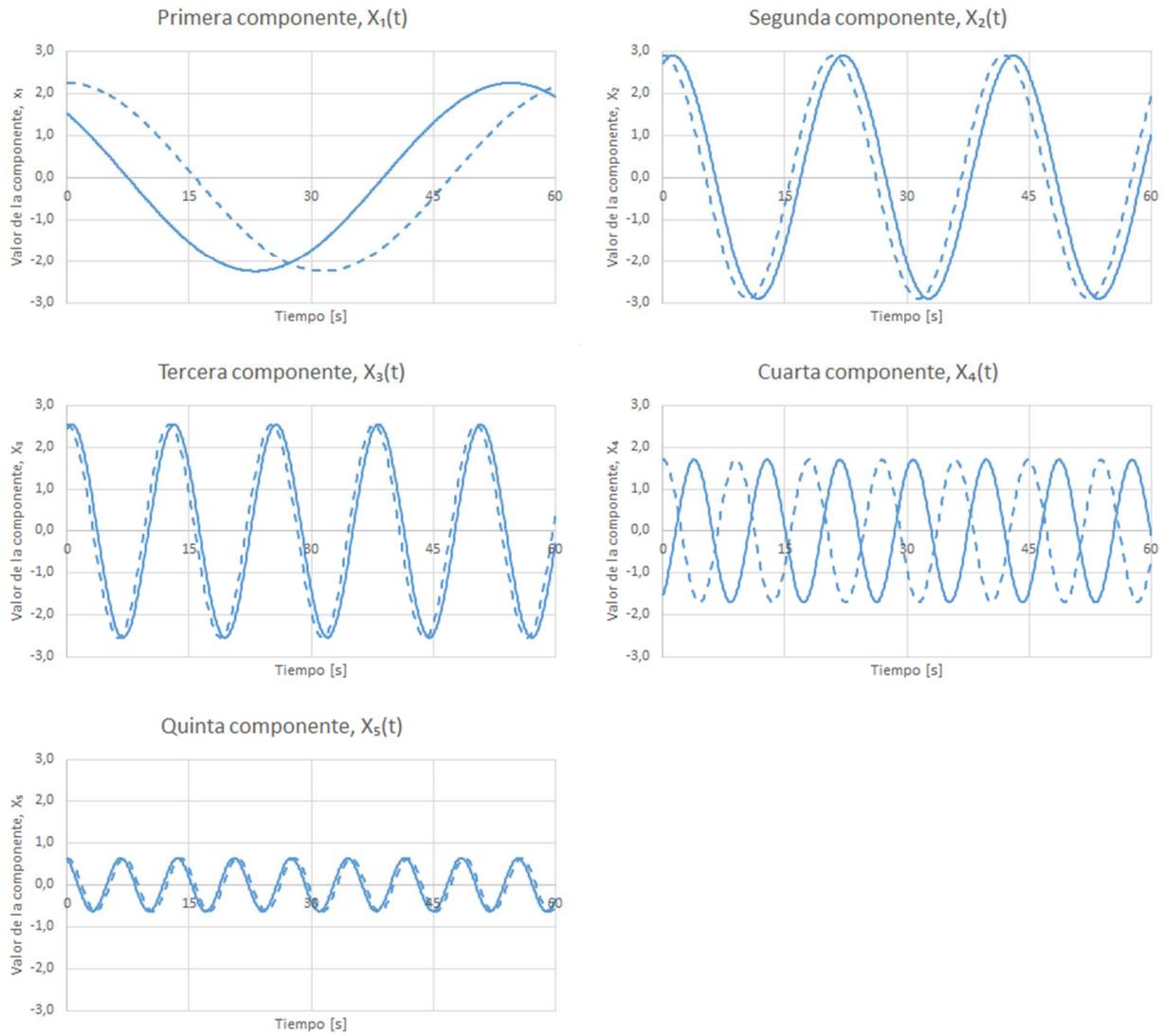


Figura 2-19. Componentes de la variable estocástica, $x(t)$.

Donde se representa en línea continua los valores obtenidos teniendo en cuenta la componente aleatoria y en línea discontinua sin tenerla en cuenta. Así mismo, el resultado final de la variable será

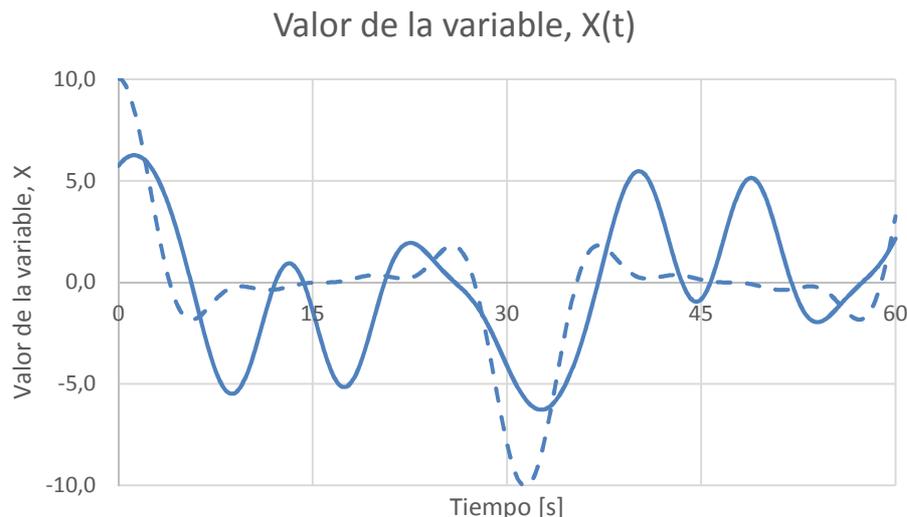


Figura 2-20. Valor de la variable estocástica, $X(t)$.

Se puede observar que el resultado final difiere en gran medida con el obtenido en el Ejemplo 2-2. Esta gran diferencia viene provocada únicamente por la componente aleatoria. De este resultado se puede obtener la conclusión, de que a medida que se aumenta la discretización de la variable, aumenta el número de componentes del ensamble estadístico, lo que supone un mayor número de factores aleatorios, φ_k , y, por lo tanto, un mayor peso de la aleatoriedad en la variable. En el Anexo B se adjunta el código que se ha utilizado para resolver este ejemplo de un proceso estocástico.

Es de gran importancia conocer lo que es un proceso estocástico y, de este modo, poder resolverlo. En el ámbito que abarca el presente proyecto, será la velocidad del viento a tener esta característica aleatoria. Esto viene impuesto por la Norma UNE-EN 61400:1-2006 de la cual se hace uso en el presente proyecto. La normativa, además de establecer este tratamiento del viento como un proceso estocástico, facilita los modelos a usar para, de este modo, obtener las densidades auto-espectrales correspondientes.

2.3 Blade element momentum

El método BEM es el más utilizado para estudiar el comportamiento del fluido a través de las palas. Está considerado una de las mejores aproximaciones para estimar las cargas resultantes sobre el rotor ya que, para ello, utiliza varios teoremas fundamentales de la física, como son: el *teorema de la cantidad de movimiento*; la *teoría del momento cinético*; y la *teoría del elemento pala*. Además, una de las ventajas fundamentales de este método es el poco tiempo de procesado que requiere, siendo éste mucho menor al de otros métodos. Por todo esto es uno de los métodos más utilizados en la actualidad.

A continuación, se explicará cada una de las teorías de la que hace uso este método y por último se expondrá la metodología a seguir para poder resolver este método.

2.3.1 Teorema de la cantidad de movimiento

Este teorema estudia el comportamiento del fluido a través del rotor. Para ello, utiliza varias hipótesis que permiten simplificar los cálculos. Estas hipótesis serán:

- Fluido ideal sin viscosidad
- Movimiento estacionario
- Velocidad uniforme en secciones paralelas al rotor
- Tubo de corriente bien definido tanto aguas arriba como aguas abajo
- Flujo incompresible
- No hay efectos de rotación del aire

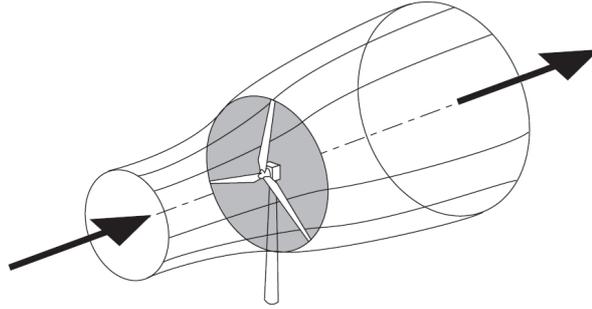


Figura 2-21. Tubo de aire a través del rotor. [12]

El aerogenerador extrae energía cinética del viento (frena la velocidad del aire que pasa a través del rotor). Se produce la expansión de un tubo de aire de sección circular que no intercambia flujo con aquel que está fuera del tubo como se muestra en la Figura 2-21. Para la extracción de energía cinética del viento la velocidad del flujo decrece lentamente al pasar a través del disco (un descenso brusco no sería posible debido a la gran desaceleración que se necesitaría), sin embargo, la presión sí que experimenta un salto de presión (descenso brusco), esto viene reflejado en la Figura 2-23. Aguas abajo, la presión recupera su valor atmosférico inicial, sin embargo, la velocidad no lo recupera. De esta forma, después del proceso se ha producido una reducción de la energía cinética del fluido. [12]

Se divide la estela en 4 secciones paralelas como se muestra en la ilustración que sigue:

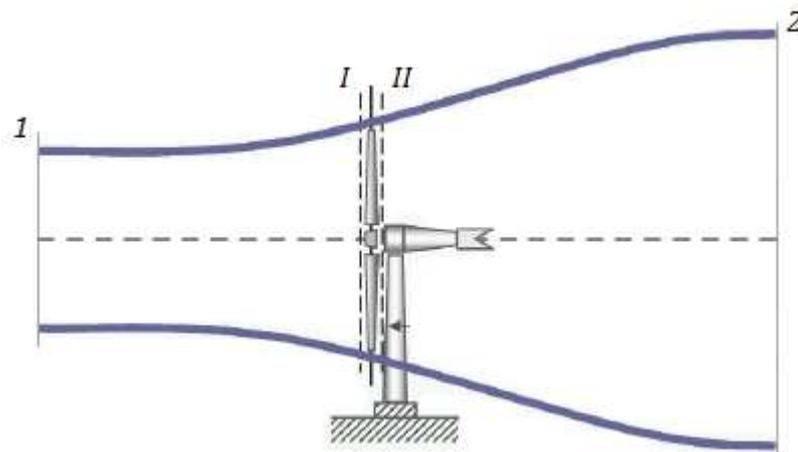


Figura 2-22. Estela de aire a través del rotor.

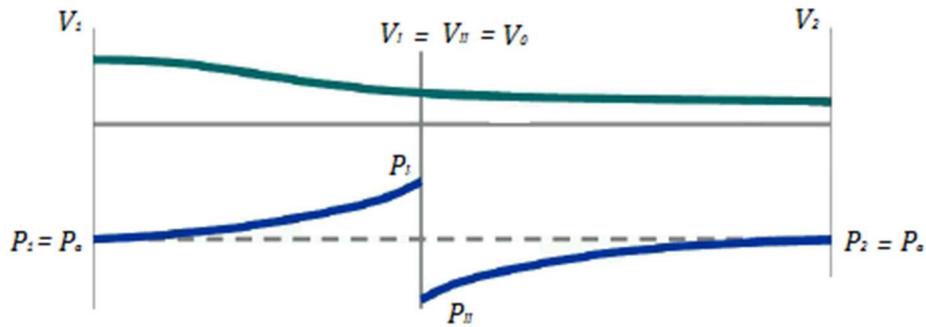


Figura 2-23. Salto de velocidad y presión a lo largo de la estela.

donde 1 y 2 son dos secciones suficientemente alejadas como para que sus presiones no se vean afectadas por los efectos del rotor

$$P_1 = P_2 = P_\infty \quad (2-83)$$

Con P_∞ igual a la presión ambiente. A su vez, I y II son las secciones inmediatamente anterior y posterior al rotor, por lo que

$$V_I = V_{II} = V_0 \quad (2-84)$$

Siendo V_0 la velocidad del viento en la dirección perpendicular al rotor. Si se tiene en cuenta la *Ecuación de Bernoulli*

$$P + \frac{V^2 \rho}{2} + \rho g z = cte \quad (2-85)$$

Se puede deducir que, eliminando el término correspondiente a la altura $\rho g z$ (ya que éste es igual en todas las secciones), y aplicando a su vez las ecuaciones (2-83) y (2-84), la pérdida de energía del fluido al pasar por el rotor será:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) = P_I - P_{II} \quad (2-86)$$

Una vez hallada la energía es fácil averiguar la fuerza que el fluido ejerce sobre el rotor:

$$F = \Delta P \cdot A = \frac{1}{2} \rho (\Delta V^2) A \quad (2-87)$$

Finalmente, con las ecuaciones (2-86) y (2-87) se puede calcular el diferencial de fuerza como:

$$\begin{cases} dF = 4 \rho \pi r V_\infty^2 [a(1-a)] dr \\ a = \frac{V_1 - V_I}{V_1} = \frac{V_\infty - V_0}{V_\infty} \end{cases} \quad (2-88)$$

donde se ha incluido el *factor de velocidad inducida axial*, a , que relaciona las velocidades en las secciones 1 y I. Del mismo modo se ha desarrollado el término $dA = 2\pi r dr$.

2.3.2 Teoría del momento cinético

Con esta teoría se explicará el fenómeno por el cual el fluido que atraviesa el rotor del aerogenerador genera fuerzas aerodinámicas sobre las palas que se traducen en un par de giro, origen real de la transformación energética. El generador eléctrico aplica un par mecánico resistente igual pero contrario en signo al par aerodinámico generado por el fluido, cosa que hace mantener la velocidad de rotación del rotor constante, y, por lo tanto, permite transformar el trabajo ejercido por el par aerodinámico en energía eléctrica. La aplicación del par mecánico resistente por parte del generador, provoca una reacción del fluido que atraviesa el rotor, haciéndolo girar en sentido opuesto al giro del rotor, como se muestra en la Figura 2-24. El fluido que atraviesa el rotor gana momento angular, y, por lo tanto, ya en la estela (después de haber atravesado el rotor), tiene una componente de velocidad en dirección tangencial y otra en dirección axial. El fluido que entra en el disco no tiene movimiento rotacional.

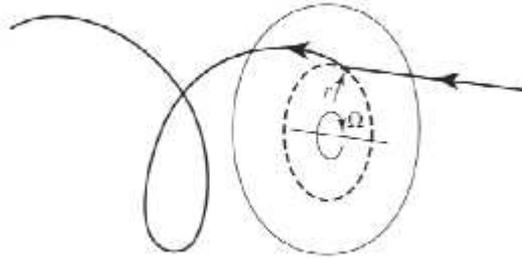


Figura 2-24. Giro del aire al atravesar el rotor. [12]

El fluido que sale del disco tiene movimiento rotacional que se mantiene a lo largo de toda la estela. La adquisición de la rotación se produce a lo largo del ancho del disco, y se supone que se produce de forma lineal. La velocidad tangencial del fluido es proporcional a la velocidad lineal debido a la de rotación del disco que gira a velocidad angular Ω . El factor de proporcionalidad se define como el *factor de velocidad inducida tangencial* a' . A la salida del disco, la velocidad tangencial es $2\Omega a'$, y en un punto intermedio es $\Omega a'$.

La aplicación de la Teoría del Momento Cinético requiere considerar el disco formado por múltiples anillos de radio r y de espesor dr . Se supone que no hay interacción entre los diferentes anillos y que, por lo tanto, cada anillo sólo aporta momento angular al fluido que atraviesa dicho anillo. El momento de inercia de una corona circular es:

$$\begin{cases} I = m (R^2 - r^2) \\ \text{si } R \gg r \rightarrow I = m R^2 \end{cases} \quad (2-89)$$

En cambio, el momento angular de un sólido rígido es:

$$L = I(t) * \omega(t) \quad (2-90)$$

donde I es el tensor de inercia del cuerpo y ω es la velocidad angular del sólido. El par motor, teniendo en cuenta las ecuaciones (2-89) y (2-90), será:

$$\begin{cases} M = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} [m r^2 \omega] = \omega r^2 \frac{dm}{dt} \\ dM = \omega r^2 d\dot{m} \end{cases} \quad (2-91)$$

Bastará sustituir el término correspondiente a $d\dot{m}$ para obtener el resultado final

$$\begin{cases} \dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho V_I A \\ d\dot{m} = \rho V_I dA \end{cases} \quad (2-92)$$

Y finalmente

$$\begin{cases} dM = 4 a' (1 - a) \rho V_{\infty} \Omega r^3 \pi dr \\ a' = \frac{\omega}{2\Omega} \end{cases} \quad (2-93)$$

Agrupando las ecuaciones (2-88) y (2-93) queda

$$\begin{cases} dF = 4 \rho \pi r V_{\infty}^2 [a(1-a)] dr \\ dM = 4 \rho \pi r^3 \Omega V_{\infty} [a'(1-a)] dr \\ a = \frac{V_{\infty} - V_0}{V_{\infty}}, \quad a' = \frac{\omega}{2\Omega} \end{cases} \quad (2-94)$$

2.3.3 Elemento pala

En este caso se calcularán las fuerzas de empuje y momento haciendo equilibrio sobre la sección de la pala. Se escoge una sección arbitraria de una de las palas, se hace el equilibrio de fuerzas en esta sección y se integran los resultados a lo largo de toda la pala.

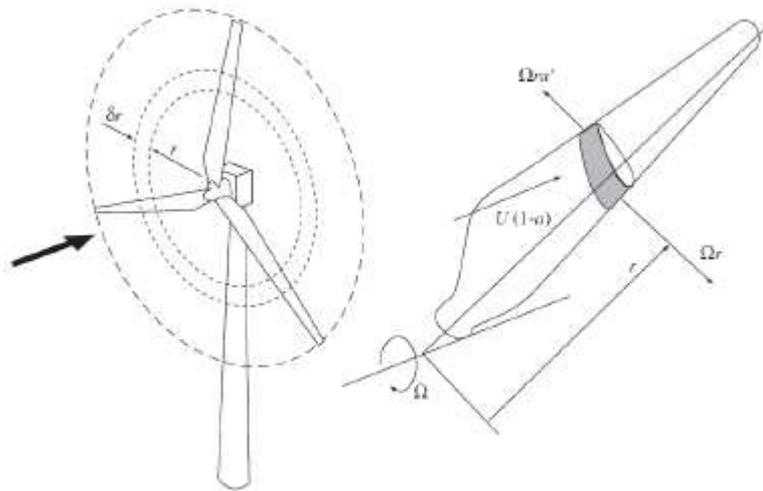


Figura 2-25. Teoría del elemento pala. [12]

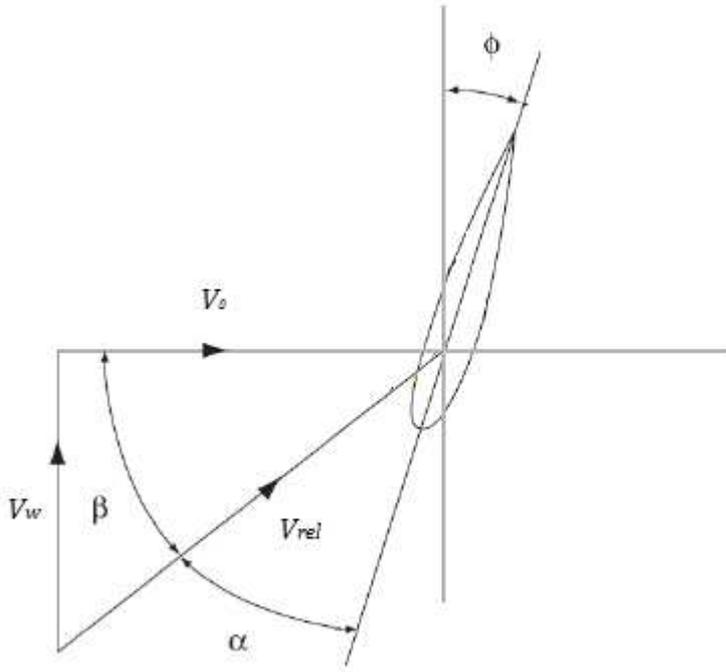


Figura 2-26. Sección del elemento pala. [12]

En la Figura 2-26 se puede ver el triángulo de velocidades del viento a través de su recorrido por las palas, formado por la *velocidad de ingreso* V_0 ; la *velocidad angular* V_ω ; y la *velocidad relativa* V_{rel} suma de las dos anteriores. A su vez, se muestran el *ángulo de giro* ϕ ; el *ángulo de ataque* α ; y el ángulo que forman las velocidades β .

$$\frac{\pi}{2} = \alpha + \beta + \phi \quad (2-95)$$

Y de la ecuación (2-88) se sabe que:

$$V_0 = V_\infty (1 - a) \quad (2-96)$$

donde V_∞ representa la velocidad del viento antes de verse afectado por el aerogenerador, o lo que es lo mismo, $V_\infty = V_1$ teniendo en cuenta la Figura 2-23.

