

Planteamiento de las ecuaciones generales

Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un fluido se conocen como ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones son difícilmente resolubles, por lo que se introducen simplificaciones siempre que sea posible. Estas simplificaciones consisten normalmente en la eliminación de términos de las ecuaciones generales al considerar que su valor es despreciable. Esta eliminación se hace de forma cuantificada mediante ciertos números adimensionales (Re, M, Pr, etc.) obtenidos de la división entre distintos elementos de las ecuaciones de Navier-Stokes.

En el campo de la aerodinámica la simplificación más inmediata es la suposición de que las fuerzas viscosas son despreciables en todo el dominio fluido salvo en una pequeña zona denominada “capa límite” y en la estela. Esta simplificación viene dada por el número de Reynolds, parámetro que compara los valores de magnitud de las fuerzas convectivas ($\rho V^2/L$) con el de las fuerzas viscosas ($\mu V/L^2$) de manera que $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$. En aerodinámica, este valor será siempre mucho mayor que uno, lo que se debe principalmente al pequeño valor de la viscosidad del aire. Para el caso de aviones comerciales obtenemos que $Re \approx 5 \cdot 10^7$.

La siguiente hipótesis a tener en cuenta es la de que el fluido es adiabático y por lo tanto la conducción de calor es despreciable. Esta hipótesis se cumple siempre y cuando el producto $RePr$ sea mucho mayor que la unidad ($Pr = \frac{c_p \mu}{k}$), lo cual se cumple prácticamente siempre ya que Pr es de orden unidad para los gases y como hemos visto, Re es mucho mayor que la unidad.

Si además nos reducimos a fluidos barótrpos y despreciamos el efecto estático de las presiones (usual en un gas como el aire), obtenemos las siguientes ecuaciones:

Ecuación de la Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.1)$$

Ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (1.2)$$

Ecuación de la entropía:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} s = 0 \quad (1.3)$$

Esta ecuación sustituye a la ecuación de la energía, además, para el caso de gases perfectos:

$$\frac{p}{\rho^\lambda} = cte \quad (1.4)$$

Ecuación de estado:

Para el caso de gases ideales:

$$p = \rho RT \quad (1.5)$$

Para el caso de líquidos:

$$\rho = cte \quad (1.6)$$

Si se cumplen las suposiciones anteriores y existe de una relación de barotropía la vorticidad se conserva. Además, debido a esto, si ésta es nula en el infinito aguas arriba lo será en todo el dominio fluido por lo que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \quad (1.7)$$

Mediante el análisis vectorial es posible demostrar que esta última ecuación es condición necesaria y suficiente para que exista una función escalar Φ tal que:

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\Phi \quad (1.8)$$

A esta función $\Phi(x,y,z)$ se la conoce como potencial de velocidades.

Si introducimos las anteriores consideraciones en la ecuación de cantidad de movimiento y la introducimos en la ecuación de continuidad, obtenemos que:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} \int \frac{dp}{\rho} \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla}\Phi|^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right] = 0 \quad (1.10)$$

ó

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla}\Phi|^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = F(t) \quad (1.11)$$

Lo que se conoce como ecuación de Euler-Bernoulli.

Si queremos obtener una ecuación diferencial para el potencial de velocidades debemos eliminar la presión y densidad de la ecuación.

Si suponemos uniformes e independientes del tiempo a las condiciones en el infinito tenemos:

$$\int \frac{dp}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{|\vec{\nabla} \Phi|^2}{2} - U_{\infty}^2 \quad (1.12)$$

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dp} \int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \quad (1.13)$$

Y aplicando el operador derivada sustancial al primer miembro de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{D}{Dt} \left(\int \frac{dp}{\rho} \right) = \left[\frac{d}{dp} \left(\int \frac{dp}{\rho} \right) \right] \frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dp} \frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{\rho} a^2 \frac{D\rho}{Dt} \quad (1.14)$$

Donde a es la velocidad del sonido en el fluido. Aplicando este cambio a la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho}{a^2} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla} \Phi|^2}{2} \right) \quad (1.15)$$

