



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS
DEPARTAMENTO: INGENIERÍA
MECÁNICA Y FABRICACIÓN



Titulación: Ingeniero Industrial

PROYECTO FIN DE CARRERA

*Estudio con elementos finitos de las
fuerzas de estampación con rebaba en frío*

Autor	Manuel Requena Quijada
Tutor	Luis Valentín Bohórquez Jiménez
Nivel difusión	<Público>



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS
DEPARTAMENTO: INGENIERÍA
MECÁNICA Y FABRICACIÓN**





ÍNDICE

1	Objetivo del proyecto.....	5
2	Introducción a la Estampación.....	8
2.1	Conformado en frío.....	9
2.2	Estampación con rebaba	9
2.3	Estampación sin rebaba	11
2.4	Estampas	11
2.5	Análisis del proceso de estampación	13
	2.5.1 Fuerza de estampación.....	14
3	Descripción del estudio.....	16
3.1	Introducción	16
3.2	Comportamiento y caracterización del material	17
3.3	Descripción de los modelos	18
3.4	Descripción de las simulaciones	31
4	Resultado de las simulaciones	32
4.1	Número de elementos de la malla.....	32
4.2	Velocidad de estampación	34
4.3	Coefficiente de rozamiento	37
4.4	Geometría de la preforma	39
4.5	Geometría de la estampa.....	39
5	Cálculo del factor K.....	41
6	Obtención de la función $K = K(c/a)$	44
7	Elipsoide equivalente	46
7.1	Ejemplo.....	46
7.2	Resultados obtenidos	48
8	Conclusiones	50
9	Bibliografía	51



Anexo I..... 52

Formulación de flujo incremental para el análisis de elementos finitos de procesos conformado plástico en 3 dimensiones.

Anexo II..... 59

Ejemplo de datos extraídos del programa Deform3D para una de las simulaciones realizadas.



1 Objetivo del proyecto

Los métodos descritos en la bibliografía para la estimación de la fuerza de estampación se basan en un factor, dependiente del tipo de estampación y de la forma de la pieza a fabricar, que multiplica al producto del área ecuatorial de la pieza por una tensión acorde con el nivel de deformación de la misma,

$$F = K\sigma_f A_{PT}$$

Donde K es un factor multiplicativo, σ_f es el esfuerzo del flujo a la temperatura de forjado, y A_{PT} es el área proyectada de forja, incluyendo la rebaba. No es más que una extensión del cálculo de la fuerza para la forja libre de un cilindro. El factor K está tabulado, siendo la entrada de dichas tablas muy ambigua (piezas simples, complejas, muy complejas) y la salida rangos de valores muy amplios, según la bibliografía.

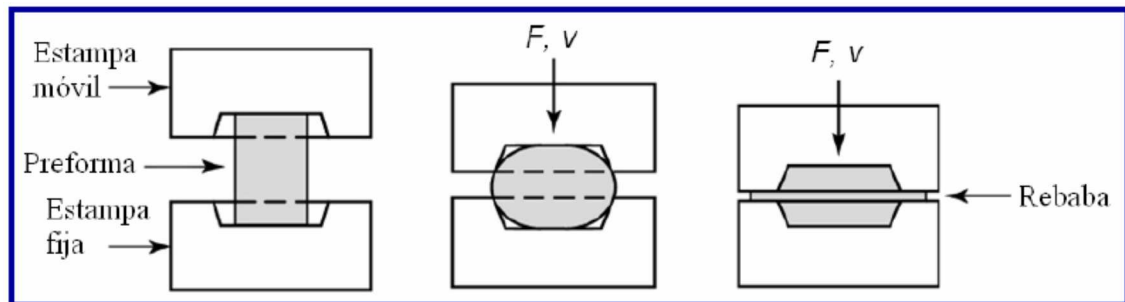


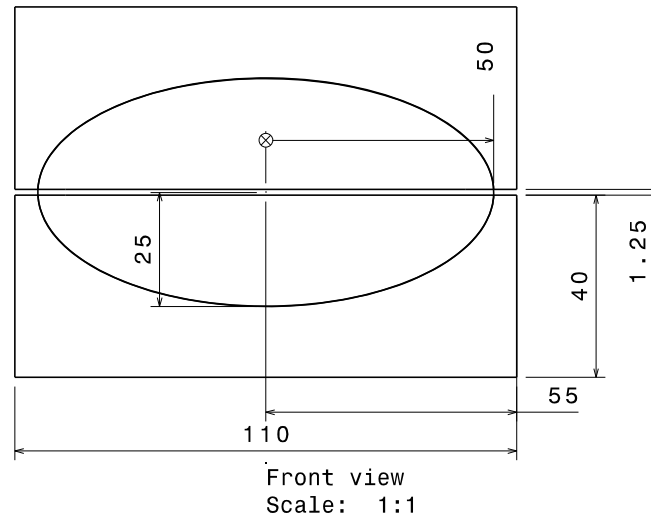
Figura 1. Proceso de estampación con rebaba.

El objetivo del trabajo es tratar de encontrar una correlación matemática, o en su defecto un algoritmo, que nos permita concretar mejor el valor del factor K , y por lo tanto, el valor de la fuerza en un proceso de estampación con rebaba sin tener que recurrir a esas tablas de factores que dejan al calculista una gran libertad de elección con la consiguiente incertidumbre sobre la validez del resultado. Para ello emplearemos el método de los elementos finitos en su formulación de flujo.

Aunque la estampación, como en general la forja, se suele hacer en caliente, el estudio se hará en frío por simplicidad y se dejará para desarrollos posteriores el hacerlo en caliente.

Se va a realizar un estudio sobre los valores del parámetro K de la fórmula de la fuerza de forjado en procesos de estampación en frío, se estudia el proceso de conformado mediante estampación con rebaba de una serie de piezas con simetría de revolución cuya sección transversal tiene la forma de un elipsoide, se estudiarán una serie de procesos en los que va variando la relación de lados del elipsoide (ver imagen 2) intentando realizar una acotación más precisa de sus valores y obtener una función de dicho parámetro (K) en función de los valores de la relación de lados del elipsoide, tal que,

$K = K(c/a)$, siendo a y c los lados mayor y menor del elipsoide respectivamente.



Snapshot of Drawing1.CATDrawing - 22/03/2017 13:30:20

Figura 2. Sección de una estampa con forma elíptica.

Los parámetros que definen la geometría en la imagen anterior son los siguientes:

$a = b = 50$ mm, lados mayores del elipsoide

$c = 25$ mm, altura del elipsoide

$b_{reb} = 5$ mm, anchura de la rebaba

$h_{reb} = 1.25$ mm, altura de la rebaba

Para la geometría anterior la relación de los lados del elipsoide $c/a = 0.5$

Estudiar la extrapolación de los valores del parámetro K a piezas con geometría aleatoria siempre que tengan simetría de revolución, mediante la equivalencia con el parámetro principal que define las piezas con las que se ha obtenido la función de K , la relación de lados c/a .

Pieza cualquiera con simetría de revolución \rightarrow elipsoide equivalente $\rightarrow c'/a' \rightarrow K$

Para la realización de este estudio se va a partir siempre de una preforma cilíndrica que será sometida a un proceso de estampación con el objetivo de obtener una pieza con una geometría definida, esta pieza siempre va a tener simetría de revolución con respecto al eje z .

A continuación se muestra un proceso tipo para el estudio, los estados inicial y final del proceso de estampación en el que se desea obtener una pieza con forma de elipsoide, en concreto con la geometría anteriormente definida a partir de una pieza inicial con forma cilíndrica (ver figuras 3 y 4). En las imágenes se representa $1/8$ del problema en estudio debido a la geometría, esto se comenta más adelante en la memoria.

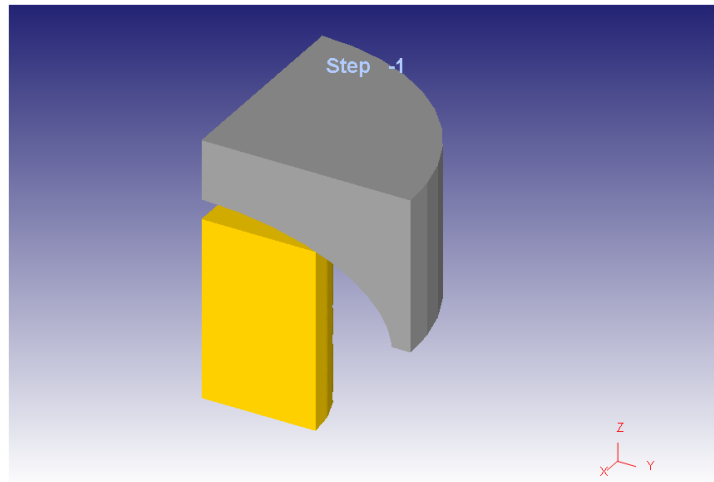


Figura 3. Estado inicial, preforma y estampa justo antes del contacto entre ambas.

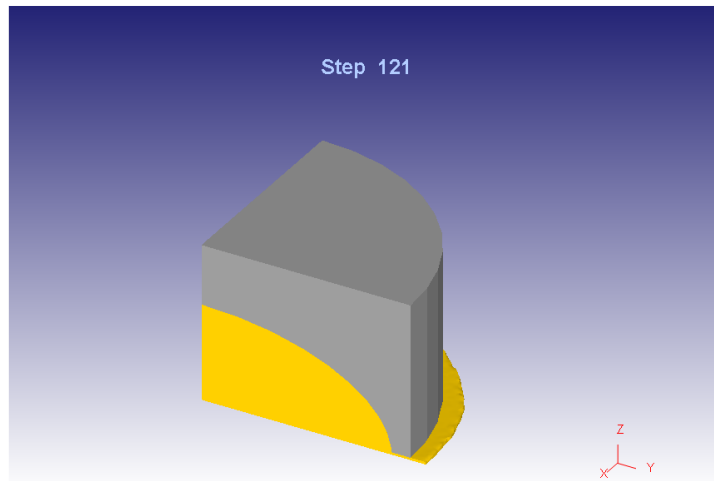


Figura 4. Estado final del proceso, la estampa ha llegado al final de su recorrido.



2 Introducción a la Estampación

La forja/estampación es un proceso de conformado por deformación plástica que se realiza mediante la compresión de material entre dos matrices, normalmente una de ellas fija y la otra móvil. El objetivo del proceso es obtener unas deformaciones plásticas o permanentes sobre el material mediante la aplicación de cargas externas.

Las cargas pueden ser aplicadas de manera gradual, mediante una prensa, o de impacto, mediante una maza/yunque, martinete, etc.

Si el flujo de material durante el proceso es libre, el proceso se denomina **forja libre**, y si por el contrario el flujo de materia esta impuesto por matrices estamos ante un proceso de **estampación**.

Forja libre:

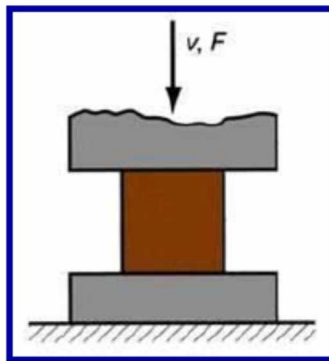


Figura 5. Esquema de un proceso de forja libre.

Estampación:

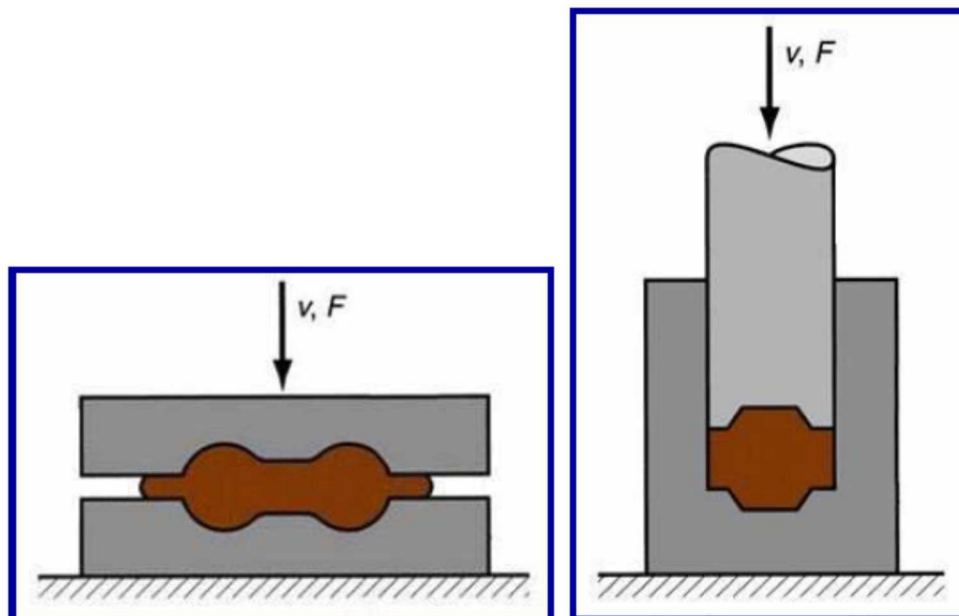


Figura 6. A la izquierda un proceso de estampación con rebaba y a la derecha sin rebaba.

Mediante los procesos de deformación plástica se puede controlar el flujo del metal y con ello la estructura de grano del material (orientación, tamaño y distribución de los granos) permitiendo así mejorar algunas propiedades mecánicas como la **resistencia** y la **tenacidad**.

A continuación se muestra el flujo de grano de una misma pieza realizada por tres procesos diferentes:

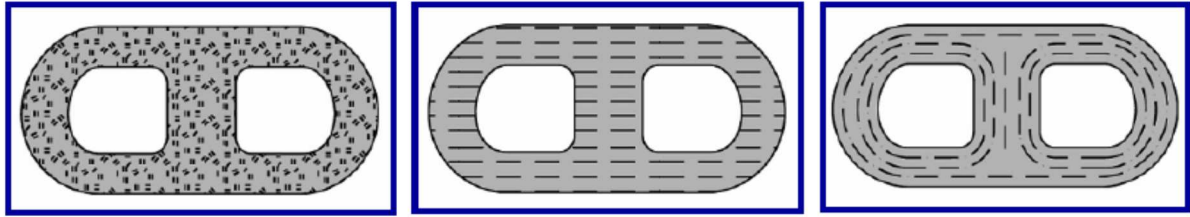


Figura 7. Flujo de grano para procesos de fundición a la izquierda, de mecanizado en el centro y de deformación plástica a la derecha.

Se puede observar que existe isotropía y homogeneidad para el flujo de grano en procesos de fundición. En procesos de mecanizado el flujo de grano presenta una microestructura discontinua y granos cortados y para el caso de procesos de deformación plástica el flujo de grano queda con anisotropía.

2.1 Conformado en frío

El conformado se considera que se realiza en frío siempre que la temperatura a la que se realice el proceso sea $T < 0.3 T_F$, siendo T_F la temperatura de fusión del material.

Las ventajas del trabajo en frío en este tipo de procesos son:

- Buena precisión dimensional y buen acabado superficial.
- Aumento de la resistencia y dureza de la pieza, esto es consecuencia del endurecimiento por deformación.
- Los granos de la pieza son alargados, esto implica anisotropía en la pieza final.
- Ahorro de energía térmica y mayores velocidades de producción.

Y los inconvenientes:

- Se necesitan equipos más robustos (con mayores fuerzas y potencias).
- Las piezas a producir deben ser de geometría no muy compleja, el grado dependerá de la ductilidad del material de trabajo.

2.2 Estampación con rebaba

En los procesos de estampación con rebaba, el grabado de las matrices restringe la fluencia del material, gracias a la rebaba se permite obtener piezas de gran complejidad y con buena precisión dimensional.

Las funciones de la rebaba son:

- ayudar al material a seguir fluyendo dentro del molde, al generar una gran oposición en el canal de rebaba que dificulta que el material fluya hacia afuera (este efecto es mayor si el proceso se realiza en caliente).
- hacen de almohadillas entre las estampas, evitando que estas se dañen.

La siguiente imagen muestra en tres fases el proceso de estampación con rebaba a partir de una preforma inicial cilíndrica.

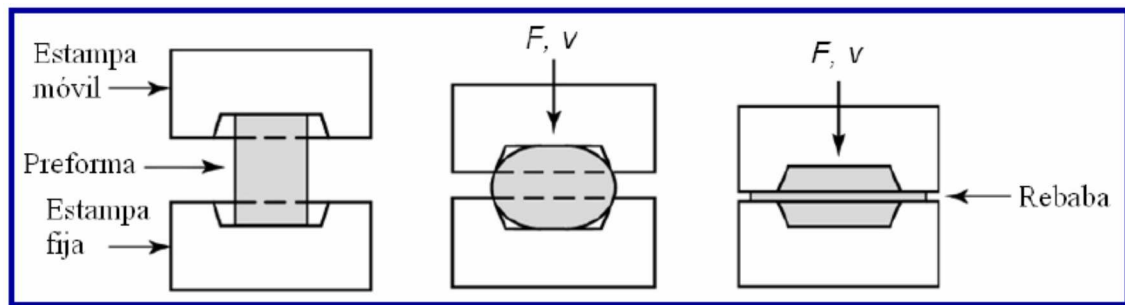


Figura 8. Fases del proceso de estampación con rebaba.

Las principales ventajas de los procesos de estampación con rebaba son:

- Pieza final con mejores propiedades que en la forja libre
- Buena precisión dimensional
- Gran capacidad de producción

Frente a las desventajas:

- Elevado coste de las estampas
- Necesidad de mecanizado
- No se aprovecha todo el material

En procesos de conformado por deformación plástica las diferentes etapas intermedias tienen como objetivo ir distribuyendo progresivamente el material para conseguir una deformación lo más homogénea posible en la pieza final. En caso contrario, la inhomogeneidad en la deformación es la causante de tensiones residuales, agrietamientos, defectos de forma, etc.

Ejemplo de pieza fabricada mediante estampación en varias etapas.

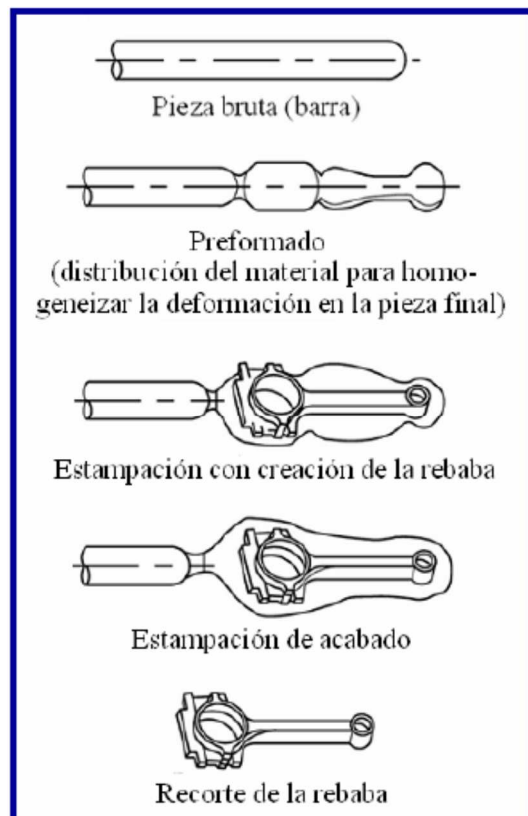


Figura 9. Etapas del proceso de fabricación de una biela mediante estampación.



2.3 Estampación sin rebaba

En los procesos de estampación sin rebaba se restringe completamente la fluencia del material, lo cual permite la obtención de piezas con una excelente precisión dimensional, esto hace que también se conozca el proceso como estampación de precisión. Las posibles piezas a obtener tienen menor complejidad en sus formas que en la estampación con rebaba.

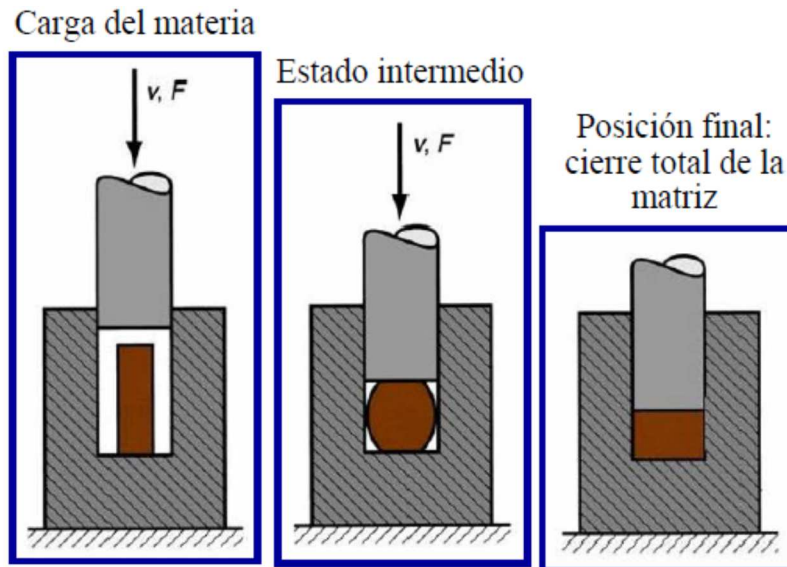


Figura 10. Etapas del proceso de estampación sin rebaba.

Ventajas:

- Tolerancias estrechas.
- Con frecuencia el mecanizado es innecesario.
- Muy buen aprovechamiento del material.
- Posibilidad de secciones muy delgadas.

Inconvenientes:

- Se requieren grandes fuerzas.
- Estampas muy precisas y costosas.
- Necesidad de elementos extractores.

El proceso se realiza mediante matrices grabadas que se cierran completamente. Se requiere un dimensionamiento preciso del material inicial, si éste es inferior, no se llenara completamente la matriz y si es excesivo, no cerraran por completo las estampas.

2.4 Estampas

Las estampas o matrices son las piezas encargadas de conferir la forma final al material, su geometría es un negativo de la pieza a obtener, a falta de un posible proceso de mecanizado posterior. Las cargas se transmiten a través de ellas. Los factores a tener en cuenta en el diseño de las estampas son los siguientes:

- Material de la pieza: resistencia, ductilidad, sensibilidad a la velocidad de deformación y a la temperatura, características de fricción, forma y complejidad.
- Distorsión de la estampa frente a cargas elevadas.



- Dirección del flujo del material.
- Línea de partición: en general, en la sección transversal máxima de la pieza. En piezas simétricas sencillas se encuentra en el mismo plano medio de la sección.
- Ángulos de salida para la extracción de la pieza: internos 7-10° y externos de 3-5°
- Esquinas y biseles: lo más grandes posibles.
 - o Efecto sobre el flujo de material.
 - o Desgaste (concentración de tensiones y ciclos térmicos).
 - o Rotura por fatiga en biseles.