La velocidad angular puede ser calculada como suma de la velocidad de giro de las palas y la velocidad media de giro del aire a través del rotor (Figura 2-25)

$$V_\omega = \Omega r + \frac{1}{2} \omega r = \omega r (1 + a') \quad (2-97)$$

La velocidad relativa se puede calcularla a partir del triángulo de velocidades de la Figura 2-26.

$$V_{rel} = \frac{V_0}{\cos \beta} = \frac{V_\infty (1 - a)}{\cos \beta} \quad (2-98)$$

De donde se puede despejar el ángulo que forman las velocidades

$$\tan \beta = \frac{V_\omega}{V_0} = \frac{\omega r (1 + a')}{V_\infty (1 - a)} \quad (2-99)$$

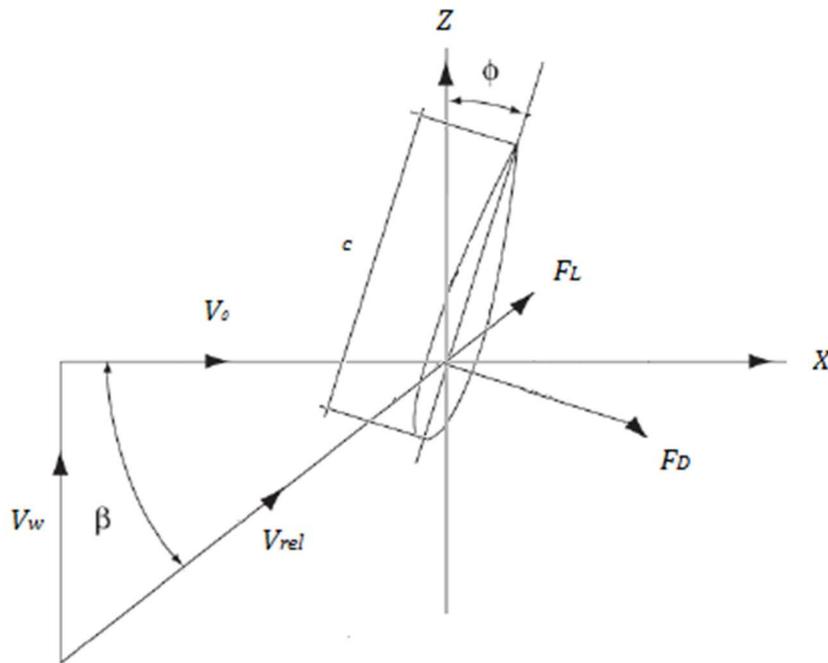


Figura 2-27. Teoría aerodinámica. [12]

Teniendo en cuenta la teoría aerodinámica, representada en la Figura 2-27. Se puede calcular la *fuerza de sustentación*, F_L , y la *resistencia aerodinámica*, F_D . Éstas dependerán del número de palas, B ; de la densidad del viento, ρ ; de la velocidad relativa del viento, V_{rel} ; de los coeficientes de sustentación y de resistencia (que a su vez dependen del ángulo de ataque, α), $C_L(\alpha)$, $C_D(\alpha)$; y de la cuerda de la sección, c . De este modo:

$$dF_L = \frac{1}{2} B \rho V_{rel}^2 C_L c dr \quad (2-100)$$

$$dF_D = \frac{1}{2} B \rho V_{rel}^2 C_D c dr \quad (2-101)$$

En ejes principales será:

$$dF_X = dF_L \sin \beta + dF_D \cos \beta \quad (2-102)$$

$$dF_Z = dF_L \cos \beta - dF_D \sin \beta \quad (2-103)$$

donde β representa el ángulo entre la velocidad del viento perpendicular al rotor V_0 y la velocidad relativa del mismo V_{rel} como se representa en la Figura 2-27.

Una vez llegados a este punto es fácil calcular el empuje y el momento que el flujo de viento crea sobre el aerogenerador como

$$dF = dF_X \quad (2-104)$$

$$dM = r dF_Z \quad (2-105)$$

usando las ecuaciones (2-102) y (2-103) queda:

$$dF = \frac{1}{2} \rho B V_{rel}^2 [C_L \sin \beta + C_D \cos \beta] c dr \quad (2-106)$$

$$dM = \frac{1}{2} \rho B V_{rel}^2 [C_L \cos \beta - C_D \sin \beta] c r dr \quad (2-107)$$

Por último, agrupando todo lo obtenido:

$$\begin{cases} dF = \frac{1}{2} \rho B V_{rel}^2 [C_L \sin \beta + C_D \cos \beta] c dr \\ dM = \frac{1}{2} \rho B V_{rel}^2 [C_L \cos \beta - C_D \sin \beta] c r dr \\ C_L = C_L(\alpha), \quad C_D = C_D(\alpha) \end{cases} \quad (2-108)$$

2.3.4 Método BEM

El método de resolución consiste en resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (2-94) y (2-108).

$$\begin{cases} dF = 4 \rho \pi r V_{\infty}^2 [a(1-a)] dr \\ dM = 4 \rho \pi r^3 \Omega V_{\infty} [a'(1-a)] dr \\ dF = \frac{1}{2} \rho B V_{rel}^2 [C_L \sin \beta + C_D \cos \beta] c dr \\ dM = \frac{1}{2} \rho B V_{rel}^2 [C_L \cos \beta - C_D \sin \beta] c r dr \end{cases} \quad (2-109)$$

Para ello basta sustituir el valor de la velocidad relativa, obtenida de la ecuación (2-98)

$$\begin{cases} V_{rel} = \frac{V_{\infty} (1-a)}{\cos \beta} \\ V_{rel} = \frac{\omega r (1+a')}{\sin \beta} \end{cases} \quad (2-110)$$

Con lo cual, igualando la fuerza y el empuje y sustituyendo la velocidad relativa se obtiene

$$\begin{cases} \frac{a}{1-a} = \frac{\sigma_r}{4} \frac{C_L \sin \beta + C_D \cos \beta}{\cos^2 \beta} \\ \frac{a'}{1+a'} = \frac{\sigma_r}{4} \frac{C_L \cos \beta + C_D \sin \beta}{\sin \beta \cos \beta} \\ \sigma_r = \frac{B c}{2 \pi r} \end{cases} \quad (2-111)$$

donde se ha hecho uso de la *solidez de las palas*, σ_r . El ángulo β se obtiene de la ecuación (2-99)

$$\begin{cases} \beta = \tan^{-1} \left[\lambda \frac{(1+a')}{(1-a)} \right] \\ \lambda = \frac{\omega r}{V_{\infty}} \end{cases} \quad (2-112)$$

donde nuevamente se ha hecho uso de una constante, la *relación de velocidades en punta de pala*, λ .

Por último, en el siguiente apartado se mostrará cómo se deberá resolver un problema usando el método BEM

2.3.4.1 Método de resolución

Basta iterar hasta resolver la solución final. Para ello se realiza el siguiente proceso iterativo:

1. Calcular la relación de velocidades en punta de pala λ , y la solidez de las palas σ_r ,

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\omega r}{V_\infty} \\ \sigma_r = \frac{B c}{2 \pi r} \end{cases} \quad (2-113)$$

2. Suponer un primer valor para a y a' ,
3. Hallar el ángulo β ,

$$\beta = \tan^{-1} \left[\lambda \frac{(1 + a')}{(1 - a)} \right] \quad (2-114)$$

4. Obtener el ángulo de ataque α ,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \phi \quad (2-115)$$

5. A través de las gráficas obtener los valores de los coeficientes C_L y C_D ,
6. Con todo lo anterior se podrán calcular los valores de a y a' ,

$$\begin{cases} \frac{a}{1 - a} = \frac{\sigma_r}{4} \frac{C_L \sin \beta + C_D \cos \beta}{\cos^2 \beta} \\ \frac{a'}{1 + a'} = \frac{\sigma_r}{4} \frac{C_L \cos \beta + C_D \sin \beta}{\sin \beta \cos \beta} \end{cases} \quad (2-116)$$

7. Por último, se comparan estos valores obtenidos con los del paso número 2 y, de este modo, se continúa con el proceso iterativo hasta obtener la solución.

Gracias a este método podrá calcularse la fuerza que el viento ejerce sobre la torre. De esta manera se concluye este segundo capítulo que recoge conjunto de teorías de las que se hará uso para resolver el problema que se presenta. De modo que una vez conocida la velocidad del viento a la altura de buje se podrá calcular su distribución a lo largo del tiempo tratándola como una variable estocástica (apartado 2.2). Con ello, aplicando la teoría expuesta en este último capítulo (apartado 2.3) se podrá calcular la fuerza que, efectivamente, el viento ejerce sobre la parte superior de la torre. Y, finalmente, conocida la fuerza o, lo que es lo mismo, la entrada al sistema, se podrá calcular el desplazamiento provocado por ésta (apartado 2.1).

3 CARACTERÍSTICAS DE LOS ELEMENTOS

Análogamente al capítulo anterior, en este se pretende explicar los distintos elementos que intervienen en el proceso. Estos elementos, a grandes rasgos, son dos, el viento y el aerogenerador. Este capítulo se divide en dos partes, cada una de ellas desarrollará los conceptos necesarios para entender como son o cómo se comportan estos elementos. En una primera parte se expondrá el método utilizado para estimar el viento. Se hará uso de la norma UNE-EN 614001-1:2006, que indica la densidad espectral del viento. En una segunda parte se elegirá un aerogenerador real para poder obtener cálculos lo más semejantes a la realidad, se mostrarán todas sus propiedades, tanto mecánicas como aerodinámicas. Se trata de un aerogenerador de 5-MW offshore cuyo estudio ha sido realizado J. Jonkman y financiado por U.S. Department of Energy's (DOE's), National Renewable Energy Laboratory (NREL) y National Wind Technology Center (NWTC) [13]. Aunque se trate de un aerogenerador utilizado sobre la superficie marina (offshore), las características tanto de la torre como de las palas son muy similares a las de un aerogenerador onshore.

3.1 Viento

Para aproximar el comportamiento del viento se hace uso de la norma *UNE-EN 61400-1:2006 Aerogeneradores. Parte 1: Requisitos de diseño* [3]. Esta norma es la versión oficial, en español, de la Norma Europea *EN 61400-1:2005*, que a su vez adopta la Norma Internacional *IEC 61400-1:2005 Wind turbines. Part 1: Design requirements*.

El régimen del viento para las condiciones de carga y de seguridad se divide en condiciones normales del viento que ocurren frecuentemente durante el funcionamiento normal de los aerogeneradores, y en condiciones extremas del viento que se definen con un periodo de recurrencia de 1 año o de 50 años.

Las condiciones del viento incluyen un flujo medio constante combinado, en muchos casos, con un perfil de ráfaga determinístico variable o con turbulencia. En cualquier caso, debe considerarse la influencia de una inclinación del flujo medio con respecto a un plano horizontal de hasta 8°. Este ángulo de inclinación del flujo debe suponerse que es invariable con la altura.

La expresión "turbulencia" indica las variaciones aleatorias de la velocidad del viento en un tiempo promedio de 10 min. El modelo de la turbulencia, cuando se utiliza, debe incluir los efectos de la variación de la velocidad del viento, el cizallamiento y la dirección y permitir un muestreo rotacional por la variabilidad del cizallamiento. Los tres componentes vectoriales de la velocidad del viento turbulento se definen como [3]:

- Longitudinal: según la dirección de la velocidad media del viento;
- Lateral: horizontal y normal a la dirección longitudinal; y
- Ascendente: normal a ambas direcciones longitudinal y lateral, es decir, desviado de la vertical por el ángulo de inclinación del flujo medio.

Para las clases de aerogeneradores normalizados, el campo de velocidades del viento aleatorio para los modelos de turbulencia debe satisfacer los requisitos siguientes [3]:

- a) La desviación típica de la turbulencia, σ_1 , con los valores dados en los apartados siguientes, debe asumirse que son invariables con la altura. Las componentes normales a la dirección media del viento deben tener las desviaciones típicas mínimas siguientes
 - Componente lateral: $\sigma_2 \geq 0,7\sigma_1$
 - Componente ascendente: $\sigma_3 \geq 0,5\sigma_1$
- b) El parámetro escalar de la turbulencia longitudinal, Λ_1 , a la altura del buje z viene dado por:

$$A_1 = \begin{cases} 0,7z, & z < 60m \\ 42m, & z \geq 60m \end{cases} \quad (3-1)$$

- c) Debe utilizarse un modelo reconocido para la coherencia, definido como la magnitud del espectro cruzado dividido por el auto-espectro para las componentes de la velocidad longitudinal en puntos separados espacialmente en un plano normal a la dirección longitudinal.

El modelo de turbulencia recomendado que cumple con estos requisitos es el modelo de *turbulencia de cizallamiento uniforme de Mann* [5]. Otro modelo utilizado frecuentemente que cumple con estos requisitos es el modelo de *coherencia espectral y exponencial de Kaimal* [4].

3.1.1 Condiciones nomales de viento

3.1.1.1 Distribución de la velocidad del viento

La distribución de la velocidad del viento es importante para el diseño de los aerogeneradores porque determina la frecuencia de ocurrencia de las condiciones de carga individuales para situaciones de diseño normales. El valor medio de la velocidad del viento en un periodo de tiempo de 10 min debe suponerse que sigue una distribución de Rayleigh a la altura del buje dada por:

$$P_R = 1 - e^{-\pi(V_{hub}/2V_{ave})^2} \quad (3-2)$$

donde, en las clases de aerogeneradores normalizados, V_{ave} debe elegirse:

$$V_{ave} = 0,2 V_{ref} \quad (3-3)$$

3.1.1.2 Modelo normal del perfil del viento (NWP)

El perfil del viento $V(z)$ indica el promedio de la velocidad del viento en función de la altura z sobre el suelo. En el caso de las clases normalizadas de aerogeneradores, el modelo del perfil normal del viento viene dado por la ley exponencial:

$$V(z) = V_{hub}(z/z_{hub})^\alpha \quad (3-4)$$

El exponente α de la ley exponencial se supone igual a 0,2.

El perfil supuesto del viento se utiliza para definir el cizallamiento promedio vertical del viento a través del área barrida por el rotor.

3.1.1.3 Modelo de turbulencia normal (NTM)

Para el modelo de turbulencia normal, el valor representativo de la desviación típica de la turbulencia σ_1 , debe venir dado por el percentil 90% para la velocidad del viento dada a la altura de buje. Este valor para las clases de aerogeneradores normalizados viene dado por: [3]

$$\sigma_1 = I_{ref} (0,75 V_{hub} + b) \quad (3-5)$$

donde el parámetro b es 5,6 m/s. Los valores para la intensidad de turbulencia, I_{ref} , se dan en la Tabla 3-1.

Tabla 3-1. Parámetros clásicos para las clases de aerogeneradores.

Tipo de turbulencia	Intensidad de turbulencia
A	0,16
B	0,14
C	0,12

Donde I_{ref} es el valor esperado de la intensidad de turbulencia para 15 m/s. Este valor varía en función del tipo de turbulencia para: A, turbulencias altas; B, turbulencias medias; y C, turbulencias bajas.

3.1.2 Modelos de turbulencia

Como lo dicho anteriormente, se podrán utilizar dos modelos de turbulencia para el cálculo de las cargas de diseño. La Norma UNE-EN 61400-1:2006 recomienda usar el primer modelo.

- El modelo de cizallamiento uniforme de Mann [5].
- El modelo de coherencia espectral y exponencial de Kaimal [4].

3.1.2.1 Modelo de cizallamiento uniforme de Mann

Este modelo difiere con el modelo usado en la norma anterior UNE-EN 61400-1:2005, el *modelo de turbulencia isotrópico de Von Karman* [7] en que la energía isotrópica es rápidamente distorsionada por un cizallamiento de velocidad media uniforme. Las componentes de este nuevo tensor espectral son:

$$\Phi_{11}(k_1, k_2, k_3) = \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^4} (k_0^2 - k_1^2 - 2k_1(k_3 + \beta(k)k_1)\zeta_1 + (k_1^2 + k_2^2)\zeta_1^2) \quad (3-6)$$

$$\Phi_{22}(k_1, k_2, k_3) = \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^4} (k_0^2 - k_2^2 - 2k_2(k_3 + \beta(k)k_1)\zeta_2 + (k_1^2 + k_2^2)\zeta_2^2) \quad (3-7)$$

$$\Phi_{33}(k_1, k_2, k_3) = \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^4} (k_1^2 + k_2^2) \quad (3-8)$$

$$\Phi_{12}(k_1, k_2, k_3) = \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^4} (-k_1k_2 - k_1(k_3 + \beta(k)k_1)\zeta_2 - k_2(k_3 + \beta(k)k_1)\zeta_1 + (k_1^2 + k_2^2)\zeta_1\zeta_2) \quad (3-9)$$

$$\Phi_{13}(k_1, k_2, k_3) = \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^4} (-k_1(k_3 + \beta(k)k_1) + (k_1^2 + k_2^2)\zeta_1) \quad (3-10)$$

$$\Phi_{23}(k_1, k_2, k_3) = \frac{E(k_0)}{4\pi k_0^4} (-k_2(k_3 + \beta(k)k_1) + (k_1^2 + k_2^2)\zeta_2) \quad (3-11)$$

Donde k_1 , k_2 y k_3 representan el número de ondículas adimensionales, $2\pi lf/V_{hub}$, para las tres direcciones de las componentes. Además:

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \quad (3-12)$$

$$k_0 = \sqrt{k^2 + 2\beta(k)k_1k_3 + (\beta(k)k_1)^2} \quad (3-13)$$

$$\zeta_1 = C_1 - \frac{k_2}{k_1} C_2; \quad \zeta_2 = \frac{k_2}{k_1} C_1 + C_2; \quad (3-14)$$

$$C_1 = \frac{\beta(k)k_1^2 [k_1^2 + k_2^2 - k_3(k_3 + \beta(k)k_1)]}{k^2(k_1^2 + k_2^2)} \quad (3-15)$$

$$C_2 = \frac{k_2k_0^2}{(k_1^2 + k_2^2)^{3/2}} \arctan \left(\frac{\beta(k)k_1 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_0^2 - (k_3 + \beta(k)k_1)\beta(k)k_1} \right) \quad (3-16)$$

$E(k)$ denota el espectro de energía isotrópica de Von Karman, definido como: [7]

$$E(k) = \frac{1.453k^4}{(1 + k^2)^{17/6}} \quad (3-17)$$

$\beta(x)$ es un periodo de distorsionamiento adimensional:

$$\beta(k) = \frac{\gamma}{k^{2/3} \sqrt{{}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{17}{6}, \frac{4}{3}, -k^2\right)}} \quad (3-18)$$

donde ${}_2F_1$ denota la función hiperbólica y γ el parámetro de cizallamiento adimensional. Este parámetro es la diferencia fundamental con el modelo de Von Karman, ya que en el caso en que este valor sea nulo, el modelo coincidirá con el modelo isotrópico. Para calcular el valor de este parámetro, Mann comparó sus resultados por aquellos obtenidos por Kaimal y obtuvo un valor de

$$\gamma = 3,9 \quad (3-19)$$

Con las siguientes relaciones de varianza:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2 &= 3,25 \sigma_{iso}^2 \\ \sigma_2^2 &= 1,65 \sigma_{iso}^2 \\ \sigma_3^2 &= 0,85 \sigma_{iso}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \approx 0,7 \\ \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \approx 0,5 \end{cases} \quad (3-20)$$

El parámetro escalar puede hallarse por igualación de los espectros longitudinales de rango sub-inercial asintóticos.

$$S_1(f) \rightarrow 0,475 \sigma_{iso}^2 \left(\frac{2\pi l}{V_{hub}}\right)^{-2/3} f^{-5/3} = 0,05 \sigma_1^2 \left(\frac{\Lambda_1}{V_{hub}}\right)^{-2/3} f^{-5/3} \Rightarrow l \approx 0,8 \Lambda_1 \quad (3-21)$$

En resumen, los tres parámetros requeridos en el modelo de Mann vienen dados por

$$\begin{aligned} \gamma &= 3,9 \\ \sigma_{iso} &= 0,55 \sigma_1 \\ l &= 0,8 \Lambda_1 \end{aligned} \quad (3-22)$$

Y por último el espectro viene dado por:

$$\frac{f S_i(f)}{\sigma_i^2} = \frac{\sigma_{iso}^2}{\sigma_i^2} \left(\frac{4\pi l f}{V_{hub}} \right) \Psi_{ii} \left(\frac{2\pi l f}{V_{hub}} \right) \quad (3-23)$$

donde

$$\Psi_{ij}(k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(k_1, k_2, k_3) dk_2 dk_3 \quad (3-24)$$

3.1.2.2 Espectro de Kaimal

La componente de las densidades espectrales de potencia viene dada en forma adimensional por la ecuación:

$$\frac{f S_k(f)}{\sigma_k^2} = \frac{4 f L_k / V_{hub}}{(1 + 6 f L_k / V_{hub})^{5/3}} \quad (3-25)$$

donde f es la frecuencia en Hz ; el subíndice k denota la dirección del espacio (1, longitudinal; 2, transversal; y 3, vertical); S_k es el espectro de la componente de la velocidad de un solo lado; σ_k es la desviación típica de la componente de la velocidad; y L_k es el parámetro escalar integral de la componente de la velocidad.

Los parámetros espectrales de la turbulencia vienen dados en la Tabla 3-2.

Tabla 3-2. Parámetros espectrales de turbulencia para el modelo de Kaimal.

Componente	Desviación típica	Integral escalar
1	σ_1	$8,1 \Lambda_1$
2	$0,8 \sigma_1$	$2,7 \Lambda_1$
3	$0,5 \sigma_1$	$0,66 \Lambda_1$

Por último, a modo ilustrativo, en la Figura 3-1 se comparan los modelos de Kaimal y Mann para un factor de cizallamiento de $\gamma = 3,9$.

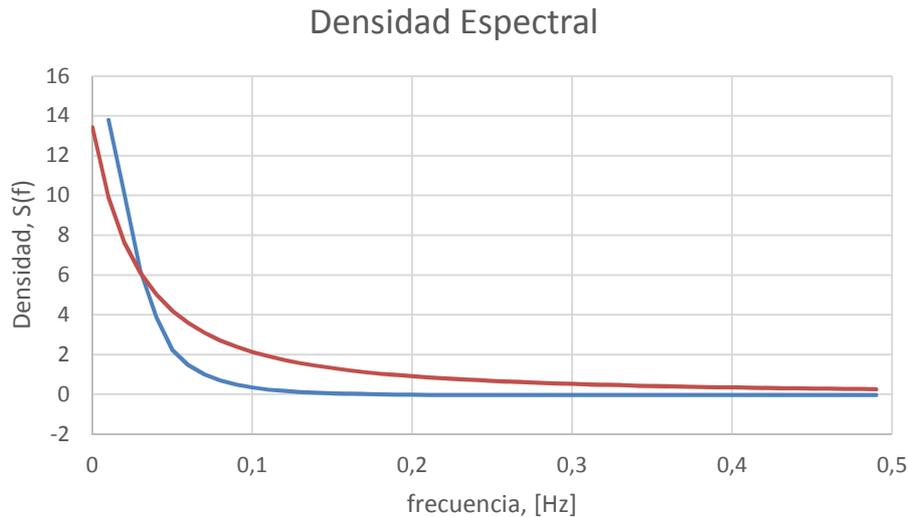


Figura 3-1. Modelo de Kaimal (naranja) y Mann para $\psi=3,9$ (azul).