Por otra parte, de la ecuación de la continuidad obtenemos:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\rho \nabla^2 \Phi \quad (1.16)$$

Sustituyendo:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{a^2} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla} \Phi|^2}{2} \right) \quad (1.17)$$

De manera que ya tenemos una ecuación diferencial en términos del potencial de velocidades. Si ponemos la ecuación en función del número de Mach de la corriente incidente, tenemos:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla} \Phi|^2}{2} \right) \quad (1.18)$$

Donde se observa como para valores de M suficientemente pequeños

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.19)$$

Al despreciar los efectos viscosos no podemos imponer velocidad tangencial nula en las paredes de los elementos aunque sí podemos imponer que sea una superficie fluida $\vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{n} = 0$.

Obtener la ecuación del potencial como $\nabla^2 \Phi = 0$ simplifica notablemente el problema y permite la aplicación de la fórmula de Green, fundamento del método de paneles.

Formula de Green¹

Considérense dos funciones armónicas Φ y Ψ definidas en un dominio simplemente conexo D y cuya frontera S es continua a trozos. Se supondrá que las funciones Φ y Ψ así como sus derivadas hasta el segundo orden son continuas y están acotadas en D .

Si n es la normal exterior a la superficie S , entonces las funciones Φ y Ψ satisfacen la relación siguiente, denominada fórmula de Green,

$$\int_S (\Phi \bar{\nabla} \Psi - \Psi \bar{\nabla} \Phi) \cdot \bar{n} d\sigma = 0 \quad (1.20)$$

En efecto, obsérvese que en virtud del teorema de Gauss se puede escribir

$$\int_S (\Phi \bar{\nabla} \Psi - \Psi \bar{\nabla} \Phi) \cdot \bar{n} d\sigma = \int_D \nabla \cdot (\Phi \bar{\nabla} \Psi - \Psi \bar{\nabla} \Phi) d\omega \quad (1.21)$$

Y como Φ y Ψ son funciones armónicas, y satisfacen por tanto la ecuación de Laplace, el integrando de la integral de volumen de la ecuación (1.21) es idénticamente nulo y se satisface la relación (1.20).

En la aplicación de (1.20) a la resolución de flujos potenciales alrededor de obstáculos, la función Φ representa el potencial de velocidades y como función Ψ se escoge usualmente la solución fuente de ecuación de Laplace, esto es, $\Psi = 1/r$. $r = |x - x_0|$, representa una fuente localizada en el punto $x_0 = x$. Nótese que, puesto que la función Ψ se hace singular en el punto $x_0 = x$, este punto debe ser excluido del dominio de integración D si se quiere aplicar la expresión (1.20).

¹ El siguiente texto se basa principalmente en [1] con incisos del autor del presente proyecto, así como añadidos y ampliaciones.