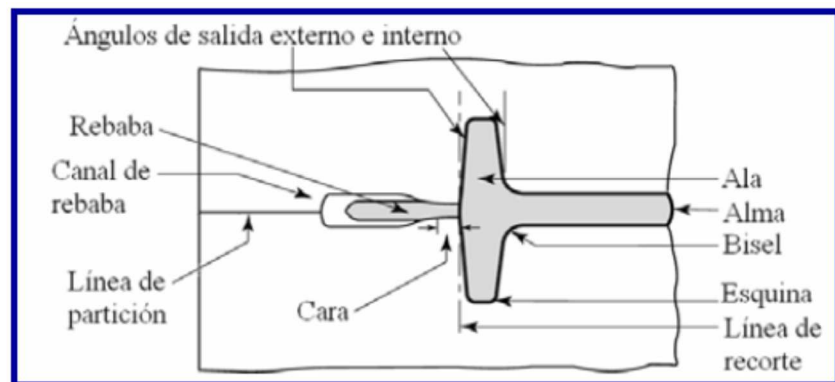


Figura 11. Esquema ejemplo de una estampa.

Materiales de las estampas

Los materiales de las estampas deben ser resistentes a la rotura a alta temperatura, al choque térmico y mecánico, y al desgaste, en especial al desgaste abrasivo debido a la cascarilla.

La selección del material depende del material de la pieza a formar (composición y propiedades), de la complejidad de la forma, la temperatura de operación, tipo de operación, coste de los materiales, cantidad de operaciones a realizar, etc. Los materiales más comunes son los aceros para herramientas (que obtienen Cr, Ni, Mo y V).

Las estampas se fabrican por fundición en arena (estampas grandes) o en cáscara (estampas pequeñas, propiedades más isotrópicas, pero peor precisión dimensional que mediante el mecanizado) o por forja y mecanizado (más difícil en materiales de alta resistencia).

- Insertos en las estampas:
 - Reducen costes de fabricar estampas más complejas.
 - Se pueden utilizar materiales más fuertes y duros.
 - Fáciles de cambiar en caso de fallo o desgaste.

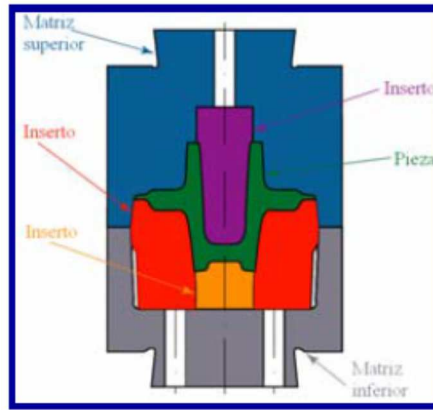


Figura 12. Estampa con insertos.

- Lubricación de las estampas:

La lubricación de las estampas reduce la fricción y el desgaste, también disminuye la velocidad de enfriamiento de la pieza y la adherencia entre la pieza y la estampa.

Si la estampación es en caliente se aplica el lubricante en la estampa, normalmente grafito, disulfuro de Molibdeno (Mo) o vidrio y si el proceso se realiza en frío se aplica en la pieza, aceites minerales o jabones.

2.5 Análisis del proceso de estampación

Debido a la complejidad de los procesos de forja/estampación, la estimación de la fuerza y energía necesarias generalmente se realiza mediante relaciones empíricas.

En la siguiente imagen se muestra el esquema de un proceso de estampación modelo (ver imagen 13). Se desea obtener una pieza con simetría de revolución a partir de una preforma cilíndrica inicial. En el esquema aparecen los parámetros que definen el proceso.

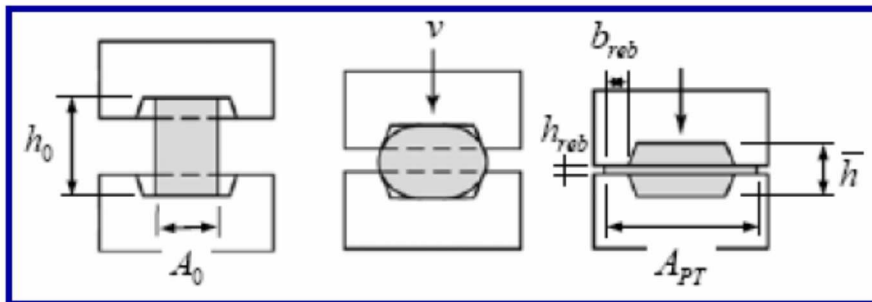


Imagen 13. Esquema estampación con rebaba.

Volumen del material: $V_{material} \approx V_{pieza} + V_{rebaba}$

Según las simulaciones realizadas existe una pequeña pérdida de volumen durante los procesos de estampación.

Volumen de rebaba: $V_{rebaba} \geq h_{reb} b_{reb} L_{pieza}$ siendo h_{reb} el espesor de rebaba, b_{reb} la anchura de rebaba y L_{pieza} el perímetro de la pieza.

Área proyectada total sobre el plano de partición de las estampas (pieza + matrices): $A_{PT} = A_{PP} + b_{reb} L_{pieza}$.

Altura media: $h_{media} = h_f$ en forja libre.

$h_{media} = V_{material} / A_{PT}$ en estampación.

Estimación del espesor h_{reb} y de la anchura b_{reb}



Para la estimación se utilizan dos criterios proporcionados por la teoría:

Schey: $h_{reb} \approx 0.015(A_{PP})^{1/2}$; siendo $b_{reb} \approx 3h_{reb}$ a $5h_{reb}$ y $b_{reb} \approx 4h_{reb}$

Kalpakjian: $h_{reb} \approx 0.03e_{max}$ siendo e_{max} el espesor máximo de la pieza, $b_{reb} \approx 2h_{reb}$ a $5h_{reb}$.

La deformación $\varepsilon = \ln \frac{h_0}{h}$

La velocidad de deformación $\dot{\varepsilon} = \ln \frac{v}{h}$

Presión, fuerza, potencia y energía consumidas:

$$p = K_f \cdot \sigma_Y$$

$$F = p \cdot A_{PT}$$

$$P = F \cdot v$$

$$W = Q_f \cdot \sigma_Y \cdot \varepsilon \cdot V_{material}$$

2.5.1 Fuerza de estampación

Los procesos de forja/estampación no son procesos estacionarios, la fuerza varía desde cero hasta un valor máximo al final de la carrera de la estampa.



Figura 14. Grafica Fuerza de estampación-Desplazamiento de la estampa.

La fuerza F de forjado que se necesita aplicar en un proceso de estampación con rebaba se puede obtener de la siguiente fórmula:

$$F = K \sigma_f A_{PT}$$

Donde K es un factor multiplicativo, σ_f es el esfuerzo del flujo a la temperatura de forjado, y A_{PT} es el área proyectada de forja, incluyendo la rebaba. Esta fórmula se basa en correlaciones empíricas ya que la complejidad del problema es tal que la única solución posible se basa en métodos numéricos (elementos finitos).

Hasta el momento existen tres autores que ofrecen intervalos de valores para el factor K . a continuación se muestran tres tablas con los valores ofrecidos para el parámetro K .



Tabla 1. Valores del parámetro K según la bibliografía existente.

Autor	Tipo de geometría a obtener	Valores para el parámetro K
Kalpakjian	Formas sencillas sin rebaba	3 a 5
	Formas sencillas con rebaba	5 a 8
	Formas complejas con rebaba	8 a 12
Schey	Formas simples sin rebaba	6
	Formas complejas con rebaba	8
	Muy complejas con rebaba	10
	Acuñado sin rebaba	6
	Complejas sin rebaba	8
Mikell P. Groover	Simple sin rebaba	3 a 5
	Simple con rebaba	5 a 8
	Complejas con rebaba	8 a 12



3 Descripción del estudio

3.1 Introducción

En este capítulo se va a describir el estudio realizado, se define la geometría de los modelos y los parámetros utilizados en las simulaciones realizadas mediante el programa Deform3D para la obtención de la fuerza de estampación mediante elementos finitos.

El proceso de estudio se desarrolla de la siguiente forma:

1. Debido a la simetría de las piezas se va a modelar 1/8 del problema para mayor agilidad en los tiempos de simulación. Se modela la geometría de pieza inicial y una de las matrices, ya que el problema es también simétrico con respecto al plano medio horizontal. Los modelos se realizan median el programa de diseño Catia V5, se realizan los cortes por los planos de simetría y se guardan en el formato general de Catia y en un formato con extensión .stl que es el que reconoce el programa Deform3D para poder importar las geometrías a estudiar.

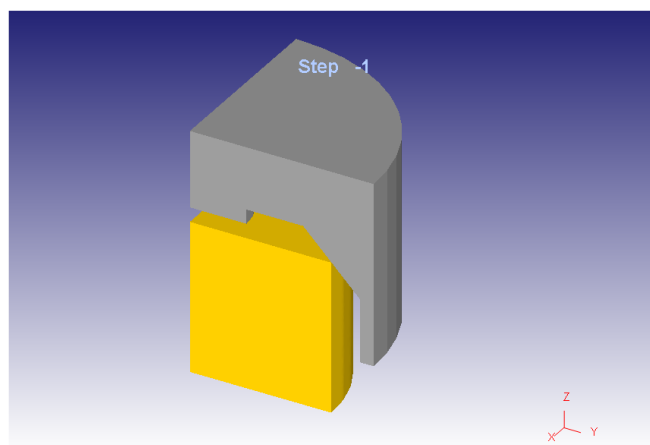


Figura 15. Geometría lista para la simulación mediante el programa Deform3D.

2. Simulación mediante el programa Deform3D del proceso de conformado. Para cada uno de los procesos se introducen los parámetros requeridos por el programa. Hay que indicar que se trata de un problema simétrico; el número de estampas; importar la geometría inicial; elegir el número de elementos de malla; definir los planos de simetría; importar la geometría de la estampa; definir el movimiento de la estampa (dirección, sentido, velocidad, y posición final); etc. Una vez introducidos todos los parámetros que definen el proceso el programa está en condiciones de realizar una simulación numérica mediante elementos finitos. Finalizada la simulación con éxito, el programa tiene un permite el análisis de resultados y la extracción de diferentes datos de los que nos vamos a servir para la fuerza aplicada por la estampa durante el proceso.
3. Obtención del valor del factor K, se procede al cálculo del parámetro k de la formula de la fuerza de estampación (ver Capítulo 5).



3.2 Comportamiento y caracterización del material

El material utilizado en el estudio es un acero estándar al carbono cuya denominación es acero AISI 1006. Las siguientes tablas muestran la composición y las propiedades del citado acero. La fuente ha sido la web <https://www.acerosindustriales.com>.

Tabla 2. Composición en % peso del acero AISI 1006.

Elemento	% Peso
C	0.08 (máx.)
Mn	0.25-0.40
P	0.04 (máx.)
S	0.05 (máx.)

Tabla 3. Propiedades mecánicas del acero AISI 1006.

Propiedades		Condiciones	
		T (°C)	Tratamiento
Densidad ($\times 1000 \text{ kg/m}^3$)	7.872	25	
Módulo de Poisson	0.27-0.30	25	
Módulo elástico (GPa)	190-210	25	
Resistencia a tracción (Mpa)	330	25	Estirado en frío (barra redonda (19-32 mm))
Límite Elástico (Mpa)	285		
Elongación (%)	20		
Reducción de Área (%)	45		
Dureza (HB)	95	25	Estirado en frío (barra redonda (19-32 mm))

Tabla 4. Propiedades térmicas del acero AISI 1006.

Propiedades		Condiciones	
		T (°C)	Tratamiento
Coefficiente de expansión térmica ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	12.6	0-100	
Calor específico (J/kg-K)	481	50-100	

De la librería del programa Deform3D se sacan los siguientes datos de la relación tensión-deformación para el acero AISI 1006, en frío 20 °C (70F).



Tabla 5. Tensión-deformación para el acero AISI 1006 según Deform3D.

Deformación	Tensión
0	250
0,1	302,649
0,7	553,249
2	557



Gráfica 1. Curva tensión-deformación del acero AISI 1006 según los datos del programa Deform3D.

3.3 Descripción de los modelos

En este punto se va a definir la geometría de todos los modelos utilizados en las simulaciones.

Las preformas iniciales tienen forma cilíndrica y quedan definidas por el radio R_0 y la altura H_0 .

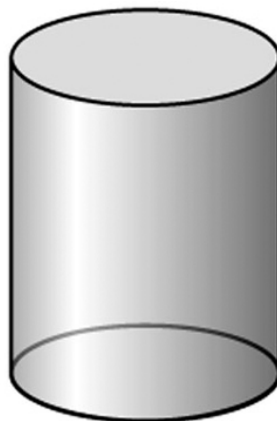
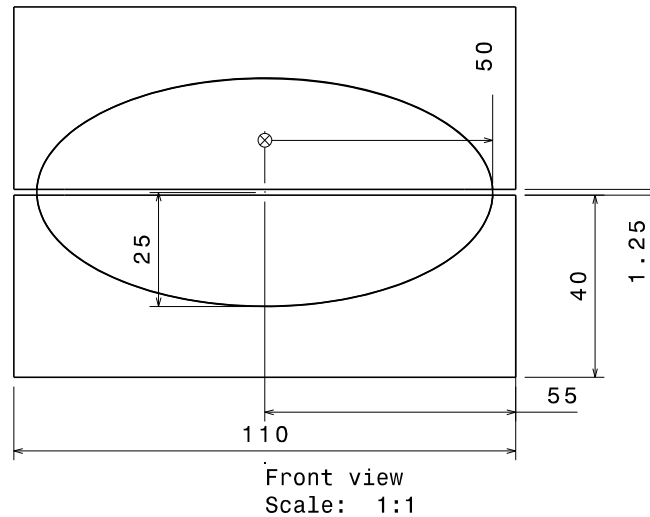


Figura 16. Preforma inicial. Caso 0.



Snapshot of Drawing1.CATDrawing - 22/03/2017 13:30:20

Figura 17. Geometría de las matrices **Caso 0**.

La primera parte del estudio consiste en ver cómo afecta la variación en la relación de lados del elipsoide que define la sección transversal de las matrices. Todas las matrices son macizas y presentan una sección transversal con forma de elipse, la elipse queda definida por su lado mayor y su lado menor c .

$$a = b = 50 \text{ mm}$$

$$c = 25 \text{ mm}$$

Relación de lados $c/a = 0,5$ (éste será el parámetro principal que define la pieza (a obtener)).

En cuanto a la rebaba: $h_{reb} = 1,25 \text{ mm}$; $b_{reb} = 5 \text{ mm}$ (este es el espacio para la rebaba dentro de las matrices).

- Cálculo de las dimensiones de la rebaba (Caso 0):

Según Schey: $h_{reb} \approx 0.015(A_{PP})^{1/2}$; siendo $A_{PP} = \pi a^2 \rightarrow h_{reb} = 0.015(\pi 50^2) = 1.329 \text{ mm}$, redondeando al cuarto de milímetro nos quedamos con: $h_{reb} = 1,25 \text{ mm}$.

$$b_{reb} \approx 4h_{reb} \rightarrow b_{reb} = 5 \text{ mm}.$$

- Cálculos para las dimensiones de la preforma según la pieza a obtener (Caso 0):

$$V_{material} \approx V_{pieza} + V_{rebaba} = (4/3)\pi abc + \pi h_{reb}((a + 2b_{reb})^2 - a^2) = \pi 84708,333 \text{ mm}^3.$$

$V_{material} \approx V_{preforma} = \pi R_0^2 H_0 = \pi 84708,3 \rightarrow$ Ya estamos en condiciones de definir la geometría de la preforma, el radio de la preforma R_0 debe ser siempre menos que el lado mayor del elipsoide a .

Inicialmente se han realizado una serie de simulaciones para observar cómo influye en el proceso de estampación el radio de la preforma, es decir, lo alargado que sea el cilindro inicial (ver apartado 4.4), se definen las preformas variando R_0 de tal manera que,

Tabla 6. Diferentes dimensiones de la preforma con la misma matriz. (Dimensiones en mm).

Modelo	Elipsoide				Rebaba		Preforma	
	a	b	c	c/a	h_{reb}	b_{reb}	R_0	H_0
I	50	50	25	0,5	1,25	5	(0,9a)45	41,8313
II	50	50	25	0,5	1,25	5	(0,75a)37,5	60,2370
III	50	50	25	0,5	1,25	5	(0,6a)30	94,1204
IV	50	50	25	0,5	1,25	5	(0,45a)22,5	167,3251

Para los casos estudiados a continuación se elige un radio de la preforma de $R_0 = 30 \text{ mm}$, como se ha visto en el cálculo de la geometría de la preforma una vez conocido el radio de la preforma y el volumen



de material se puede obtener la altura de la preforma H_0 de un modo muy sencillo. En la siguiente tabla queda definida la geometría de la siguiente serie de piezas sometidas a estudio, todas las piezas son elipsoides en los que solo varía el lado menor c (la altura). La idea es realizar un estudio según la variación en la relación de lados de las estampas. El primer caso se corresponde con el caso esférico, relación de lados $c/a = 1$. La tabla también muestra la preforma correspondiente a cada una de las piezas.

Tabla 7. Geometría de los modelos para el estudio de la variación en la relación de lados de las estampas (dimensiones en mm).

Modelo	Elipsoide				Rebaba		Preforma	
	a	b	c	c/a	h_{reb}	b_{reb}	R_0	H_0
A	50	50	50	1	1,25	5	30	192,8
B	50	50	47,5	0,95	1,25	5	30	183,6
C	50	50	42,5	0,85	1,25	5	30	165,0
D	50	50	37,5	0,75	1,25	5	30	146,5
E	50	50	31,5	0,63	1,25	5	30	124,3
F	50	50	25	0,5	1,25	5	30	100,2
G	50	50	17,5	0,35	1,25	5	30	72,5
H	50	50	12,5	0,25	1,25	5	30	53,9
I	50	50	10	0,2	1,25	5	30	44,7
J	50	50	6,5	0,13	1,25	5	30	31,7
K	50	50	5	0,1	1,25	5	30	26,2
L	50	50	2,5	0,05	1,25	5	30	16,9

Modelos para el estudio sobre el elipsoide equivalente:

Una vez estudiadas las piezas anteriores se va a realizar un estudio sobre piezas de geometría aleatoria, aunque siempre manteniendo la simetría de revolución como en los casos anteriores. A continuación se definen los modelos utilizados para este estudio, un total de 18 diferentes.

- Pieza 1

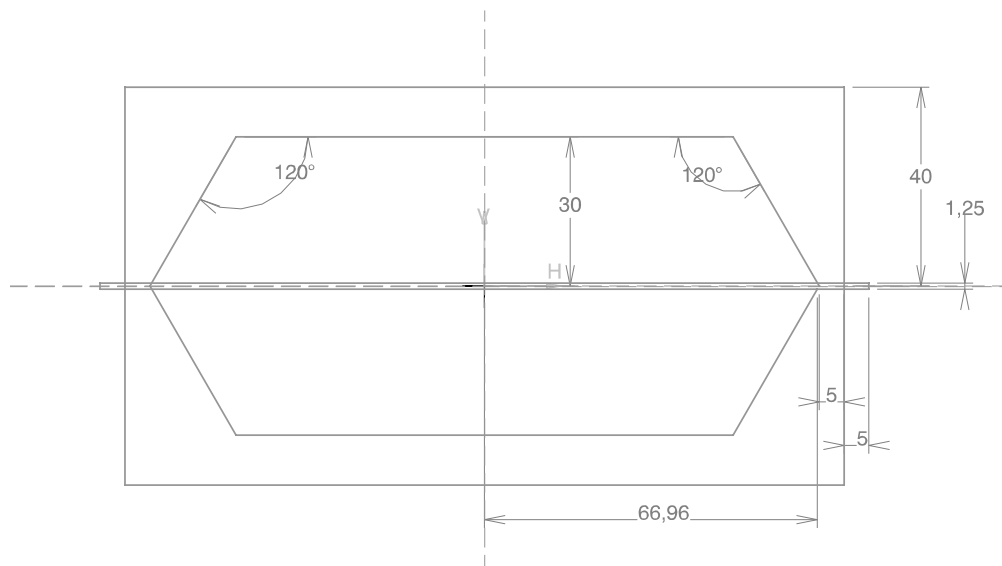


Figura 18. Sección de la pieza 1.



$$a = b = 66,96 \text{ mm}$$

$$c = 30 \text{ mm}$$

$$c/a = 0,448$$

Se ha mantenido la altura y anchura de la rebaba. $h_{reb} = 1,25 \text{ mm}$ y $b_{reb} = 5 \text{ mm}$.

Preforma 1:

El volumen de la pieza se obtiene directamente del programa con el que se ha diseñado, Catia V5 en este caso. Según la geometría, se elige un valor para el radio de la preforma, como ya se tiene el volumen y el radio de la preforma se obtiene el valor de la altura de la preforma.

Tabla 8. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 1.

V_1	658900 mm ³
R_0	55 mm
H_0	70 mm

- Pieza 2

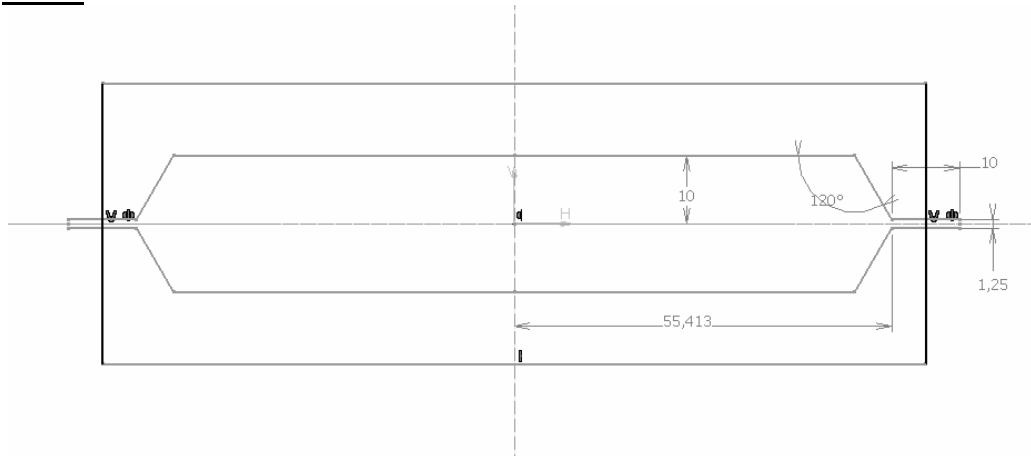


Figura 19. Sección de la pieza 2.