Esta gráfica muestra las distribuciones de los dos modelos para unas condiciones dadas (que se pueden ver en el Anexo C). Se observa como ambas tienen una forma similar con un gran descenso inicial que se va atenuando hasta llegar a una forma asintótica que tiende a cero para frecuencias grandes. De aquí se deduce que las frecuencias pequeñas dominarán el viento y por tanto tendrán un peso mayor sobre la variable estocástica o , en este caso, la velocidad del viento.

3.2 Aerogenerador

Para poder llevar a cabo el análisis sobre un aerogenerador, es imprescindible conocer las características de éste. Se ha escogido un aerogenerador de 5 MW descrito por J. Jonkman [13]. Tanto la torre como las palas están fabricadas en acero cuyas propiedades son: Módulo de Young $E = 210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$; Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$; y densidad $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. Las características principales del aerogenerador se recogen en la Tabla 3-3.

Tabla 3-3. Propiedades generales del aerogenerador.

Propiedad	Valor
Potencia Nominal	5 MW
Numero de Palas	3
Diámetro del Rotor	126 m
Diámetro de Buje	3m
Altura de Buje	90 m
Velocidad de Arranque (viento)	3 m/s
Velocidad Nominal (viento)	11,4 m/s

Propiedad	Valor
Velocidad de Parada (viento)	25 m/s
Velocidad de Arranque (rotor)	6,9 rpm
Velocidad Nominal (rotor)	12,1 rpm
Masa del Rotor	110.000 kg
Masa del Buje	56.780 kg
Masa de la Góndola	240.000 kg
Masa de la Torre	347.460 kg

3.2.1 Torre

La torre del aerogenerador está construida en acero y su geometría varía linealmente desde la base, con un diámetro exterior de 6,00 m, a la parte superior, donde éste tiene un valor de 3.87 m. Con lo cual la cara exterior de la torre tiene una inclinación constante de 89°. Del mismo modo, el espesor de la pared de la torre varía linealmente con la altura desde un valor de 27 mm, en la base, a 19 mm, en la parte superior.

El material empleado es el acero, cuyas propiedades se indicaron al principio de este apartado. Además, el factor de amortiguamiento estructural es del 1 %. A continuación, se muestra una tabla donde se recoge una discretización de la torre del aerogenerador con sus características.

Tabla 3-4. Características de la torre del aerogenerador.

Sección	Altura [m]	Diámetro [m]	Espesor [mm]	Densidad [kg/m]
1	0,00	6,000	27,0	5.598,46
2	8,76	5,787	26,2	5.239,58
3	17,52	5,574	25,4	4.892,48
4	26,28	5,361	24,6	4.557,17
5	35,04	5,148	23,8	4.233,65
6	43,80	4,935	23,0	3.921,92
7	52,56	4,722	22,2	3.621,97
8	61,32	4,509	21,4	3.333,80
9	70,08	4,296	20,6	3.057,43
10	78,84	4,083	19,8	2.792,84
11	87,60	3,870	19,0	2.540,03

Como se observa en la Tabla 3-4 la torre ha sido dividida en 10 tramos. Las 11 secciones de la Tabla 3-4 ofrecen información de cada uno de los puntos que se utilizarán para modelizar la torre. Los tramos exteriores (superior e inferior) tendrán una longitud de 4,38 m, mientras que el resto de ellos será de 8,76 m. Para calcular la masa total de la torre se ha utilizado una densidad de 8.500 kg/m^3 , superior a la efectiva del acero para tener en cuenta otros elementos no estructurales como son, por ejemplo, la pintura, los tornillos, las soldaduras...etc.

3.2.2 Palas

Una de las partes más importantes, y por lo que se ha escogido este aerogenerador, es que debe conocerse la geometría de las palas. J. Jonkman provee toda esta información en su artículo [13]. En este caso, cada una de las palas viene discretizada en 19 secciones. Cada una de ellas con un tipo de sección normalizado.

Tabla 3-5. Características de las palas.

Sección	r [m]	Giro [°]	Cuerda [m]	Tipo de sección
1	2,0000	0,000	3,542	Cylinder 1
2	2,8667	0,000	3,542	Cylinder 1
3	5,6000	0,000	3,854	Cylinder 1
4	8,3333	0,000	4,167	Cylinder 2
5	11,7500	13,308	4,557	DU 40
6	15,8500	11,480	4,652	DU 35
7	19,9500	10,162	4,458	DU 35
8	24,0500	9,011	4,249	DU 30
9	28,1500	7,795	4,007	DU 25
10	32,2500	6,544	3,748	DU 25
11	36,3500	5,361	3,502	DU 21
12	40,4500	4,188	3,256	DU 21
13	44,5500	3,125	3,010	NACA 64
14	48,6500	2,310	2,764	NACA 64
15	52,7500	1,526	2,518	NACA 64
16	56,1667	0,863	2,313	NACA 64
17	58,9000	0,370	2,086	NACA 64
18	61,6333	0,103	1,419	NACA 64
19	62,9000	0,000	0,700	NACA 64

Para los tipos de secciones usados las abreviaturas corresponden a *Delft University* para “DU” y *National Advisory Committee for Aeronautics* para “NACA”. Además, el número que sigue a la abreviatura identifica cada número de identificación. En la tabla siguiente se muestran los tipos de secciones con la nomenclatura específica.

Tabla 3-6. Identificación de las secciones.

Tipo de sección	Referencia
DU 40	DU99-W-405 LM
DU 35	DU99-W-350
DU 30	DU97-W-300 LM
DU 25	DU91-W2-250
DU 21	DU93-W-210 LM
NACA 64	NACA64-618

Como se puede observar en la Tabla 3-5 se dispone de seis tipos de secciones distintas (sin contar las cilíndricas) cuyas dimensiones geométricas se pueden ver en la imagen siguiente: [14]

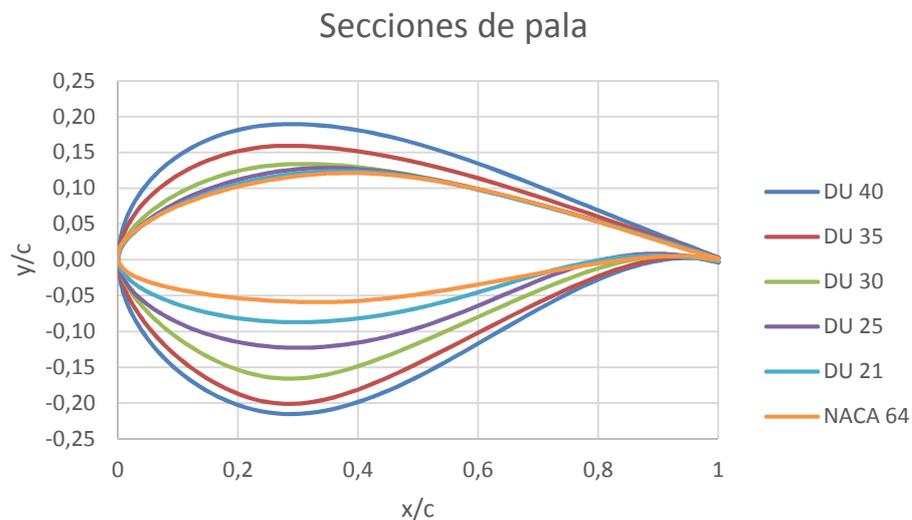


Figura 3-2. Tipos de sección de la pala.

Se pueden ver que las medidas han sido adimensionalizadas, dividiendo éstas por la cuerda, c , de cada una de las secciones.

Para representar la pala basta colocar en orden cada una de las susodichas secciones:

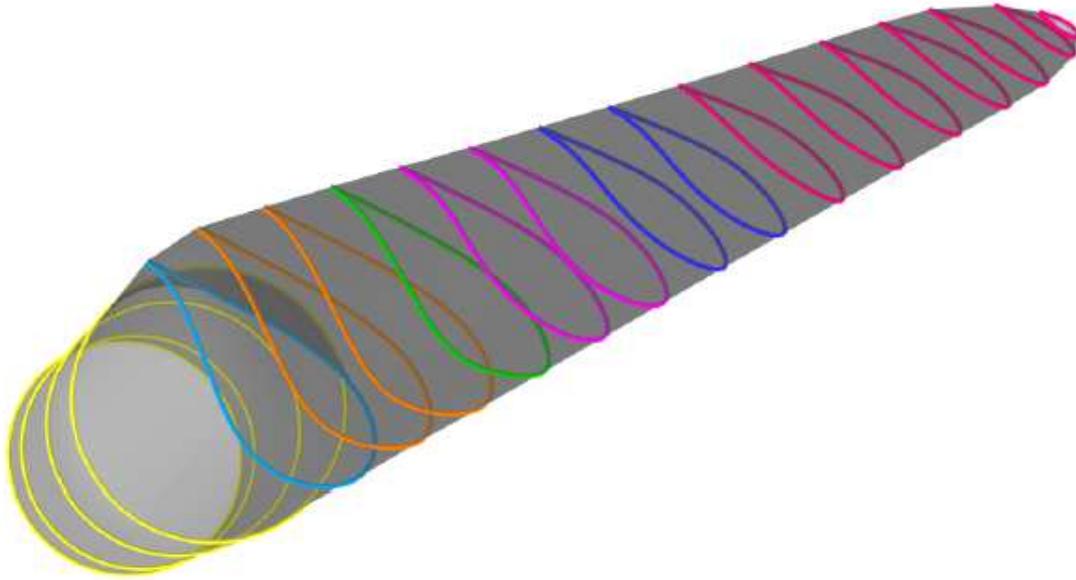


Figura 3-3. Modelización de la pala. [15]

Hay que tener en cuenta además cada uno de los ángulos de giro de las secciones. Esta información viene también recogida en la Tabla 3-5.

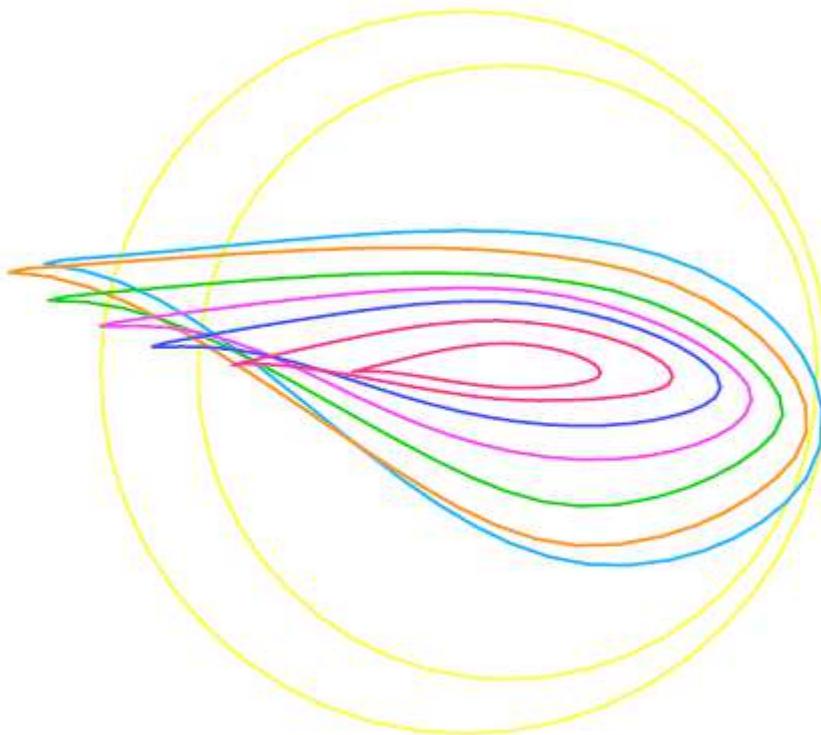


Figura 3-4. Modelización de la pala 2. [15]

Además, el autor también facilita los coeficientes de sustentación, C_L , y resistencia, C_D , en función del ángulo de ataque, α , para cada tipo de sección utilizado.

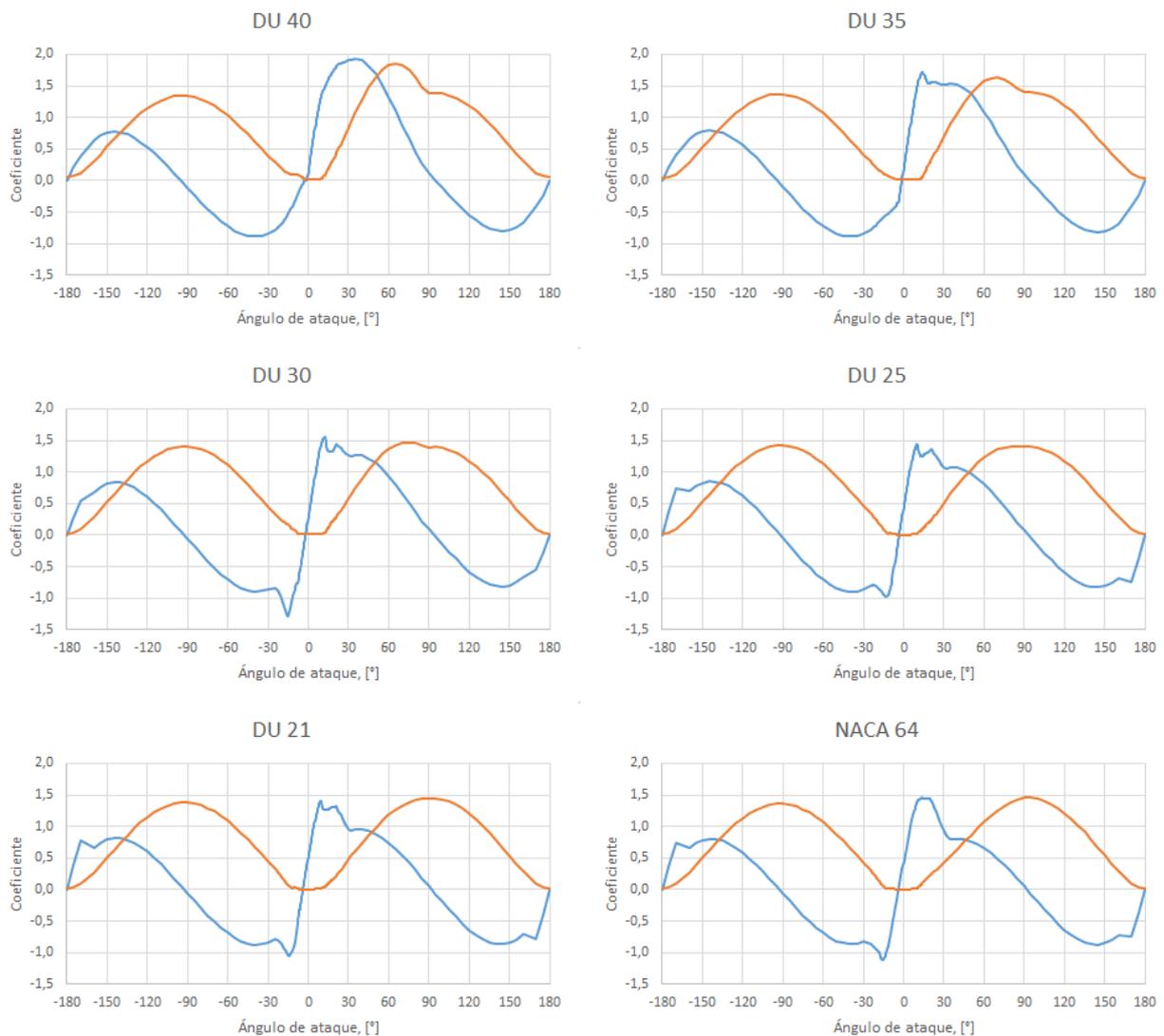


Figura 3-5. Coeficientes de sustentación (azul) y resistencia (naranja) en función del ángulo de ataque.

Estos son los coeficientes que indican la fuerza aerodinámica que el viento ejerce sobre la sección de la pala en función del ángulo de ataque para cada uno de los tipos de perfiles que se usarán, Figura 2-27, eq (2-100) y (2-101). Además, los coeficientes de sustentación y resistencia tienen un valor constante e igual a 0,0 y 0,5 respectivamente para el perfil circular Cylinder 1. Del mismo modo tendrán unos valores de 0,0 y 0,35 para Cylinder 2. Los datos que se han utilizado para representar estas gráficas vienen recogidos en el Anexo E de este proyecto.

Ejemplo 3-1. Con este ejemplo se quiere ver cómo evoluciona la fuerza ejercida por el viento al variar la velocidad de incidencia de éste sobre el rotor.

En efecto, con lo visto anteriormente en este proyecto (apartado 2.3), la fuerza que el viento ejerce sobre las palas depende únicamente de la velocidad de éste y de la geometría de las palas del rotor. Por lo tanto, se calculará la fuerza ejercida por vientos a distintas velocidades. Se tendrá en cuenta las velocidades máximas y mínimas a las cuales el rotor se encuentra en movimiento ($V = 3 \div 25 \text{ m/s}$; Tabla 3-3). De este modo se obtiene la siguiente gráfica.

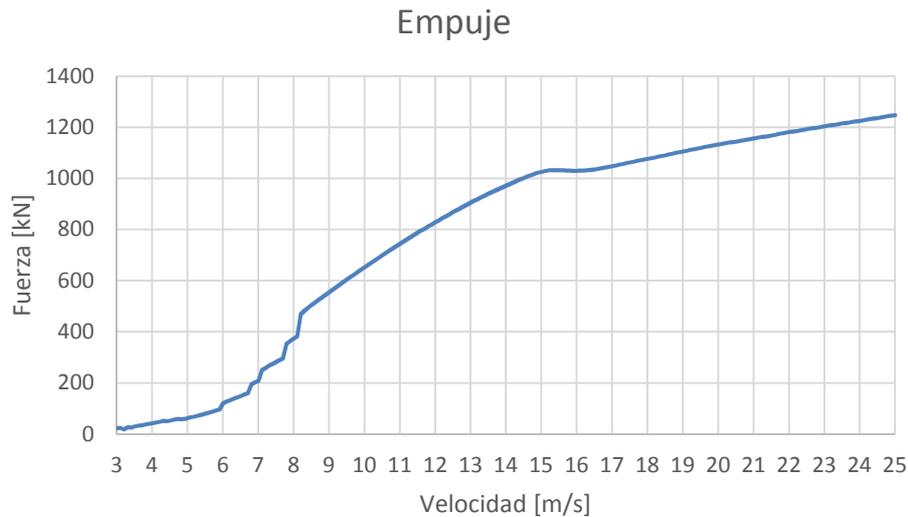


Figura 3-6. Fuerza ejercida por el viento en función de la velocidad.

Hay que tener en cuenta que para obtener esta gráfica se debe aplicar el método BEM para cada una de las secciones en las que se ha discretizado cada una de las palas (19). Cada una de estas secciones será de un tipo y tendrá una geometría distinta (Tabla 3-5) lo que significa que la gráfica se obtiene como resultado de la suma de otras 19 gráficas (una por cada sección) que a su vez han sido calculadas utilizando el método BEM para cada una de las velocidades deseadas (apartado 2.3.4).

Dicho esto, se ve que hay un tramo central donde la relación fuerza-velocidad tiene una gran componente lineal ($V = 8 - 15 \text{ m/s}$). Existe otro tramo final donde la relación es también lineal, pero de menor inclinación ($V \geq 16 \text{ m/s}$). Pero lo que llama más la atención es ese primer tramo inicial donde existen varios saltos en la distribución de la fuerza ($V \leq 8 \text{ m/s}$). Esto podría explicarse viendo la distribución que tiene los coeficientes de sustentación y de resistencia (Figura 2-1). En todos ellos existe un tramo del ángulo de ataque en el que los coeficientes sufren una brusca variación. Si se tiene en cuenta que estas variaciones bruscas en los coeficientes se producen para ángulos de ataque distintos y que su valor también es distinto, se puede considerar que estos saltos en la fuerza se producen a las velocidades en las cuales el ángulo de ataque de una o más secciones produce un cambio brusco en alguno de los dos coeficientes. En el Anexo D se adjunta el código necesario para resolver el método BEM.

4 RESULTADOS

En este capítulo se analizará finalmente la respuesta del aerogenerador ante las distintas cargas que puedan ser generadas por el viento. Para llevar a cabo el ensayo se ha hecho uso de la plataforma ANSYS. El programa utiliza el *Método de los Elementos Finitos* para obtener los resultados. Se realizarán distintos tipos de ensayos que proporcionarán información útil para entender el comportamiento del aerogenerador. De este modo, se realizará en un primer lugar un análisis estático, para poder calcular las distintas tensiones, y conocer su distribución; un análisis modal, el cual ofrecerá información acerca de los distintos modos de vibración; y, por último, un análisis transitorio, donde se conocerá la respuesta del sistema ante una fuerza aleatoria, no periódica como es la ejercida por el viento sobre la góndola en su paso a través de las palas.

4.1 Modelo

Esta primera parte es la más importante en todo análisis estructural que se quiera realizar, ya que, del modelo dependerá que los resultados obtenidos computacionalmente sean, en mayor o menor medida, concordes a los que se obtendrían en la realidad. El programa siempre va a poder ofrecer un resultado ante cualquier análisis que se realice, y dependerá del mejor o peor modelo la veracidad de estos resultados.

Una vez aclarado este punto, se continuará con el modelo de la torre. Recordar que se trata de una torre de 90 m con forma cilíndrica que varía linealmente desde la base, de 6 m de diámetro, a la parte superior, de 3,87. A su vez, la pared de la misma varía igualmente de 27 mm (en la base) a 19mm de espesor. El material es acero de 7850 kg/m^3 de densidad, lo que supone una masa de 347.460 kg para la torre. Además, hay que tener en cuenta, que en la parte superior se encuentra el conjunto buje-góndola-rotor lo que supone una masa añadida de 406.780 kg. Con esta geometría es fácil ver que el comportamiento será semejante al de una barra con un extremo empotrado y el otro libre. Además, para tener en cuenta la masa de rotor, se colocará una masa concentrada en el extremo libre de la barra. Este modelo simplificado del aerogenerador se muestra en la siguiente figura.



Figura 4-1. Modelo simplificado del aerogenerador.