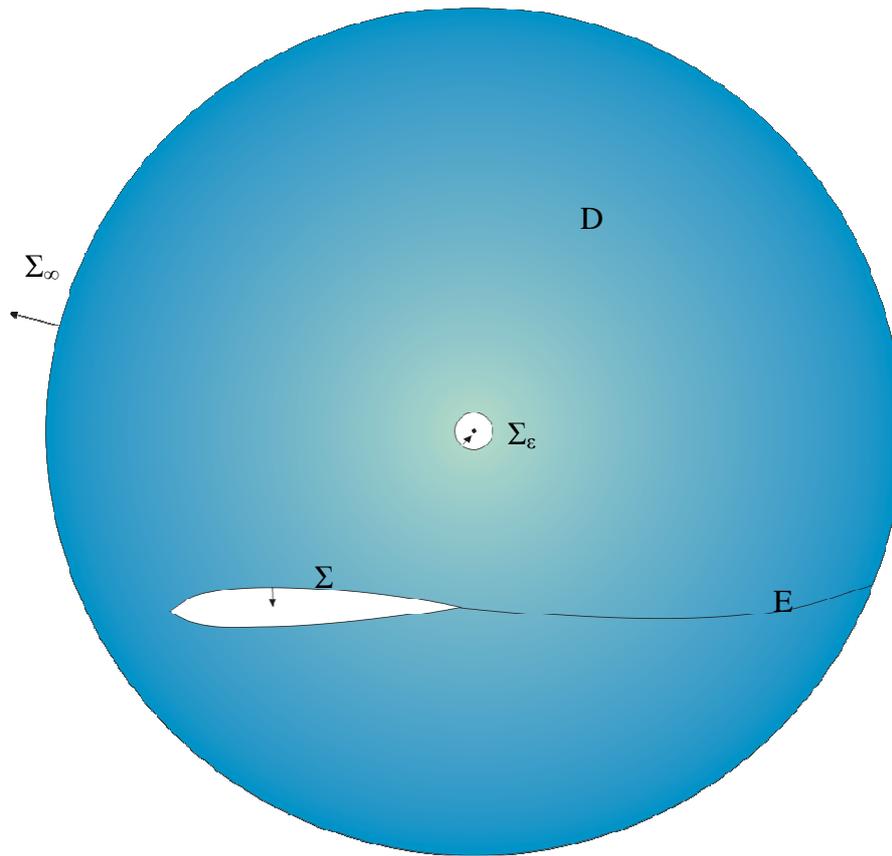


Ilustración 2: Dominios de integración (D zona coloreada)

La fórmula de Green se aplicará entonces al dominio de la figura 1, limitado por la frontera Σ del obstáculo y su posible estela E, la superficie esférica Σ_ϵ con centro en x y radio ϵ pequeño y que se hará tender a cero, y otra superficie esférica Σ_∞ con centro en x y radio R que se hará tender a infinito. Aplicado a este dominio la expresión 1 resulta:

$$\int_{\Sigma+\Sigma_\epsilon+\Sigma_\infty+E} \left(\Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla}_0 \Phi \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma = 0 \quad (1.22)$$

Donde x_0 representa un punto genérico (variable de integración) sobre las superficies de integración.

Es conveniente dividir la integral anterior entre las distintas superficies de integración y estudiar cada una de forma separada y en profundidad. Comenzaré con la **integral sobre la superficie Σ_ϵ** :

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \left(\Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla}_0 \Phi \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma \quad (1.23)$$

Definiremos \vec{n} como la normal interior al fluido y exterior al cuerpo en lo que sigue.

Como se ha descrito anteriormente, esta superficie nace de la necesidad de aislar nuestra singularidad del resto del dominio donde sí es aplicable la ecuación de Green. Por simplicidad escogemos una esfera que debe ser lo suficientemente pequeña como para despreciar las variaciones del potencial en su interior. De esta forma podemos desarrollar:

$$\Phi(x_0) = \Phi(x) + \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{r} + \dots \approx \Phi(x) + O(\varepsilon) \approx \Phi(x) \quad (1.24)$$

$$\vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} = -(\vec{r} \cdot \vec{n}) / r^3 = 1 / r^2 = 1 / \varepsilon^2 \quad (1.25)$$

