

Particularidades y consejos sobre la estela

Aplicando la fórmula de Kutta ($\vec{F} = \rho \vec{U} \times \vec{\Gamma}$) sobre un perfil se observa como hay una dependencia directa entre la existencia de una circulación Γ alrededor del perfil y la generación de sustentación de éste. Es decir, si nuestro perfil sustenta, la integral a lo largo de una circunferencia que lo incluya:

$$\Gamma = \int_{2\pi}^0 v_{\theta} r d\theta = \int_{2\pi}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} r d\theta \quad (6.1)$$

Debe tener un valor de Φ distinto en 0 y en 2π . Este salto en el potencial, que se genera siempre y cuando haya fuerzas de sustentación es lo que denominamos la estela.

La condición de Kutta en el borde de salida obligará a que la estela parta de allí (lo que sólo será verdad con ángulos de ataque moderados donde no haya ocurrido desprendimiento de la corriente). Sin embargo, necesitamos imponer más condiciones para establecer la posición de los puntos de esta superficie. La condición más clara es la de imponer que las presiones sobre y bajo la estela sean idénticas. De no ser así existiría una resultante de fuerza en la estela, lo que no tendría sentido físico.

$$\vec{F} = \rho \vec{U} \times \vec{\Gamma} = 0 \quad (6.2)$$

Esto implica que las líneas de vorticidad representadas por el vector $\mathbf{\Gamma}$ deben ser paralelas a las líneas de corriente. Nuestra modelización de la estela como elementos de Γ constante la convierten en una superficie de vorticidad, por lo que tenemos que imponer que *además*, sea una superficie fluida:

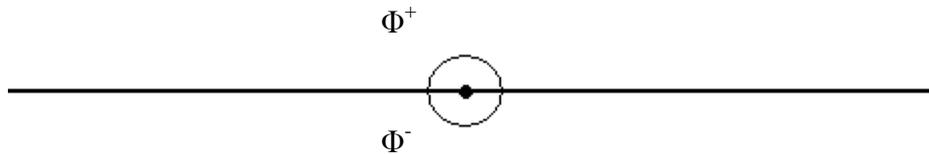
$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (6.3)$$

Para imponer esta condición debemos obtener la velocidad sobre cada elemento y para ello el elemento ha de estar definido antes de obtener la velocidad. El resultado será un método iterativo.

Inicialmente, al no cumplirse la condición de superficie fluida, aparecerán velocidades perpendiculares. Esto imposibilita el cálculo de velocidades mediante diferencias finitas ya que este método no aportará componentes verticales a los paneles. Un posible método para el cálculo de las velocidades será la derivación directa de la ecuación de Green. Para un punto cualquiera del dominio D la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$4\pi\bar{\nabla}\Phi(\bar{x}) = 4\pi\bar{U}_\infty - \bar{\nabla}\int_{\Sigma}\Phi(x_0)\bar{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\bar{n}(x_0)d\sigma - \bar{\nabla}\int_E\Gamma(y)\bar{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\bar{n}(x_0)d\sigma \quad (6.3)$$

Sin embargo nuestro interés se centrará en la evaluación directamente sobre la estela. Como comentamos anteriormente, en la estela podemos usar elementos con una distribución de potencial constante. En este caso se evalúa en el centro del elemento por lo que no habrá problemas a la hora de calcular el área de la esfera que envuelve al punto. No obstante debemos calcular la velocidad sobre y bajo la estela aunque infinitamente cerca.



Hess [3] demostró que las distribuciones de dobletes de intensidad constante sobre elementos planos son equivalentes a torbellinos de la misma intensidad situados en los lados del elemento (mediante el uso del teorema de Stokes).

Para una distribución de dobletes cualesquiera:

$$\bar{v} = -\frac{1}{4\pi}\int_S(\bar{n}\times\bar{\nabla}\mu)\times\frac{\bar{r}}{r^3}dS + \frac{1}{4\pi}\int_C\mu\frac{d\bar{l}\times\bar{r}}{r^3} \quad (6.4)$$

De forma que si es constante sobre S:

$$\vec{v} = \frac{1}{4\pi_c} \int_C \mu \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (6.5)$$

Lo que es equivalente a una distribución de torbellinos.