Preforma 2:

Tabla 9. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 2.

V_2	180600 mm ³
R_0	51,5 mm
H_0	21,674 mm



- **Pieza 3**

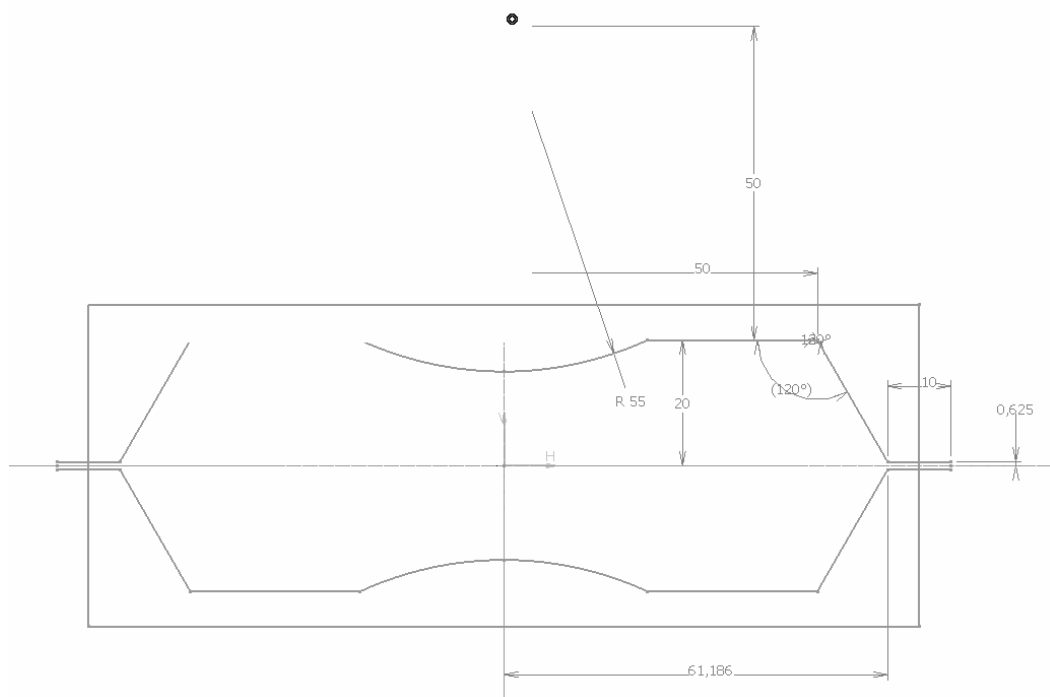


Figura 20. Sección de la pieza 3.

Preforma 3:

Tabla 10. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 3.

V_3	389000 mm ³
R_0	55 mm
H_0	40,993 mm

- **Pieza 4**

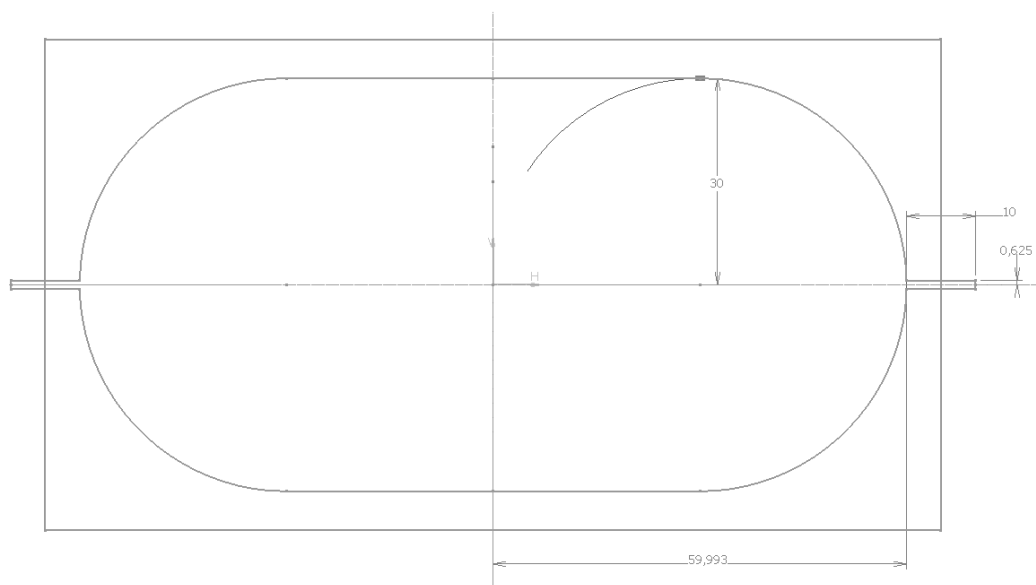


Figura 21. Sección de la pieza 4.



Preforma 4:

Tabla 11. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 4.

V_4	554300 mm ³
R_0	45 mm
H_0	87,13 mm

- Pieza 5

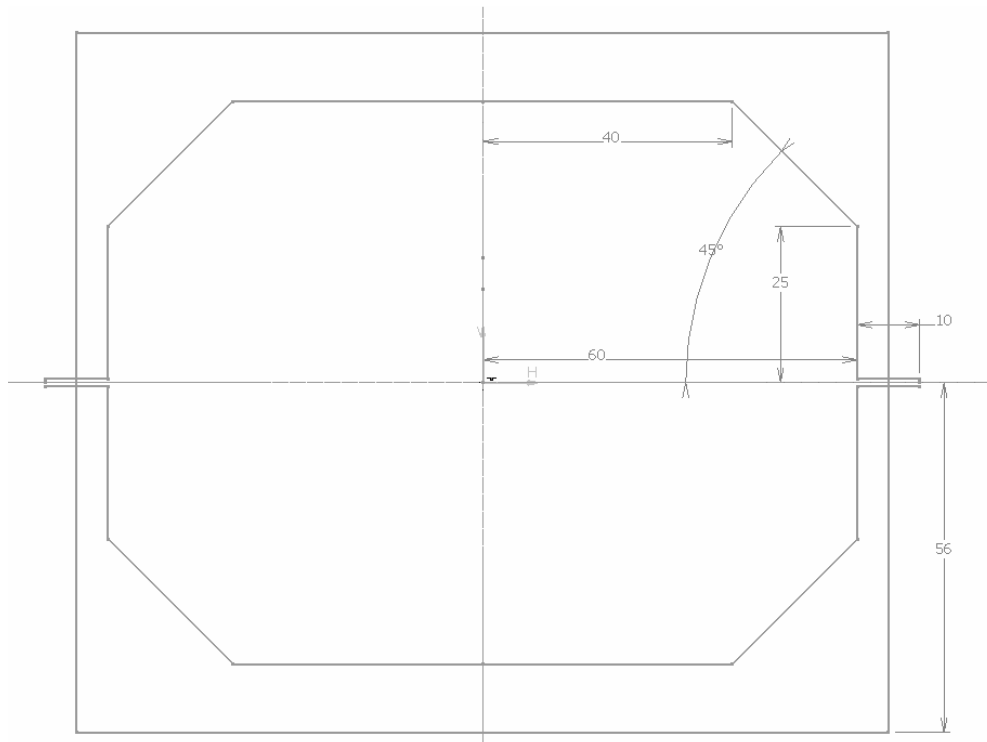


Figura 22. Sección de la pieza 5.

Preforma 5:

Tabla 12. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 5.

V_5	888940 mm ³
R_0	50 mm
H_0	113,19 mm



- **Pieza 6**

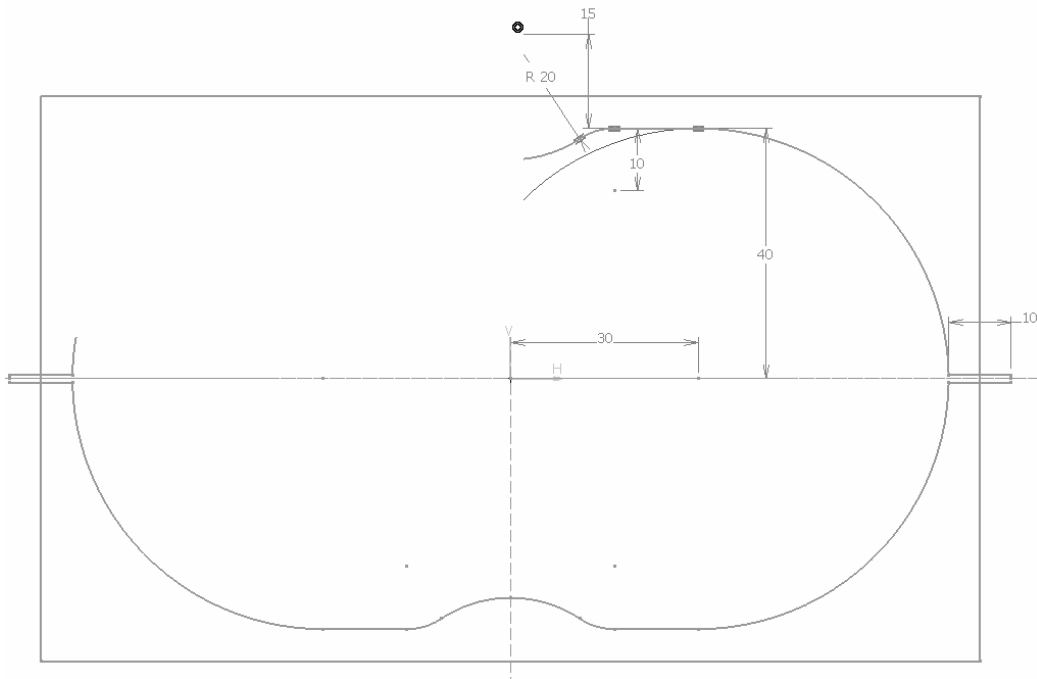


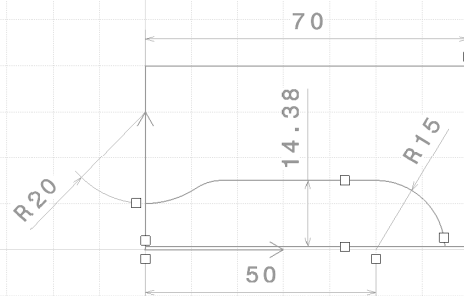
Figura 23. Sección de la pieza 5.

Preforma 6:

Tabla 13. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 6.

V_6	970846,13 mm ³
R_0	60 mm
H_0	85,842 mm

- **Pieza 7**



Front view
Scale: 1:1

Figura 24. Sección de la estampa 7.

En este y para las próximas piezas solo se representa la mitad de la estampa superior, ya que esta es simétrica. Las dimensiones de la rebaba se mantienen igual para todas las piezas.

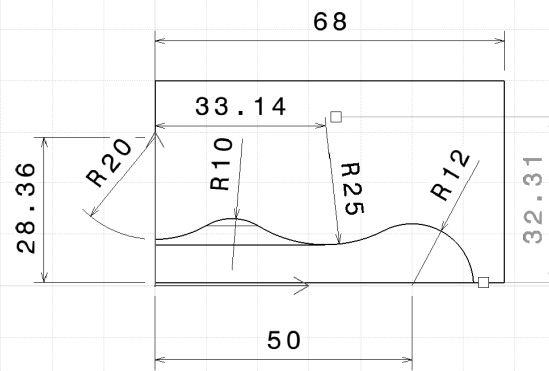


Preforma 7:

Tabla 14. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 7.

V_7	547887,4 mm ³
R_0	55 mm
H_0	38,22 mm

- Pieza 8



Front view
Scale: 1:1

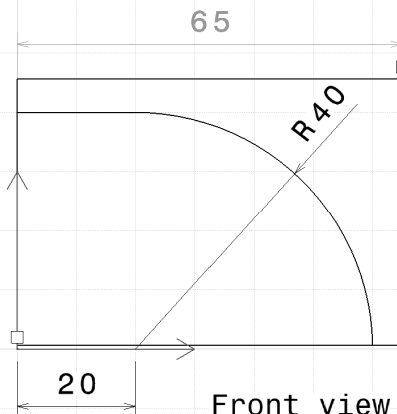
Figura 25. Sección de la estampa 8.

Preforma 8:

Tabla 15. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 8.

V_8	240206,05 mm ³
R_0	58 mm
H_0	22,72 mm

- Pieza 9



Front view
Scale: 1:1

Figura 26. Sección de la estampa 9.



Preforma 9:

Tabla 16. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 9.

V_9	689544,05 mm ³
R_0	45 mm
H_0	108,39 mm

- Pieza 10

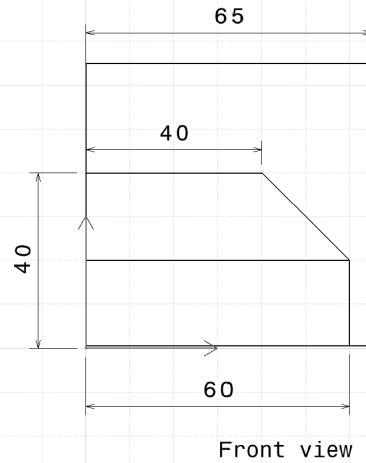


Figura 27. Sección de la estampa 10.

Preforma 10:

Tabla 17. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 10.

V_{10}	775842,49 mm ³
R_0	50 mm
H_0	98,783 mm

- Pieza 11

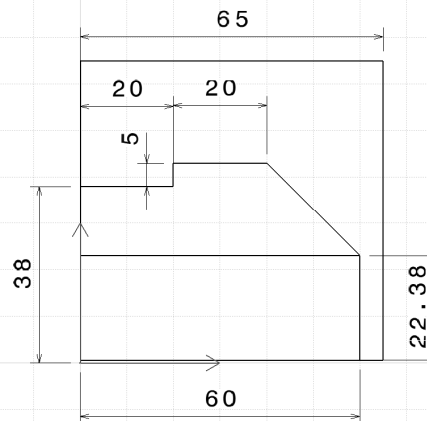


Figura 28. Sección de la estampa 11.



Preforma 11:

Tabla 18. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 11.

V_{11}	831134,52 mm ³
R_0	50 mm
H_0	105,823 mm

- Pieza 12

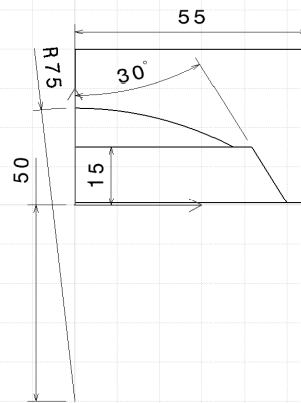


Figura 29. Sección de la estampa 12.

Preforma 12:

Tabla 19. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 12.

V_{12}	249561,94 mm ³
R_0	38 mm
H_0	55,012 mm

- Pieza 13

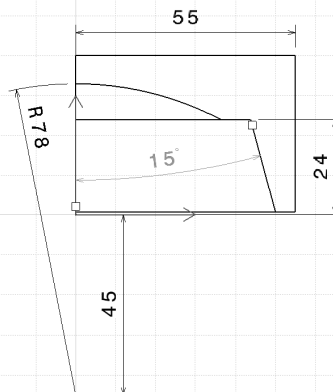


Figura 30. Sección de la estampa 13.



Preforma 13:

Tabla 20. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 13.

V_{13}	375407,21 mm ³
R_0	38 mm
H_0	82,753 mm

- Pieza 14

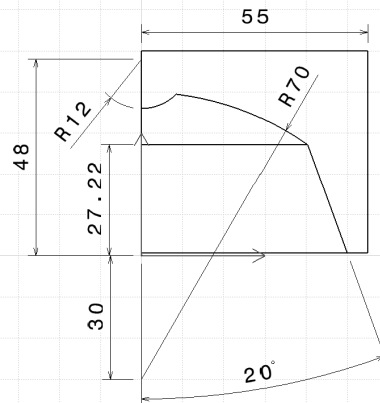


Figura 31. Sección de la estampa 14.

Preforma 14:

Tabla 21. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 14.

V_{14}	422754,65 mm ³
R_0	40 mm
H_0	84,05 mm

- Pieza 15

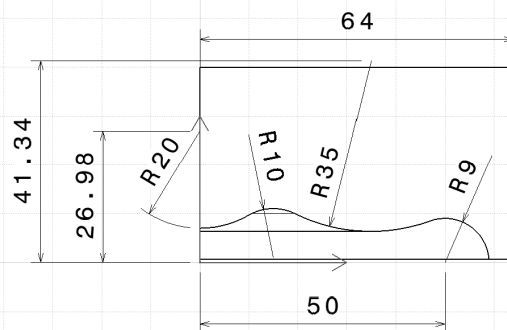


Figura 32. Sección de la estampa 15.



Preforma 15:

Tabla 22. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 15.

V_{15}	170975,15 mm ³
R_0	52 mm
H_0	20,13 mm

- Pieza 16

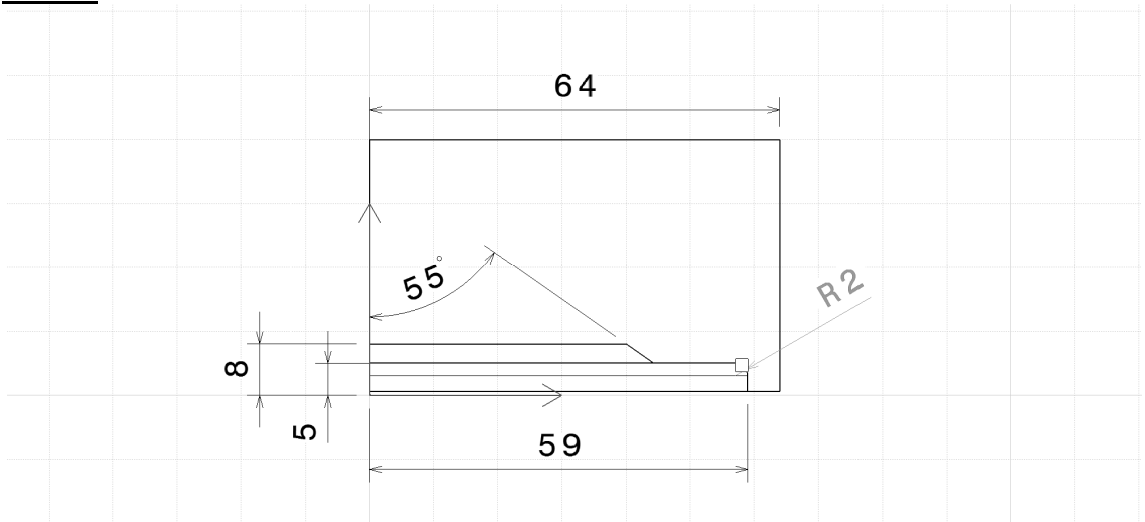


Figura 33. Sección de la estampa 16.

Preforma 16:

Tabla 23. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 16.

V_{16}	147258,79 mm ³
R_0	55 mm
H_0	15,495 mm

- Pieza 17

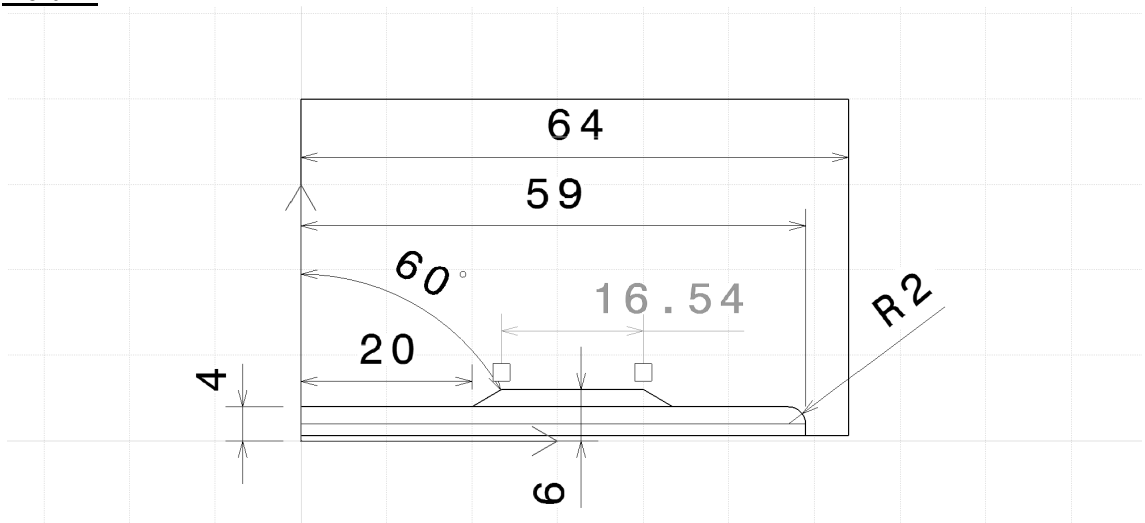


Figura 34. Sección de la estampa 17.



Preforma 17:

Tabla 24. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 17.

V_{17}	107832,27 mm ³
R_0	55 mm
H_0	11,35 mm

- Pieza 18

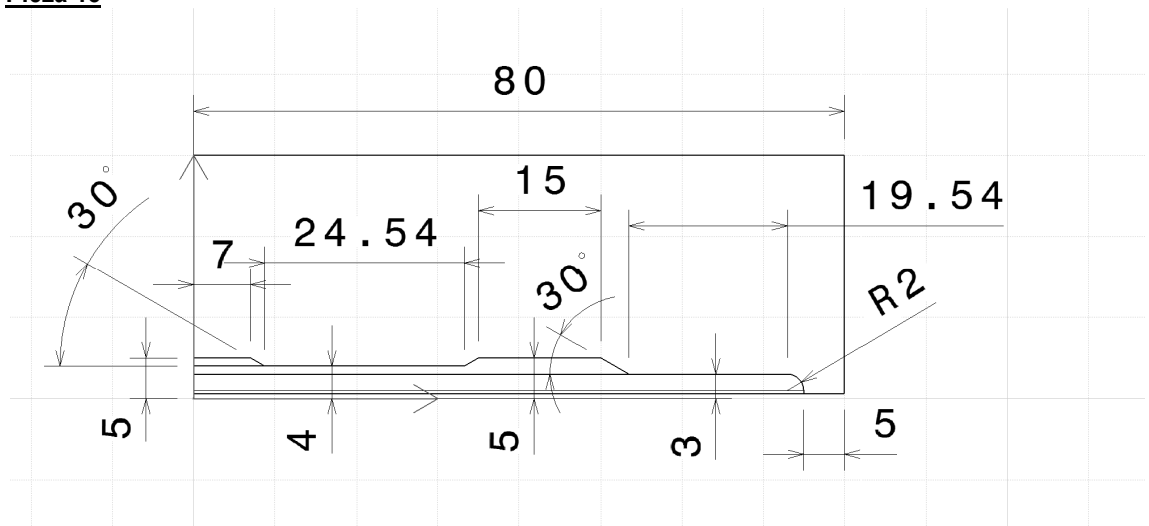


Figura 35. Sección de la estampa 18.