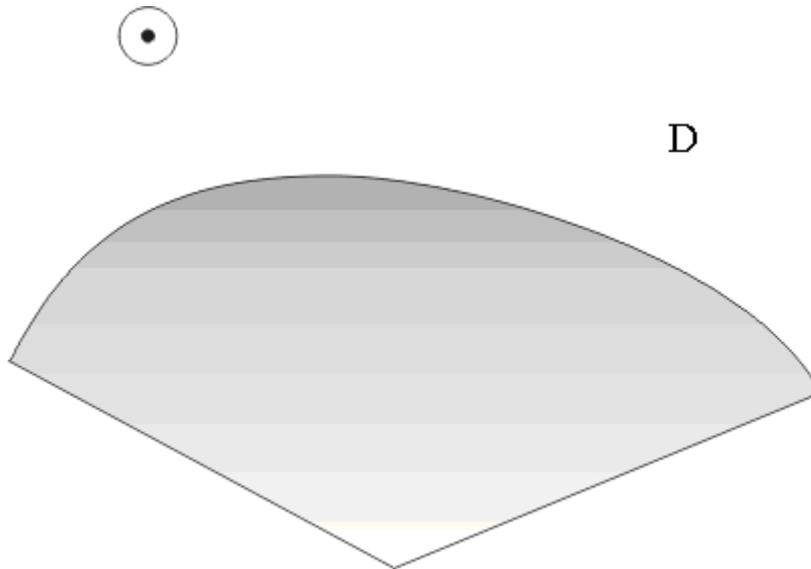


Ilustración 3: Esfera de exclusión de la singularidad (Singularidad dentro de D)

Se tiene, por tanto:

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \left[\Phi(\vec{x}_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla}_0 \Phi \right] \cdot \vec{n} d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi(\vec{x})}{\varepsilon^2} - \frac{\vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{n}}{\varepsilon} \right] 4\pi\varepsilon^2 \approx 4\pi\Phi(\vec{x}) \quad (1.26)$$

Como vemos, la integral resulta en el producto de la superficie de la esfera (con radio unidad es 4π) por el potencial en su centro ($\Phi(x)$).

Esto es cierto para cualquier singularidad dentro del dominio D . Sin embargo, nuestras singularidades se encontrarán principalmente en la frontera entre D y nuestro cuerpo (ala, fuselaje, etc.) es decir, la superficie Σ . En este caso la esfera que envuelve a nuestra singularidad no es completa puesto que sólo es necesario excluir la zona perteneciente a D .

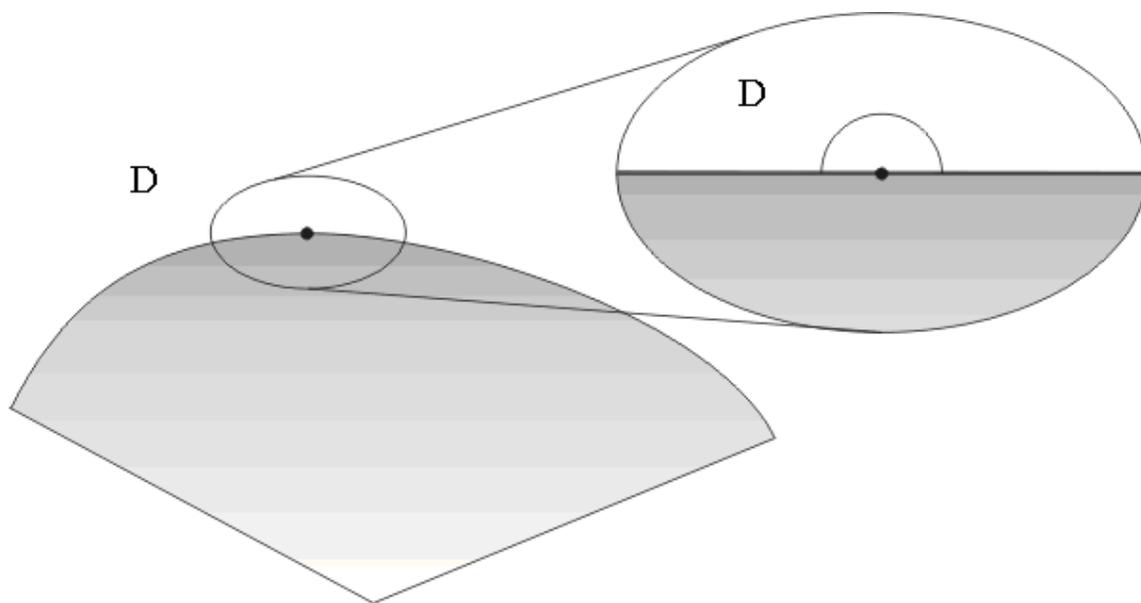


Ilustración 4: Esfera de exclusión de la singularidad (Singularidad en la frontera de D , superficie Suave)

Cuando la superficie es “suave” (entiéndase por suave una superficie continua y derivable) podemos reducir ésta a un plano tangente siempre que nos acerquemos lo suficiente al punto de evaluación. Al ser nuestra esfera de radio infinitamente pequeño, podemos hacer esto para cualquier punto de la superficie “suave” por lo que el múltiplo de 4π que acompaña al valor de la singularidad se reduce a la mitad, coincidiendo con el área de una semicáscara esférica de radio unidad (2π).