Otro paso importante es el tipo de elementos que se van a utilizar para llevar a cabo el modelo. Se hará uso de dos tipos de elementos distintos que determinan las características de: la barra, elemento BEAM188 que permite crear una sección variable a lo largo de su longitud; y una masa concentrada, MASS21, que equivale a las masas de las palas, el buje y la góndola. Por último, se realizará la operación de mallado que establece el número y disposición geométrica de los elementos. En este caso se han utilizado elementos de $L = 1 \text{ m}$ de longitud en el mallado de la torre. El resultado final de la operación se muestra en la Figura 4-2.

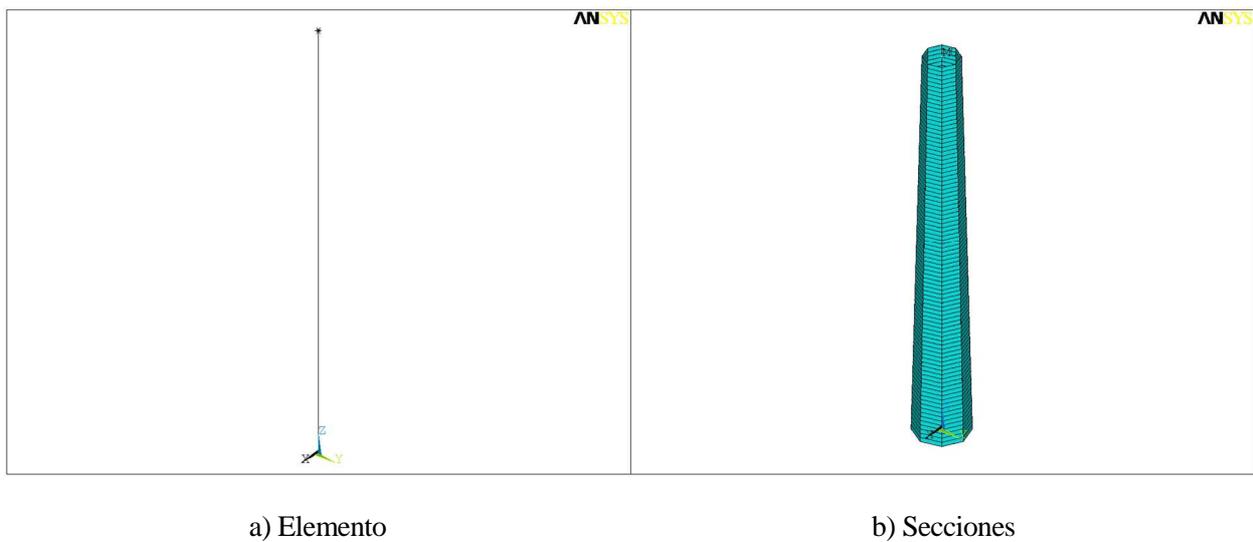


Figura 4-2. Modelo del aerogenerador.

Una vez obtenido el modelo basta aplicar los análisis pertinentes para obtener los resultados deseados.

4.2 Análisis estático

Este análisis consiste simplemente en aplicar una única fuerza y ver como la estructura se deforma ante la misma. La parte interesante de este análisis es obtener los distintos esfuerzos, ya sean axiales, cortantes, flectores o torsores, que aparecen en la estructura como reacción a la fuerza aplicada. Para ello, basta resolver la ecuación (4-1).

$$[K]u = [F] \quad (4-1)$$

Donde se igualan las fuerzas externas, que se aplican sobre la estructura, a las fuerzas internas que de éstas se derivan. Los términos que aparecerán serán: la matriz de rigidez, K ; los desplazamientos, u ; y las fuerzas externas, F .

La fuerza que se va a aplicar será la máxima que el viento podría realizar sobre la góndola. Para ello volviendo a la Tabla 3-3 se comprueba que el rotor detiene su movimiento cuando la velocidad del viento alcanza los $V = 25 \text{ m/s}$. Ésta es la máxima velocidad permitida del viento durante el funcionamiento del rotor, o sea, la que producirá la máxima fuerza. Teniendo en cuenta lo visto anteriormente en el apartado 2.3.4.1 se obtiene:

$$F = 1.256 \text{ kN} \quad (4-2)$$

Esta será, por tanto, la fuerza a aplicar sobre la parte superior de la torre.

4.2.1 Resultados

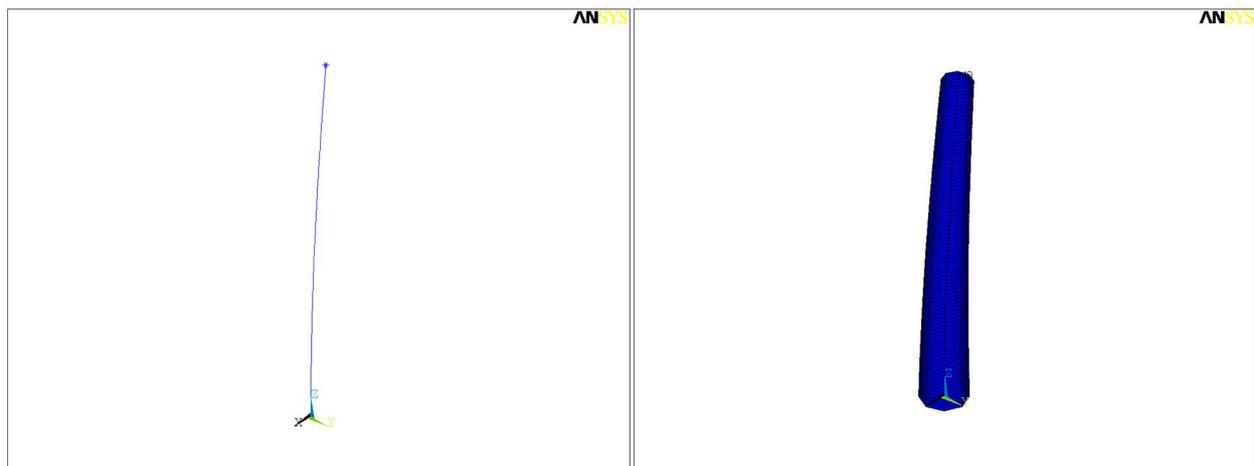
A continuación, se mostrarán los resultados obtenidos al realizar el análisis previamente mencionado. Como en un principio se dijo, la parte más interesante de este análisis será conocer todos los esfuerzos internos (axiales, cortantes, flectores y cortante) derivados de la acción del viento ejercida sobre la torre. Así mismo, se obtendrá también el desplazamiento de la torre asociado a dicha fuerza. Se mostrará solo el desplazamiento de la parte superior, por ser el más representativo.

En la siguiente tabla se recogen los resultados de los esfuerzos internos máximos y el desplazamiento, así como, el punto de la estructura en el que se producen.

Tabla 4-1. Resultados del análisis estático.

Solución	Valor máximo	Localización
Desplazamiento	12,55 cm	Góndola
Axil	8.941 kN	Apoyo
Cortante	1.256 kN	Toda la torre
Momento Flector	112.410 kN·m	Apoyo
Momento Torsor	0 kN·m	Nulo

A continuación se muestran una serie de imágenes que ayudan a entender los resultados obtenidos tanto en desplazamientos, como en distribución de tensiones dentro de la estructura.



a) Elemento

b) Secciones

Figura 4-3. Deformación de la torre.

En primer lugar, se muestra la deformación sufrida por la torre. Se observa como la deformación se produce únicamente en el plano X-Z, plano en el que se encuentra la fuerza. La deformación recuerda a la de una barra con un extremo empotrado y el otro libre (como ya se predijo en un inicio), con el empotramiento impidiendo cualquier giro y desplazamiento en la base y, por el contrario, con un desplazamiento y giro libre en la parte superior.

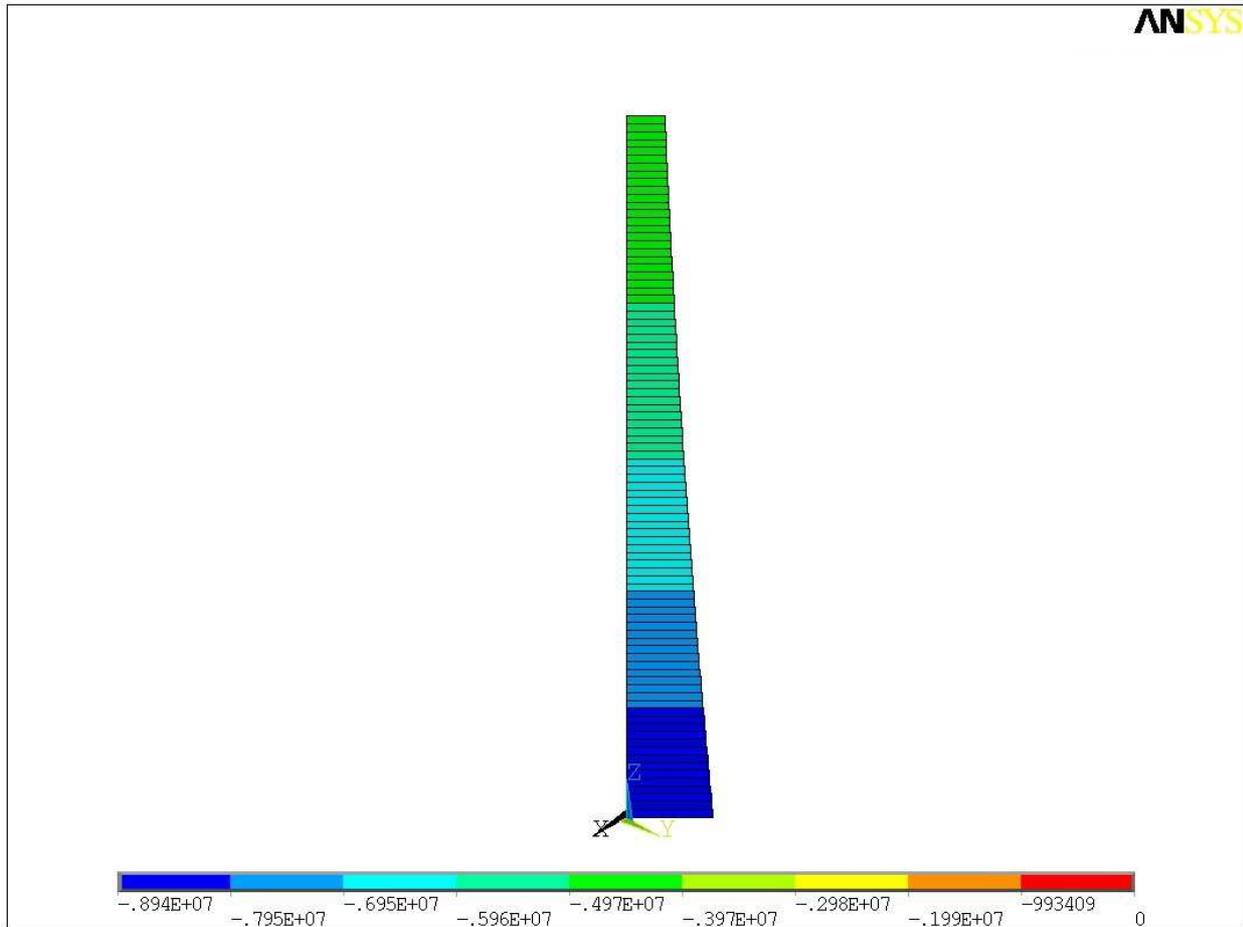


Figura 4-4. Axil.

En esta imagen se muestran la distribución del esfuerzo axial a lo largo de la torre. Toda ella se encuentra sometida a compresión y ésta es producida tanto por el peso del conjunto góndola-buje-rotor como por el peso propio de la torre. De hecho, esto queda claro al observar la distribución de axiles. En la parte superior la compresión es debida solo al peso del conjunto góndola-buje-rotor. A medida que se desciende en el eje de la torre, ésta va soportando el peso de la parte de torre que va quedando por encima además del conjunto mencionado anteriormente. Por esto la distribución de axiles tiene esta forma.

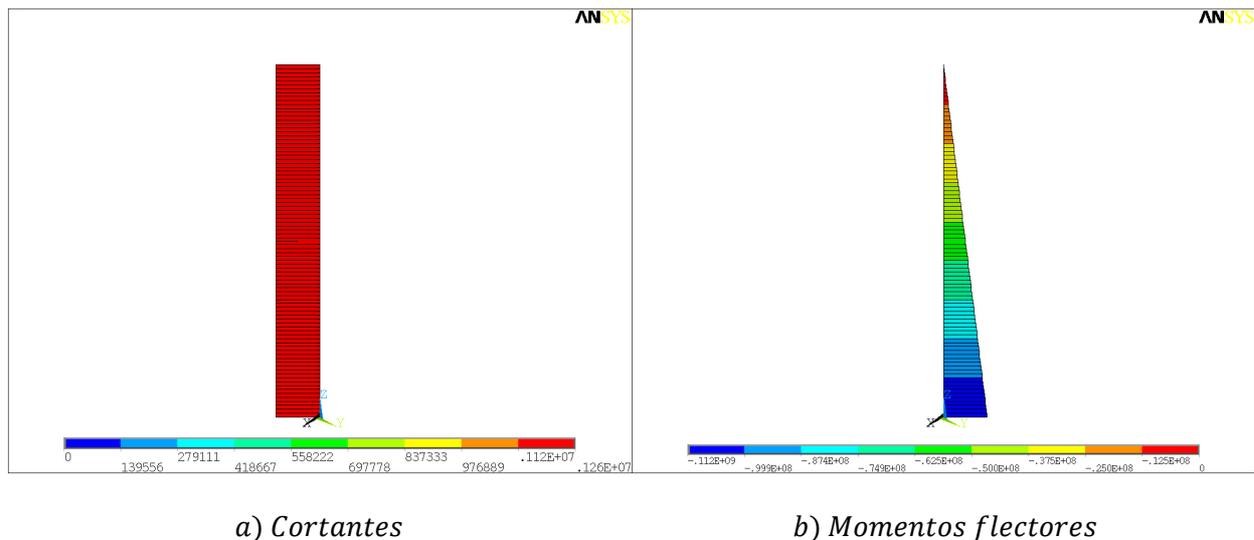


Figura 4-5. Cortantes y momentos flectores.

Por último, se muestra la distribución de cortantes y momentos flectores. La distribución del esfuerzo cortante es constante a lo largo de toda la torre. Esto es debido a que solo existe una única fuerza externa (y, además, puntual) y ésta se aplica sobre la parte superior de la torre. Por el contrario, la distribución de flectores varía linealmente desde un valor nulo en la parte superior hasta llegar a la base. Este momento surge como reacción a la aplicación de la fuerza externa, siendo nulo en el extremo libre y alcanzando su máximo en el extremo empotrado.

4.3 Análisis modal

El análisis modal de una estructura pretende estudiar cómo se comporta una estructura sin tener en cuenta el amortiguamiento del sistema. Este análisis es imprescindible para conocer los distintos modos de vibración del sistema, así como, las frecuencias a las que se producen dichos modos de vibración, o lo que es lo mismo, las *frecuencias naturales*.

Al igual que en el caso estático, se pretende resolver una igualdad de fuerzas externas e internas. En este caso la ecuación a resolver sería la (4-3).

$$[K]u + [M]\ddot{u} = 0 \quad (4-3)$$

Donde, además de la matriz de rigidez, K , se hace uso de la matriz de masas, M . Otra diferencia de esta ecuación con la ecuación (4-1) es que en este caso la solución (el desplazamiento) no es constante en el tiempo, o lo que es lo mismo, describe un movimiento, $u = u(t)$. Otra diferencia es que aquí el vector fuerza es nulo, o sea, las soluciones obtenidas son las que generará el sistema en vibración libre. De este modo, se pueden conocer los distintos modos de vibración del sistema y las frecuencias a la que suceden, o sea, las ya mencionadas frecuencias naturales.

4.3.1 Resultados

Como se dijo anteriormente, los resultados obtenidos con este análisis serán las frecuencias naturales de vibración, así como, los modos de vibración asociados a éstas.

Así mismo, los resultados de este análisis se muestran tanto en la Tabla 4-2 como en Figura 4-6.

Tabla 4-2. Frecuencias naturales.

Modo de vibración.	Frecuencia [Hz]
1	0,72014
2	5,5003
3	14,301
4	25,397

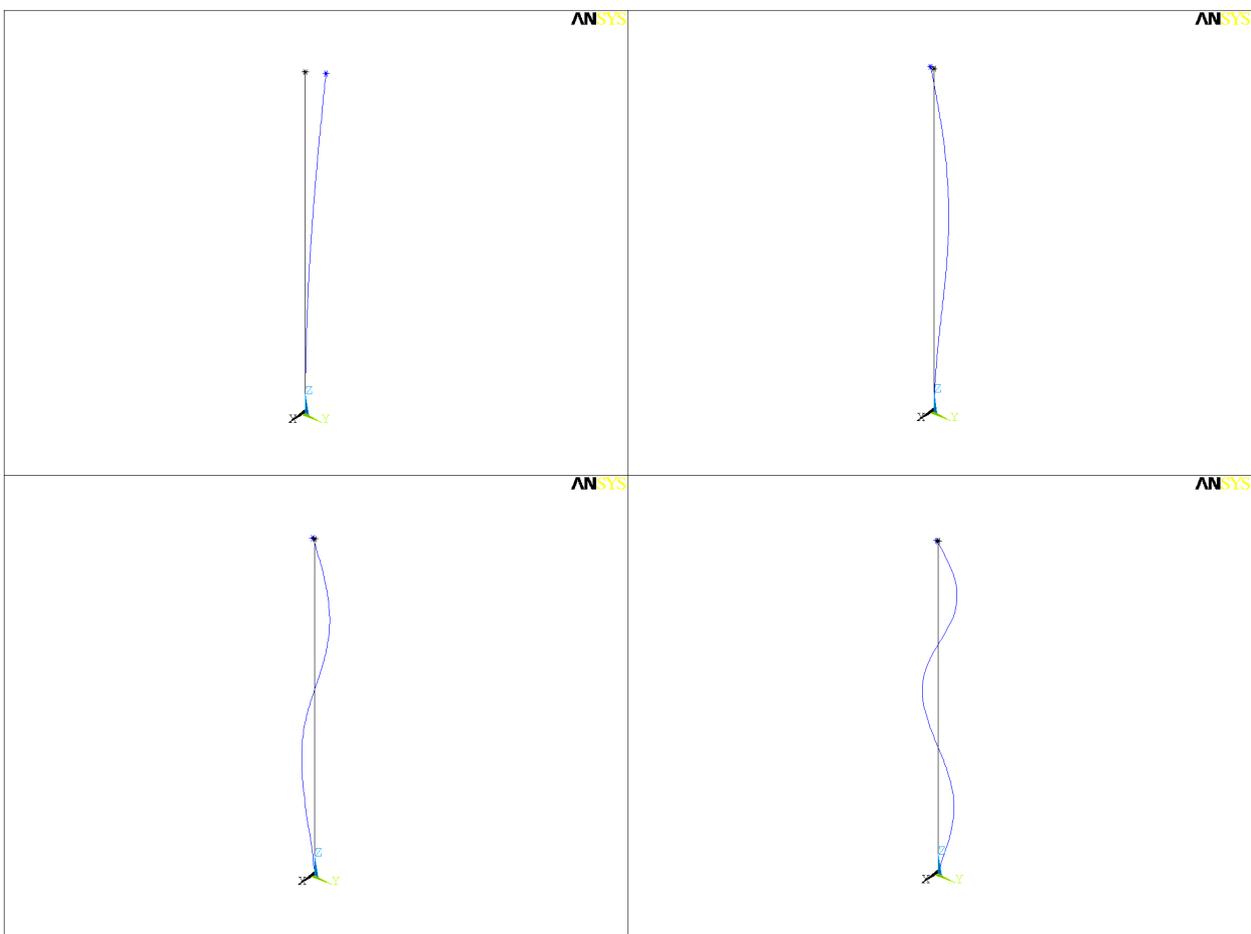


Figura 4-6. Modos de vibración.

Hay que tener en cuenta que se ha eliminado una parte de los resultados obtenidos por el programa. Las frecuencias de vibración obtenidas venían en parejas de a dos con exactamente los mismos valores. Esto es debido a que el programa ofrece los modos de vibración tanto en el eje x e y. Los valores de las frecuencias y los modos asociados son, por tanto, exactamente iguales debido a la simetría de rotación que ofrece la estructura.

Además, otro aspecto, en cuanto a los modos de vibración, es similitud al modo de vibración de una barra con un extremo empotrado y el otro libre. De hecho, si no fuese por la góndola, los modos serían iguales a los de este tipo de barra. Esto era de esperar en un principio teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado 4.1.

4.4 Análisis transitorio

Mientras los análisis anteriores, el análisis estático y el análisis modal, se utilizan para conocer el comportamiento del sistema o bien obtener información sobre el mismo, es el análisis transitorio el que va a ofrecer una respuesta más cercana a la realidad. La principal diferencia de este análisis, es que la excitación del sistema es una variable no periódica, $F(t)$. Para ello, como en ambos casos anteriores, la solución obtenida es la respuesta del sistema ante una excitación externa es resistida por una serie de reacciones internas, o lo que es lo mismo, las fuerzas externas provocan una serie de fuerzas internas en la estructura que la equilibran. Esto viene representado por la ecuación (4-4).

$$[K]u + [C]\dot{u} + [M]\ddot{u} = F \quad (4-4)$$

Donde, además de las matrices de rigidez, K , y de masas, M , se ha hecho uso de la matriz de amortiguamiento, C . Para poder calcular el valor de esta matriz se hará uso el *método Rayleigh* [10]. Para ello basta resolver la ecuación (4-5).

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4-5)$$

Las constantes α y β dependerán del amortiguamiento y de las frecuencias que se quieran utilizar. De este modo: [10]

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_m + \omega_n} \begin{Bmatrix} \omega_m \omega_n \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4-6)$$

En este caso ξ denota el amortiguamiento del material y ω las frecuencias (en rad/s). Se recomienda tomar ω_m como la frecuencia principal de vibración, o lo que es lo mismo, la del primer modo de vibración. En cambio, ω_n debería escogerse como la frecuencia más alta que contribuye significativamente a la respuesta dinámica del sistema. En este caso se ha escogido las frecuencias correspondientes al primer y al tercer modo de vibración:

$$\begin{cases} \omega_1 = 0,720 \text{ Hz} = 4,525 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = 14,301 \text{ Hz} = 89,856 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (4-7)$$

Teniendo en cuenta esto, basta resolver la ecuación (4-6), y obtener

$$\begin{cases} \alpha = 0,43078474 \\ \beta = 0,00105954 \end{cases} \quad (4-8)$$

Estos serán los valores a insertar en el programa para poder calcular la matriz de amortiguamiento.