Las distribuciones de torbellinos son más intuitivas a la hora de observar los resultados y pueden ser de utilidad aquí para visualizar muy fácilmente el campo de velocidades.

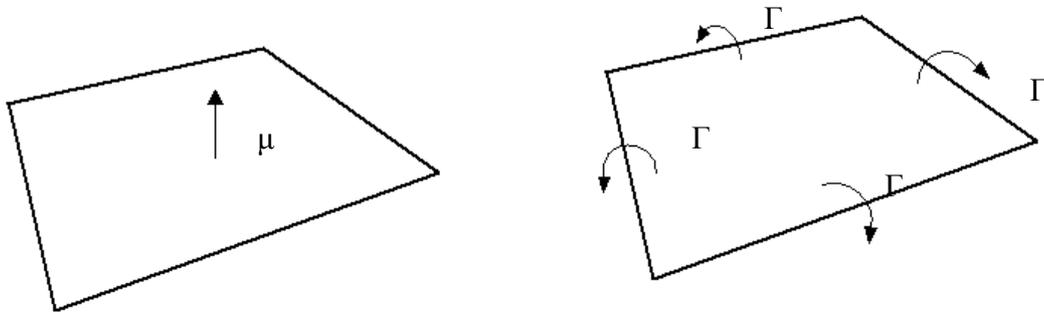


Ilustración 17: Equivalencia entre un plano de dobletes con distribución constante y una línea cerrada de torbellinos

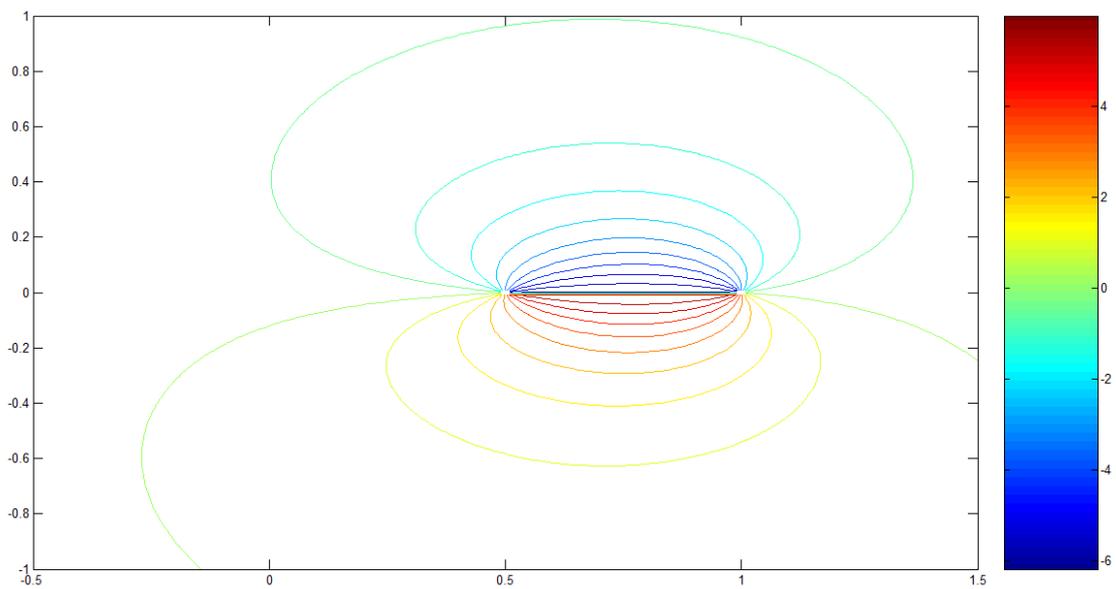
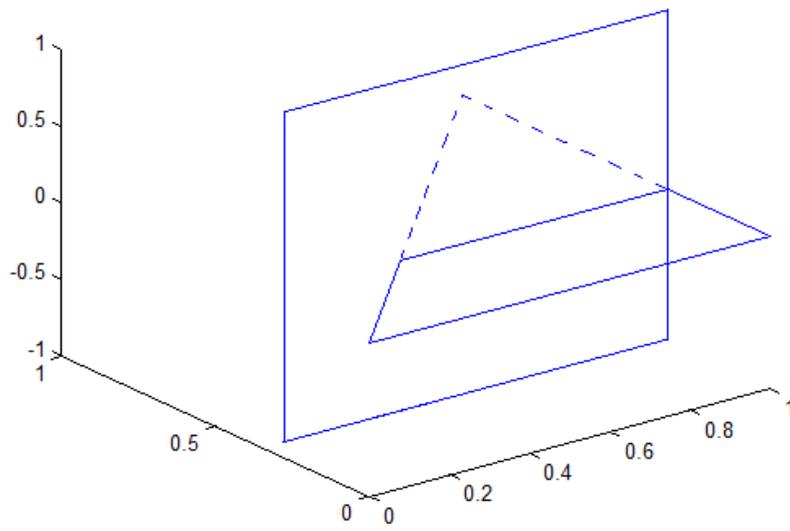