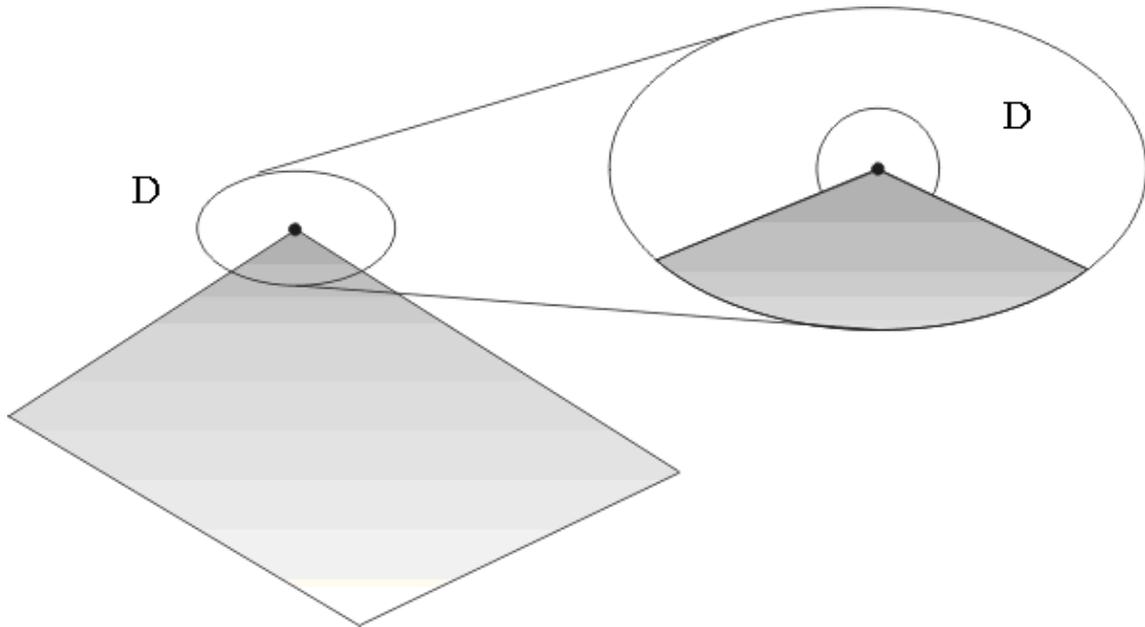


Ilustración 5: Esfera de exclusión de la singularidad (Singularidad en la frontera de D, superficie no derivable)

Sin embargo, si la superficie que estamos evaluando no es “suave”, sino que se trata de una superficie discretizada (como la que trataremos más adelante) y evaluamos precisamente en un vértice, ya no podremos reducir la superficie a un plano tangente y la esfera no se verá reducida a la mitad sino que habrá que calcular el área de ésta de la parte que queda en D.

Por lo tanto, para cada singularidad situada en un vértice, será necesario obtener la intersección entre la esfera de radio unidad y los distintos planos que converjan en la singularidad. Denotaremos la superficie de esta esfera como “ α ” y por lo tanto nuestra primera integral quedará:

$$\int_{\Sigma_\epsilon} \left[\Phi(\vec{x}_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla}_0 \Phi \right] \cdot \vec{n} d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi(\vec{x})}{\epsilon^2} - \frac{\vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{n}}{\epsilon} \right] \alpha \epsilon^2 \approx \alpha \Phi(\vec{x}) \quad (1.27)$$

No obstante, aún queda un punto especialmente problemático: el borde de salida.