4.4.1 Entrada del sistema

Otro de los aspectos fundamentales a tener en cuenta en este tipo de análisis es calcular la fuerza, $F(t)$, que va a ser la entrada del sistema a resolver (ecuación (4-4)).

Esta fuerza será la provocada por el viento sobre la góndola en su paso a través del rotor. El proceso para calcular esta fuerza es lo que abarca la mayor parte de lo visto anteriormente en esta memoria. De este modo, el procedimiento será el siguiente:

1. Se elige la velocidad media de viento a la altura de buje y se calcula su desviación típica. Apartado 3.1, ecuación (3-5).
2. Se calcula la densidad espectral. Apartado 3.1, ecuación (3-23)
3. Con ésta se obtendrá la velocidad del viento a lo largo del tiempo como un proceso estocástico. Apartado 2.2, Ejemplo 2-3.
4. Una vez obtenido el vector tiempo, $v(t)$, se hará uso del método BEM (apartado 2.3, ecuación (2-109))

teniendo en cuentas las características de la torre (apartado 3.2) para poder calcular, finalmente, la distribución de la fuerza a lo largo del tiempo, $F(t)$. Apartado 2.3, ecuación (2-109).

En este apartado se realizará, paso a paso, cada uno de los procedimientos llevados a cabo para poder obtener la entrada al sistema o, mejor dicho, la fuerza ejercida por el viento en su paso a través del rotor, $F(t)$.

4.4.1.1 El viento

Para calcular el viento se utilizará el modelo de turbulencia normal (NTM) expuesto en el apartado 3.1.1.3. Para ello basta con escoger la velocidad media del viento a la altura de buje, V_{hub} , para obtener la desviación típica de la turbulencia, σ_1 , mediante la ecuación (3-5). La velocidad media escogida será la **velocidad nominal** para el aerogenerador. Ésta viene recogida en la Tabla 3-3. Además, se escogerá una intensidad de turbulencia, I_{ref} , para **turbulencias medias**. De este modo, se obtiene:

$$\begin{cases} V_{hub} = 11,4 \text{ m/s} \\ \sigma_1 = 1,981 \text{ m/s} \end{cases} \quad (4-9)$$

Una vez obtenidos dichos parámetros se podrá calcular la velocidad del viento en función del tiempo $v(t)$. Para ello se tratará como un proceso estocástico como viene establecido en la norma. Se ha escogido el **método de Kaimal** para hallar la densidad espectral. El procedimiento descrito para resolver un proceso estocástico será el mismo que el visto anteriormente en este proyecto en el Ejemplo 2-2. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4-7.



Figura 4-7. Velocidad del viento.

4.4.1.2 La fuerza

El viento, en su paso a través del rotor, ejerce una fuerza sobre las palas. Esta fuerza será soportada por la torre a la altura de la góndola, en su unión con el rotor. Dicha fuerza dependerá de la geometría de las palas, así como, de la velocidad de giro del rotor. En el presente proyecto será utilizado el **método BEM** para calcular la citada fuerza. Este método viene largamente explicado en el apartado 2.3. Con lo cual, resolviendo el sistema de ecuaciones (2-111) utilizando un proceso iterativo (apartado 2.3.4.1) se obtiene:

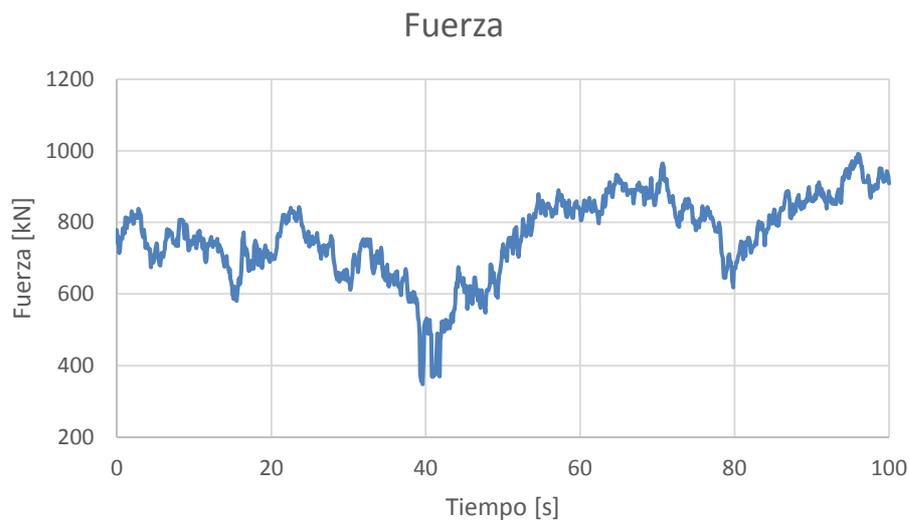


Figura 4-8. Fuerza ejercida por el viento.

Una característica de la Figura 4-8 es su gran similitud con la Figura 4-7. Esto es fácilmente explicable si se observa de nuevo Figura 3-6. Esta muestra como varía la fuerza ejercida por el viento en función de la velocidad de éste. Se observa que para el tramo de velocidades que se obtiene ($V = 8 \div 14 \text{ m/s}$) la fuerza sigue una clara linealidad con respecto a la velocidad, lo que explica la semejanza entre las dos figuras mencionadas anteriormente.

Esta fuerza, $F(t)$, es la que ejerce el viento sobre la góndola en su paso a través del rotor, y, por tanto, la fuerza a sustituir en la ecuación (4-4).

A continuación, se muestra la transformada de Fourier de la función $F(t)$.



Figura 4-9. Dominio de la frecuencia del vector fuerza.

En esta gráfica se observa que las frecuencias que dominan el viento son las bajas frecuencias ($< 0,05 \text{ Hz}$). Ésta podrá ser comparada con la transformada de la función desplazamientos que será obtenida en el siguiente apartado.

4.4.2 Resultados

Una vez obtenida la fuerza que produce el viento ya se dispone de todas las herramientas para resolver el problema que se plantea en el presente proyecto. Para ello se realizará un análisis durante 100 s que mostrará el desplazamiento de la parte superior de la torre. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4-10.

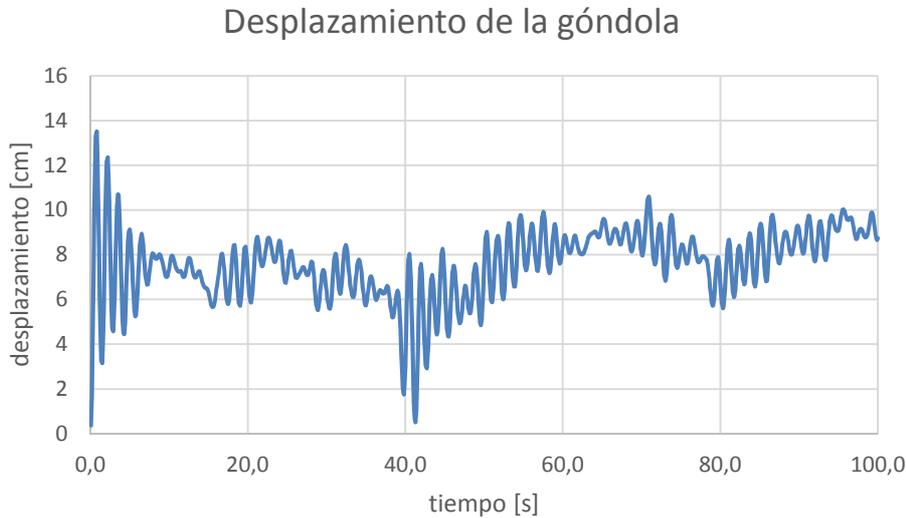


Figura 4-10. Desplazamiento de la góndola.

Se observa que al igual que la velocidad del viento, la torre sufre un desplazamiento oscilatorio, ya que este es provocado por la fuerza ejercida por el viento. Un estudio interesante es comparar estos resultados con los obtenidos en el modelo estático, o sea, con el obtenido en la ecuación (4-1). Para ello es necesario resolver esta ecuación para cada una de las velocidades de las que está compuesta el viento $v(t)$. Es decir, resolver el caso estático, eq.(4-1), en cada instante de tiempo. Los resultados se observan en la siguiente figura:

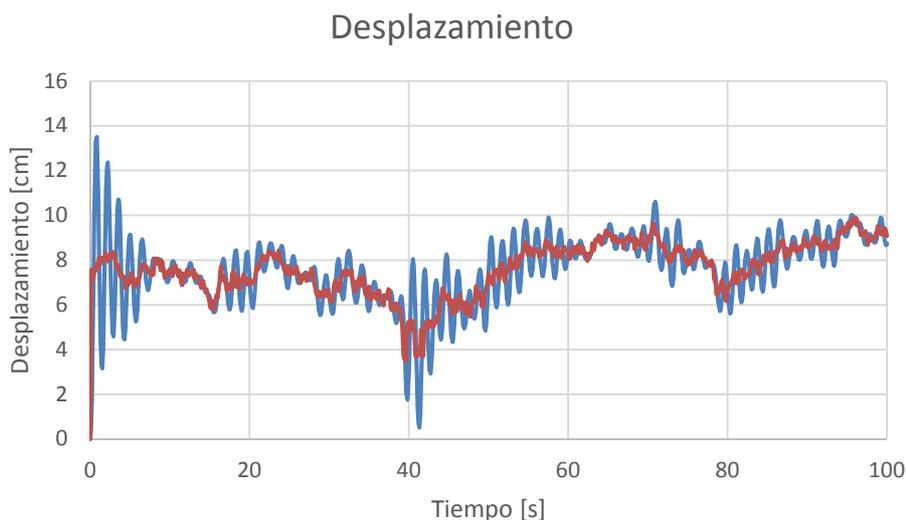


Figura 4-11. Comparación del análisis transitorio y estático.

Se observa que el movimiento oscilatorio se produce en torno a la solución estática. Y, además, las oscilaciones son más acentuadas cuanto mayor es el gradiente de fuerza, como por ejemplo en el instante inicial, donde se

parte de una velocidad nula, o cerca del instante 40 s, donde la velocidad sufre una variación rápida en su módulo. Este comportamiento era predecible si se tiene en cuenta la ecuación (4-4) por la cual el comportamiento de la torre del aerogenerador será semejante a la de una masa (M) con un muelle (K) y un amortiguador (C) sobre la que se aplica una fuerza (F), o, lo que es lo mismo, un sistema de un grado de libertad, como se vio en el apartado 2.1 de este proyecto. De hecho, la similitud entre las ecuaciones (4-4) y (2-1) es más que evidente. La única diferencia es que mientras en el sistema de un grado de libertad la solución es el desplazamiento de un único punto, en la ecuación (4-4) se obtienen los desplazamientos de tantos puntos como nodos en los que se ha discretizado la torre.

Otro aspecto cuyo estudio es interesante es el dominio de la frecuencia del desplazamiento obtenido. Este se muestra a continuación

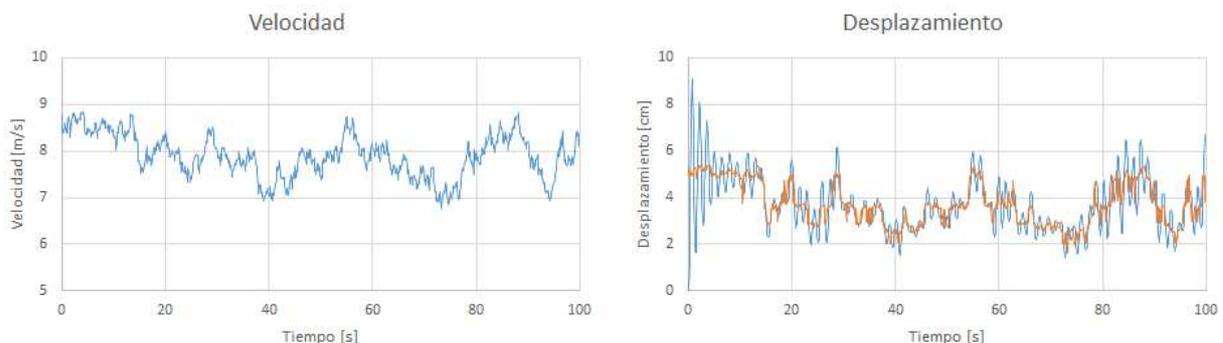


Figura 4-12. Dominio de la frecuencia del desplazamiento

Como era de esperar, aparecen dos picos en el dominio de la frecuencia. Uno de ellos corresponde a las frecuencias que dominan el viento (Figura 4-9), mientras que el otro corresponde con la frecuencia natural de la estructura (Figura 4-6).

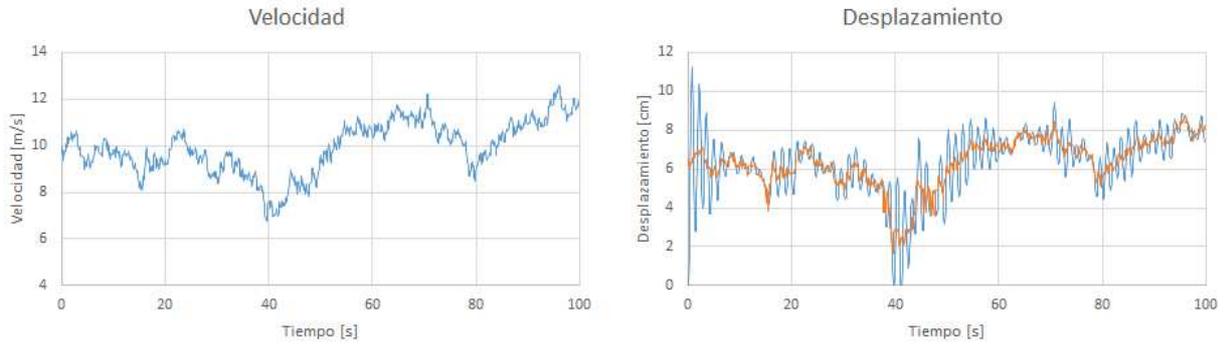
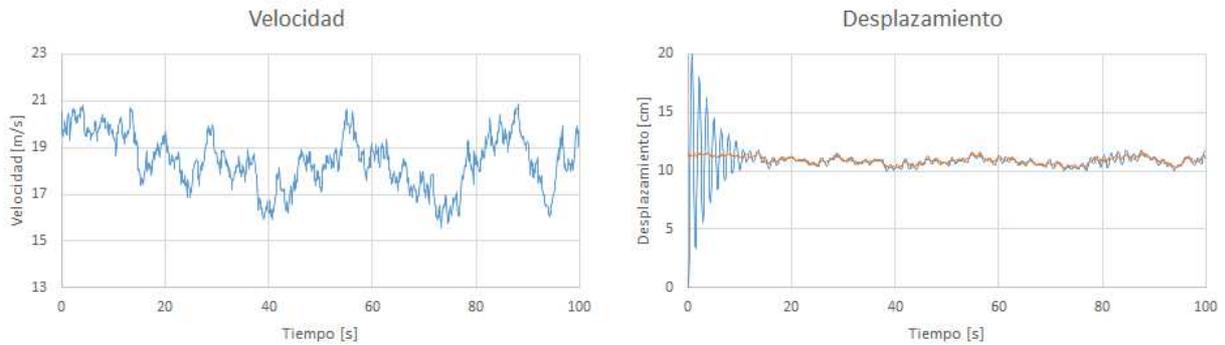
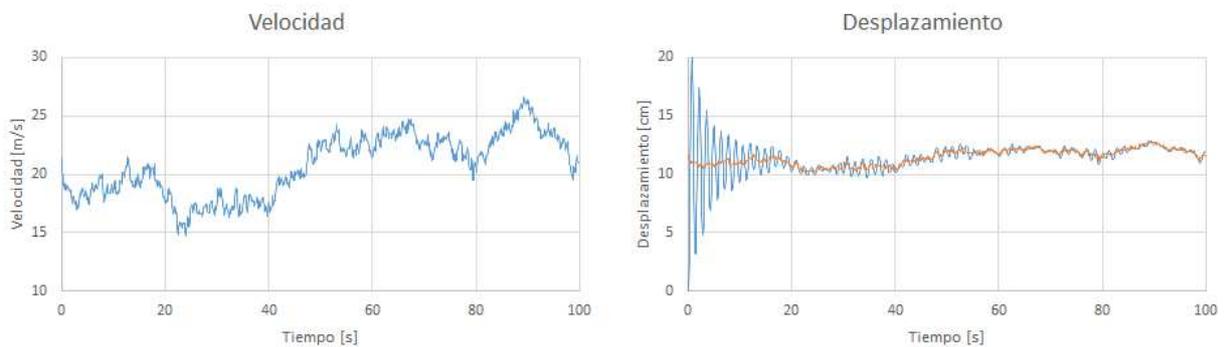
A continuación, se realiza un estudio paramétrico para distintas velocidades medias. En particular, se realizarán cinco pruebas más para 5, 10, 15, 20 y 25 m/s . A continuación, se representarán la distribución de la velocidad y el desplazamiento de la góndola para cada una de las velocidades anteriormente citadas. Además, se mostrará junto con el desplazamiento obtenido, la solución estática en cada instante de tiempo como en la Figura 4-11.

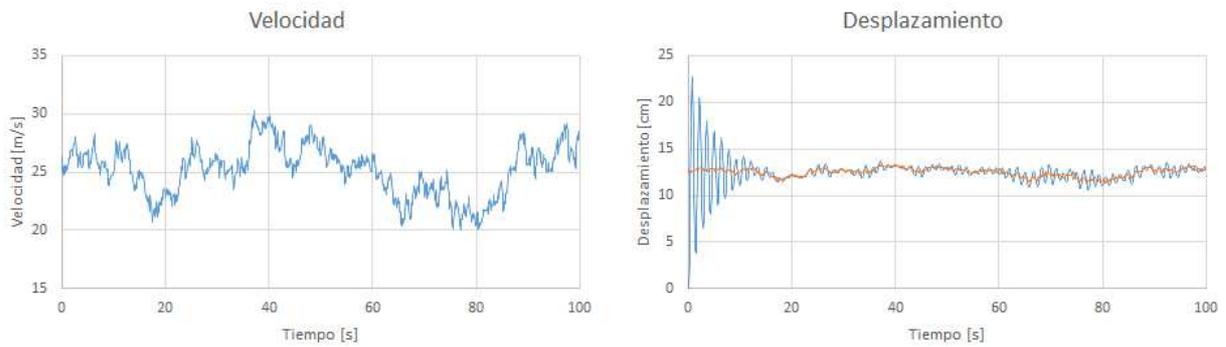
De este modo:



a) Velocidad

b) Desplazamiento (azul) y sol. estat. (naranja)

Figura 4-13. Velocidad y desplazamiento para $V = 5$ m/s.a) *Velocidad*b) *Desplazamiento (azul) y sol. estat. (naranja)*Figura 4-14. Velocidad y desplazamiento para $V = 10$ m/s.a) *Velocidad*b) *Desplazamiento (azul) y sol. estat. (naranja)*Figura 4-15. Velocidad y desplazamiento para $V = 15$ m/s.a) *Velocidad*b) *Desplazamiento (azul) y sol. estat. (naranja)*Figura 4-16. Velocidad y desplazamiento para $V = 20$ m/s.



a) Velocidad

b) Desplazamiento (azul) y sol. estat. (naranja)

Figura 4-17. Velocidad y desplazamiento para $V = 25 \text{ m/s}$.

Para todos y cada uno de estos ensayos la solución es similar a la que se expuso anteriormente. El desplazamiento de la góndola describe siempre un movimiento oscilatorio en torno a la solución estática.

Sin embargo, se observa una gran diferencia entre el movimiento oscilatorio provocado a pequeñas velocidades y el provocado a velocidades mayores. La clave para poder entender estos resultados radica en la Figura 3-6. Si se reflexiona sobre esta curva (la que realiza la fuerza del viento en función de su velocidad) se observa la existencia de tres tramos diferenciados de los que ya se habló con anterioridad en su apartado correspondiente. Para velocidades pequeñas, ($V < 8 \text{ m/s}$) la fuerza sufre una gran variación en función de su velocidad. Esta variación en la fuerza de empuje provocará grandes desplazamientos oscilatorios en la góndola del aerogenerador. Por el contrario, para grandes velocidades ($V > 15 \text{ m/s}$) el gradiente de la fuerza es mucho menor, lo que supone menores cambios en la fuerza de empuje al variar la velocidad del viento, y, por lo tanto, menor desplazamiento oscilatorio en el movimiento de la góndola.

5 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

Para concluir con este proyecto, se expondrá en este último capítulo las conclusiones principales obtenidas como resultado de la realización del mismo. Además de un resumen de los aspectos fundamentales que se derivan del presente proyecto, se expondrán una serie de desarrollos futuros que podrán ser llevados a cabo a fin de completar y/o mejorar tanto los resultados como las conclusiones obtenidas.

5.1 Conclusiones

En este apartado se recogerá los aspectos más importantes que se han concluido al desarrollar este proyecto.

Para empezar, el primer objeto que se ha concluido a lo largo del proyecto es como describir el viento. La velocidad del viento es una variable cuyo valor en cada instante de tiempo es desconocido, por ello se hace uso de una velocidad media y de una desviación típica que permitirá definir la velocidad como una variable aleatoria. Ésta se resolverá como un proceso estocástico. Deberá utilizarse un modelo reconocido para la coherencia definido como la magnitud del espectro cruzado dividido por el auto-espectro para las componentes de la velocidad longitudinal en puntos separados espacialmente en un plano normal a la dirección longitudinal. Los modelos que se utilizarán para resolver el proceso estocástico serán el modelo de turbulencia de cizallamiento uniforme de Mann [5] o bien, el modelo de coherencia espectral y exponencial de Kaimal [6]. Todo esto viene recogido en la Norma [3], así como otros aspectos importantes a tener en cuenta para resolver el problema de las cargas de viento sobre un aerogenerador.