Ilustración 18: Distribución del potencial generado por un triángulo de dobles en el corte de la imagen superior

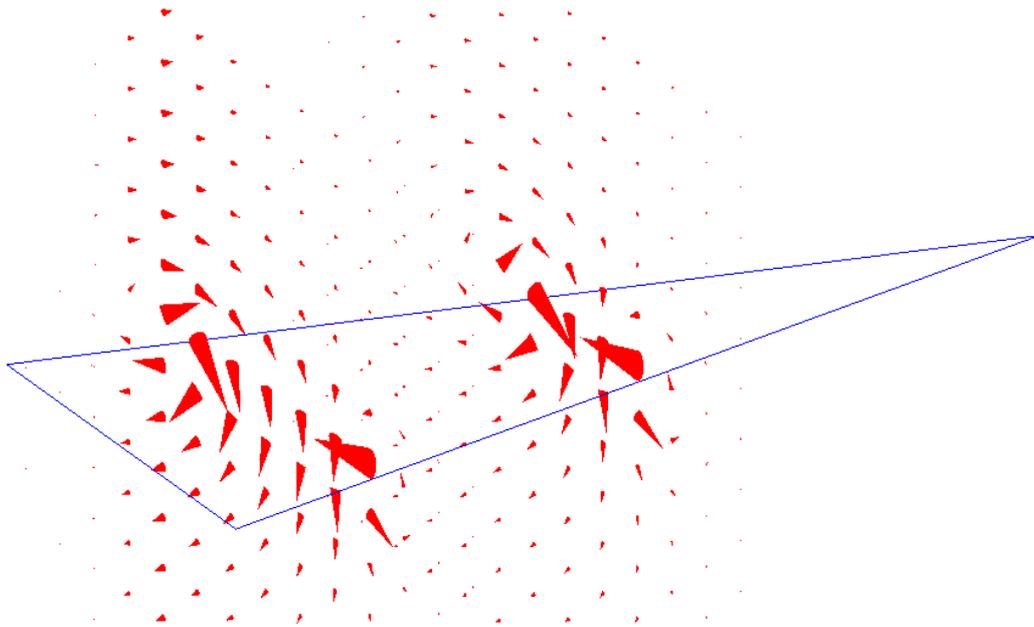


Ilustración 19: Distribución de velocidades en dos cortes sobre el triángulo, se aprecia su equivalencia con un campo de torbellinos

Un torbellino bidimensional genera una distribución de potencial con “saltos” en el dominio fluido, ya que su circulación es distinta de cero. Sin embargo su distribución de velocidades es continua y definida en todo el dominio salvo en el centro del torbellino. Extrapolando al caso tridimensional observamos que si bien hay un salto en las velocidades al traspasar el elemento (ya que la estela no se encuentra en D) los valores sobre y bajo la estela serán idénticos.