Preforma 18:

Tabla 25. Volumen y dimensiones de la preforma para el modelo de la pieza 18.

V_{18}	138218,53 mm ³
R_0	70 mm
H_0	8,98 mm

Las geometrías se han realizado intentando que representen un amplio abanico de valores c/a a la hora de hacer los cálculos para el elipsoide equivalente (ver punto 7).



3.4 Descripción de las simulaciones

Como las piezas tienen simetría de revolución se decide simular 1/8 del problema, por lo tanto una vez realizados los diseños mediante Catia V5 se realizan dos cortes de la pieza y la estampa para tener 1/8 del problema.

Una vez dentro del programa *Deform3D* se abre la opción *forming* dentro del *Pre-processor*, le decimos que queremos abrir un nuevo problema y ya se puede empezar con la simulación, siempre se siguen los mismos pasos descritos continuación:

- 1 Nombre del problema a simular.
- 2 Tipo de proceso: para nosotros siempre será *cold forming* (conformado en frío).
- 3 Complejidad de forma: nos quedamos con la opción moderada.
- 4 Forma de la pieza de trabajo: nuestro caso, simetría.
- 5 Numero de objetos: para los casos estudiados siempre se tienen dos objetos, 1/4 de la estampa superior y la mitad de 1/4 de la preforma (del plano de simetría horizontal hacia arriba).
- 6 Importar la geometría de la pieza de trabajo, la preforma.
- 7 Definir el número de elementos de la malla a generar para el posterior cálculo.
- 8 Definir los planos de simetría.
- 9 Definir el material, el programa permite la importación de materiales de una base de datos o definir un material. En los estudios realizados el material utilizado será siempre Acero AISI 1006 *Cold* (20°C).
- 10 Importar la geometría de la estampa (*Top die*).
- 11 Definir el movimiento de la estampa, dirección, sentido y velocidad.
- 12 Colocar en posición el conjunto de geometrías.
- 13 Definir el coeficiente de fricción entre las dos piezas de trabajo.
- 14 Punto de parada de la estampa, definir el desplazamiento total que debe realizar la estampa. Para ello una vez tenemos situada la estampa justo antes de hacer contacto con la preforma y utilizando las herramientas de medición que ofrece el programa se calcula la distancia exacta hasta el punto de parada.
- 15 Control de la simulación, número de pasos (*steps*) e incremento de estos.

Una vez definidos todos estos puntos se comprueba que el problema no tiene ningún error en la definición del mismo y se puede proceder a la simulación.

Mientras el programa está simulando el proceso, se puede monitorizar y ver gráficamente que está sucediendo en cada uno de los pasos (*steps*).

Cuando la simulación ha terminado vamos al Post-Processor desde la ventana principal del programa y abrimos nuestro problema. El programa posee muchas herramientas para el estudio del problema simulado, la visualización del proceso permite ver el flujo del material paso a paso, como se rellena la estampa y como se crea la rebaba.

Se mide la anchura y la altura de la rebaba, y si todo indica que se tienen los resultados buscados, se procede a la extracción de datos, lo que se necesita para este estudio son los valores de las fuerzas de estampación, por lo que en la opción de extracción de datos le decimos que queremos los datos de elemento Top die (estampa superior) y en el tipo de datos seleccionamos Load-Stroke data (carga-desplazamiento).

El programa aporta una tabla de datos (ver anexo II) según el *step* en que el se encuentra, tiempo, desplazamiento (de la estampa), velocidad (de la estampa), cargas según los ejes x, y, z (nos interesa la carga en el eje z), las cargas en las direcciones x e y no son nulas porque se está simulando 1/8 del problema, pero si se simula el octavo siguiente se tienen valores iguales y de signo contrario por lo que se anulan las cargas en los ejes x e y, como es de esperar en un problema con simetría de revolución.



4 Resultados de las simulaciones

Como se ha dicho anteriormente para realizar las simulaciones de los procesos de conformado se necesita conocer una serie de parámetros que no están definidos previamente, por lo que en primer lugar se realiza un proceso iterativo de simulaciones con el fin de obtener valores adecuados del número de elementos a emplear en la malla, de la velocidad de la estampa y del coeficiente de rozamiento.

Este proceso tipo se realiza sobre una modelo que se estudiará con posterioridad, la estampa tiene sección elíptica cuya relación de la dos es de c/a es 0'5, el lado mayor el doble que el menor.

Tabla 26. Parámetros que definen la geometría de la estampa y la preforma usadas en las simulaciones para el estudio sobre cómo afectan los parámetros número de elementos de malla, velocidad de la estampa y coeficiente de rozamiento (todas las dimensiones aparecen en mm).

Modelo	Elipsoide				Rebaba		Preforma	
	a	b	c	c/a	h_{reb}	b_{reb}	R_0	H_0
	50	50	25	0,5	1,25	5	30	94,12

4.1 Número de elementos de la malla

Para la obtención de un número adecuado de elementos de la malla se realiza el mismo proceso de estampación una serie de veces variando únicamente el número de elementos que forman la malla.

Teniendo en cuenta que el rango de valores permitidos por el programa es de 0 a 100000 elementos, se cogen mallas con los siguientes números de elementos: 5000, 10000, 20000, 30000, 40000, 50000, 60000, 70000 y 100000.

Las variaciones entre cada una de las pruebas son:

1. El tiempo de simulación aumenta con el aumento del número de elementos de malla (por ejemplo con una malla de 40000 elementos el tiempo de simulación es de 55 minutos y con una malla de 50000 elementos el tiempo aumenta a la hora y media de simulación, a partir de las 50000 elementos el aumento del tiempo de simulación es mayor).
2. Se observa que con el aumento del número de elementos de malla la rebaba tiene una geometría más precisa, líneas más suaves y precisas.
3. La pérdida de volumen se reduce con el aumento del número de elementos de la malla (para el caso de la malla de 40000 elementos la pérdida de volumen es de 0,4% y con una malla de 60000 elementos se reduce al 0,25%).

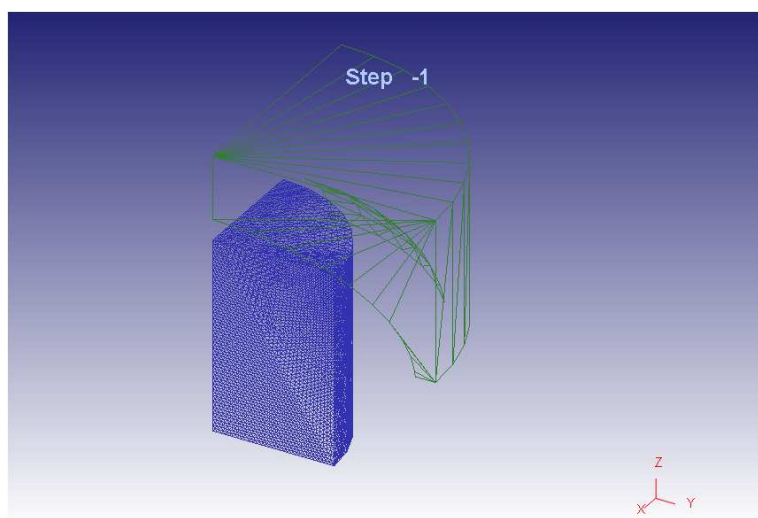
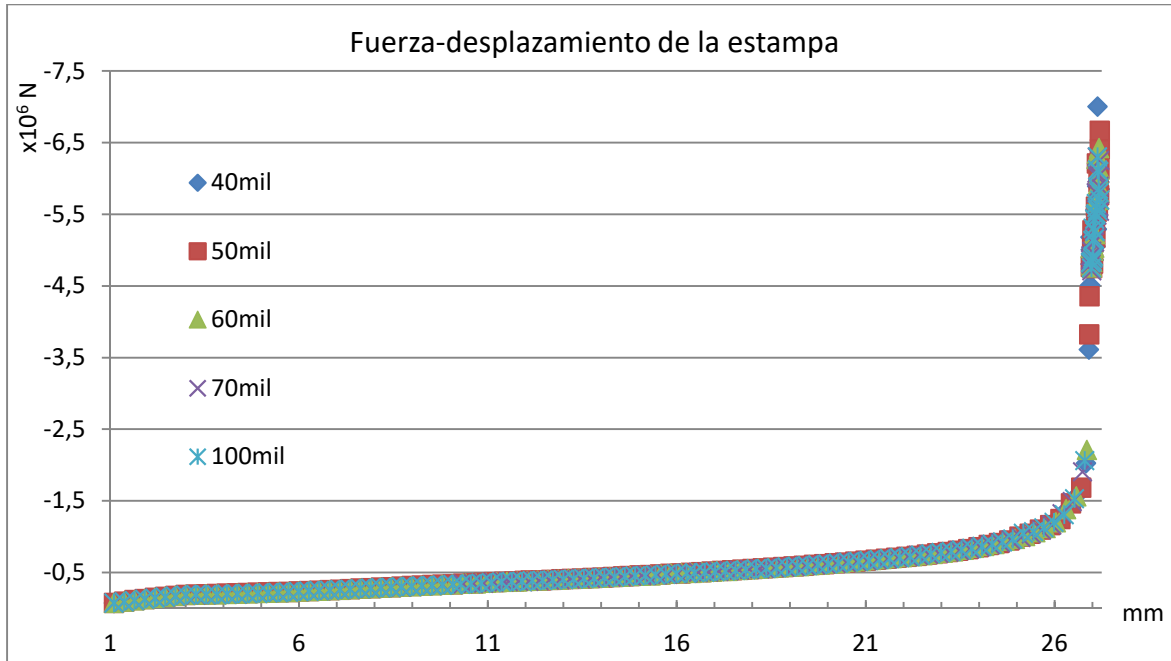


Figura 36. Imagen de la distribución de la malla en la preforma.

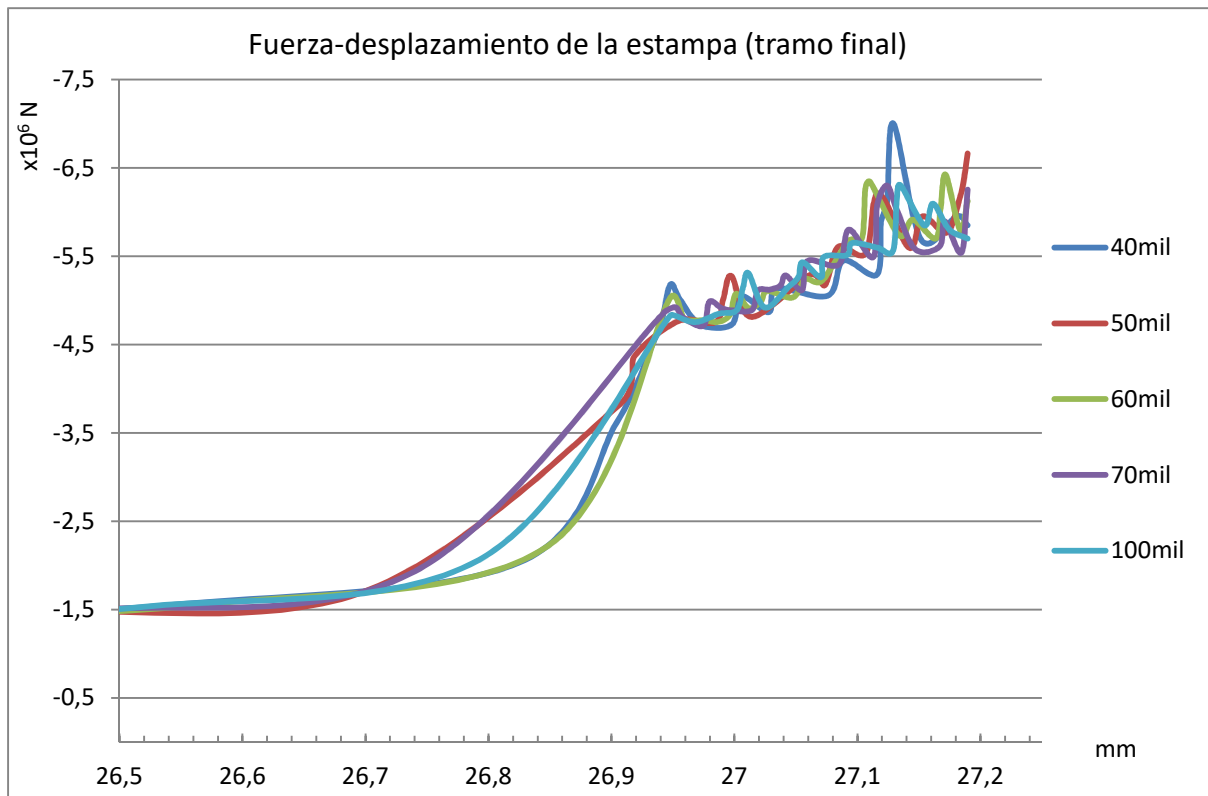


A continuación se muestran gráficamente los valores de la fuerza de estampación frente a la posición de la estampa durante el proceso de conformado con diferente número de elementos de malla.



Gráfica 2. Fuerza- desplazamiento de la estampa con variación del número de elementos de malla, el máximo número de elementos que se puede elegir es 100mil. Preforma de radio 30mm y altura 47,06mm (la mitad de la altura debido a la simetría).

Desde que se inicia el proceso de estampación hasta que se comienza a producir la rebaba, la fuerza aumenta con una pendiente muy baja, y en el momento de aparecer la rebaba, es cuando la fuerza se incrementa considerablemente, hay que tener en cuenta que la simulación es un proceso discreto, el programa nos devuelve una serie de datos tomados en cada uno de los *steps*, normalmente en torno a 120 pasos o *steps*. La siguiente grafica esta suavizada para observar mejor la tendencia, además se representa solo el tramo final del proceso, a partir de la aparición de la rebaba. Desde que se inicia el proceso hasta este punto los datos son prácticamente idénticos.



Gráfica 3. Fuerza- desplazamiento de la estampa con variación del número de elementos de malla en el tramo final de la estampación. Preforma de radio 30mm y altura 47,06mm (la mitad de la altura debido a la simetría).

No se muestran gráficamente los resultados obtenidos de las simulaciones con menor número de elementos de malla porque en ellas se observó mayor oscilación en los valores, es decir, la parte final del proceso fue menos precisa en cuanto a resultados. El tramo “rizado” de las gráficas corresponde con el crecimiento de la rebaba, si se ajusta este tramo final de cada una de las gráficas se puede ver que la tendencia es lineal, y que las rectas que las ajustan tienen trayectorias muy parecidas, es decir, no existe una gran variación de los resultados con el aumento del número de elementos de malla a partir de los 40000 elementos.

Teniendo en cuenta los resultados, y que el tiempo de simulación no es excesivamente elevado, con el fin de obtener unos buenos resultados a partir de ahora todas las simulaciones se realizan con una malla de **70000 elementos**.

4.2 Velocidad de estampación

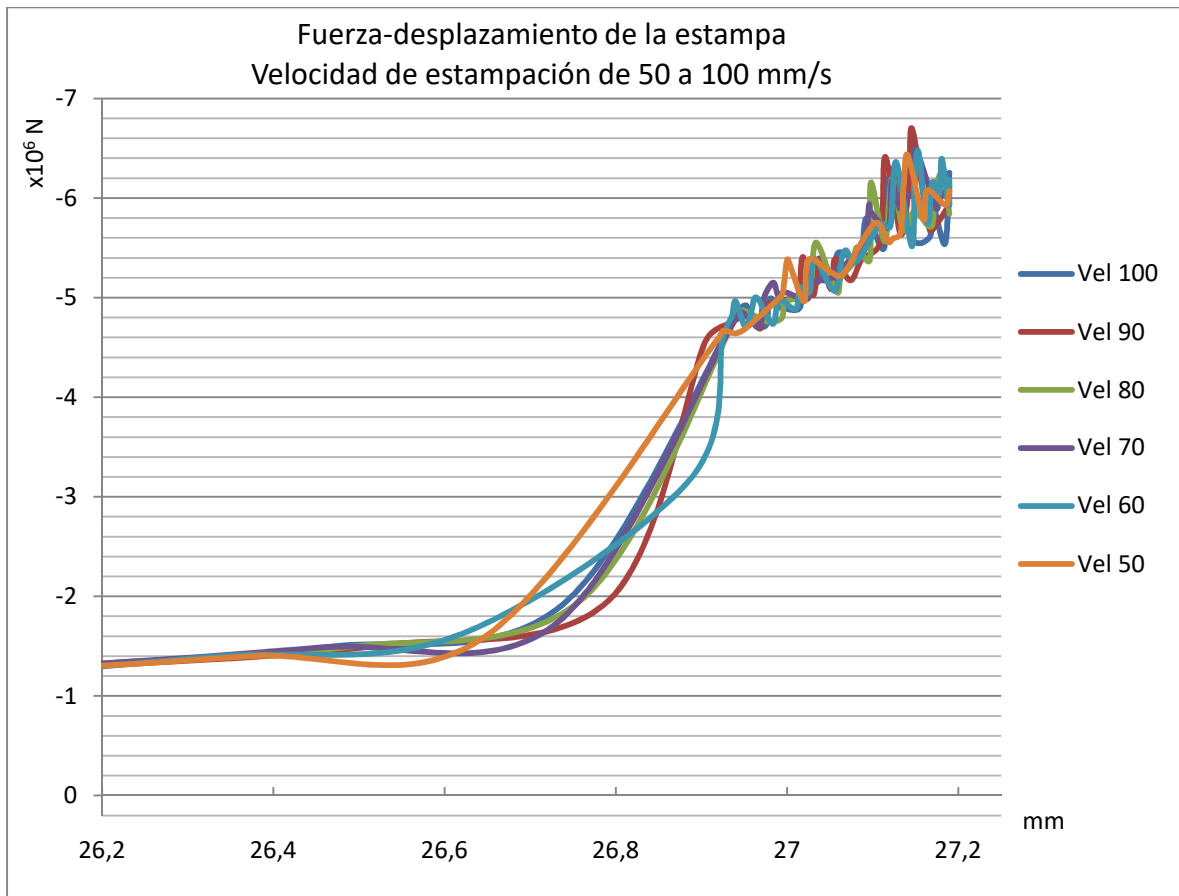
Se procede de la misma forma que en el apartado anterior pero variando en este caso la velocidad a la se va a desplazar la estampa, se realizan simulaciones con velocidades de estampación que van desde 50 a 300 mm/s.

Nos centramos en los tramos finales de las estampaciones ya que es ahí donde se produce el incremento de la fuerza de estampación. A continuación se representa gráficamente la fuerza de estampación con respecto a la posición de la estampa en los tramos finales del proceso con diferentes velocidades de la estampa. En primer lugar se tiene una gráfica en la que la velocidad de la estampa varía de 50 a 100 mm/s aumentando de 10 en 10 mm/s y en la segunda gráfica se representan los resultados de la fuerza en las simulaciones en las que la fuerza varía de 100 a 300 mm/s aumentando de 50 en 50 mm/s.

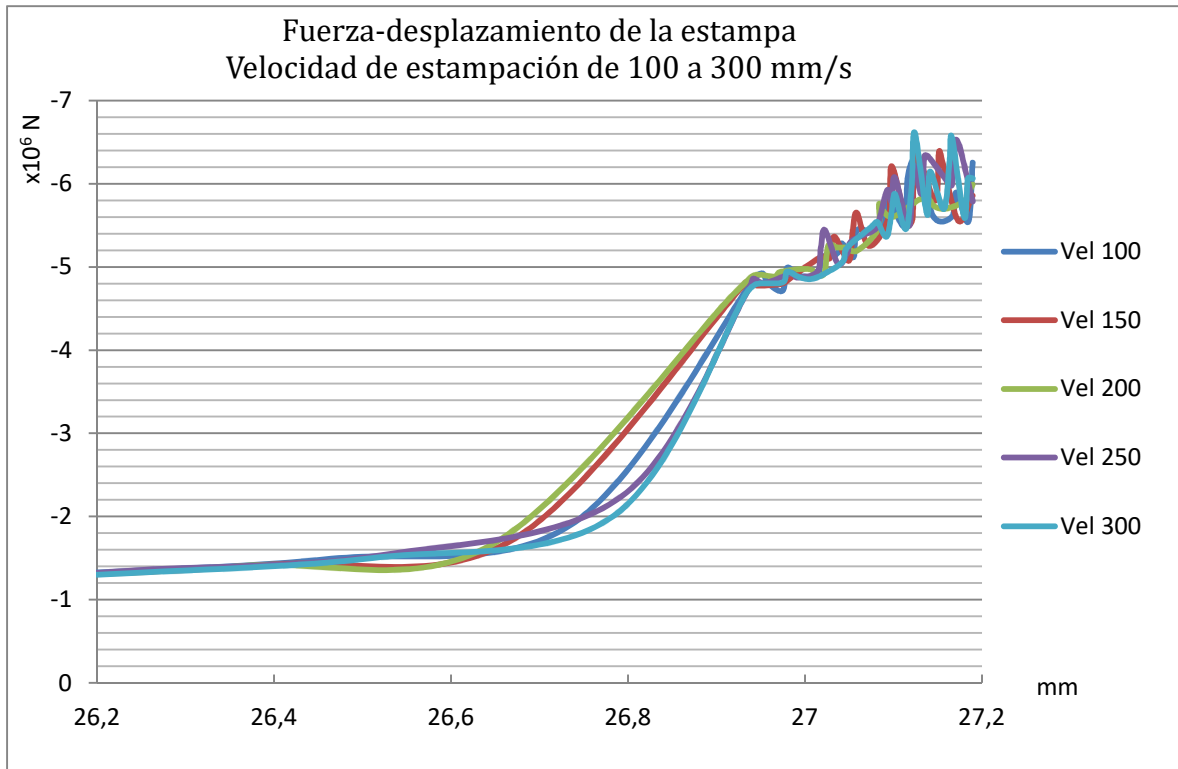
Se ha de tener en cuenta que los datos obtenidos son discretos, esto ya se ha comentado anteriormente, aunque en las gráficas se ha representado la tendencia para una mayor claridad en la observación de los



resultados. En los tramos finales de la estampación los steps en la simulación los hace el programa cada milésima de milímetro.