Además, otro aspecto importante ha sido conocer la interacción entre el viento y las palas del rotor. El viento, en su paso a través de las palas del rotor, crea, además de un momento que permite girar las palas y de esta forma convertir la energía cinética del viento en energía mecánica, un empuje en la dirección longitudinal. Este empuje conlleva un desplazamiento de la parte superior de la torre y por tanto de toda la estructura misma. Pero para conocer ya sea el empuje o el momento creado por el viento es necesario conocer como interactúan el viento y las palas. Este es uno de los aspectos fundamentales del proyecto. El método BEM es un método que permite resolver este problema. Para ello aúna varios teoremas fundamentales de la física como son el teorema de la cantidad de movimiento, el teorema del momento cinético y además realiza un equilibrio de fuerzas en el elemento pala. Con esto, conocida la geometría de la pala y, por tanto, sus características aerodinámicas, se podrá conocer la tanto la fuerza de empuje como el momento creado para una velocidad dada.

Por otro lado, es necesario conocer cómo responde la torre del aerogenerador a este empuje provocado por el viento. Para ello se resolverá un problema con N grados de libertad de modo similar a como se resuelve el sistema de un grado de libertad. Será necesario discretizar la torre en tantos elementos como sea necesario para obtener unos resultados que sean parecidos a los obtenidos en el problema real. La torre de un aerogenerador, debido a su geometría, responde de manera similar al de una barra con un extremo empotrado y otro libre sobre el que existe una masa que corresponde al conjunto de la góndola, el buje y el rotor. Sobre esta masa se aplicará la fuerza producida por el viento en dirección perpendicular al eje de la barra. Conocida la fuerza y las características de la torre se podrá calcular el desplazamiento asociado y, por tanto, la respuesta del sistema.

En cuanto a esta respuesta, es muy interesante ver como es el desplazamiento de la torre. Debe tenerse en cuenta que al ser la velocidad del viento tratada como una variable estocástica, está tendrá un valor que oscilará aleatoriamente entre unos valores definidos por la velocidad media y la variación típica, lo que significa que la fuerza asociada a estas velocidades será también una variable del mismo tipo, o sea, oscilará de manera totalmente aleatoria. A este punto es fácil imaginar que el desplazamiento provocado por estas fuerzas describirá, del mismo modo, un movimiento oscilatorio. Pero lo que es realmente interesante es comparar este desplazamiento (teniendo en cuenta la masa, el amortiguamiento y la rigidez del sistema) con el desplazamiento obtenido teniendo en cuenta solo la rigidez del sistema, es decir comparar la solución dinámica con la solución estática. Se ha comprobado que el movimiento que se obtiene resolviendo el sistema es efectivamente un movimiento oscilatorio, pero se ha comprobado también que este movimiento oscilatorio se produce en torno a la solución estática.

Así mismo, se ha comprobado que, para el perfil de pala seleccionado en este proyecto, el aumento de la velocidad media del viento se reducen las oscilaciones provocadas en la torre. Esto se debe al perfil de fuerzas producidas por la velocidad del viento. Este diferencial disminuye para altas velocidades. Lo que supone que, para una velocidad media dada, al aumentar su valor, el rango de velocidades asociado (la velocidad en cada instante de tiempo) producirá un menor rango de fuerzas y, por lo tanto, las oscilaciones en torno a la posición de equilibrio (instantáneo) serán menores.

5.2 Desarrollos futuros

Existen varios aspectos por los cuales este proyecto pueda mejorar los resultados acercando éstos más a la realidad y teniendo en cuenta más hipótesis y condiciones de las expuestas aquí.

Uno de los aspectos en los que se podría mejorar el presente proyecto es en el modelo utilizado en la interacción viento-palas. Como se vio en el apartado correspondiente, el método utilizado es el Blade Element Momentum. Este modelo es uno de los más usados en esta materia ya que aúna algunos de los teoremas fundamentales además de necesitar un corto periodo de tiempo para realizar los cálculos. Pero, como ya se dijo con anterioridad, este método asume una serie de simplificaciones que disminuyen el tiempo de procesamiento. Esto provoca que, aun ofreciendo buenos resultados en algunas condiciones, en otras, estos resultados deberán ser subsanadas con métodos correctivos. En este ámbito podrían usarse otros métodos que describen de forma más realista el flujo tridimensional. Métodos como el *Método de Paneles* o el método de la *Línea Sustentadora*. Aunque, la manera más efectiva, la cual permite conocer el movimiento de cualquier fluido y, por tanto, la fuerza aerodinámica producida, es el uso de las *Ecuaciones de Navier-Stokes*. Estas ecuaciones se resuelven mediante el uso de análisis numérico o CFD (del inglés, *Computational Fluid Dynamics*). Su resolución es larga y tediosa. Así mismo, existen programas que permiten que permiten reducir el tiempo de operación realizando simplificaciones en el modelo original.

Por otro lado, se podría completar la información obtenida desde un punto de vista estructural. En este apartado, por cómo se ha desarrollado este proyecto, no se han tenido en cuenta las palas. No se ha hecho un análisis estructural para conocer los distintos esfuerzos internos que se producen en el interior de cada una de las aspas del aerogenerador. En este proyecto las palas solo se han considerado como un mecanismo que permite transformar la velocidad del viento incidente en una fuerza puntual sobre la torre del aerogenerador.

Además, continuando en materia estructural, otro aspecto a tener en cuenta es la cimentación. Se podría realizar un análisis para ver cómo afectan los distintos tipos de cimentación (normal es el uso de pilotes) y de distintas configuraciones en la estructura del aerogenerador, así como en el terreno, o incluso en aerogeneradores colocados sobre la superficie marina (*offshore*).

Como se dijo anteriormente, para realizar los cálculos obtenidos, se ha hecho uso de un aerogenerador offshore de 5MW. En este aspecto podrían realizarse más análisis para distintos aerogeneradores con distintas dimensiones y, lo que es más importante, distintos perfiles de pala. Distintos perfiles de pala provocarían una distinta interacción entre el viento y el aerogenerador lo que podría producir valores muy distintos obtenidos a los obtenidos en este proyecto.

Por último, además de realizar ensayos para distintos aerogeneradores, podrían realizarse para distintos modelos

de viento. Para los cálculos realizados se ha utilizado unas condiciones normales de viento. Pero, según la normativa, existen condiciones extremas de viento. Las condiciones extremas del viento incluyen los eventos de cizallamiento, así como las velocidades de pico del viento debidas a las tormentas y a las variaciones rápidas de la velocidad del viento y de la dirección. Además, existen otras condiciones ambientales (climáticas) aparte del viento que pueden afectar a la integridad y la seguridad del aerogenerador, por la acción térmica, fotoquímica, corrosiva, mecánica, eléctrica u otras acciones físicas. Además, las combinaciones de los parámetros climáticos dados pueden incrementar su efecto. Estas condiciones ambientales serán, entre otras: temperatura; humedad; densidad del aire; radiación solar; lluvia, granizo, nieve y hielo; sustancias químicas activas; partículas mecánicamente activas; salinidad; caída de rayos; y terremotos.

De este modo, haciendo uso de todo lo anterior podría completarse y mejorarse los resultados y conclusiones obtenidos en este proyecto.

REFERENCIAS

- [1] The European Wind Energy Association, *Wind in Power*, Feb 2016.
- [2] Global Wind Energy Council, *Global Wind Report*, 2015.
- [3] *UNE-EN 61400-1 Aerogeneradores Parte 1: Requisitos de diseño* (IEC 61400-1:2005), Nov 2005.
- [4] J.C. Kaimal, J.C. Wyngaard, Y. Izumi, and O.R. Cote, *Spectral characteristics of surface-layer turbulence*, Q.J.R. Meteorol. Soc., v. 98, 1972, pp. 563-598.
- [5] J. Mann, The spatial structure of neutral atmospheric surface-layer turbulence, *J. of Fluid Mech.*, v. 273, 1994, pp. 141-168.
- [6] *UNE-EN 61400-1 Aerogeneradores Parte 1: Requisitos de diseño* (IEC 61400-1:1999), Feb 2004.
- [7] T. von Karman, *Progress in the statistical theory of turbulence*, Proc. Nat. Acad. Sci., v. 34, 1948, pp. 530-539.
- [8] J.D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*, MacGraw-Hill, New York, 5th edition, Mar 2010.
- [9] H. Abedi, L. Davidson, S. Voutsinas, *Development of free vortex wake method for aerodynamics loads on rotor blades*, Feb 2013.
- [10] R.W Clough, J Penzien, *Dynamic of Structures*, McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 2003.
- [11] E. Strømmen, *Theory of Bridge Aerodynamics*, Springer, New York, 2nd edition, 2010.
- [12] T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins, E. Bossanyi, *Wind Energy Handbook*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2001.
- [13] J. Jonkman, *Defininition of a 5-MW Reference Wind Turbine for Offshore System Development*, Technical report, National Renewable Energy Laboratory, NREL, Feb 2009.
- [14] https://github.com/perryjohnson/biplaneblade/tree/master/alt_biplane_configs/biplane_flap-asym_no-stagger/airfoils
- [15] Y. Bazilevs, *3D Simulation of Wind Turbine Rotors at Full Scale. Part I: Geometry Modeling and Aerodynamics*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Sep 2014.

Anexo A

```
%
%
% SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD
% Usando la transformada rápida de Fourier
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 1. INPUT
m = 1; % masa [kg]
k = 10; % constante de rigidez [N/m]
z = 0.05; % amortiguamiento [%]
fq_df = []; % vector de frecuencias [Hz]
Hw_df = []; % vector H(w)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n_df=length(fq_df);
fq_step=(fq_df(n_df)-fq_df(1))/n_df;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 2. OPERACIÓN
fs_df=n_df*fq_step; % frecuencia de Nyquist
ut_df=ifft(Hw_df)*2*fs_df; % vector del desplazamiento
w_step=2*pi*fq_step;
t_step=2*pi/(n_df*w_step);
t_df=(0:n_df)*t_step; % vector tiempo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Anexo B

```

%
%
% MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 1. INPUT
w = [];
S = [];
T_ini = 0; % Tiempo inicial
T_fin = 60; % Tiempo final
dt = 0.1; % Variación del tiempo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 2. DISCRETIZACIÓN DE LA FUNCIÓN MEDIANTE EL PUNTO MEDIO
NP=length(S); % Longitud del vector S(w)
dw=0.2; % Variación de frecuencia
N=abs((w_max-w_ini)/dw)
di=(np-1)/N
di_med=abs(di/2)
for k=1:N
    S_pm(k)=S(1+di_med+(k-1)*di); % Aproximación de S mediante punto medio
    w_pm(k)=w(1+di_med+(k-1)*di); % Aproximación de w mediante punto medio
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 3. OBTENCIÓN DE LA VARIABLE ESTOCÁSTICA
for k=1:N
    c(k)=sqrt(2*dw*S_pm(k)); % Valor de la variable c k-ésima
    fi(k)=2*pi*rand; % Componente aleatoria
end
nt=abs((T_fin-T_ini)/dt)+1; % Número de puntos de variable estocástica
for j=1:nt
    t(j)=T_ini+(j-1)*dt;
end
X=zeros(nt,N); % Variable SIN random
X_rand=zeros(nt,N); % Variable CON random
X_tot=zeros(nt,1);
X_tot_rand=zeros(nt,1);
for k=1:N
    w_k=w_pm(k);
    S_k=S_pm(k);
    c_k=c(k);
    fi_k=fi(k);
    for j=1:nt
        t_j=t(j);
        X(j,k)=c_k*cos(w_k*t_j);
        X_rand(j,k)=c_k*cos(w_k*t_j+fi_k);
        X_tot(j)=X_tot(j)+X(j,k);
        X_tot_rand(j)=X_tot_rand(j)+X_rand(j,k);
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Anexo C

```

%
%
% OBTENCIÓN DE LA DENSIDAD ESPECTRAL
% Con el método de Mann y el método de Kaimal
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 1. INPUT:
U = 10; % Velocidad longitudinal [m/s]
V = 5; % Velocidad transversal [m/s]
W = 3; % Velocidad vertical [m/s]
gamma = 3.9; % Gamma, parámetro de distorsión de
% cizallamiento adimensional
nh = 20; % Puntos para la hipergeométrica
t_end = 600; % tiempo a estudiar [s]
t_step = 1; % paso tiempo [s]
h_hub = 90; % altura de buje [m]
v_hub = 10; % velocidad a la altura de buje [m/s]
sigma = 1; % desviación típica de la velocidad
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 2. PASOS PREVIOS
sigma_iso=0.55*sigma;
fs=1/t_step; % frecuencia de muestreo [Hz]
fq_max=1/(2*t_step); % frecuencia de Nyquist [Hz]
N=50; % número de puntos de la función
% densidad espectral
fq_step=fq_max/N; % incremento de frecuencia [Hz]
fq=0:fq_step:fq_max-fq_step; % vector frecuencia [Hz]
w_max=fq_max*2*pi; % vector periodo [rad/s]
w_step=w_max/N;
w=(2*pi).*fq;
if h_hub<60 % valor del parámetro escalar
    L_k=0.8*0.7*h_hub; % integral de la componente de la velocidad
else
    L_k=0.8*0.7*60;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 3. MÉTODO MANN
v_k2=-30:1:30;
v_k3=-30:1:30;
for nf=1:length(fq)
    nf
    f1=fq(nf);
    k1=2*pi*L_k*f1/v_hub;
    phi_l1(nf)=0;
    for n2=1:length(v_k2)
        k2=v_k2(n2);
        for n3=1:length(v_k3)
            k3=v_k3(n3);
            k=sqrt(k1^2+k2^2+k3^2);
            a1=1/3;
            a2=17/6;
            b1=4/3;
            z=-k^-2;
            a1_n=1;
            a2_n=1;
        end
    end
end

```

```

b1_n=1;
F21=1;
for n=1:nh
    a1_n=a1_n*(a1+n-1);    % símbolo de Pochhammer
    a2_n=a2_n*(a2+n-1);    % símbolo de Pochhammer
    b1_n=b1_n*(b1+n-1);    % símbolo de Pochhammer
    F21=F21+(a1_n)*(a2_n)/(b1_n)*(z^n)/factorial(n);
end
B_k=y/(k^(2/3)*sqrt(F21));
k0=sqrt(k^2+2*B_k*k1*k3+(B_k*k1)^2);
C1=(B_k*k1^2*(k1^2+k2^2-...
    k3*(k3+B_k*k1))/(k^2*(k1^2+k2^2));
C2=(k2*k0^2)/((k1^2+k2^2)^(3/2))*...
    atan((B_k*k1*sqrt(k1^2+k2^2))/...
    (k0^2-(k3+B_k*k1)*k1*B_k));
Z1=C1-(k2/k1)*C2;
Z2=(k2/k1)*C1+C2;
E_k0=1.453*k0^4/((1+k0^2)^(17/6));
phi_11(nf)=phi_11(nf)+E_k0/(4*pi*k0^4)*(k0^2-k1^2-...
    2*k1*(k3+B_k*k1)*Z1+(k1^2+k2^2)*Z1^2);
end
end
S1_f(nf)=sigma_iso^2*4*pi*L_k/v_hub*phi_11(nf);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 4. MÉTODO KAIMAL
S_f=(4*sigma^2*(L_k/v_hub))./(1+(6.*fq*(L_k/v_hub)).^(5/3));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Anexo D

```

%
%
% BLADE ELEMENTT MOMENTUM METHOD (BEM)
% Para aerogenerador de 5MW
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 1. INPUT:
N = 3;           % Numero de palas
w = 12.1;       % velocidad de giro del rotor [rpm]
w = w*2*pi/60; % pasamos a [rad/s]
rho = 1.25;     % densidad del aire [kg/m3]
maxd =0.001;   % máximo desviación(error)
t = [];        % vector velocidad
v = [];        % vector velocidad
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 2. DATOS DE LAS PALAS (Aerogenerador de 5MW)
% 2.1 Distancia de la sección a la góndola [m]
r=[2.8667,5.6000,8.3333,11.7500,...
   15.8500,19.9500,24.0500,28.1500,...
   32.2500,36.3500,40.4500,44.5500,...
   48.6500,52.7500,56.1667,58.9000,61.6333];
% 2.2 Variación de radio [m]
dr=[2.7333,2.7333,2.7333,4.1000,...
    4.1000,4.1000,4.1000,4.1000,...
    4.1000,4.1000,4.1000,4.1000,...
    4.1000,4.1000,2.7333,2.7333,2.7333];
% 2.3 Ángulo de giro de cada sección [rad]
theta=[13.308,13.308,13.308,13.308,...
       11.480,10.162,9.011,7.795,...
       6.544,5.361,4.188,3.125,...
       2.319,1.526,0.863,0.370,0.106]*pi/180;
% 2.4 Cuerda de cada sección [m]
c=[3.542,3.854,4.167,4.557,...
   4.652,4.458,4.249,4.007,...
   3.748,3.502,3.256,3.010,...
   2.764,2.518,2.313,2.086,1.419];
% 2.5 Sección tipo
orden_secc=[1,1,2,3,...
            4,4,5,6,...
            6,7,7,8,...
            8,8,8,8,8];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 3. DATOS DE LAS SECCIONES (Aerogenerador de 5MW)
% 3.1 Sección DU40
fid=fopen('DU 40.txt','r');
DU40=textscan(fid, '%f');
fclose(fid);
DU40=DU40{1};
DU_40=zeros(length(DU40)/4,3);
for i=1:4:length(DU40);
    DU_40((i+3)/4,1)=DU40(i,1);
    DU_40((i+3)/4,2)=DU40(i+1,1);
    DU_40((i+3)/4,3)=DU40(i+2,1);
end
% 3.2 Sección DU35
fid=fopen('DU 35.txt','r');

```

```

DU35=textscan(fid, '%f');
fclose(fid);
DU35=DU35{1};
DU_35=zeros(length(DU35)/4,3);
for i=1:4:length(DU35);
    DU_35((i+3)/4,1)=DU35(i,1);
    DU_35((i+3)/4,2)=DU35(i+1,1);
    DU_35((i+3)/4,3)=DU35(i+2,1);
end
% 3.3 Sección DU30
fid=fopen('DU 30.txt','r');
DU30=textscan(fid, '%f');
fclose(fid);
DU30=DU30{1};
DU_30=zeros(length(DU30)/4,3);
for i=1:4:length(DU30);
    DU_30((i+3)/4,1)=DU30(i,1);
    DU_30((i+3)/4,2)=DU30(i+1,1);
    DU_30((i+3)/4,3)=DU30(i+2,1);
end
% 3.4 Sección DU25
fid=fopen('DU 25.txt','r');
DU25=textscan(fid, '%f');
fclose(fid);
DU25=DU25{1};
DU_25=zeros(length(DU25)/4,3);
for i=1:4:length(DU25);
    DU_25((i+3)/4,1)=DU25(i,1);
    DU_25((i+3)/4,2)=DU25(i+1,1);
    DU_25((i+3)/4,3)=DU25(i+2,1);
end
% 3.5 Sección DU21
fid=fopen('DU 21.txt','r');
DU21=textscan(fid, '%f');
fclose(fid);
DU21=DU21{1};
DU_21=zeros(length(DU21)/4,3);
for i=1:4:length(DU21);
    DU_21((i+3)/4,1)=DU21(i,1);
    DU_21((i+3)/4,2)=DU21(i+1,1);
    DU_21((i+3)/4,3)=DU21(i+2,1);
end
% 3.6 Sección NACA64
fid=fopen('NACA 64.txt','r');
NACA64=textscan(fid, '%f');
fclose(fid);
NACA64=NACA64{1};
NACA_64=zeros(length(NACA64)/4,3);
for i=1:4:length(NACA64);
    NACA_64((i+3)/4,1)=NACA64(i,1);
    NACA_64((i+3)/4,2)=NACA64(i+1,1);
    NACA_64((i+3)/4,3)=NACA64(i+2,1);
end
carac_secc{1,1}=0;
carac_secc{2,1}=0;
carac_secc{3,1}=DU_40;
carac_secc{4,1}=DU_35;
carac_secc{5,1}=DU_30;
carac_secc{6,1}=DU_25;
carac_secc{7,1}=DU_21;
carac_secc{8,1}=NACA_64;
clear('DU40','DU_40',...

```

```

'DU35', 'DU_35', ...
'DU30', 'DU_30', ...
'DU25', 'DU_25', ...
'DU21', 'DU_21', ...
'NACA64', 'NACA_64')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 4. OPERACIÓN
n=length(v);
T_ele=zeros(n,1);           % Empuje, teoría elemento pala
Q_ele=zeros(n,1);           % Momento, teoría elemento pala
T_mom=zeros(n,1);          % Empuje, teoría momento cinético
Q_mom=zeros(n,1);          % Momento, teoría momento cinético
for i=1:n
    V0=v(i);
    sum_T_ele=0;
    sum_Q_ele=0;
    sum_T_mom=0;
    sum_Q_mom=0;
    for j=1:17
        secc=orden_secc(j);
        sigma=N*c(j)/(2*pi*r(j));    % solidez de las palas
        lambda=w*r(j)/V0;            % relación de velocidades
        if secc==1
            a1=0;
            a2=0;
            beta=atan(lambda*(1+a2)/(1-a1));
            Cl=0;
            Cd=0.5;
        elseif secc==2
            a1=0;
            a2=0;
            beta=atan(lambda*(1+a2)/(1-a1));
            Cl=0;
            Cd=0.35;
        else
            aal=0;
            aa2=0;
            error=0;           % Variable auxiliar para la desviación
            contar=1;         % variable auxiliar para la conversión
            while error==0
                if contar==1000 % En caso de no conversión
                    disp('No converge en 1000 iteraciones')
                    aaal=1/3;
                    aaa2=(1-3*aaal)/(4*aaal-1);
                    break
                end
                beta=atan(lambda*(1+aa2)/(1-aal));
                alfa=pi/2-theta(j)-beta;
                alfa=alfa*(180/pi);
                buscar_alfa=0;
                k=1;
                while buscar_alfa==0;
                    if k==size(carac_secc{secc,1},1)
                        disp('Error: Ángulo NO encontrado')
                        return
                    end
                    alfa_1=carac_secc{secc,1}(k,1);
                    alfa_2=carac_secc{secc,1}(k+1,1);
                    if alfa==alfa_1
                        Cl=carac_secc{secc,1}(k,2);
                        Cd=carac_secc{secc,1}(k,3);
                        buscar_alfa=1;
                    elseif alfa==alfa_2

```

```

        Cl=carac_secc{secc,1}(k+1,2);
        Cd=carac_secc{secc,1}(k+1,3);
        buscar_alfa=1;
    elseif (alfa>alfa_1 && alfa<alfa_2)
        Cl_1=carac_secc{secc,1}(k,2);
        Cl_2=carac_secc{secc,1}(k+1,2);
        Cd_1=carac_secc{secc,1}(k,3);
        Cd_2=carac_secc{secc,1}(k+1,3);
        Cl=(alfa-alfa_1)/(alfa_2-alfa_1)*...
            (Cl_2-Cd_1)+Cl_1;
        Cd=(alfa-alfa_1)/(alfa_2-alfa_1)*...
            (Cd_2-Cd_1)+Cd_1;
        buscar_alfa=1;
    end
    k=k+1;
end
aaa1=1/((4*(cos(beta))^2)/...
    (sigma*(Cl*sin(beta)+Cd*cos(beta)))+1);
aaa2=1/((4*sin(beta)*cos(beta))/...
    (sigma*(Cl*cos(beta)-Cd*sin(beta)))-1);
if (abs(aa1-aaa1)<maxd)&&(abs(aa2-aaa2)<maxd)
    error=1;
end
aa1=aaa1;
aa2=aaa2;
contar=contar+1;
end
a1=aaa1;
a2=aaa2;
end
Vrel=V0*(1-a1)/cos(beta);
dT_ele=rho*V0^2*4*a1*(1-a1)*pi*r(j)*dr(j);
dQ_ele=rho*V0^4*a2*(1-a1)*pi*r(j)^3*w*dr(j);
dT_mom=1/2*N*rho*Vrel^2*(Cl*sin(beta)+Cd*cos(beta))*c(j)*dr(j);
dQ_mom=1/2*N*rho*Vrel^2*(Cl*cos(beta)-...
    Cd*sin(beta))*c(j)*r(j)*dr(j);
sum_T_ele=sum_T_ele+dT_ele;
sum_Q_ele=sum_Q_ele+dQ_ele;
sum_T_mom=sum_T_mom+dT_mom;
sum_Q_mom=sum_Q_mom+dQ_mom;
end
T_ele(i,j)=sum_T_ele;
Q_ele(i,j)=sum_Q_ele;
T_mom(i,j)=sum_T_mom;
Q_mom(i,j)=sum_Q_mom;
end
T_tot_ele=zeros(n,1);
Q_tot_ele=zeros(n,1);
T_tot_mom=zeros(n,1);
Q_tot_mom=zeros(n,1);
for i=1:n
    sum_T_tot_ele=0;
    sum_Q_tot_ele=0;
    sum_T_tot_mom=0;
    sum_Q_tot_mom=0;
    for j=1:17
        sum_T_tot_ele=sum_T_tot_ele+T_ele(i,j);
        sum_Q_tot_ele=sum_Q_tot_ele+Q_ele(i,j);
        sum_T_tot_mom=sum_T_tot_mom+T_mom(i,j);
        sum_Q_tot_mom=sum_Q_tot_mom+Q_mom(i,j);
    end
    T_tot_ele(i)=sum_T_tot_ele;

```

```
Q_tot_ele(i)=sum_Q_tot_ele;  
T_tot_mom(i)=sum_T_tot_mom;  
Q_tot_mom(i)=sum_Q_tot_mom;  
end  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Anexo E

En este anexo se presentarán por columnas los valores del coeficiente de sustentación C_L y el coeficiente de resistencia C_D en función del ángulo de ataque α para cada uno de los tipos de sección que se utilizan.