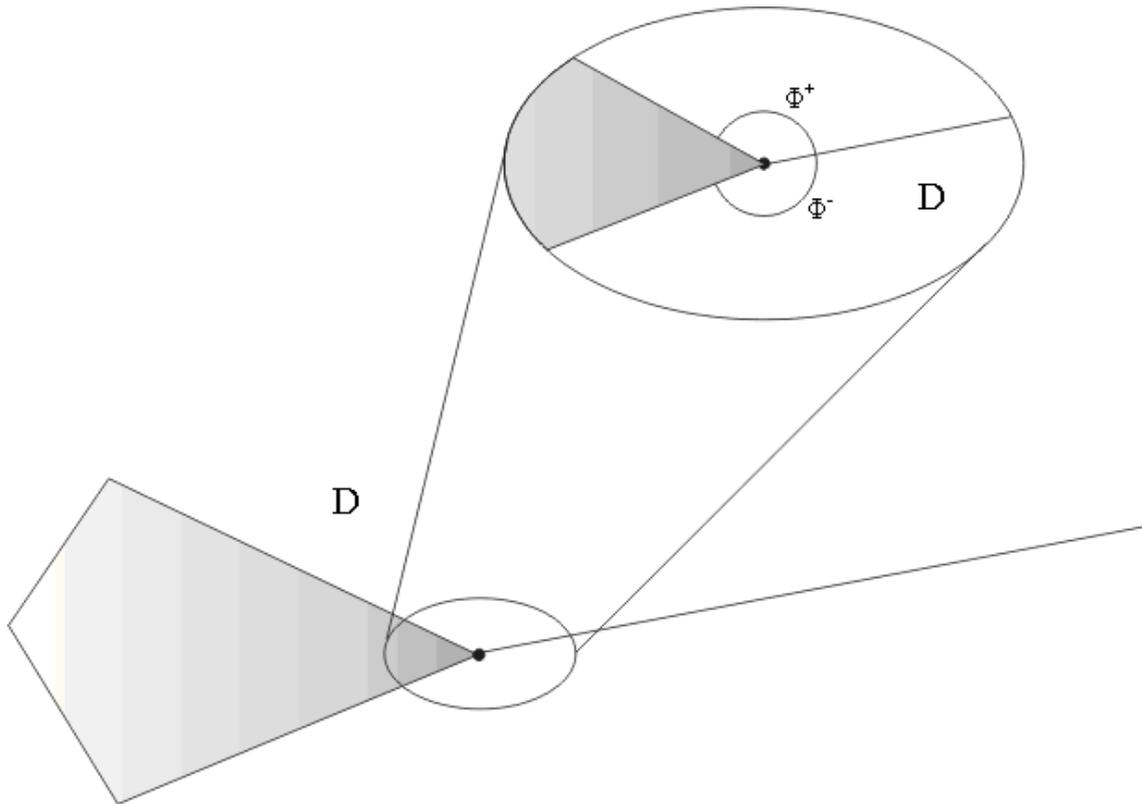


Ilustración 6: Esfera de exclusión de la singularidad (Singularidad en el borde de salida)

En el borde de salida, como veremos más adelante, tiene lugar un salto en el potencial (salvo casos concretos).

Este salto en el potencial impide la primera premisa que asumimos a la hora de calcular la integral: ya no existe una esfera lo suficientemente pequeña como para que $\Phi(x)$ sea constante en ella. Sin embargo, podemos encontrar una esfera tal que $\Phi(x)$ sea constante “a trozos” de manera que en la parte sobre la estela podamos definir $\Phi(x) = \Phi^+$ y bajo esta $\Phi(x) = \Phi^-$. Este hecho complicará un poco más la integral, puesto que será necesario distinguir qué parte de la cáscara esférica está sobre o bajo la estela. El resultado final será:

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \left[\Phi(\vec{x}_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla}_0 \Phi \right] \cdot \vec{n} d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\Phi^+(\vec{x})}{\varepsilon^2} - \frac{\vec{\nabla} \Phi^+ \cdot \vec{n}}{\varepsilon} \right) \alpha^+ \varepsilon^2 + \left(\frac{\Phi^-(\vec{x})}{\varepsilon^2} - \frac{\vec{\nabla} \Phi^- \cdot \vec{n}}{\varepsilon} \right) \alpha^- \varepsilon^2 \right] \approx \alpha^+ \Phi^+(\vec{x}) + \alpha^- \Phi^-(\vec{x}) \quad (1.28)$$