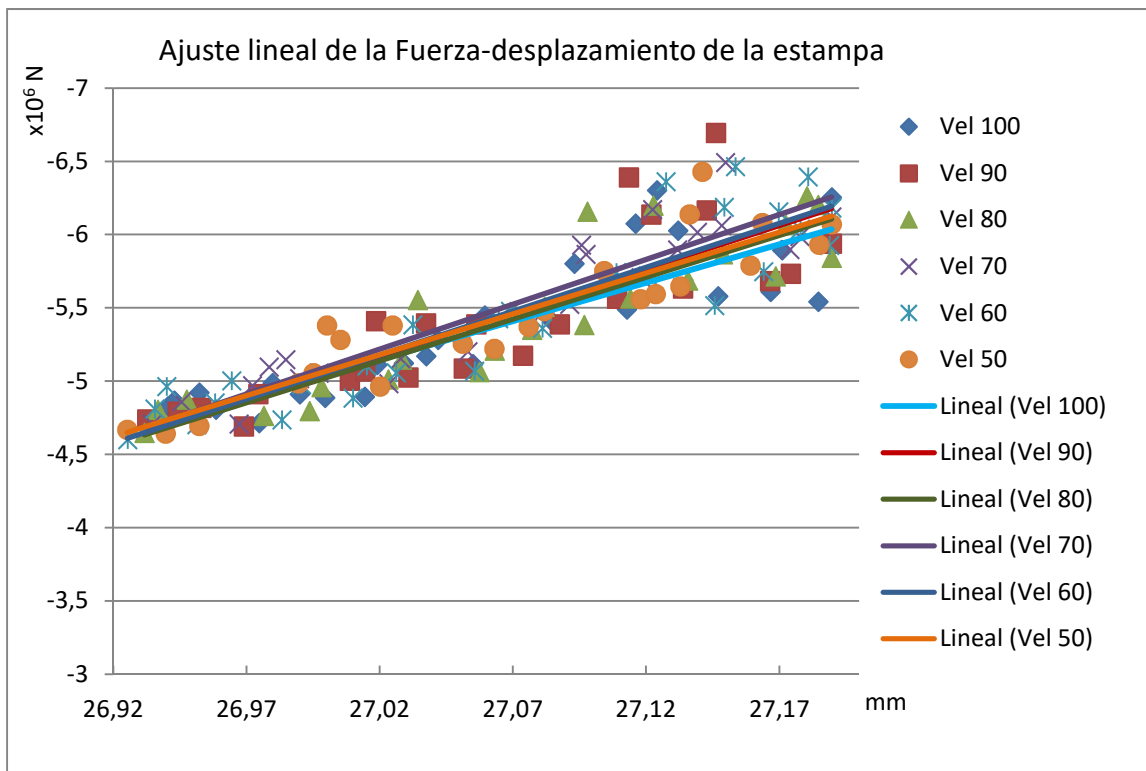


Gráfica 4. Fuerza- desplazamiento de la estampa con variación de la velocidad de la estampa de 50 a 100 mm/s. Preforma de radio 30mm y altura 47,06mm (la mitad de la altura debido a la simetría).

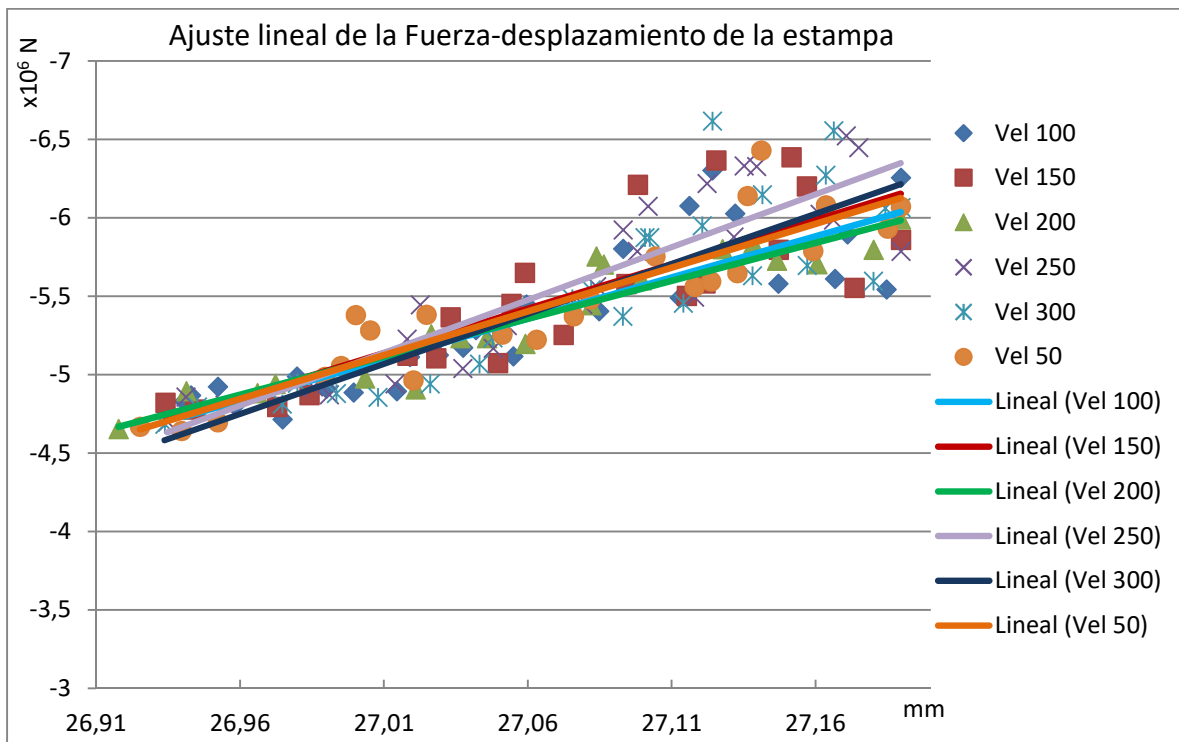


Gráfica 5. Fuerza- desplazamiento de la estampa con variación de la velocidad de la estampa de 100 a 300 mm/s. Preforma de radio 30mm y altura 47,06mm (la mitad de la altura debido a la simetría).

Se observa claramente la misma tendencia en cada una de las graficas mostradas, para afinar un poco más, centrándonos en el tramo final se hace un ajuste de tenencia de cada una de las graficas.



Gráfica 6. Ajuste lineal del tramo final de la gráfica de Fuerza- desplazamiento de la estampa con variación de la velocidad de la estampa de 50 a 100 mm/s. Preforma de radio 30mm y altura 47,06mm (la mitad de la altura debido a la simetría).



Gráfica 7. Ajuste del tamaño final de la gráfica de Fuerza- desplazamiento de la estampa con variación de la velocidad de la estampa de 50 a 300 mm/s. Preforma de radio 30mm y altura 47,06mm (la mitad de la altura debido a la simetría).

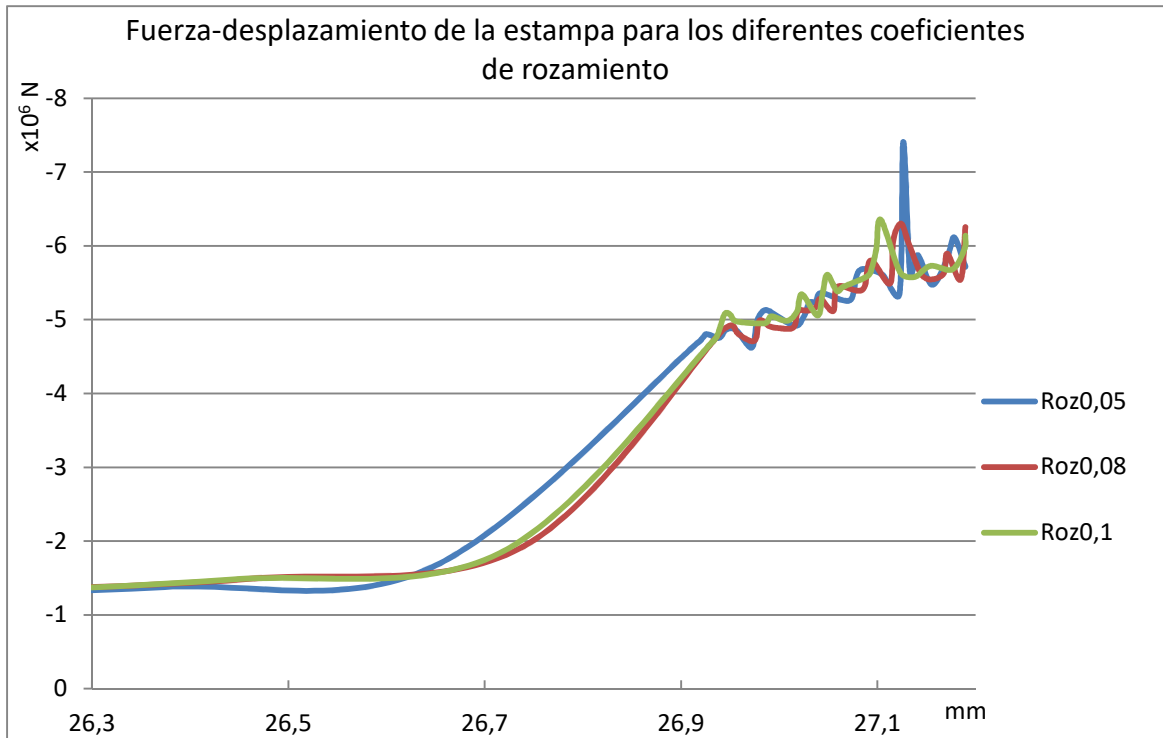
Analizando los resultados obtenidos y viendo que no existe a penas dependencia de la fuerza con la velocidad de estampación, nos quedamos con una velocidad intermedia de las estudiadas, **100 mm/s**.

A partir de ahora todas las pruebas se realizan con esta velocidad en el movimiento de la estampa.

4.3 Coeficiente de rozamiento

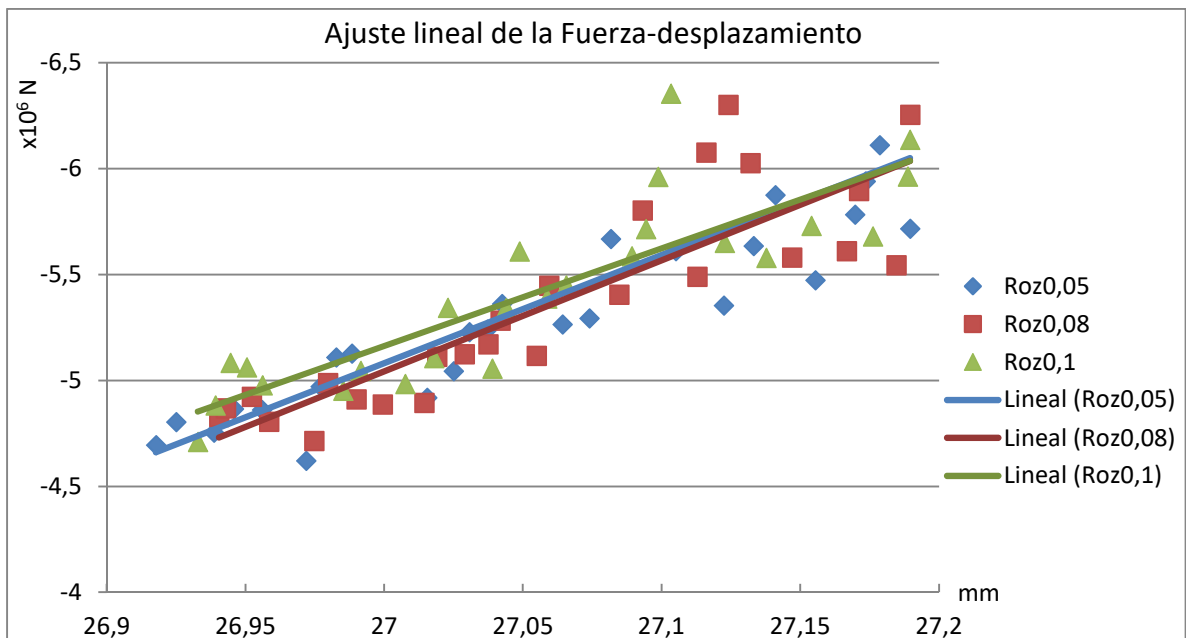
El valor del coeficiente de rozamiento en procesos de estampación en frío según el programa Deform3D puede ser de **0'05, 0'08 y 0'1**. Todas las simulaciones realizadas hasta el momento se han realizado con un valor del coeficiente de rozamiento de 0'08. Para saber si el coeficiente de rozamiento afecta significativamente al valor de la fuerza de estampación se repite la simulación para cada uno de los valores del coeficiente de rozamiento.

La siguiente gráfica muestra el valor de la fuerza de estampación con respecto a la posición de la estampa para los tres valores del coeficiente de rozamiento, se representa solo el tramo final ya que hasta ese punto los valores de la fuerza se encuentran totalmente superpuestos entre sí.



Gráfica 8. Fuerza- desplazamiento de la estampa con variación del coeficiente de rozamiento. Preforma de radio 30mm y altura 47,06mm (la mitad de la altura debido a la simetría).

Como en los casos anteriores no existe una diferencia significativa en los valores de la fuerza de estampación, si se ajusta el tramo final mediante una recta se observa que las rectas obtenidas tienen la misma tendencia y prácticamente convergen en un punto final (ver gráfica 9), por lo que la elección de un coeficiente de rozamiento de 0'05, 0'08 o 0'01 no tiene influencia en los resultados obtenidos. Nos quedamos con el valor del coeficiente de rozamiento de **0'08** para las pruebas a realizar.



Gráfica 9. Ajuste lineal del tramo final de la gráfica Fuerza- desplazamiento de la estampa con variación del coeficiente de rozamiento. Preforma de radio 30mm y altura 47,06mm (la mitad de la altura debido a la simetría).



4.4 Geometría de la preforma

En este punto se realiza la simulación de los modelos definidos como I, II, III y IV, en los que la preforma tiene el mismo volumen pero va disminuyendo el radio y por lo tanto aumentando la altura. La geometría de la estampa se mantiene siempre, la sección de la estampa es un elipsoide con relación de lados $c/a = 0,5$.

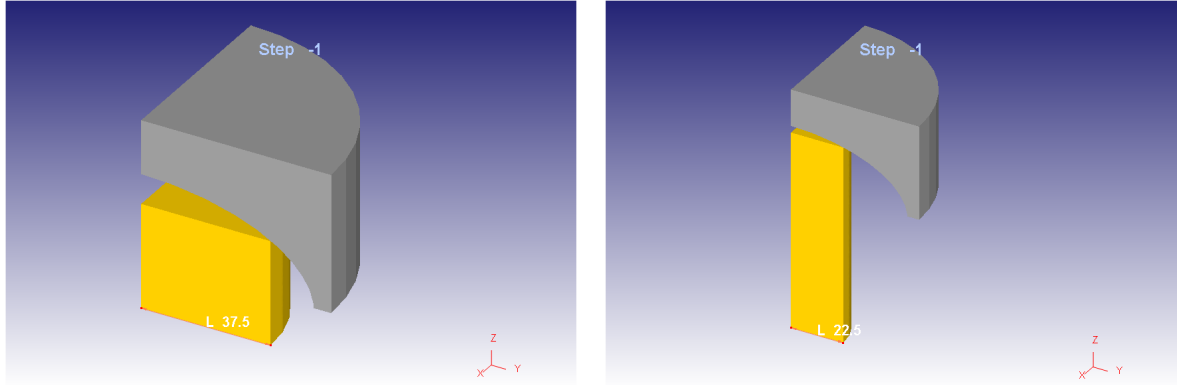


Figura 37. A la izquierda una preforma de radio 37,5mm (modelo II) y a la derecha de 22,5 mm (modelo IV) las dos con el mismo volumen.

Este estudio se realiza para observar si ocurre algo extraño en los procesos de estampación, es decir, que se rellene completamente la estampa y que el flujo de material se distribuya correctamente durante el proceso.

La siguiente figura muestra como queda la estampación finalizada en los dos casos presentados en la figura 37.

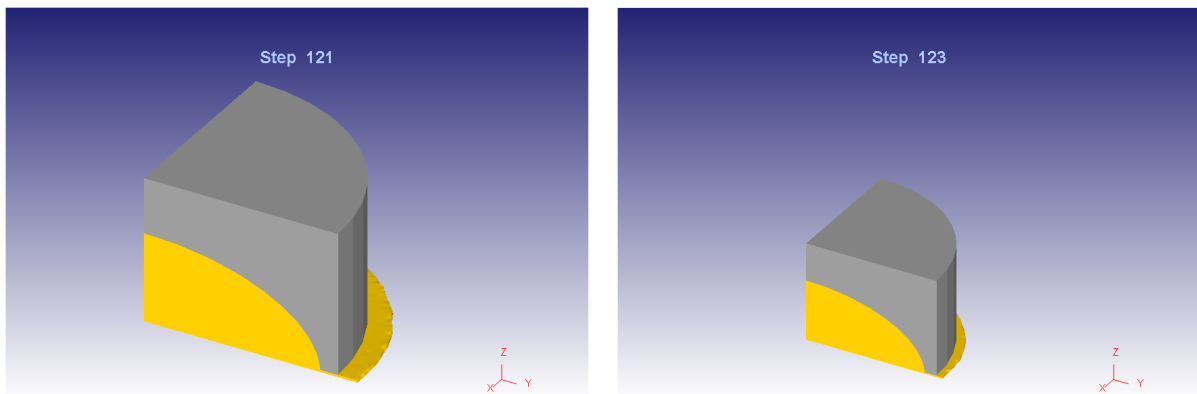


Figura 38. Estampación finalizada.

Los resultados observados nos dicen que no ocurre nada extraño al variar la geometría de la preforma, incluso con la preforma más alargada el flujo de material y el llenado de la estampa son correctos (al menos con la estampa estudiada y el material utilizado). Si que se observa que la rebaba es diferente, en el caso de la preforma más alargada se reduce la longitud de la rebaba, en el segundo caso la longitud total de la rebaba es menos, esto se debe al mayor endurecimiento por deformación que sufre el material.

4.5 Geometría de la estampa

En este punto se realiza la simulación de una serie de pruebas en las que varía la geometría de la estampa de tal forma que la relación de lados del elipsoide c/a varía entre 0 (sería el caso de forja libre) y 1 (este sería el caso en que la matriz tiene la forma de una esfera).

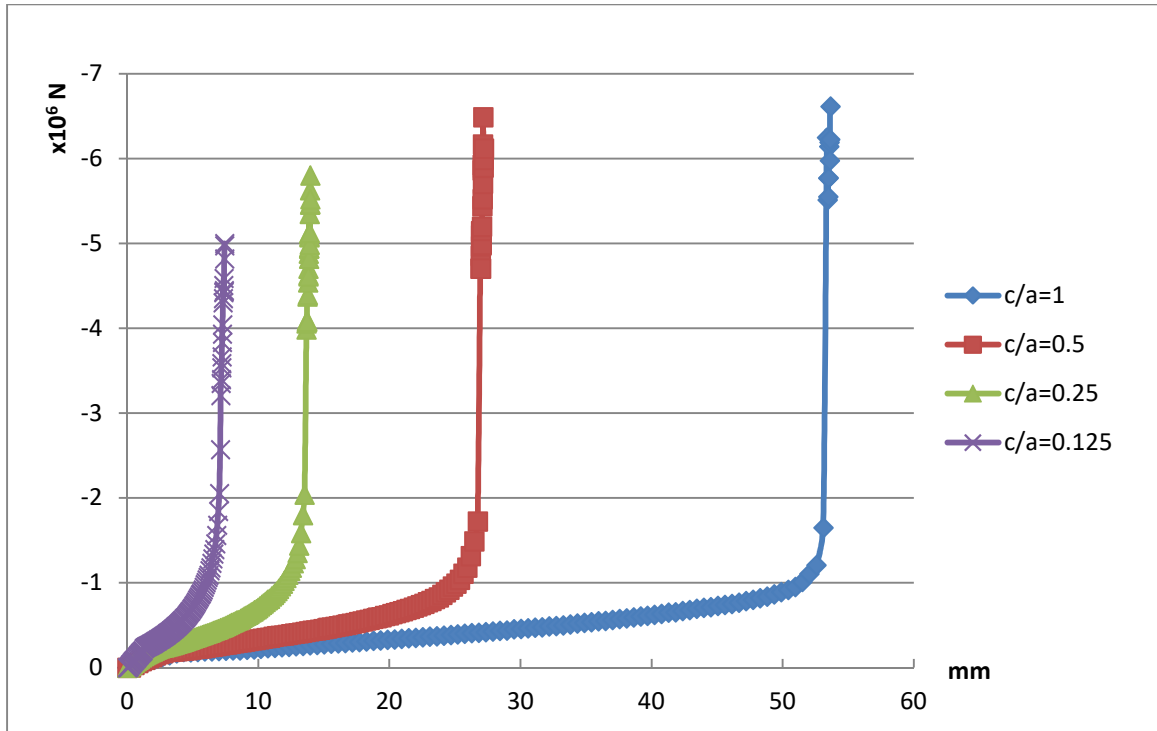
Se han simulado un total de 12 pruebas a las que se ha llamado por orden alfabético A,B,...,L, siendo la prueba A el modelo que representa la relación de lados $c/a = 1$, es decir, el caso esférico, y conforme



aumenta la letra disminuye el valor de la relación c/a , es decir, el elipsoide se hace cada vez más alargado.

En estas pruebas se mantiene constante la deformación y por lo tanto también la tensión. Las preformas tienen el mismo radio $R_0 = 30$ mm, lo que varía es la altura H_0 y por lo tanto la carrera que debe realizar la estampa para conseguir la forma deseada.

A continuación se representa gráficamente la fuerza de estampación frente al desplazamiento de la estampa en modelos con diferente relación c/a . Para una mejor observación solo se representan cuatro casos que se corresponden con los modelos A ($c/a=1$), F ($c/a=0,5$), H ($c/a=0,25$) y K ($c/a=0,125$).



Gráfica 10. Comparación de la fuerza de estampación de modelos con diferente c/a .

Se observa claramente que con la disminución del valor c/a el aumento de la fuerza de estampación se produce mucho antes, aunque hay que tener en cuenta que también disminuye la carrera que realiza la estampa. También hay que comentar a medida que la estampa se hace más alargada disminuye la fuerza necesaria para realizar la estampación.