$$\Phi_{\text{torbellino}} = \frac{-\Gamma}{2\pi} \theta \quad (6.6)$$

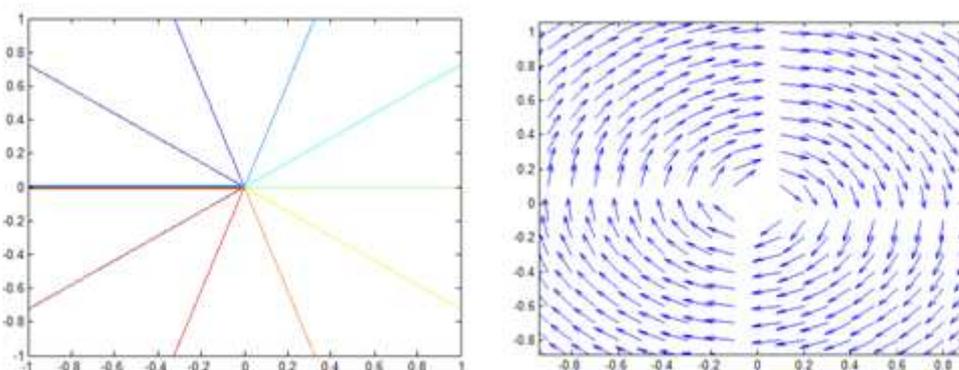


Ilustración 20: Distribución de potencial y de velocidades en un torbellino bidimensional

Es más, el efecto del elemento sobre sí mismo proporcionará los resultados esperados de la teoría potencial linealizada. Una distribución de torbellinos generará una distribución antisimétrica de las componentes paralelas al plano y simétrica en cuanto a las componentes simétricas. El efecto de otros elementos desviará esta tendencia solo levemente.

Por lo tanto la derivada de las ecuaciones de Green sobre puntos de la estela será la siguiente:

$$2\pi(\vec{\nabla}\Phi^+ + \vec{\nabla}\Phi^-) = 4\pi\vec{U}_\infty - \vec{\nabla}\int_{\Sigma}\Phi(x_0)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}(x_0)d\sigma - \vec{\nabla}\int_E\Gamma(y)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}(x_0)d\sigma \quad (6.7)$$

$$2\pi(2\vec{\nabla}\Phi) = 4\pi\vec{U}_\infty - \vec{\nabla}\int_{\Sigma}\Phi(x_0)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}(x_0)d\sigma - \vec{\nabla}\int_E\Gamma(y)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}(x_0)d\sigma \quad (6.8)$$

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi = \vec{U}_\infty - \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int_{\Sigma}\Phi(x_0)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}(x_0)d\sigma - \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int_E\Gamma(y)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}(x_0)d\sigma \quad (6.9)$$

De esta manera para hallar las velocidades sobre los puntos de evaluación en la estela (que estarán en los centros de los triángulos de control), únicamente debemos derivar las expresiones de las que obteníamos los coeficientes de influencia, multiplicarlas por el valor de la circulación o los nodos y sumarle la velocidad en el infinito. El proceso tiene un gran coste computacional, pero nos dará todas las componentes de la velocidad.

Una vez que sabemos cómo calcular las velocidades sobre la estela, debemos de aplicar un método iterativo para imponer la condición de superficie fluida. Morino(1977) [14] , Plotkin (1986) [15]y Pyo (1997) sugirieron y perfeccionaron el siguiente método.