Cylinder 1

Nombre del archivo de matlab: Cylinder 1.txt

α	C_L	C_D
-180.0000	0.5000	0.0000
0.0000	0.5000	0.0000
180.0000	0.5000	0.0000

Cylinder 2

Nombre del archivo de matlab: Cylinder 2.txt

α	C_L	C_D
-180.0000	0.3500	0.0000
0.0000	0.3500	0.0000
180.0000	0.3500	0.0000

DU 40

Referencia: DU99-W-405 LM

Nombre del archivo de matlab: DU 40.txt

α	C_L	C_D
-180.0000	0.0000	0.0602
-175.0000	0.2180	0.0699
-170.0000	0.3970	0.1107
-160.0000	0.6420	0.3045
-155.0000	0.7150	0.4179
-150.0000	0.7570	0.5355
-145.0000	0.7720	0.6535
-140.0000	0.7620	0.7685
-135.0000	0.7310	0.8777
-130.0000	0.6800	0.9788
-125.0000	0.6130	1.0700
-120.0000	0.5320	1.1499
-115.0000	0.4390	1.2174
-110.0000	0.3370	1.2716
-105.0000	0.2280	1.3118
-100.0000	0.1140	1.3378
-95.0000	-0.0020	1.3492
-90.0000	-0.1200	1.3460
-85.0000	-0.2360	1.3283
-80.0000	-0.3490	1.2964
-75.0000	-0.4560	1.2507
-70.0000	-0.5570	1.1918
-65.0000	-0.6470	1.1204
-60.0000	-0.7270	1.0376
-55.0000	-0.7920	0.9446
-50.0000	-0.8420	0.8429
-45.0000	-0.8740	0.7345
-40.0000	-0.8860	0.6215
-35.0000	-0.8750	0.5067
-30.0000	-0.8390	0.3932
-25.0000	-0.7770	0.2849
-24.0000	-0.7610	0.2642
-23.0000	-0.7440	0.2440
-22.0000	-0.7250	0.2242
-21.0000	-0.7060	0.2049
-20.0000	-0.6850	0.1861
-19.0000	-0.6620	0.1687
-18.0000	-0.6350	0.1533
-17.0000	-0.6050	0.1398

-16.0000 -0.5710 0.1281
-15.0000 -0.5340 0.1183
-14.0000 -0.4940 0.1101
-13.0000 -0.4520 0.1036
-12.0000 -0.4070 0.0986
-11.0000 -0.3600 0.0951
-10.0000 -0.3110 0.0931
-8.0000 -0.2080 0.0930
-6.0000 -0.1110 0.0689
-5.5000 -0.0900 0.0614
-5.0000 -0.0720 0.0547
-4.5000 -0.0650 0.0480
-4.0000 -0.0540 0.0411
-3.5000 -0.0170 0.0349
-3.0000 0.0030 0.0299
-2.5000 0.0140 0.0255
-2.0000 0.0090 0.0198
-1.5000 0.0040 0.0164
-1.0000 0.0360 0.0147
-0.5000 0.0730 0.0137
0.0000 0.1370 0.0113
0.5000 0.2130 0.0114
1.0000 0.2920 0.0118
1.5000 0.3690 0.0122
2.0000 0.4440 0.0124
2.5000 0.5140 0.0124
3.0000 0.5800 0.0123
3.5000 0.6450 0.0120
4.0000 0.7100 0.0119
4.5000 0.7760 0.0122
5.0000 0.8410 0.0125
5.5000 0.9040 0.0129
6.0000 0.9670 0.0135
6.5000 1.0270 0.0144
7.0000 1.0840 0.0158
7.5000 1.1400 0.0174
8.0000 1.1930 0.0198
8.5000 1.2420 0.0231
9.0000 1.2870 0.0275
9.5000 1.3330 0.0323
10.0000 1.3680 0.0393
10.5000 1.4000 0.0475
11.0000 1.4250 0.0580
11.5000 1.4490 0.0691
12.0000 1.4730 0.0816
12.5000 1.4940 0.0973
13.0000 1.5130 0.1129
13.5000 1.5380 0.1288
14.5000 1.5870 0.1650
15.0000 1.6140 0.1845
15.5000 1.6310 0.2052
16.0000 1.6490 0.2250
16.5000 1.6660 0.2467
17.0000 1.6810 0.2684
17.5000 1.6990 0.2900
18.0000 1.7190 0.3121
19.0000 1.7510 0.3554
19.5000 1.7670 0.3783
20.5000 1.7980 0.4212
21.0000 1.8100 0.4415
22.0000 1.8300 0.4830
23.0000 1.8470 0.5257
24.0000 1.8610 0.5694
25.0000 1.8720 0.6141
26.0000 1.8810 0.6593
28.0000 1.8940 0.7513
30.0000 1.9040 0.8441
32.0000 1.9150 0.9364
35.0000 1.9290 1.0722
40.0000 1.9030 1.2873
45.0000 1.8200 1.4796
50.0000 1.6900 1.6401
55.0000 1.5220 1.7609
60.0000 1.3230 1.8360
65.0000 1.1060 1.8614
70.0000 0.8800 1.8347
75.0000 0.6580 1.7567
80.0000 0.4490 1.6334
85.0000 0.2670 1.4847
90.0000 0.1240 1.3879
95.0000 0.0020 1.3912
100.0000 -0.1180 1.3795
105.0000 -0.2350 1.3528
110.0000 -0.3480 1.3114
115.0000 -0.4530 1.2557
120.0000 -0.5490 1.1864
125.0000 -0.6330 1.1041
130.0000 -0.7020 1.0102
135.0000 -0.7540 0.9060
140.0000 -0.7870 0.7935

```

145.0000 -0.7970 0.6750
150.0000 -0.7820 0.5532
155.0000 -0.7390 0.4318
160.0000 -0.6640 0.3147
170.0000 -0.4100 0.1144
175.0000 -0.2260 0.0702
180.0000 0.0000 0.0602

```

DU 35

Referencia: DU99-W-350

Nombre del archivo de matlab: DU 35 .txt

α	C_L	C_D
-180.0000	0.0000	0.0407
-175.0000	0.2230	0.0507
-170.0000	0.4050	0.1055
-160.0000	0.6580	0.2982
-155.0000	0.7330	0.4121
-150.0000	0.7780	0.5308
-145.0000	0.7950	0.6503
-140.0000	0.7870	0.7672
-135.0000	0.7570	0.8785
-130.0000	0.7080	0.9819
-125.0000	0.6410	1.0756
-120.0000	0.5600	1.1580
-115.0000	0.4670	1.2280
-110.0000	0.3650	1.2847
-105.0000	0.2550	1.3274
-100.0000	0.1390	1.3557
-95.0000	0.0210	1.3692
-90.0000	-0.0980	1.3680
-85.0000	-0.2160	1.3521
-80.0000	-0.3310	1.3218
-75.0000	-0.4410	1.2773
-70.0000	-0.5440	1.2193
-65.0000	-0.6380	1.1486
-60.0000	-0.7200	1.0660
-55.0000	-0.7880	0.9728
-50.0000	-0.8400	0.8705
-45.0000	-0.8750	0.7611
-40.0000	-0.8890	0.6466
-35.0000	-0.8800	0.5299
-30.0000	-0.8460	0.4141
-25.0000	-0.7840	0.3030
-24.0000	-0.7680	0.2817
-23.0000	-0.7510	0.2608
-22.0000	-0.7330	0.2404
-21.0000	-0.7140	0.2205
-20.0000	-0.6930	0.2011
-19.0000	-0.6710	0.1822
-18.0000	-0.6480	0.1640
-17.0000	-0.6240	0.1465
-16.0000	-0.6010	0.1300
-15.0000	-0.5790	0.1145
-14.0000	-0.5590	0.1000
-13.0000	-0.5390	0.0867
-12.0000	-0.5190	0.0744
-11.0000	-0.4990	0.0633
-10.0000	-0.4800	0.0534
-5.5400	-0.3850	0.0245
-5.0400	-0.3590	0.0225
-4.5400	-0.3600	0.0196
-4.0400	-0.3550	0.0174
-3.5400	-0.3070	0.0162
-3.0400	-0.2460	0.0144
-3.0000	-0.2400	0.0240
-2.5000	-0.1630	0.0188
-2.0000	-0.0910	0.0160
-1.5000	-0.0190	0.0137
-1.0000	0.0520	0.0118
-0.5000	0.1210	0.0104
0.0000	0.1960	0.0094
0.5000	0.2650	0.0096
1.0000	0.3350	0.0098
1.5000	0.4040	0.0099
2.0000	0.4720	0.0100
2.5000	0.5400	0.0102
3.0000	0.6080	0.0103
3.5000	0.6740	0.0104
4.0000	0.7420	0.0105
4.5000	0.8090	0.0107

```

5.0000 0.8750 0.0108
5.5000 0.9410 0.0109
6.0000 1.0070 0.0110
6.5000 1.0710 0.0113
7.0000 1.1340 0.0115
7.5000 1.1980 0.0117
8.0000 1.2600 0.0120
8.5000 1.3180 0.0126
9.0000 1.3680 0.0133
9.5000 1.4220 0.0143
10.0000 1.4750 0.0156
10.5000 1.5230 0.0174
11.0000 1.5700 0.0194
11.5000 1.6090 0.0227
12.0000 1.6420 0.0269
12.5000 1.6750 0.0319
13.0000 1.7000 0.0398
13.5000 1.7170 0.0488
14.0000 1.7120 0.0614
14.5000 1.7030 0.0786
15.5000 1.6710 0.1173
16.0000 1.6490 0.1377
16.5000 1.6210 0.1600
17.0000 1.5980 0.1814
17.5000 1.5710 0.2042
18.0000 1.5490 0.2316
19.0000 1.5440 0.2719
19.5000 1.5490 0.2906
20.0000 1.5650 0.3085
21.0000 1.5650 0.3447
22.0000 1.5630 0.3820
23.0000 1.5580 0.4203
24.0000 1.5520 0.4593
25.0000 1.5460 0.4988
26.0000 1.5390 0.5387
28.0000 1.5270 0.6187
30.0000 1.5220 0.6978
32.0000 1.5290 0.7747
35.0000 1.5440 0.8869
40.0000 1.5290 1.0671
45.0000 1.4710 1.2319
50.0000 1.3760 1.3747
55.0000 1.2490 1.4899
60.0000 1.0970 1.5728
65.0000 0.9280 1.6202
70.0000 0.7500 1.6302
75.0000 0.5700 1.6031
80.0000 0.3960 1.5423
85.0000 0.2370 1.4598
90.0000 0.1010 1.4041
95.0000 -0.0220 1.4053
100.0000 -0.1430 1.3914
105.0000 -0.2610 1.3625
110.0000 -0.3740 1.3188
115.0000 -0.4800 1.2608
120.0000 -0.5750 1.1891
125.0000 -0.6590 1.1046
130.0000 -0.7270 1.0086
135.0000 -0.7780 0.9025
140.0000 -0.8090 0.7883
145.0000 -0.8180 0.6684
150.0000 -0.8000 0.5457
155.0000 -0.7540 0.4236
160.0000 -0.6770 0.3066
170.0000 -0.4170 0.1085
175.0000 -0.2290 0.0510
180.0000 0.0000 0.0407

```

DU 30

Referencia: DU97-W-300 LM

Nombre del archivo de matlab: DU_30.txt

```

α      CL      Cd
-180.0000 0.0000 0.0267
-175.0000 0.2740 0.0370
-170.0000 0.5470 0.0968
-160.0000 0.6850 0.2876
-155.0000 0.7660 0.4025
-150.0000 0.8160 0.5232
-145.0000 0.8360 0.6454
-140.0000 0.8320 0.7656
-135.0000 0.8040 0.8807
-130.0000 0.7560 0.9882

```

-125.0000 0.6900 1.0861
-120.0000 0.6090 1.1730
-115.0000 0.5150 1.2474
-110.0000 0.4110 1.3084
-105.0000 0.3000 1.3552
-100.0000 0.1820 1.3875
-95.0000 0.0610 1.4048
-90.0000 -0.0610 1.4070
-85.0000 -0.1830 1.3941
-80.0000 -0.3020 1.3664
-75.0000 -0.4160 1.3240
-70.0000 -0.5230 1.2676
-65.0000 -0.6220 1.1978
-60.0000 -0.7080 1.1156
-55.0000 -0.7810 1.0220
-50.0000 -0.8380 0.9187
-45.0000 -0.8770 0.8074
-40.0000 -0.8950 0.6904
-35.0000 -0.8890 0.5703
-30.0000 -0.8580 0.4503
-25.0000 -0.8320 0.3357
-24.0000 -0.8520 0.3147
-23.0000 -0.8820 0.2946
-22.0000 -0.9190 0.2752
-21.0000 -0.9630 0.2566
-20.0000 -1.0130 0.2388
-19.0000 -1.0670 0.2218
-18.0000 -1.1250 0.2056
-17.0000 -1.1850 0.1901
-16.0000 -1.2450 0.1754
-15.2500 -1.2900 0.1649
-14.2400 -1.2290 0.1461
-13.2400 -1.1480 0.1263
-12.2200 -1.0520 0.1051
-11.2200 -0.9650 0.0886
-10.1900 -0.8670 0.0740
-9.7000 -0.8220 0.0684
-9.1800 -0.7690 0.0605
-8.1800 -0.7560 0.0270
-7.1900 -0.6900 0.0180
-6.6500 -0.6160 0.0166
-6.1300 -0.5420 0.0152
-6.0000 -0.5250 0.0117
-5.5000 -0.4510 0.0105
-5.0000 -0.3820 0.0097
-4.5000 -0.3140 0.0092
-4.0000 -0.2510 0.0091
-3.5000 -0.1890 0.0089
-3.0000 -0.1200 0.0089
-2.5000 -0.0510 0.0088
-2.0000 0.0170 0.0088
-1.5000 0.0850 0.0088
-1.0000 0.1520 0.0088
-0.5000 0.2190 0.0088
0.0000 0.2880 0.0087
0.5000 0.3540 0.0087
1.0000 0.4210 0.0088
1.5000 0.4870 0.0089
2.0000 0.5540 0.0090
2.5000 0.6190 0.0091
3.0000 0.6850 0.0092
3.5000 0.7490 0.0093
4.0000 0.8150 0.0095
4.5000 0.8790 0.0096
5.0000 0.9440 0.0097
5.5000 1.0080 0.0099
6.0000 1.0720 0.0101
6.5000 1.1350 0.0103
7.0000 1.1970 0.0107
7.5000 1.2560 0.0112
8.0000 1.3050 0.0125
9.0000 1.3900 0.0155
9.5000 1.4240 0.0171
10.0000 1.4580 0.0192
10.5000 1.4880 0.0219
11.0000 1.5120 0.0255
11.5000 1.5330 0.0307
12.0000 1.5490 0.0370
12.5000 1.5580 0.0452
13.0000 1.4700 0.0630
13.5000 1.3980 0.0784
14.0000 1.3540 0.0931
14.5000 1.3360 0.1081
15.0000 1.3330 0.1239
15.5000 1.3260 0.1415
16.0000 1.3290 0.1592
16.5000 1.3260 0.1743
17.0000 1.3210 0.1903

```

17.5000 1.3310 0.2044
18.0000 1.3330 0.2186
18.5000 1.3400 0.2324
19.0000 1.3620 0.2455
19.5000 1.3820 0.2584
20.0000 1.3980 0.2689
20.5000 1.4260 0.2814
21.0000 1.4370 0.2943
22.0000 1.4180 0.3246
23.0000 1.3970 0.3557
24.0000 1.3760 0.3875
25.0000 1.3540 0.4198
26.0000 1.3320 0.4524
28.0000 1.2930 0.5183
30.0000 1.2650 0.5843
32.0000 1.2530 0.6492
35.0000 1.2640 0.7438
40.0000 1.2580 0.8970
45.0000 1.2170 1.0402
50.0000 1.1460 1.1686
55.0000 1.0490 1.2779
60.0000 0.9320 1.3647
65.0000 0.7990 1.4267
70.0000 0.6570 1.4621
75.0000 0.5090 1.4708
80.0000 0.3620 1.4544
85.0000 0.2210 1.4196
90.0000 0.0920 1.3938
95.0000 -0.0300 1.3943
100.0000 -0.1500 1.3798
105.0000 -0.2670 1.3504
110.0000 -0.3790 1.3063
115.0000 -0.4830 1.2481
120.0000 -0.5780 1.1763
125.0000 -0.6600 1.0919
130.0000 -0.7270 0.9962
135.0000 -0.7770 0.8906
140.0000 -0.8070 0.7771
145.0000 -0.8150 0.6581
150.0000 -0.7970 0.5364
155.0000 -0.7500 0.4157
160.0000 -0.6730 0.3000
170.0000 -0.5470 0.1051
175.0000 -0.2740 0.0388
180.0000 0.0000 0.0267

```

DU 25

Referencia: DU91-W2-250

Nombre del archivo de matlab: DU 25.txt

α	C_L	C_D
-180.0000	0.0000	0.0202
-175.0000	0.3680	0.0324
-170.0000	0.7350	0.0943
-160.0000	0.6950	0.2848
-155.0000	0.7770	0.4001
-150.0000	0.8280	0.5215
-145.0000	0.8500	0.6447
-140.0000	0.8460	0.7660
-135.0000	0.8180	0.8823
-130.0000	0.7710	0.9911
-125.0000	0.7050	1.0905
-120.0000	0.6240	1.1787
-115.0000	0.5300	1.2545
-110.0000	0.4260	1.3168
-105.0000	0.3140	1.3650
-100.0000	0.1950	1.3984
-95.0000	0.0730	1.4169
-90.0000	-0.0500	1.4201
-85.0000	-0.1730	1.4081
-80.0000	-0.2940	1.3811
-75.0000	-0.4090	1.3394
-70.0000	-0.5180	1.2833
-65.0000	-0.6170	1.2138
-60.0000	-0.7060	1.1315
-55.0000	-0.7800	1.0378
-50.0000	-0.8390	0.9341
-45.0000	-0.8790	0.8221
-40.0000	-0.8980	0.7042
-35.0000	-0.8930	0.5829
-30.0000	-0.8620	0.4616
-25.0000	-0.8030	0.3441
-24.0000	-0.7920	0.3209