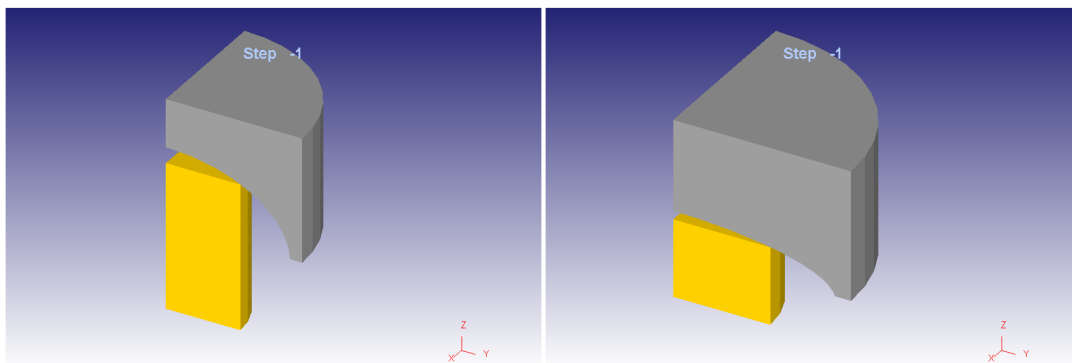


Figura 39. Matrices con diferente relación de lados c/a .



5 Cálculo del factor K

Para la obtención del parámetro K de la fórmula de la fuerza de estampación siempre se repite el mismo proceso, partiendo de la fórmula de la fuerza de estampación,

$$F = K\sigma A_{PT}$$

Se puede despejar el parámetro multiplicativo K,

$$K = F/\sigma A_{PT}$$

La fuerza F será la obtenida mediante elementos finitos en su formulación de flujo aportada por el programa Deform3D, el valor se obtiene de las gráficas de fuerza-desplazamiento de la estampa, en el último tramo del proceso de conformado, el de crecimiento de la rebaba, para ello se coge este tramo de la gráfica y se ajusta linealmente mediante una recta, ya que será siempre la tendencia mostrada por la fuerza, se coge entonces el valor de la fuerza en el último punto de la recta que ajusta la fuerza.

No se debe olvidar que se ha trabajado con 1/8 del problema, ya que el problema es simétrico con respecto al plano horizontal y esto se ha definido en las simulaciones, hay que multiplicar por 4 el valor de la fuerza que tenemos en los datos, éste será el valor a introducir en la fórmula para obtener K.

El valor de la tensión Y se obtiene de la gráfica de comportamiento tensión-deformación del material en cuestión, en el apartado 3.2 quedó definido el comportamiento del material, por lo que ahora lo que se necesita conocer es el valor de la deformación.

Sabemos que la deformación se define como,

$$\varepsilon = \ln(h_0/h_{med})$$

El valor de h_0 es conocido por la geometría de la preforma, es la altura inicial de la preforma y el valor h_{med} se define como,

$$h_{med} = V_{material}/A_{PPTT}$$

Como la geometría es conocida en todos los casos se puede proceder al cálculo de la deformación, una vez conocida de la gráfica tensión-deformación del material se obtiene el valor de la tensión.

Ya solo queda por conocer $A_{PPTT} = \pi(a+2b_{reb})^2$

- Ejemplo de cálculo de K para el caso F (c/a=0,75)

$$A_{PPT} = \pi(50 + 5)^2 = \pi 3025 \text{ mm}^2$$

$A_{PPTT} = \pi(50 + 2 \cdot 5)^2 = \pi 3600 \text{ mm}^2$; los valores de A_{PPT} y A_{PPTT} se mantienen constantes para todos los casos estudiados.

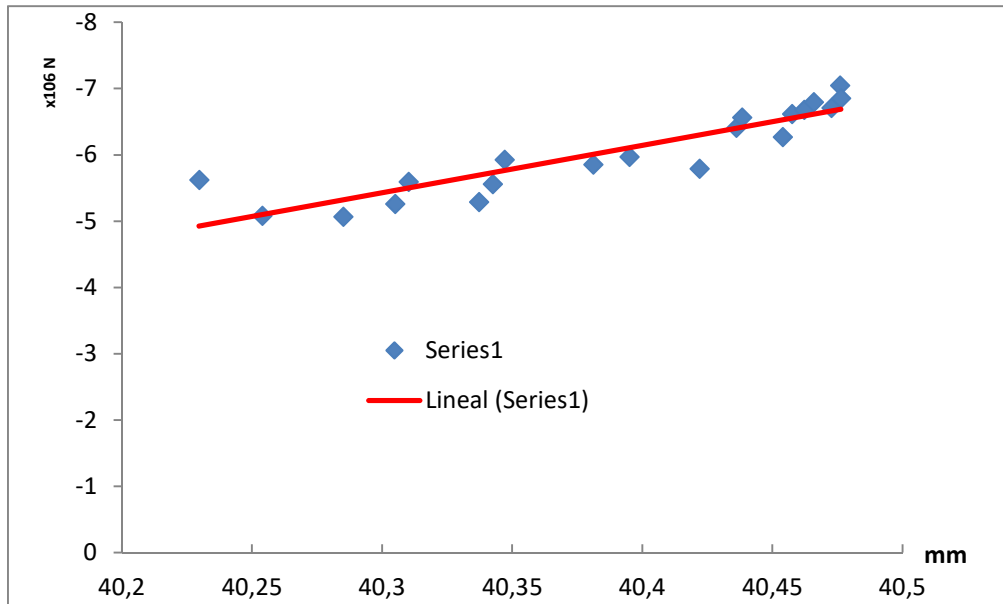
$$V_{material} = (4/3)\pi abc + \pi h_{reb}((a+2b_{reb})^2 - a^2) = \pi 126375 \text{ mm}^3$$

$$\text{Preforma: } R_0 = 30 \text{ mm} \rightarrow H_0 = 140,416 \text{ mm}$$

$$h_{med} = V/A_{PPTT} = 23,53 \quad H_0/h_{med} = 3,9999 \approx 4 \text{ cte.} \rightarrow \text{Tensión y deformación constantes.}$$

$$\varepsilon = \ln(h_0/h_{med}) = \ln 4 = 1,3863 \rightarrow \sigma = 555,29 \text{ Mpa}$$

El valor de la fuerza de estampación se obtiene de la misma manera para todos los casos. De la gráfica que representa los valores de la fuerza de estampación frente al desplazamiento de la estampa, se coge el tramo final y se hace un ajuste de los valores de fuerza, tal como se muestra en la siguiente gráfica:



Gráfica 11. Ajuste para la obtención del valor de fuerza en el proceso de estampación.

Nos quedamos con el valor máximo de la fuerza que nos da la recta de ajuste, en este caso:

F = 6686579 N; es muy importante no olvidar que este sería el valor para $\frac{1}{4}$ del problema, por lo tanto esta fuerza se ha de multiplicar por 4.

No queda más que calcular el valor del factor K,

$$K = F/\sigma_{PT} = 4 \cdot 6686579 / (555,23 \cdot \pi 3025) = 5,069$$

Se procede de manera idéntica para todos los modelos estudiados.

Tabla 27. Volumen, área proyecta, área proyectada total, altura media, deformación y tensión para los modelos de la A a la L.

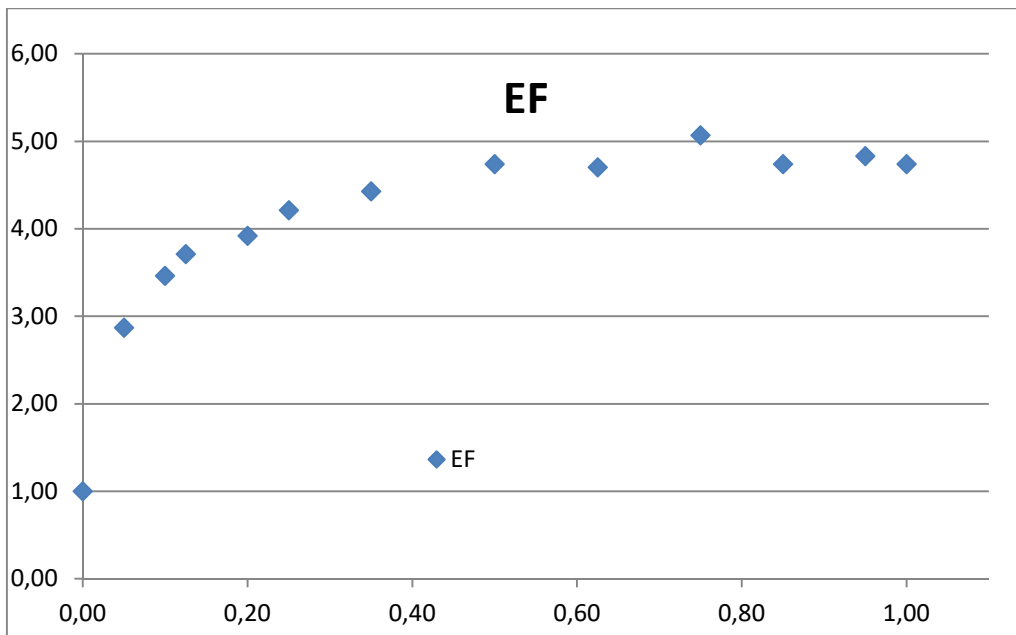
Prueba	Volumen mm ³	A _{PPT} (mm ²)	A _{PPTT} (mm ²)	h _{med}	Deformación	Tensión
		$\pi \cdot (a+b_{reb})^2$	$\pi \cdot (a+2 \cdot b_{reb})^2$	V/A _{pptt}	$\ln H_0/H_{med}$	
A	545197,2	9503,3	11309,7	48,2	1,4	555.29
B	519017,3	9503,3	11309,7	45,9	1,4	555.29
C	466657,4	9503,3	11309,7	41,3	1,4	555.29
D	414297,5	9503,3	11309,7	36,6	1,4	555.29
E	351465,7	9503,3	11309,7	31,1	1,4	555.29
F	283397,8	9503,3	11309,7	25,1	1,4	555.29
G	204858,0	9503,3	11309,7	18,1	1,4	555.29
H	152498,1	9503,3	11309,7	13,5	1,4	555.29
I	126318,2	9503,3	11309,7	11,2	1,4	555.29
J	89666,3	9503,3	11309,7	7,9	1,4	555.29
K	73958,3	9503,3	11309,7	6,5	1,4	555.29
L	47778,4	9503,3	11309,7	4,2	1,4	555.29

A continuación se muestran mediante una tabla y una gráfica los valores obtenidos del factor K en cada una de las simulaciones realizadas en las que varía la relación de lados de la matriz c/a. se incluye el valor teórico del parámetro K para el caso c/a=0 (forja libre plana, k=1). Gráficamente se observa una tendencia clara de los valores de K con respecto a c/a.



Tabla 28. Valor de la fuerza de estampación y valore del parámetro K para las pruebas de la A a la I y para la forja libre.

Prueba	c/a	F(N)	K
Forja libre	0,00	-	1,00
L	0,05	4·3786317	2,87
K	0,10	4·4565421	3,46
J	0,13	4·4895380	3,71
I	0,20	4·5168466	3,92
H	0,25	4·5557795	4,21
G	0,35	4·5540314	4,43
F	0,50	4·6257000	4,74
E	0,63	4·6200589	4,70
D	0,75	4·6686579	5,07
C	0,85	4·6253360	4,74
B	0,95	4·6372095	4,83
A	1,00	4·6258000	4,74



Gráfica 12. Valores de K frente a la relación de lados del elipsoide c/a.



6 Obtención de la Función $K(c/a)$

Una vez se tienen los valores del parámetro K para el abanico de valores de c/a , como se observa en la gráfica X, y viendo que existen una tendencia clara se realiza un ajuste mediante una función del tipo,

$K = 1 + C(c/a)^n$; siendo C y n dos parámetros de la función.

Para realizar el ajuste se utiliza la herramienta de análisis de Excel Solver, se introduce la función mediante la cual se quiere realizar el ajuste de modo que devuelva un valor para cada caso c/a . Se asignan valores arbitrarios para los parámetros C y n . Se define el error para cada caso como la diferencia entre el valor de K obtenido mediante elementos finitos y el que devuelve la función $K(c/a)$. Y por último en otra celda se crea una función que devuelve la suma de los cuadrados de los errores.

En este punto se puede ejecutar la herramienta Solver, seleccionando la celda en la que se encuentra la función suma de cuadrados de los errores, se puede minimizar el valor de la celda objetivo, devolviendo los valores óptimos de los parámetros C y n que minimizan el error.

El resultado obtenido es el siguiente:

Para una función con la forma: $K(c/a) = 1 + C(c/a)^n$

Tabla 29. Valores óptimos de los parámetros C y n que minimizan el error en los resultados.

$n =$	0,20
$C =$	4,03

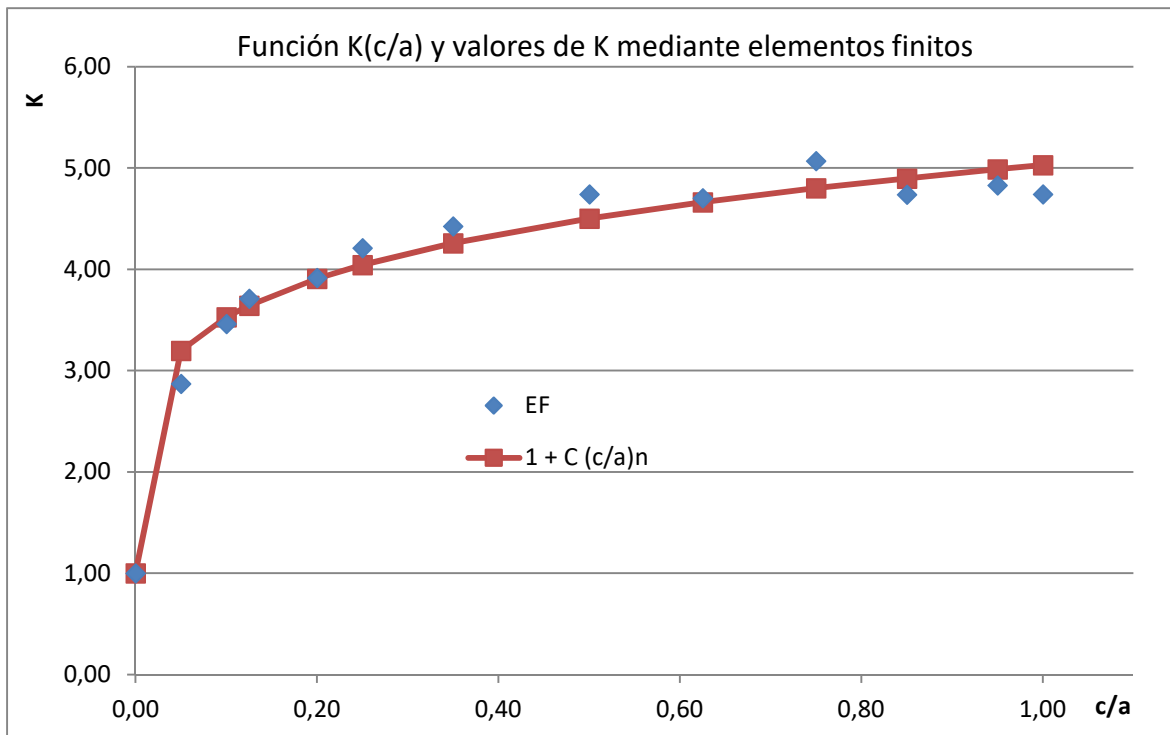
La función que realiza el ajuste queda:

$$K(c/a) = 1 + 4'03(c/a)^{0'2}$$

Tabla 30. Comparación de los valores del parámetro K obtenido mediante elementos finitos y mediante la función $K(c/a)$ obtenida.

Prueba	c/a	K	$1 + C (c/a)^n$	Error
Forja libre	0,00	1,00	1,00	0,00
L	0,05	2,87	3,20	-0,33
K	0,10	3,46	3,53	-0,07
J	0,13	3,71	3,64	0,07
I	0,20	3,92	3,91	0,01
H	0,25	4,21	4,04	0,17
G	0,35	4,43	4,26	0,17
F	0,50	4,74	4,50	0,24
E	0,63	4,70	4,66	0,04
D	0,75	5,07	4,80	0,27
C	0,85	4,74	4,90	-0,16
B	0,95	4,83	4,99	-0,16
A	1,00	4,74	5,03	-0,29

La siguiente gráfica muestra el ajuste que hace la función $K(c/a)$ mediante un trazado en color rojo, los puntos en azul representan los valores de K obtenido mediante la fuerza por elementos finitos.



Gráfica 13. Ajuste de la función $K(c/a)$.

La función obtenida consigue un buen ajuste de los resultados obtenidos mediante el uso de elementos finitos.



7 Elipsoide equivalente

Como se ha obtenido una función de $K = K(c/a)$ se quiere estudiar si es posible predecir el valor del parámetro K de la fuerza de estampación para otro tipo de geometrías aplicando la función que ya tenemos $K(c/a) = 1 + 4 \cdot 03(c/a)^{0.2}$.

La función solo depende de la relación de lados c/a y como las geometrías ahora ya no tienen la forma de un elipsoide es necesario realizar una aproximación a esta forma.

La idea del elipsoide equivalente se describe a continuación mediante un ejemplo. A partir de una estampa de geometría cualquiera conocida siempre que tenga simetría de revolución se obtiene un elipsoide equivalente definido por su relación de lados c/a .

Pieza cualquiera con simetría de revolución \rightarrow elipsoide equivalente $\rightarrow c/a \rightarrow K$

7.1 Ejemplo

Para el ejemplo descrito a continuación, se conoce la geometría de la estampa, y por lo tanto el volumen de material necesario.

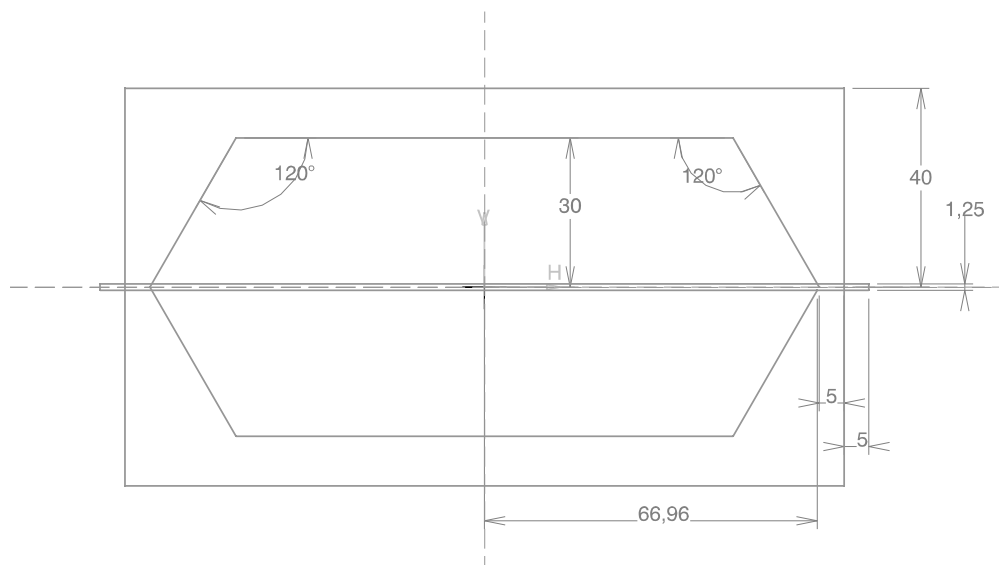


Figura 40. Geometría del ejemplo, se corresponde con la pieza 1.

El elipsoide equivalente debe ser aquel tal que mantenga el volumen constante, así como A_{PPT} y A_{PPT} ,

La constancia de $A_{PPT} \rightarrow \pi(a + b_{reb})^2 = \pi(a' + b_{reb}')^2$; para el caso del ejemplo $a = 66,96$ mm y $b_{reb} = 5$ mm

Manteniendo el ancho de la rebaba constante se puede obtener el valor del lado mayor del elipsoide equivalente a' .

Y de la constancia del volumen se obtiene la altura del elipsoide equivalente c' .

$$V_{material} = (4/3)\pi a' b' c' + \pi h_{reb}' ((a' + 2b_{reb}')^2 - a'^2)$$

se conoce el volumen de material; $a' = b'$; $b_{reb}' = b_{reb}$ y $h_{reb}' = h_{reb}$ y ya se puede despejar el valor de c' .

A partir de una pieza de geometría cualquiera se ha obtenido su elipsoide equivalente, definido por el valor de la relación c'/a' .

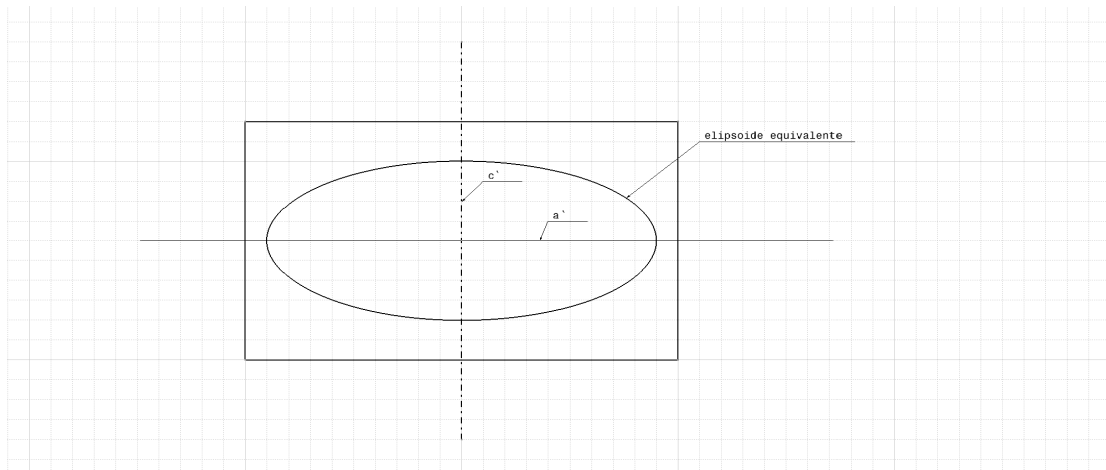


Figura 41. Imagen correspondiente a un elipsoide equivalente, definido por sus lados a' y c' .

- Para el ejemplo se tiene:

$$V_{\text{material}} = 658900 \text{ mm}^3 \text{ (de CatiaV5)}$$

$$A_{\text{PPT}} \rightarrow \pi(a + b_{\text{reb}})^2 = \pi(a' + b_{\text{reb}}')^2 \rightarrow a' = 66,96 \text{ mm}$$

$$\text{Del volumen se obtiene } c' = 35,38 \text{ mm} \rightarrow c'/a' = 0,528 \rightarrow K' = 4,86$$

A continuación se procede al cálculo de K mediante elementos finitos, es decir, a través de la simulación mediante Deform3D. Se procede de manera análoga a los casos ya estudiados.