Empezaremos definiendo una serie de “triángulos de control”. En estos triángulos evaluaremos la velocidad e impondremos que sean superficies fluidas. El resto de los triángulos “acompañaran” a los triángulos de control pero no podemos forzar su movimiento ya que todos sus nodos se encuentran definidos por los triángulos que los rodean:

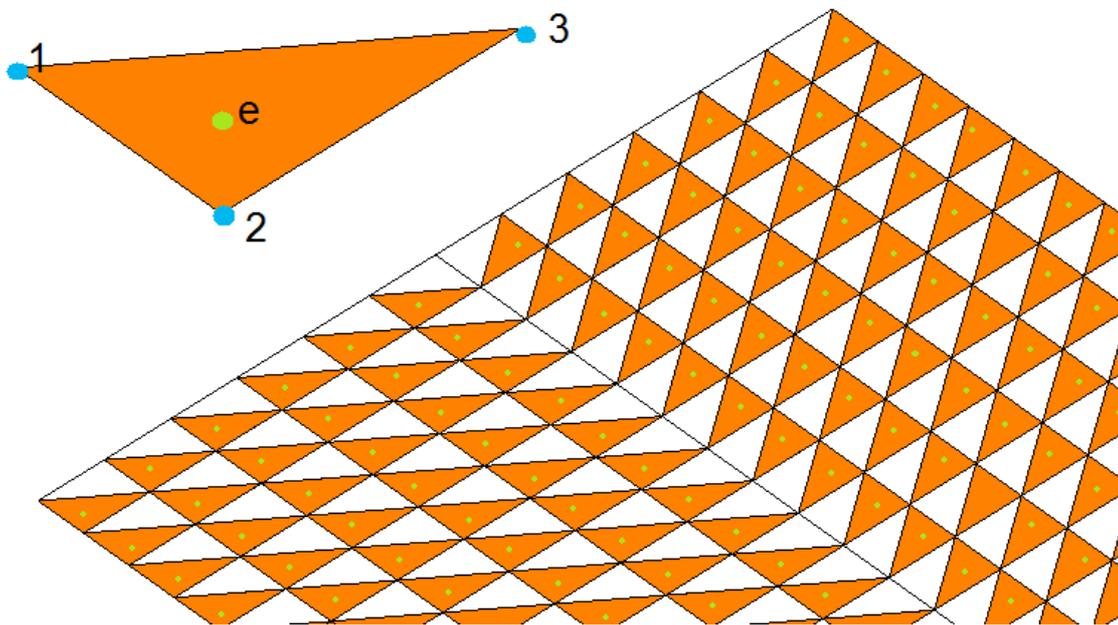


Ilustración 21: Elementos de control en la estela. Vértices 1, 2 y 3 y punto de evaluación "e"

La imposición de superficie fluida se hace obligando a que el lado 1-2 sea paralelo a la velocidad calculada en “e”. Así el nodo 1 viene dado por el triángulo anterior o por el borde de salida. El nodo 2 lo define el propio triángulo y el 3 viene dado por el triángulo siguiente. Este esquema no puede aplicarse al nodo central, que puede ser obtenido mediante la velocidad media entre los triángulos de control a los que pertenece. Una vez que tenemos definida la geometría comenzamos a calcular con los siguientes pasos.