-23.0000 -0.7890 0.2972
-22.0000 -0.7920 0.2730
-21.0000 -0.8010 0.2485
-20.0000 -0.8150 0.2237
-19.0000 -0.8330 0.1990
-18.0000 -0.8540 0.1743
-17.0000 -0.8790 0.1498
-16.0000 -0.9050 0.1256
-15.0000 -0.9320 0.1020
-14.0000 -0.9590 0.0789
-13.0000 -0.9850 0.0567
-13.0000 -0.9850 0.0567
-12.0100 -0.9530 0.0271
-11.0000 -0.9000 0.0303
-9.9800 -0.8270 0.0287
-8.9800 -0.7530 0.0271
-8.4700 -0.6910 0.0264
-7.4500 -0.5550 0.0114
-6.4200 -0.4130 0.0094
-5.4000 -0.2710 0.0086
-5.0000 -0.2200 0.0073
-4.5000 -0.1520 0.0071
-4.0000 -0.0840 0.0070
-3.5000 -0.0180 0.0069
-3.0000 0.0490 0.0068
-2.5000 0.1150 0.0068
-2.0000 0.1810 0.0068
-1.5000 0.2470 0.0067
-1.0000 0.3120 0.0067
-0.5000 0.3770 0.0067
0.0000 0.4440 0.0065
0.5000 0.5080 0.0065
1.0000 0.5730 0.0066
1.5000 0.6360 0.0067
2.0000 0.7010 0.0068
2.5000 0.7650 0.0069
3.0000 0.8270 0.0070
3.5000 0.8900 0.0071
4.0000 0.9520 0.0073
4.5000 1.0130 0.0076
5.0000 1.0620 0.0079
6.0000 1.1610 0.0099
6.5000 1.2080 0.0117
7.0000 1.2540 0.0132
7.5000 1.3010 0.0143
8.0000 1.3360 0.0153
8.5000 1.3690 0.0165
9.0000 1.4000 0.0181
9.5000 1.4280 0.0211
10.0000 1.4420 0.0262
10.5000 1.4270 0.0336
11.0000 1.3740 0.0420
11.5000 1.3160 0.0515
12.0000 1.2770 0.0601
12.5000 1.2500 0.0693
13.0000 1.2460 0.0785
13.5000 1.2470 0.0888
14.0000 1.2560 0.1000
14.5000 1.2600 0.1108
15.0000 1.2710 0.1219
15.5000 1.2810 0.1325
16.0000 1.2890 0.1433
16.5000 1.2940 0.1541
17.0000 1.3040 0.1649
17.5000 1.3090 0.1754
18.0000 1.3150 0.1845
18.5000 1.3200 0.1953
19.0000 1.3300 0.2061
19.5000 1.3430 0.2170
20.0000 1.3540 0.2280
20.5000 1.3590 0.2390
21.0000 1.3600 0.2536
22.0000 1.3250 0.2814
23.0000 1.2880 0.3098
24.0000 1.2510 0.3386
25.0000 1.2150 0.3678
26.0000 1.1810 0.3972
28.0000 1.1200 0.4563
30.0000 1.0760 0.5149
32.0000 1.0560 0.5720
35.0000 1.0660 0.6548
40.0000 1.0640 0.7901
45.0000 1.0350 0.9190
50.0000 0.9800 1.0378
55.0000 0.9040 1.1434
60.0000 0.8100 1.2333
65.0000 0.7020 1.3055
70.0000 0.5820 1.3587

```

75.0000 0.4560 1.3922
80.0000 0.3260 1.4063
85.0000 0.1970 1.4042
90.0000 0.0720 1.3985
95.0000 -0.0500 1.3973
100.0000 -0.1700 1.3810
105.0000 -0.2870 1.3498
110.0000 -0.3990 1.3041
115.0000 -0.5020 1.2442
120.0000 -0.5960 1.1709
125.0000 -0.6770 1.0852
130.0000 -0.7430 0.9883
135.0000 -0.7920 0.8818
140.0000 -0.8210 0.7676
145.0000 -0.8260 0.6481
150.0000 -0.8060 0.5264
155.0000 -0.7580 0.4060
160.0000 -0.6790 0.2912
170.0000 -0.7350 0.0995
175.0000 -0.3680 0.0356
180.0000 0.0000 0.0202

```

DU 21

Referencia: DU93-W-210 LM

Nombre del archivo de matlab: DU 21.txt

α	C_L	C_D
-180.0000	0.0000	0.0185
-175.0000	0.3940	0.0332
-170.0000	0.7880	0.0945
-160.0000	0.6700	0.2809
-155.0000	0.7490	0.3932
-150.0000	0.7970	0.5112
-145.0000	0.8180	0.6309
-140.0000	0.8130	0.7485
-135.0000	0.7860	0.8612
-130.0000	0.7390	0.9665
-125.0000	0.6750	1.0625
-120.0000	0.5960	1.1476
-115.0000	0.5050	1.2206
-110.0000	0.4030	1.2805
-105.0000	0.2940	1.3265
-100.0000	0.1790	1.3582
-95.0000	0.0600	1.3752
-90.0000	-0.0600	1.3774
-85.0000	-0.1790	1.3648
-80.0000	-0.2950	1.3376
-75.0000	-0.4070	1.2962
-70.0000	-0.5120	1.2409
-65.0000	-0.6080	1.1725
-60.0000	-0.6930	1.0919
-55.0000	-0.7640	1.0002
-50.0000	-0.8200	0.8990
-45.0000	-0.8570	0.7900
-40.0000	-0.8750	0.6754
-35.0000	-0.8690	0.5579
-30.0000	-0.8380	0.4405
-25.0000	-0.7910	0.3256
-24.0000	-0.7940	0.3013
-23.0000	-0.8050	0.2762
-22.0000	-0.8210	0.2506
-21.0000	-0.8430	0.2246
-20.0000	-0.8690	0.1983
-19.0000	-0.8990	0.1720
-18.0000	-0.9310	0.1457
-17.0000	-0.9640	0.1197
-16.0000	-0.9990	0.0940
-15.0000	-1.0330	0.0689
-14.5000	-1.0500	0.0567
-12.0100	-0.9530	0.0271
-11.0000	-0.9000	0.0303
-9.9800	-0.8270	0.0287
-8.1200	-0.5360	0.0124
-7.6200	-0.4670	0.0109
-7.1100	-0.3930	0.0092
-6.6000	-0.3230	0.0083
-6.5000	-0.3110	0.0089
-6.0000	-0.2450	0.0082
-5.5000	-0.1780	0.0074
-5.0000	-0.1130	0.0069
-4.5000	-0.0480	0.0065
-4.0000	0.0160	0.0063
-3.5000	0.0800	0.0061

-3.0000 0.1450 0.0058
-2.5000 0.2080 0.0057
-2.0000 0.2700 0.0057
-1.5000 0.3330 0.0057
-1.0000 0.3960 0.0057
-0.5000 0.4580 0.0057
0.0000 0.5210 0.0057
0.5000 0.5830 0.0057
1.0000 0.6450 0.0058
1.5000 0.7060 0.0058
2.0000 0.7680 0.0059
2.5000 0.8280 0.0061
3.0000 0.8880 0.0063
3.5000 0.9480 0.0066
4.0000 0.9960 0.0071
4.5000 1.0460 0.0079
5.0000 1.0950 0.0090
5.5000 1.1450 0.0103
6.0000 1.1920 0.0113
6.5000 1.2390 0.0122
7.0000 1.2830 0.0131
7.5000 1.3240 0.0139
8.0000 1.3580 0.0147
8.5000 1.3850 0.0158
9.0000 1.4030 0.0181
9.5000 1.4010 0.0211
10.0000 1.3580 0.0255
10.5000 1.3130 0.0301
11.0000 1.2870 0.0347
11.5000 1.2740 0.0401
12.0000 1.2720 0.0468
12.5000 1.2730 0.0545
13.0000 1.2730 0.0633
13.5000 1.2730 0.0722
14.0000 1.2720 0.0806
14.5000 1.2730 0.0900
15.0000 1.2750 0.0987
15.5000 1.2810 0.1075
16.0000 1.2840 0.1170
16.5000 1.2960 0.1270
17.0000 1.3060 0.1368
17.5000 1.3080 0.1464
18.0000 1.3080 0.1562
18.5000 1.3080 0.1664
19.0000 1.3080 0.1770
19.5000 1.3070 0.1878
20.0000 1.3110 0.1987
20.5000 1.3250 0.2100
21.0000 1.3240 0.2214
22.0000 1.2770 0.2499
23.0000 1.2290 0.2786
24.0000 1.1820 0.3077
25.0000 1.1360 0.3371
26.0000 1.0930 0.3664
28.0000 1.0170 0.4246
30.0000 0.9620 0.4813
32.0000 0.9370 0.5356
35.0000 0.9470 0.6127
40.0000 0.9500 0.7396
45.0000 0.9280 0.8623
50.0000 0.8840 0.9781
55.0000 0.8210 1.0846
60.0000 0.7400 1.1796
65.0000 0.6460 1.2617
70.0000 0.5400 1.3297
75.0000 0.4250 1.3827
80.0000 0.3040 1.4202
85.0000 0.1790 1.4423
90.0000 0.0530 1.4512
95.0000 -0.0730 1.4480
100.0000 -0.1980 1.4294
105.0000 -0.3190 1.3954
110.0000 -0.4340 1.3464
115.0000 -0.5410 1.2829
120.0000 -0.6370 1.2057
125.0000 -0.7200 1.1157
130.0000 -0.7870 1.0144
135.0000 -0.8360 0.9033
140.0000 -0.8640 0.7845
145.0000 -0.8690 0.6605
150.0000 -0.8470 0.5346
155.0000 -0.7950 0.4103
160.0000 -0.7110 0.2922
170.0000 -0.7880 0.0969
175.0000 -0.3940 0.0334
180.0000 0.0000 0.0185

NACA 64

Referencia: NACA64-618

Nombre del archivo de matlab: NACA_64.txt

α	C_L	C_D
-180.0000	0.0000	0.0198
-175.0000	0.3740	0.0341
-170.0000	0.7490	0.0955
-160.0000	0.6590	0.2807
-155.0000	0.7360	0.3919
-150.0000	0.7830	0.5086
-145.0000	0.8030	0.6267
-140.0000	0.7980	0.7427
-135.0000	0.7710	0.8537
-130.0000	0.7240	0.9574
-125.0000	0.6600	1.0519
-120.0000	0.5810	1.1355
-115.0000	0.4910	1.2070
-110.0000	0.3900	1.2656
-105.0000	0.2820	1.3104
-100.0000	0.1690	1.3410
-95.0000	0.0520	1.3572
-90.0000	-0.0670	1.3587
-85.0000	-0.1840	1.3456
-80.0000	-0.2990	1.3181
-75.0000	-0.4090	1.2765
-70.0000	-0.5120	1.2212
-65.0000	-0.6060	1.1532
-60.0000	-0.6890	1.0731
-55.0000	-0.7590	0.9822
-50.0000	-0.8140	0.8820
-45.0000	-0.8500	0.7742
-40.0000	-0.8660	0.6610
-35.0000	-0.8600	0.5451
-30.0000	-0.8290	0.4295
-25.0000	-0.8530	0.3071
-24.0000	-0.8700	0.2814
-23.0000	-0.8900	0.2556
-22.0000	-0.9110	0.2297
-21.0000	-0.9340	0.2040
-20.0000	-0.9580	0.1785
-19.0000	-0.9820	0.1534
-18.0000	-1.0050	0.1288
-17.0000	-1.0820	0.1037
-16.0000	-1.1130	0.0786
-15.0000	-1.1050	0.0535
-14.0000	-1.0780	0.0283
-13.5000	-1.0530	0.0158
-13.0000	-1.0150	0.0151
-12.0000	-0.9040	0.0134
-11.0000	-0.8070	0.0121
-10.0000	-0.7110	0.0111
-9.0000	-0.5950	0.0099
-8.0000	-0.4780	0.0091
-7.0000	-0.3750	0.0086
-6.0000	-0.2640	0.0082
-5.0000	-0.1510	0.0079
-4.0000	-0.0170	0.0072
-3.0000	0.0880	0.0064
-2.0000	0.2130	0.0054
-1.0000	0.3280	0.0052
0.0000	0.4420	0.0052
1.0000	0.5560	0.0052
2.0000	0.6700	0.0053
3.0000	0.7840	0.0053
4.0000	0.8980	0.0054
5.0000	1.0110	0.0058
6.0000	1.1030	0.0091
7.0000	1.1810	0.0113
8.0000	1.2570	0.0124
8.5000	1.2930	0.0130
9.0000	1.3260	0.0136
9.5000	1.3560	0.0143
10.0000	1.3820	0.0150
10.5000	1.4000	0.0267
11.0000	1.4150	0.0383
11.5000	1.4250	0.0498
12.0000	1.4340	0.0613
12.5000	1.4430	0.0727
13.0000	1.4510	0.0841
13.5000	1.4530	0.0954
14.0000	1.4480	0.1065
14.5000	1.4440	0.1176
15.0000	1.4450	0.1287
15.5000	1.4470	0.1398

16.0000	1.4480	0.1509
16.5000	1.4440	0.1619
17.0000	1.4380	0.1728
17.5000	1.4390	0.1837
18.0000	1.4480	0.1947
18.5000	1.4520	0.2057
19.0000	1.4480	0.2165
19.5000	1.4380	0.2272
20.0000	1.4280	0.2379
21.0000	1.4010	0.2590
22.0000	1.3590	0.2799
23.0000	1.3000	0.3004
24.0000	1.2200	0.3204
25.0000	1.1680	0.3377
26.0000	1.1160	0.3554
28.0000	1.0150	0.3916
30.0000	0.9260	0.4294
32.0000	0.8550	0.4690
35.0000	0.8000	0.5324
40.0000	0.8040	0.6452
45.0000	0.7930	0.7573
50.0000	0.7630	0.8664
55.0000	0.7170	0.9708
60.0000	0.6560	1.0693
65.0000	0.5820	1.1606
70.0000	0.4950	1.2438
75.0000	0.3980	1.3178
80.0000	0.2910	1.3809
85.0000	0.1760	1.4304
90.0000	0.0530	1.4565
95.0000	-0.0740	1.4533
100.0000	-0.1990	1.4345
105.0000	-0.3210	1.4004
110.0000	-0.4360	1.3512
115.0000	-0.5430	1.2874
120.0000	-0.6400	1.2099
125.0000	-0.7230	1.1196
130.0000	-0.7900	1.0179
135.0000	-0.8400	0.9064
140.0000	-0.8680	0.7871
145.0000	-0.8720	0.6627
150.0000	-0.8500	0.5363
155.0000	-0.7980	0.4116
160.0000	-0.7140	0.2931
170.0000	-0.7490	0.0971
175.0000	-0.3740	0.0334
180.0000	0.0000	0.0198

Anexo F

```
!  
!  
! ANALISIS ESTÁTICO  
!  
!  
FINISH  
/CLEAR,START  
!  
/PREP7  
!  
! ELEMENTOS  
!  
ET,1,BEAM188  
KEYOPT,1,4,2  
ET,2,MASS21  
!  
! CONSTANTES  
!  
R,1,406780,406780,406780, , , ,  
!  
! MATERIALES  
!  
MP,EX,1,210E9  
MP,PRXY,1,0.3  
MP,DENS,1,7850  
!  
! SECCIONES  
!  
SECTYPE, 1, BEAM, CTUBE, Down, 0  
SECOFFSET, CENT  
SECDATA,6-0.027,6,0,0,0,0,0,0,0,0  
SECTYPE, 2, BEAM, CTUBE, Up, 0  
SECOFFSET, CENT  
SECDATA,3.87-0.019,3.87,0,0,0,0,0,0,0,0  
SECTYPE,3,TAPER, ,Variable  
SECDATA, 1,0,0,0,  
SECDATA, 2,0,0,90,  
!  
! MODELADO  
!  
K,1,0,0,0  
K,2,0,0,90  
L,1,2  
!  
! MALLADO  
!  
! TORRE  
!  
LESIZE,ALL,1  
LATT,1,1,1  
TYPE,1  
MAT,1  
SECNUM,3  
LMESH,ALL  
!  
! MASA  
!
```

```

!KATT, 1, 2, 2
!KMESH,2
CM,_Y,KP
KSEL, , , , 2
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
!*
CMSEL,S,_Y1
KATT, 1, 1, 2, 0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!*
KMESH, 2
!
! GIRO DE LA PIEZA
!
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1,-120,ZS,1
!
FINISH
!
/SOL
!*
!
! ANÁLISIS
!
ANTYPE,0
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,1
!*
/GO
!
! CONDICIONES DE CONTORNO
!
DK,P51X, ,0, ,0,ALL, , , , , ,
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,2
!*
/GO
!
! CARGA
!
FK,P51X,FX,-1256000
ACEL,0,0,9.81,
!
! RESOLUCIÓN
!
/STATUS,SOLU
SOLVE
!
! ELEMENTO TABLA
!
/POST1
AVPRIN,0, ,
ETABLE,N_I,SMISC, 1
Axil
ETABLE,N_J,SMISC, 14
Idem
ETABLE,VY_I,SMISC, 6
ETABLE,VY_J,SMISC, 19
ETABLE,VZ_I,SMISC, 5

```

Cortante
ETABLE,VZ_J,SMISC, 18 ! Idem
ETABLE,MY_I,SMISC, 2
ETABLE,MY_J,SMISC, 15 !
Flector
ETABLE,MZ_I,SMISC, 3 !
Idem
ETABLE,MZ_J,SMISC, 16
ETABLE,T_I,SMISC, 4 !
Torsor
ETABLE,T_J,SMISC, 17 !
Idem
!

Anexo G

```
!  
!  
! ANALISIS MODAL  
!  
!  
FINISH  
/CLEAR,START  
!  
/PREP7  
!  
! ELEMENTOS  
!  
ET,1,BEAM188  
KEYOPT,1,4,2  
ET,2,MASS21  
!  
! CONSTANTES  
!  
R,1,406780,406780,406780, , , ,  
!  
! MATERIALES  
!  
MP,EX,1,210E9  
MP,PRXY,1,0.3  
MP,DENS,1,7850  
!  
! SECCIONES  
!  
SECTYPE, 1, BEAM, CTUBE, Down, 0  
SECOFFSET, CENT  
SECDATA,6-0.027,6,0,0,0,0,0,0,0,0  
SECTYPE, 2, BEAM, CTUBE, Up, 0  
SECOFFSET, CENT  
SECDATA,3.87-0.019,3.87,0,0,0,0,0,0,0,0  
SECTYPE,3,TAPER, ,Variable  
SECDATA, 1,0,0,0,  
SECDATA, 2,0,0,90,  
!  
! MODELADO  
!  
K,1,0,0,0  
K,2,0,0,90  
L,1,2  
!  
! MALLADO  
!  
! TORRE  
!  
LESIZE,ALL,1  
LATT, 1, 1, 1  
TYPE,1  
MAT,1  
SECNUM,3  
LMESH,ALL  
!  
! MASA  
!
```

```

!KATT, 1, 2, 2
!KMESH, 2
CM, _Y, KP
KSEL, , , , 2
CM, _Y1, KP
CMSEL, S, _Y
!*
CMSEL, S, _Y1
KATT, 1, 1, 2, 0
CMSEL, S, _Y
CMDELE, _Y
CMDELE, _Y1
!*
KMESH, 2
!
! GIRO DE LA PIEZA
!
/VIEW, 1, 1, 1, 1
/ANG, 1, -120, ZS, 1
!
FINISH
/SOL
!*
!
! ANÁLISIS
!
ANTYPE, 2
!*
!*
MODEOPT, SUBSP, 10
EQSLV, FRONT
MXPAND, 0, , , 0
LUMPM, 0
PSTRES, 0
!*
MODEOPT, SUBSP, 10, 0, 0, , OFF
RIGID,
SUBOPT, 8, 4, 14, 0, 0, ALL
!*
FLST, 2, 1, 3, ORDE, 1
FITEM, 2, 1
!*
/GO
!
! CONDICIONES DE CONTORNO
!
DK, P51X, , 0, , 0, ALL, , , , , ,
!
! RESOLUCIÓN
!
/STATUS, SOLU
SOLVE

```


Anexo H

```
!  
!  
! ANALISIS TRANSITORIO  
!  
!  
FINISH  
/CLEAR,START  
!  
/PREP7  
!  
! ELEMENTOS  
!  
ET,1,BEAM188  
KEYOPT,1,4,2  
ET,2,MASS21  
!  
! CONSTANTES  
!  
R,1,406780,406780,406780, , , ,  
!  
! MATERIALES  
!  
MP,EX,1,210E9  
MP,PRXY,1,0.3  
MP,DENS,1,7850  
!  
! SECCIONES  
!  
SECTYPE, 1, BEAM, CTUBE, Down, 0  
SECOFFSET, CENT  
SECDATA,6-0.027,6,0,0,0,0,0,0,0,0  
SECTYPE, 2, BEAM, CTUBE, Up, 0  
SECOFFSET, CENT  
SECDATA,3.87-0.019,3.87,0,0,0,0,0,0,0,0  
SECTYPE,3,TAPER, ,Variable  
SECDATA, 1,0,0,0,  
SECDATA, 2,0,0,90,  
!  
! MODELADO  
!  
K,1,0,0,0  
K,2,0,0,90  
L,1,2  
!  
! MALLADO  
! TORRE  
!  
LESIZE,ALL,1  
LATT,1,1,1  
TYPE,1  
MAT,1  
SECNUM,3  
LMESH,ALL  
!  
! MASA  
!  
!KATT,1,2,2
```

```

!KMESH,2
CM,_Y,KP
KSEL, , , , 2
CM,_Y1,KP
CMSEL,S,_Y
!*
CMSEL,S,_Y1
KATT, 1, 1, 2, 0
CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
!*
KMESH, 2
!
! GIRO DE LA PIEZA
!
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1,-120,ZS,1
!
/SOLU
!
! ANÁLISIS
!
ANTYPE,4
TRNOPT,FULL
LUMPM,0
OUTRES, ERASE
NSUBST, 1000 , 1000 , 1000
OUTRES, ALL , -1000
TIME, 1.000000e+02
ALPHAD, 0.43078474
BETAD, 0.00105954
!
! CONDICIONES DE CONTORNO
!
D,1,,,,,ALL
!
! DEFICIÓN DE LAS TABLAS
!
*DIM,TABLA 2 X, TABLE,1,1000,1,,
/GO
!
! TABLA TIEMPO
!
F,2,FX,%TABLA 2 X%
*SET,TABLA 2 X (0,1,1),0.0000
*SET,TABLA 2 X (0,2,1),0.1000
      ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓
*SET,TABLA 2 X (0,999,1),99.8000
*SET,TABLA 2 X (0,1000,1),99.9000
!
! TABLA TIEMPO
!
*SET,TABLA 2 X (1,1,1),0
*SET,TABLA 2 X (1,2,1),-742457.9089
      ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓
*SET,TABLA 2 X (1,999,1),-937836.5892
*SET,TABLA 2 X (1,1000,1),-927386.0501
!
! RESOLUCIÓN
!
SOLVE

```