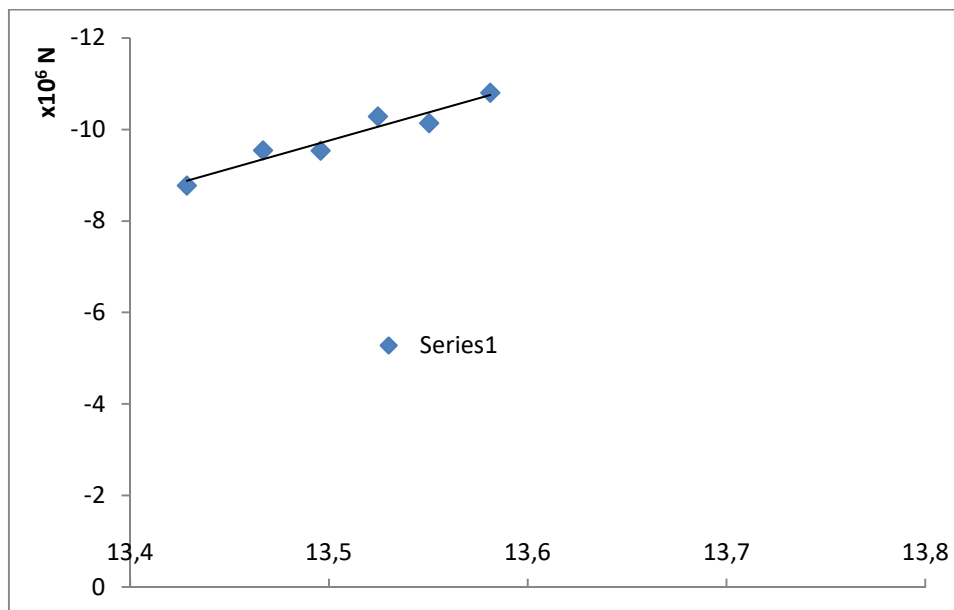
Se elige un $R_0 = 55 \text{ mm}$ y como se conoce el volumen se saca el valor de $H_0 = 69,33 \text{ mm}$

$$\text{El valor de } \varepsilon = \ln(H_0/h_{\text{med}}); h_{\text{med}} = V/A_{\text{PPTT}}; A_{\text{PPTT}} = \pi(a + 2b_{\text{reb}})^2$$

$$A_{\text{PPT}} = \pi(a + b_{\text{reb}})^2 = 16268 \text{ mm}^2$$

$$\varepsilon = 0,667 \rightarrow \sigma = 553,58 \text{ Mpa}$$

La obtención de la fuerza de estampación también se realiza del mismo modo que en los casos ya estudiados, mediante el ajuste del tramo final de la grafica de fuerza de estampación.



Gráfica 14. Ajuste para la obtención del valor de fuerza en el proceso de estampación del ejemplo, pieza 1.

El valor de la fuerza para el ejemplo es $F = 10753060 \text{ N}$;

$$K = 4 \cdot F / (\sigma A_{\text{PT}}) = 4 \cdot 10753060 / (553,14 \cdot 16268) = 4,78$$

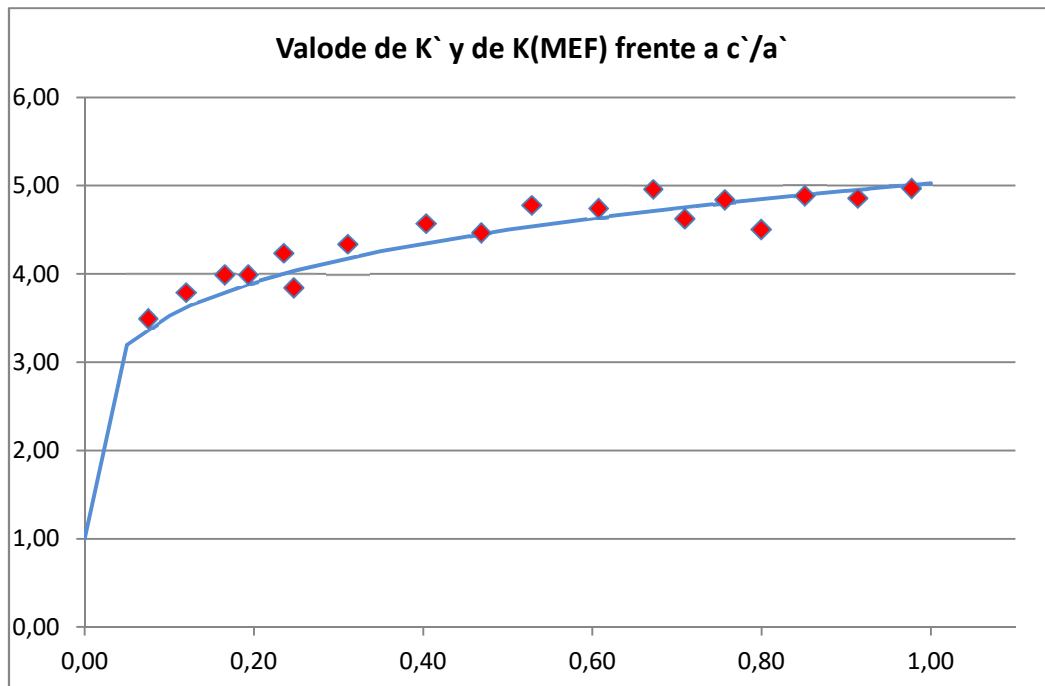


7.2 Resultados

De igual modo se procede para todos los modelos descritos en el apartado 3.3. El resumen de los resultados obtenidos se presenta en la siguiente tabla, en la que se comparan los valores de K obtenidos mediante la simulación con los que nos aporta la función $K(c/a)$, así como los errores en la predicción de K de la función $K(c/a)$. Y debajo de esta también se muestran los resultados de manera gráfica.

Tabla 31. Valores de c/a , K mediante elementos finitos, K según la función $K(c/a)$ y el error cometido para las 18 piezas estudiadas.

Pieza nº	c/a	K(MEF)	$1 + C (c/a)^n$	Error	Error (%)
18	0,07	3,50	3,38	-0,12	-3,34
17	0,12	3,79	3,62	-0,17	-4,61
16	0,16	3,99	3,80	-0,19	-4,87
15	0,19	4,00	3,89	-0,11	-2,79
8	0,24	4,24	4,00	-0,24	-5,56
2	0,25	3,85	4,03	0,19	4,91
7	0,31	4,34	4,18	-0,16	-3,70
3	0,40	4,58	4,35	-0,23	-4,95
12	0,47	4,47	4,45	-0,02	-0,36
1	0,53	4,78	4,54	-0,24	-5,01
4	0,61	4,75	4,64	-0,11	-2,28
6	0,67	4,96	4,72	-0,24	-4,92
13	0,71	4,63	4,76	0,13	2,74
9	0,76	4,85	4,81	-0,04	-0,79
14	0,80	4,51	4,85	0,34	7,52
10	0,85	4,89	4,90	0,01	0,18
11	0,91	4,86	4,95	0,09	1,92
5	0,98	4,97	5,01	0,03	0,70



Gráfica 15. El trazo azul muestra los valores de K ofrecido por la función $K(c/a)$ y los puntos en rojo representan el valor de K obtenido mediante elementos finitos con la ayuda del programa Deform3D



8 Conclusiones

Se ha realizado un estudio mediante elementos finitos sobre la fórmula de fuerza en procesos de estampación en frío. Esta fuerza no es más que el resultado de la multiplicación de la tensión por el área proyectada por un factor K. El material utilizado ha sido acero AISI 1006. La idea ha sido realizar un estudio sobre el parámetro multiplicativo K de la fórmula de fuerza.

Para ello se ha calculado el valor del factor K de una serie de modelos con forma de elipsoide en los que se ha variado la relación de lados que definen el elipsoide. Se observa que existe una tendencia clara en los resultados obtenidos.

Observando esta tendencia y con la ayuda del programa Excel se ha realizado el ajuste de los resultados mediante una función $K(c/a)$ que depende únicamente de la relación de lados del elipsoide. La función obtenida consigue un resultado muy bueno, reproduce los resultados con errores por debajo del 5% para todos los casos estudiados.

Para el tipo de formas estudiadas, formas geometrías simples con rebaba, la bibliografía existente, según Schey, Groover o Kalpakjian, los valores para el factor K van de **5 a 8** y según este estudio los valores obtenidos para el factor K están entre **3,5 y 5**. Los valores de K son bastante menores que los proporcionados por los autores antes mencionados, es decir, las fuerzas necesarias en el proceso de estampación están por debajo de las fuerzas teóricas según la bibliografía existente.

A continuación, se ha realizado otro estudio para piezas simples con geometría aleatoria, siempre manteniendo la simetría de revolución. A partir de la geometría inicial se ha obtenido su elipsoide equivalente definido por la relación de lados c/a . Se ha calculado el factor K para cada uno de los casos mediante elementos finitos y se ha comparado con el que ofrece la función $K(c/a)$. Los resultados obtenidos mediante elementos finitos y mediante la función $K(c/a)$ se parecen para los 18 casos estudiados, existen dos casos en los que el error cometido ha sido del 5,5 y del 7,5%, para el resto de casos la diferencia está por debajo del 5%.

Como comentario final decir que sería interesante realizar el mismo estudio con diferentes materiales y también realizar el estudio para procesos de conformado en caliente.



9 Bibliografía

- ❖ Kalpakjian Serope, Schmid Steve (2002). Manufactura, ingeniería y tecnología 4º Edición. Ed. Prentice Hall.
- ❖ Groover Mikell P. (2007). Fundamentos de manufactura moderna 3ª Edición. Ed. McGraw Hill.
- ❖ Schey John A. (2002). Procesos de manufactura. Ed. McGrawHill.
- ❖ Apuntes de la asignatura Tecnología de fabricación.
- ❖ Journal of Materials Processing Technology. 45 (1994) P.243-248 ELSERVIER.
- ❖ Internet.



ANEXOS

I Formulación de flujo incremental para el análisis de elementos finitos de procesos conformado plástico en 3 dimensiones.

J. Bonet P. Bhargava and R.D. Wood

Institute for Numerical Methods in Engineering, Swansea University, Swansea SA2 8PP, U.K.

A continuación se describe el uso de la formulación de flujo incremental para la simulación de procesos de conformado plástico (*forming of thick sheet*). Esta formulación se basa en la aproximación del tipo de flujo de ecuaciones constitutivas que describen los materiales plásticos través de una ecuación pseudo-hiperelástica basada en los cambios de geometría (geometría en cada paso/step del proceso). Las ecuaciones de equilibrio resultantes son función de las posiciones nodales. Por lo tanto, las restricciones geométricas tales como el contacto y la incompresibilidad pueden aplicarse de manera exacta. Se utilizarán varios ejemplos para demostrar la validez del método.

1.1 INTRODUCCIÓN

Las características constitutivas de un material sometido a una deformación plástica se describen bien en términos de una ecuación de flujo no Newtoniana en la que las tensiones están relacionadas con las deformaciones [1-8]. Dado que la tensión está directamente relacionadas con la velocidad de deformación, la velocidad del material en movimiento se convierte en la variable principal y puede utilizarse alguna forma de integración de tiempo para obtener la geometría cambiante que se produce durante el proceso de conformado. En el ámbito de los elementos finitos este proceso es tradicionalmente conocido como formulación [1-5].

La simulación de procesos no estacionarios utilizando la formulación de flujo no es ideal cuando se están aplicando restricciones geométricas. En primer lugar, las condiciones de contorno se refieren generalmente a la posición y no a la velocidad y en segundo lugar, la incompresibilidad es una restricción geométrica que a menudo esta pobremente representada en la formulación de flujo. Además, si se utilizan esquemas implícitos de integración en conjunto con la formulación de flujo, la matriz tangente de resultados es asimétrica.

En consecuencia, surge un dilema, las ecuaciones constitutivas requieren una formulación basada en la velocidad, mientras que las condiciones de contorno y las restricciones de incompresibilidad exigen una formulación basada en geometría o desplazamientos. Obviamente, se debe alcanzar un compromiso y esto se puede lograr mediante un método alternativo conocido como formulación de flujo incremental [9,10]. En la formulación de flujo incremental la geometría cambiante es la variable principal y la velocidad de deformación que aparece en cada "etapa" (step) se aproxima en términos del correspondiente cambio incremental en la geometría. En consecuencia, la integración numérica de la velocidad en la formulación de flujo ha sido reemplazada, en un nivel fundamental, por la aproximación incremental de la velocidad de deformación en la formulación de incremento de flujo. Las ecuaciones incrementales resultantes son ahora función únicamente de la geometría, es decir, las coordenadas que definen la posición de material y, por lo tanto, las restricciones geométricas tales como la incompresibilidad y las condiciones de contorno de contacto pueden tratarse de manera exacta y natural. Además, la sustitución del incremento de la velocidad de deformación en la ecuación constitutiva significa que la ecuación es ahora una función de la geometría y no, como en el caso de la formulación de flujo, una función de la velocidad y la geometría. Esto tiene el efecto significativo de hacer simétrico el operador tangente, lo que mejora inmediatamente la convergencia del esquema de solución no lineal.

En este documento se describen los detalles básicos de la formulación implicados en la formulación de flujo incremental. Adicionalmente, se representan dos ejemplos relacionados con el conformado plástico (*forming of thick sheet*) para ilustrar las capacidades de la formulación de flujo incremental propuesta.



1.2 SUPERPLASTICITY

1.2.1 Ecuaciones constitutivas unidimensionales

Las aleaciones plásticas son materiales que dependen fuertemente de la velocidad (de deformación) con propiedades complejas que dependen de la temperatura y de otras variables de estado como el tamaño de grano. Para casos unidimensionales, las ecuaciones que relacionan la velocidad de deformación $\dot{\varepsilon}$ con las tensiones de flujo σ se dan de forma general como [6,7],

$$\dot{\varepsilon} = \frac{K_{II} D}{T g^p} \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{G} \right)^{1/M} + \frac{K_{III}}{T} \left(\frac{\sigma}{G} \right)^n \quad (1)$$

Donde σ_0 es la tensión límite (límite elástico); G es el módulo de cizallamiento del material; T es la temperatura, que se asume que permanece constante durante todo el proceso de conformado; g es el tamaño de grano; K_{II} , K_{III} , M , n y p son parámetros del material y $D = D_L + (\pi D_B \delta)/g$ es la difusividad con componentes *lattice* y grano límite D_L y D_B , respectivamente.

La evolución del tamaño de grano del material juega un importante papel en el proceso de conformado. La velocidad de cambio de tamaño de grano se puede evaluar como la suma de componentes estáticos y dinámicos [6,7],

$$\dot{g} = \dot{g}_s + \dot{g}_d \quad (2)$$

Donde el crecimiento de grano estático es el observado en ausencia de deformación como resultado de las altas temperaturas y es evaluado en términos de dos parámetros del material B y q ,

$$g_s(t)^q = g_0^q + Bt \quad (3)$$

El crecimiento dinámico se debe a la velocidad de deformación en el material y se obtiene como,

$$\dot{g}_d = \frac{\lambda \dot{\varepsilon} g}{g^q} \quad (4)$$

Donde λ es un parámetro final del material.

En el contexto de un proceso de solución de elementos finitos, las ecuaciones anteriores tienen que intervenir para permitir la evaluación de la tensión de flujo para dar un valor de la velocidad de deformación. Debido a la complejidad de la ecuación (1) este proceso tiene que ser realizado numéricamente, usando, por ejemplo, un algoritmo de Newton-Raphson.

1.2.2 Ecuaciones constitutivas tridimensionales

El comportamiento del material en 3 dimensiones es descrito por un tipo de ecuación de flujo que relaciona las tensiones de Cauchy σ con el tensor de velocidad de deformación d que se supone deriva de un potencial plástico ψ [8],

$$\sigma = \sigma(d) = \frac{\delta \psi(d)}{\delta d}; \quad d = \frac{1}{2} [\nabla v + (\nabla v)^T] \quad (5)$$

Con el fin de asociar esta ecuación con el modelo unidimensional descrito anteriormente, el potencial viscoplástico ψ se obtiene integrando las ecuaciones escritas en la sección anterior escritas en términos de la tensión de equivalente de Von Mises y las deformaciones medidas para dar,

$$\psi(d) = \psi(\dot{\varepsilon}) = \int \tilde{\sigma}(\dot{\varepsilon}) \delta \dot{\varepsilon} \quad (6)$$

La sustitución de esta expresión en la ecuación (5) hace que la tensión desviadora de Cauchy σ sea proporcional al tensor de velocidad de deformación desviador d' ,

$$\sigma' = \frac{\partial \psi(\dot{\varepsilon})}{\partial d} = 2\mu d'; \quad \mu = \frac{2}{3} \frac{d\psi}{d\dot{\varepsilon}^2} = \frac{\tilde{\sigma}(\dot{\varepsilon}, g)}{3\dot{\varepsilon}} \quad (7)$$



2 Formulación del flujo incremental

2.1 Cinemática

Para simular numéricamente un proceso de conformado plástico podemos usar el método de los elementos finitos en su formulación de flujo incremental. Esta formulación discretiza el tiempo dividiéndolo en pasos de tiempo (time steps). En cada paso de tiempo se evalúa la nueva posición de los puntos materiales (sheet position) y sus variables mecánicas asociadas.

La figura 1 muestra dos etapas generales consecutivas correspondientes a los pasos de tiempo n y $n+1$. El desplazamiento de una posición a otra se expresa mediante una función general ϕ ,

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad (8)$$

Una medida de la deformación para cada *timestep* la proporciona el tensor \mathbf{C} de Cauchy-Green definido como,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}; \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \phi}{\partial x_n} = \nabla_n \phi \quad (9)$$

Usando este tensor, se puede obtener una aproximación incremental de la velocidad de deformación \mathbf{d} para cada timestep,

$$\tilde{\mathbf{d}} = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (10)$$

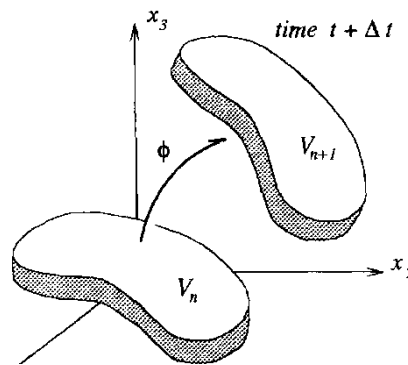


Figura 1 movimiento incremental para cada timestep.

Nótese que tanto $\tilde{\mathbf{d}}$ como \mathbf{C} son tensores en la configuración anterior n .

Con el fin de introducir una medida incremental que se aproxime a la velocidad de deformación equivalente de Von Mises, es necesario separar los componentes volumétricos y distorsionales de la deformación. Mientras que en las ecuaciones de velocidad esto se logra simplemente mediante los componentes (traza y componentes desviadoras) de \mathbf{d} , en el enfoque incremental se emplea una descomposición multiplicativa del gradiente de deformación \mathbf{F} , de la siguiente forma,

$$\mathbf{F} = J^{1/3} \hat{\mathbf{F}}; \quad \det \hat{\mathbf{F}} = 1 \quad (11)$$

De manera similar, para el tensor de Cauchy-Green esta descomposición multiplicativa se expresa como,

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} = III_C^{-1/3} \mathbf{C}; \quad III_C = \det \mathbf{C} = J^2 \quad (12)$$

Utilizando el componente de distorsión anterior del tensor de deformación, una medida de la velocidad de deformación incremental equivalente $\dot{\hat{\epsilon}}$ puede construirse de tal manera que, siendo tan simple como sea posible, tiende a la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}$ cuando Δt tiende a cero,

$$\dot{\hat{\epsilon}} = \frac{1}{3\Delta t^2} (tr \hat{\mathbf{C}} - 3); \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \dot{\hat{\epsilon}} = \dot{\epsilon} \quad (13)$$



2.1.1 Tensiones

El potencial viscoplástico ψ puede ahora expresarse como una función de la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}$. Derivando este potencial con respecto a la velocidad de deformación incremental $\tilde{\mathbf{d}}$ se obtiene un tensor de tensiones en la configuración previa, es decir, la componente desviadora del segundo tensor de Piola-Kirchhoff,

$$\mathbf{S}' = \frac{\partial \psi(\dot{\epsilon})}{\partial \tilde{\mathbf{d}}} = 2\mu\Delta t \frac{\partial \dot{\epsilon}^2}{\partial \mathbf{C}}; \quad \mu = \frac{2}{3} \frac{d\psi}{d\dot{\epsilon}^2} = \frac{\bar{\sigma}(\dot{\epsilon}, g)}{3\dot{\epsilon}} \quad (14)$$

Sustituyendo $\dot{\epsilon}$ de la ecuación (13) en la ecuación anterior se obtiene el componente desviador del segundo tensor de Piola. Kirchhoff,

$$\mathbf{S}' = \frac{\mu III_C^{-1/3}}{\Delta t} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_C \mathbf{C}^{-1} \right); \quad I_C = t_r \mathbf{C} \quad (15)$$

El componente desviador del tensor de tensiones de Cauchy en la configuración actual se puede obtener de \mathbf{S}' en forma estándar para dar $\boldsymbol{\sigma}'$ en términos del tensor izquierdo de Cauchy-Green $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$,

$$\boldsymbol{\sigma}' = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}' \mathbf{F}^T = \frac{\mu}{J^{5/3} \Delta t} \left(\mathbf{b} - \frac{1}{3} I_C \mathbf{I} \right) \quad (16)$$

2.1.2 Módulo tangente

Las ecuaciones incrementales constitutivas anteriores tendrán que ser linealizadas para establecer el procedimiento de solución de Newton-Raphson. Para este propósito, el módulo tangente simétrico de cuarto orden en la configuración previa se define como,

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial \tilde{\mathbf{d}}} = 2\Delta t \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial \mathbf{C}} = 4\Delta t^2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (17)$$

Que, después de un largo algebra usando la ecuación (15) queda como,

$$\mathbf{C} = \frac{2\mu}{3 III_C^{1/3}} \left[\frac{1}{3} I_C \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} + I_C \mathbf{I} \right] + \frac{m-1}{3\mu\dot{\epsilon}^2} \mathbf{S}' \otimes \mathbf{S}' \quad (18)$$

Donde $m = d \log \bar{\sigma} / d \log \dot{\epsilon}$ es el índice de sensibilidad de velocidad del material y \mathbf{I} es el tensor de cuarto orden de componentes

$$I_{IJKL} = (C^{-1})_{IK} (C^{-1})_{JK} \quad (19)$$

El módulo tangente equivalente en la configuración actual se puede obtener mediante la multiplicación repetida por \mathbf{F} de la ecuación anterior, dando como resultado,

$$\mathbf{c} = \frac{2\mu}{3 J^{5/3}} \left[\frac{1}{3} I_b \otimes \mathbf{I} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{b} + I_C \mathbf{i} \right] + \frac{m-1}{3\mu\dot{\epsilon}^2} \boldsymbol{\sigma}' \otimes \boldsymbol{\sigma}' \quad (20)$$

Donde los componentes del tensor de cuarto orden \mathbf{i} vienen dados por el tensor delta de Dirac,

$$i_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{ij} \quad (21)$$

2.2 Formulación de elementos finitos

2.2.1 Discretización

Los componentes de espesor grueso se simulan usando elementos hexaédricos de 8 nodos que permiten interpolas la geometría previa y actual desde las posiciones nodales y las funciones de forma trilineal estándar N_a ,

$$x_{n+1} = \sum_{a=1}^8 N_a x_{a,n+1} \quad (22a)$$

$$x_n = \sum_{a=1}^8 N_a x_{a,n} \quad (22b)$$

De manera similar, las velocidades nodales virtuales son interpoladas a partir de los valores nodales,

$$\delta v = \sum_{a=1}^8 N_a \delta v_a \quad (23)$$



Usando la expresión anterior, el gradiente y la velocidad virtual de deformación se pueden obtener de un elemento dado como,

$$F = \sum_{a=1}^8 x_{a,n+1} \otimes \nabla_n N_a \quad (24a)$$

$$2\delta d = \sum_{a=1}^8 (\delta v_a \otimes \nabla N_a + \nabla N_a \otimes \delta v_a) \quad (24b)$$

Donde ∇N_a y $\nabla_n N_a$ son las derivadas cartesianas anteriores y actuales de las funciones de forma.