1. Se resuelve todo el problema del potencial con una estela arbitraria (por ejemplo plana y orientada según U_{∞}).

2. Se calculan las velocidades en los puntos de control de la primera línea de paneles.

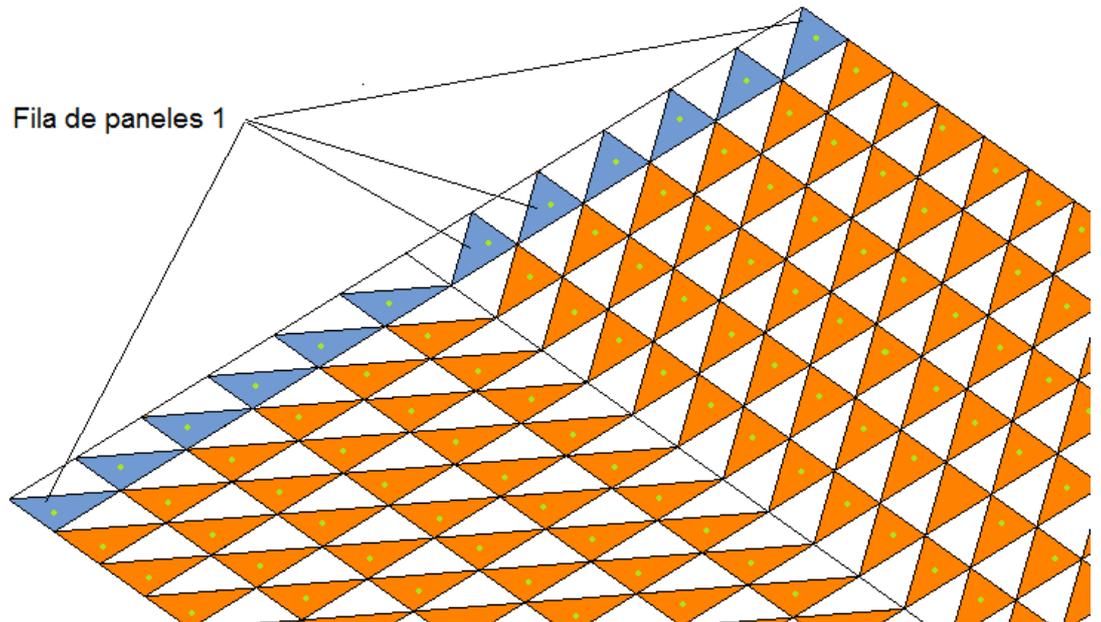


Ilustración 22: Indicación de la primera fila afectada por la evaluación de velocidades

3. Se mueven estos paneles y los siguientes aguas abajo, siguiendo la misma velocidad calculada para la fila 1 de paneles.
4. Se repite el procedimiento ahora con la segunda fila: se hallan las velocidades sobre ella y se la mueve ella y las siguientes.
5. Una vez evaluada toda la estela tenemos una configuración inicial lo suficientemente estable como para comenzar a evaluar en todos los puntos de control y moverlos a la vez.
6. El algoritmo se detiene cuando $|\vec{v} \cdot \vec{n}| < \epsilon$ donde ϵ es el error introducido por el programador.

Este algoritmo permite obtener una buena aproximación de la forma de la estela en muy pocos pasos (menos de cinco).

Presentamos a continuación algunos resultados obtenidos siguiendo éste método. Ya que el objetivo era únicamente obtener el posicionamiento de la

estela y no evaluar las fuerzas sobre el cuerpo se optó por usar elementos triangulares de potencial constante en todo el problema. Para obtener las velocidades se usó el método de derivación de la ecuación de Green y se derivaron los resultados de las integrales sobre el elemento obtenidos por Hess.

Teniendo en cuenta que el objetivo del análisis era estudiar la viabilidad del método iterativo, no se han realizado estudios sobre la longitud necesaria de la estela en función del error.

El mallado propuesto consta de 1672 triángulos sobre el cuerpo y 1344 triángulos sobre la estela que modelan un ala rectangular de alargamiento 6 y perfil NACA 0008 sometida a una corriente incidente con un ángulo de ataque de 10° . Los resultados en la segunda iteración fueron los siguientes (medidas adimensionalizadas con la longitud de la cuerda):

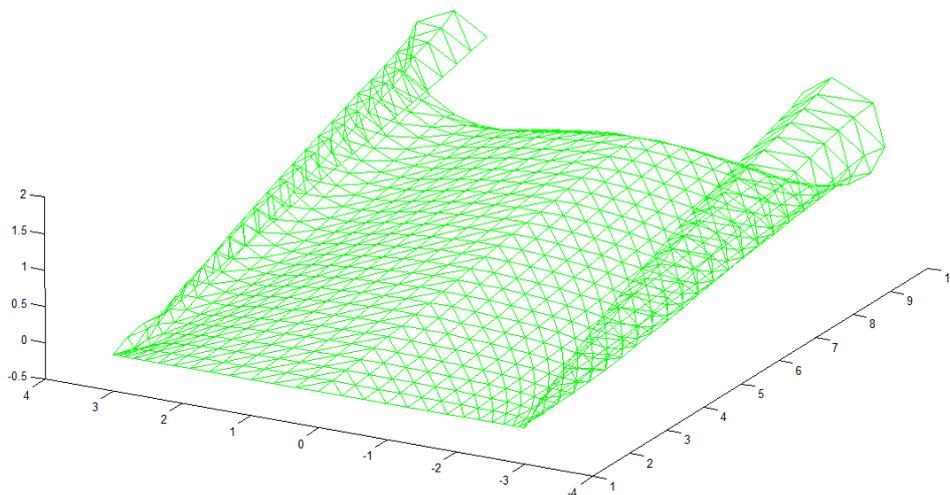


Ilustración 23: Mallado de la estela obtenido automáticamente tras la segunda iteración

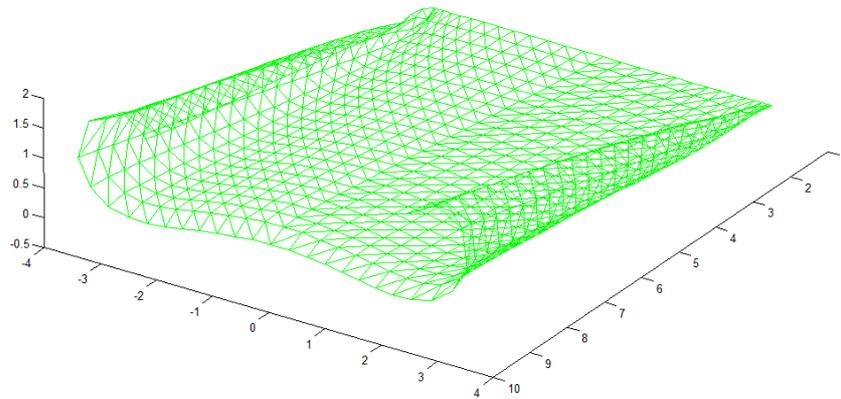


Ilustración 24: Mallado de la estela

Se observa perfectamente el progresivo enrollamiento de la estela en función de la distancia y llama la atención el grado de parecido con resultados anteriores.

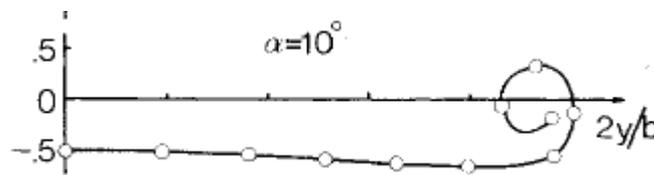


Ilustración 25: Emil O. Suciú y Luigi Morino [14]

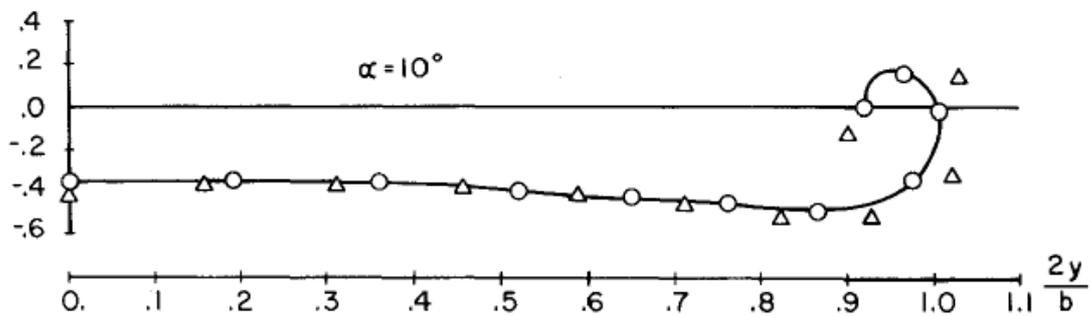


Ilustración 26: D.T. Yeh y A. Plotkin [15]