2.2.2 Ecuaciones de equilibrio

El equilibrio de la lámina bajo presión uniforme p que actúa sobre un área A se expresa usando el principio de los trabajos virtuales en la configuración actual de la lámina,

$$\int_{V_{n+1}} \sigma \cdot \delta \mathbf{d} dV = p \int_A \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} dA \quad (25)$$

Sustituyendo por $\delta \mathbf{d}$ y $\delta \mathbf{v}$ de las ecuaciones (23) y (24b) se obtiene,

$$\sum_{a=1}^N \delta v_a \cdot (\mathbf{T}_a + \mathbf{V}_a - p \mathbf{F}_a) = 0 \quad (26)$$

Donde la componente desviadora de las fuerzas nodales internas \mathbf{T}_a se obtiene a partir de las tensiones desviadoras de Cauchy,

$$\mathbf{T}_a = \int_{V_{n+1}} \sigma' \nabla N_a dV \quad (27)$$

Mientras que la componente volumétrica se obtiene de la presión hidrostática σ_m sobre el elemento,

$$\mathbf{V}_a = \int_{V_{n+1}} \sigma_m \nabla N_a dV \quad (28)$$

Y las fuerzas externas por unidad de presión son,

$$\mathbf{F}_a = \int_A \mathbf{n} N_a dA \quad (29)$$

La afirmación de equilibrio anterior puede ser expresada en términos de los correspondientes vectores globales \mathbf{T} , \mathbf{V} , \mathbf{F} y del vector residual global \mathbf{R} ,

$$\mathbf{R}(x_{n+1}) = \mathbf{T}(x_{n+1}) + \mathbf{V}(x_{n+1}) - p \mathbf{F}(x_{n+1}) = 0 \quad (30)$$

Nótese que, como resultado de la formulación de flujo incremental, las ecuaciones anteriores son funciones no lineales del vector actual de posiciones nodales globales \mathbf{x}_{n+1} . La presión p en las ecuaciones anteriores puede ser controlada directamente como parte del proceso de solución usando algoritmos de energía descritos en la referencia [5].

2.2.3 Condición de incompresibilidad

Las ecuaciones constitutivas descritas anteriormente solo determinan la parte desviadora de las tensiones de Cauchy. Con el fin de obtener el componente hidrostático o promedio debe aplicarse la condición de incompresibilidad del flujo. Esto se consigue aplicando un algoritmo de penalización simple combinado con el método de dilatación media (promedio) en el que un valor medio de σ_m es evaluado sobre cada elemento,

$$\sigma_m = \frac{\lambda}{\Delta t} \left(\frac{V_{n+1} - V_0}{V_0} \right) \quad (31)$$

Donde λ es un parámetro de gran penalización y V_{n+1} y V_0 los volúmenes actual e inicial de un elemento típico. Introduciendo la expresión anterior en la ecuación (28) para las fuerzas volumétricas equivalentes se obtiene,

$$V_a = V_{n+1} \sigma_m \bar{V} N_a ; \quad \bar{V} N_a = \frac{1}{V_{n+1}} \int_{V_{n+1}} \nabla N_a dV \quad (32)$$



2.2.4 Procedimiento de solución

Aunque las ecuaciones de equilibrio (30) son funciones de las actuales posiciones nodales, resulta conveniente introducir un vector de velocidad media virtual \mathbf{v} ,

$$\mathbf{v} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \quad (33)$$

De esta manera las ecuaciones se pueden resolver por este sustituto desconocido \mathbf{v} de una manera similar a la formulación de flujo estándar estableciendo un proceso de Newton-Raphson para cada iteración k ,

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{v}_k = -\mathbf{R}(\mathbf{x}_{n+1}^k) ; \quad \mathbf{x}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{x}_{n+1}^k + \Delta t \Delta \mathbf{v}_k \quad (34)$$

Donde \mathbf{K} es la matriz tangente simétrica que se expresa simbólicamente como,

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}} = \Delta t \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \quad (35)$$

La evaluación de esta matriz requiere una serie de componentes. En general, si se dan dos nodos a y b la matriz de rigidez 3×3 que las relaciona tiene la forma,

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_c^{ab} + \mathbf{K}_v^{ab} + \Delta t (\mathbf{K}_\sigma^{ab} - \mathbf{K}_f^{ab}) \quad (36)$$

Donde el componente constitutivo \mathbf{K}_c^{ab} resulta del modulo tangente del material,

$$\mathbf{K}_{c,ij}^{ab} = \int_{V_{n+1}} \frac{\partial N_a}{\partial x_k} c_{ijkl} \frac{\partial N_a}{\partial x_l} dV \quad (37)$$

Mientras que el componente volumétrico \mathbf{K}_v^{ab} se obtiene de la diferenciación de la ecuación (32),

$$\mathbf{K}_v^{ab} = \frac{\lambda V_{n+1}^2}{V_0} (\bar{\nabla} N_a \otimes N_b) + \sigma_m \Delta t \int_{V_{n+1}} (\nabla N_a \otimes \nabla N_b - \nabla N_b \otimes \nabla N_a) dV \quad (38)$$

Finalmente, la matriz de tensiones inicial es,

$$\mathbf{K}_\sigma^{ab} = \int_{V_{n+1}} (\nabla N_a \cdot \boldsymbol{\sigma}' \nabla N_b) IdV \quad (39)$$

Y la matriz de corrección de carga \mathbf{K}_f^{ab} se trata en la referencia [9].

2.3 Aplicaciones

En los ejemplos siguientes se utilizan elementos *brick* de 8 nodos con cuadratura de un punto y control de reloj de arena artificial. El elemento se describe con más detalle en la referencia [11].

2.3.1 Conformado de caja doble

Este ejemplo se refiere a la formación de una lámina de Ti-6Al-4V de dimensiones $80 \times 40 \times 2 \text{ mm}^2$ en una caja doble de dimensiones $25 \times 50 \text{ mm}$. Solo es analizada una cuarta parte del problema con una malla de 4020 elementos. La simulación completa llevo 170 *timesteps* y un total de 310 interacciones de Newton-Raphson. La figura 2 muestra dos etapas del proceso de conformado.

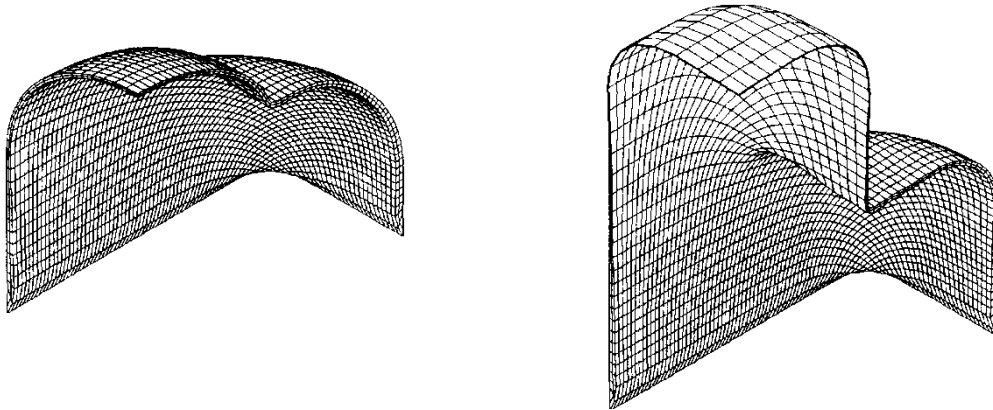


Figura 2. Caja doble

2.3.2 Conformado de una envoltura curvada (*curved shell*)

El plano vacío, que no es simétrico en planta, mide 210 mm de largo, 168 mm en el extremo ancho e incluye un semicírculo de radio 30 mm en el extremo estrecho. El grosor inicial es de 4 mm (ver figura 3). Hay dos elementos a través del espesor dando un total de 2500 elementos de 8 nodos. La simulación necesitó un total de 170 timesteps y un total de tiempo de simulación de 16 horas.

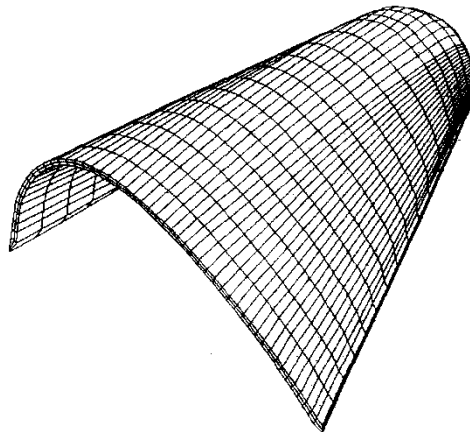


Figura 3. Envoltura curvada



II Ejemplo de datos obtenidos del programa Deform3D para una de las simulaciones realizadas.

* Load-stroke data output

* Object 2: Top die

* Step	Time	Stroke(Total)	Vel.(Total)	Load_x	Load_y	Load_z
-1	0	0	0	0	0	0
1	0,00135811	0,135811	100	1009,116	-1047,255	-880,9945
2	0,00271622	0,271622	100	7060,705	-5989,872	-5864,829
3	0,00407433	0,407433	100	14283,78	-12225,84	-12470,22
4	0,00543244	0,543244	100	26051,29	-26927,2	-24892,16
5	0,00679055	0,679055	100	31122,59	-31121,89	-29269,55
6	0,00814866	0,814866	100	33589,75	-33627,6	-31687,05
7	0,00950677	0,950677	100	37616,41	-36511,48	-35151,27
8	0,01086488	1,086488	100	40300,02	-40366,55	-38428,82
9	0,01222299	1,222299	100	43626,04	-43397,7	-41499,25
10	0,0135811	1,35811	100	47915,03	-47247,84	-45165,05
11	0,01493921	1,493921	100	54829,97	-53854,22	-51675,25
12	0,01629732	1,629732	100	59450,77	-58812,16	-56361,49
13	0,01765543	1,765543	100	64200,88	-63332,4	-60202,05
14	0,01901354	1,901354	100	68029,76	-67918,45	-64078,99
15	0,02037165	2,037165	100	71942,1	-71393,42	-67639
16	0,02172976	2,172976	100	76498,99	-75461,38	-72070,83
17	0,02308787	2,308787	100	83752,28	-82166,98	-78574,86
18	0,02444598	2,444598	100	91293,77	-92533,53	-87138,43
19	0,02580409	2,580409	100	99892,72	-100431,1	-95283,53
20	0,0271622	2,71622	100	108927,6	-109528	-104952
21	0,02852031	2,852031	100	115742,9	-115336	-111582,8
22	0,02987842	2,987842	100	119721,5	-119816,9	-115649,5
23	0,03123653	3,123653	100	124155,4	-123807,4	-119671,6
24	0,03259464	3,259464	100	128914,3	-128388,8	-124190,5
25	0,03395275	3,395275	100	133035	-132947,9	-128439,7
26	0,03531086	3,531086	100	137891,5	-138328,8	-133348,9
27	0,03666897	3,666897	100	144174,1	-145010,5	-139591,7
28	0,03802708	3,802708	100	150888,8	-150363,9	-145750,5
29	0,03938519	3,938519	100	155260,4	-155036,7	-150162,8
30	0,0407433	4,07433	100	160084,3	-159739,7	-154782,9
31	0,04210141	4,210141	100	164980,9	-164540,3	-159369,9
32	0,04345952	4,345952	100	168708,5	-168715,2	-163118,7
33	0,04481763	4,481763	100	173686,4	-173140,6	-167873,8
34	0,04617574	4,617574	100	180357,9	-179986	-174149,3
35	0,04753385	4,753385	100	187247,1	-186620,3	-180598,1
36	0,04889196	4,889196	100	194048,6	-194798,3	-188091,1
37	0,05025007	5,025007	100	200764,8	-201794,1	-195427,2
38	0,05160818	5,160818	100	208676,8	-208598,2	-202856,1
39	0,05296629	5,296629	100	212638,1	-212724	-206570,1
40	0,0543244	5,43244	100	217447,1	-216957,6	-211050,3
41	0,05568251	5,568251	100	221562	-221857,6	-215480,1



42	0,05704062	5,704062	100	225991	-226075,6	-219548,4
43	0,05839873	5,839873	100	220279,7	-220390	-214363,6
44	0,05975684	5,975684	100	225174,6	-225239,2	-219056,9
45	0,06111495	6,111495	100	229714,2	-229730,8	-223787,2
46	0,06247306	6,247306	100	235940,3	-236210,6	-230284,3
47	0,06383117	6,383117	100	243590,1	-243541,6	-237489,4
48	0,06518928	6,518928	100	249165,7	-249309,7	-243258,9
49	0,06654739	6,654739	100	256195,7	-256242	-249706,6
50	0,0679055	6,79055	100	263029,7	-262733,5	-256426,6
51	0,06926361	6,926361	100	268994,6	-268489,9	-262210,6
52	0,07062172	7,062172	100	274605,7	-274278,7	-268061,7
53	0,07197983	7,197983	100	279531,6	-279432,8	-273331,4
54	0,07333794	7,333794	100	284789,5	-284829,5	-280137,6
55	0,07469605	7,469605	100	290826,4	-290853,2	-306677,9
56	0,07605416	7,605416	100	258304,5	-259153,6	-475248,8
57	0,07741227	7,741227	100	263014,7	-263863	-497701,3
58	0,07877038	7,877038	100	263806,6	-265321,4	-521096,6
59	0,08012849	8,012849	100	262009,7	-263224,4	-545288,8
60	0,0814866	8,14866	100	266652	-266358,1	-567763,7
61	0,08284471	8,284471	100	272995,4	-272694,7	-591997,1
62	0,08420282	8,420282	100	275635,7	-275189,3	-611327,3
63	0,08556093	8,556093	100	284958,1	-284797,2	-635892,5
64	0,08691904	8,691904	100	295954,8	-295788,4	-664836,9
65	0,08827715	8,827715	100	314053,2	-313850,7	-694590,6
66	0,08963526	8,963526	100	354989,2	-354605,5	-745801,1
67	0,09099337	9,099337	100	404781,1	-404219	-849411,9
68	0,09235148	9,235148	100	409007,7	-409890,5	-878042,2
69	0,09370959	9,370959	100	375093,9	-375462,5	-893002,9
70	0,0950677	9,50677	100	374819,6	-375148,1	-912873,2
71	0,09642581	9,642581	100	384480,1	-384169,8	-937889,5
72	0,09778392	9,778392	100	396696,5	-396456,2	-963217
73	0,09914203	9,914203	100	415006,6	-415541	-992701,3
74	0,1005001	10,05001	100	430207,7	-430052,5	-1021505
75	0,1018583	10,18583	100	441049,5	-441525,3	-1045522
76	0,1032164	10,32164	100	459531	-459981,5	-1078360
77	0,1045745	10,45745	100	480819,1	-480202	-1118269
78	0,1059326	10,59326	100	497039,1	-497604,6	-1145774
79	0,1072907	10,72907	100	520976,5	-521667,5	-1186511
80	0,1086488	10,86488	100	548239,8	-549133,5	-1226335
81	0,1100069	11,00069	100	563758,3	-563852,1	-1265612
82	0,111365	11,1365	100	592216,2	-592620,9	-1309711
83	0,1127231	11,27231	100	622879,1	-624482	-1353000
84	0,1140812	11,40812	100	646090,5	-646003,1	-1404453
85	0,1154394	11,54394	100	678910,7	-680154,2	-1450443
86	0,1167975	11,67975	100	716483,4	-715998,9	-1526655
87	0,1181556	11,81556	100	748823,4	-749635,6	-1586546
88	0,1195137	11,95137	100	769094,2	-770037,4	-1629496
89	0,1208718	12,08718	100	819156,8	-817479,6	-1720474



90	0,1222299	12,22299	100	871467,1	-873365,6	-1843149
91	0,123588	12,3588	100	908858	-909294,7	-1912204
92	0,1249461	12,49461	100	1009239	-1007474	-2052923
93	0,1263042	12,63042	100	1082086	-1081786	-2234026
94	0,1276623	12,76623	100	1147538	-1147213	-2412371
95	0,1290205	12,90205	100	1253135	-1251725	-2641335
96	0,1303786	13,03786	100	1363336	-1360508	-2904971
97	0,1317367	13,17367	100	1556916	-1556117	-3341594
98	0,1330948	13,30948	100	1940457	-1939687	-4183994
99	0,1342848	13,42848	100	4149473	-4145278	-8777091
100	0,1346681	13,46681	100	4440739	-4457577	-9548070
101	0,1349576	13,49576	100	4403633	-4399794	-9542774
102	0,135247	13,5247	100	4686852	-4668387	-1,03E+07
103	0,1355047	13,55047	100	4585108	-4602615	-1,01E+07
104	0,135811	13,5811	100	4906625	-4858984	-1,08E+07

Stroke_x	Stroke_y	Stroke_z	Vel_x	Vel_y	Vel_z
0	0	0	0	0	0
0	0	-0,135811	0	0	-100
0	0	-0,271622	0	0	-100
0	0	-0,407433	0	0	-100
0	0	-0,543244	0	0	-100
0	0	-0,679055	0	0	-100
0	0	-0,814866	0	0	-100
0	0	-0,950677	0	0	-100
0	0	-1,086488	0	0	-100
0	0	-1,222299	0	0	-100
0	0	-1,35811	0	0	-100
0	0	-1,493921	0	0	-100
0	0	-1,629732	0	0	-100
0	0	-1,765543	0	0	-100
0	0	-1,901354	0	0	-100
0	0	-2,037165	0	0	-100
0	0	-2,172976	0	0	-100
0	0	-2,308787	0	0	-100
0	0	-2,444598	0	0	-100
0	0	-2,580409	0	0	-100
0	0	-2,71622	0	0	-100
0	0	-2,852031	0	0	-100
0	0	-2,987842	0	0	-100
0	0	-3,123653	0	0	-100
0	0	-3,259464	0	0	-100
0	0	-3,395275	0	0	-100
0	0	-3,531086	0	0	-100



0	0	-3,666897	0	0	-100
0	0	-3,802708	0	0	-100
0	0	-3,938519	0	0	-100
0	0	-4,07433	0	0	-100
0	0	-4,210141	0	0	-100
0	0	-4,345952	0	0	-100
0	0	-4,481763	0	0	-100
0	0	-4,617574	0	0	-100
0	0	-4,753385	0	0	-100
0	0	-4,889196	0	0	-100
0	0	-5,025007	0	0	-100
0	0	-5,160818	0	0	-100
0	0	-5,296629	0	0	-100
0	0	-5,43244	0	0	-100
0	0	-5,568251	0	0	-100
0	0	-5,704062	0	0	-100
0	0	-5,839873	0	0	-100
0	0	-5,975684	0	0	-100
0	0	-6,111495	0	0	-100
0	0	-6,247306	0	0	-100
0	0	-6,383117	0	0	-100
0	0	-6,518928	0	0	-100
0	0	-6,654739	0	0	-100
0	0	-6,79055	0	0	-100
0	0	-6,926361	0	0	-100
0	0	-7,062172	0	0	-100
0	0	-7,197983	0	0	-100
0	0	-7,333794	0	0	-100
0	0	-7,469605	0	0	-100
0	0	-7,605416	0	0	-100
0	0	-7,741227	0	0	-100
0	0	-7,877038	0	0	-100
0	0	-8,012849	0	0	-100
0	0	-8,14866	0	0	-100
0	0	-8,284471	0	0	-100
0	0	-8,420282	0	0	-100
0	0	-8,556093	0	0	-100
0	0	-8,691904	0	0	-100
0	0	-8,827715	0	0	-100
0	0	-8,963526	0	0	-100
0	0	-9,099337	0	0	-100
0	0	-9,235148	0	0	-100
0	0	-9,370959	0	0	-100
0	0	-9,50677	0	0	-100
0	0	-9,642581	0	0	-100
0	0	-9,778392	0	0	-100
0	0	-9,914203	0	0	-100
0	0	-10,05001	0	0	-100



0	0	-10,18583	0	0	-100
0	0	-10,32164	0	0	-100
0	0	-10,45745	0	0	-100
0	0	-10,59326	0	0	-100
0	0	-10,72907	0	0	-100
0	0	-10,86488	0	0	-100
0	0	-11,00069	0	0	-100
0	0	-11,1365	0	0	-100
0	0	-11,27231	0	0	-100
0	0	-11,40812	0	0	-100
0	0	-11,54394	0	0	-100
0	0	-11,67975	0	0	-100
0	0	-11,81556	0	0	-100
0	0	-11,95137	0	0	-100
0	0	-12,08718	0	0	-100
0	0	-12,22299	0	0	-100
0	0	-12,3588	0	0	-100
0	0	-12,49461	0	0	-100
0	0	-12,63042	0	0	-100
0	0	-12,76623	0	0	-100
0	0	-12,90205	0	0	-100
0	0	-13,03786	0	0	-100
0	0	-13,17367	0	0	-100
0	0	-13,30948	0	0	-100
0	0	-13,42848	0	0	-100
0	0	-13,46681	0	0	-100
0	0	-13,49576	0	0	-100
0	0	-13,5247	0	0	-100
0	0	-13,55047	0	0	-100
0	0	-13,5811	0	0	-100