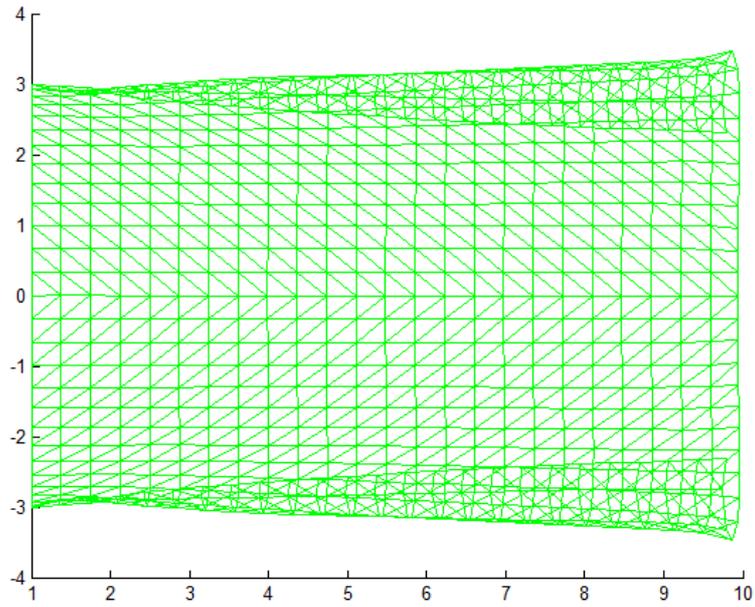


Ilustración 27: Mallado de la estela, vista superior

En la segunda iteración el estrechamiento de la estela aún no se muestra convenientemente.

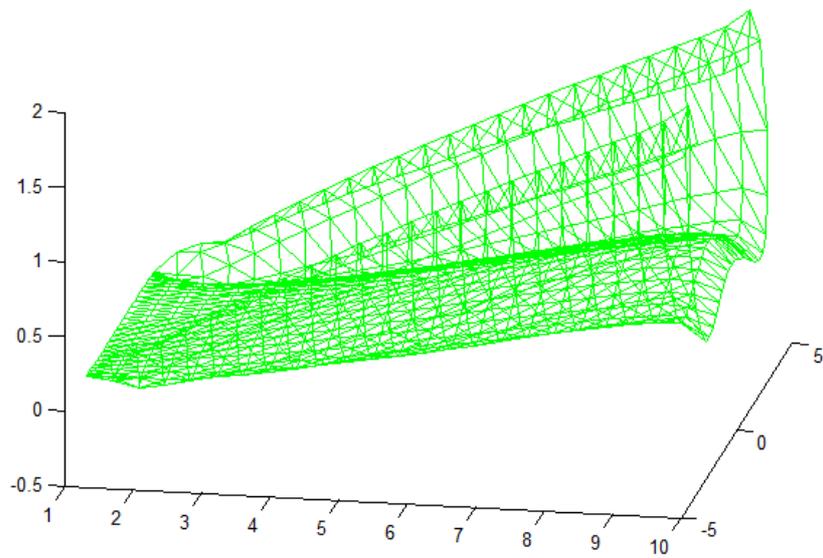


Ilustración 28: Mallado de la estela, detalle del "fin" ficticio de ésta.

Sacrificando la longitud de la estela para acelerar los cálculos vemos un efecto significativo en el “borde de salida” de la estela: un cambio súbito de orientación, lo que podría interpretarse como reminiscencias del torbellino de arranque.

A pesar del interés que pueden tener los cálculos sobre el posicionamiento de la estela (interferencia ala-estabilizador por ejemplo), para ciertas aplicaciones, como el cálculo de las distribuciones de presión sobre un ala su interés se reduce. El efecto de los dobletes decae rápidamente con la distancia y en primera aproximación la estela es plana y paralela a la corriente incidente. Esta conclusión ya fue obtenida por Morino en [14].