Pasemos ahora a resolver la **integral sobre la superficie Σ_∞** :

$$\int_{\Sigma_\infty} \left(\Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla}_0 \Phi \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma \quad (1.29)$$

En esta superficie se impondrán las condiciones de contorno del fluido en el infinito ($\vec{\nabla}\Phi = \vec{U}_\infty$) por lo que se define como una cáscara esférica de radio R mucho mayor que $|\mathbf{x}|$.

Sobre esta superficie tenemos que $\Phi \approx \vec{U}_\infty \cdot \vec{x}_0$, $\vec{n}(x_0) = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{R}$ y

$\vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) = 1/r^2$ de manera que:

$$\int_{\Sigma_\infty} \left(\Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla}_0 \Phi \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma = \int_{\Sigma_\infty} \left(\frac{\vec{U}_\infty \cdot \vec{x}_0}{R^2} - \vec{U}_\infty \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{R^2} \right) d\sigma = \int_{\Sigma_\infty} \left(2 \frac{\vec{U}_\infty \cdot \vec{x}_0}{R^2} - \vec{U}_\infty \cdot \frac{\vec{x}}{R^2} \right) d\sigma \quad (1.30)$$

Como en coordenadas esféricas

$\vec{U}_\infty \cdot \vec{x}_0 = U_\infty \cos \theta_0 + W_\infty \sin \theta_0 \cos \phi_0 + V_\infty \sin \theta_0 \sin \phi_0$ el resultado de la integral queda:

$$\int_{\Sigma_\infty} \left(2 \frac{\vec{U}_\infty \cdot \vec{x}_0}{R^2} - \vec{U}_\infty \cdot \frac{\vec{x}}{R^2} \right) d\sigma = \int_{\Sigma_\infty} -\vec{U}_\infty \cdot \frac{\vec{x}}{R^2} d\sigma = -4\pi \vec{U}_\infty \cdot \vec{x} \quad (1.31)$$

Aún nos resta resolver la **integral sobre el “cuerpo” (superficie Σ) y la estela (superficie E).**

$$\int_{\Sigma+E} \left(\Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla}_0 \Phi \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma \quad (1.32)$$

Tanto en el cuerpo como en la estela, el término $\vec{\nabla}_0 \Phi \cdot \vec{n}(x_0)$ desaparece, ya que $\vec{\nabla}_0 \Phi \cdot \vec{n}(x_0) = 0$ al ser ambas superficies fluidas. De esta forma nos quedamos con la expresión:

$$\int_{\Sigma} \Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma + \int_E \Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma \quad (1.33)$$

Considerando además que la estela tiene un espesor infinitamente pequeño de manera que las normales “superiores” e “inferiores” sean iguales pero de sentido contrario y llamando a la distribución del potencial Φ^+ y Φ^- respectivamente llegamos a:

$$\int_{\Sigma} \Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma + \int_E (\Phi^+ - \Phi^-) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma \quad (1.34)$$

La circulación sobre un perfil se define como:

$$\Gamma_{perfil} = \oint_C \vec{v} d\vec{l} = \oint_C \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = \Phi^+ - \Phi^- \quad (1.35)$$

De forma que nuestras integrales quedarán de la siguiente forma:

$$\int_{\Sigma} \Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma + \int_E \Gamma(y) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma \quad (1.36)$$

Dedicaremos el siguiente apartado al análisis de estas integrales.

Reorganizando términos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma + \Sigma_e + \Sigma_{\infty} + E} \left(\Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla}_0 \Phi \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma = \\ & \alpha \Phi(\vec{x}) - 4\pi \vec{U}_{\infty} \cdot \vec{x} + \int_{\Sigma} \Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma + \int_E \Gamma(y) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ó

$$\alpha \Phi(\vec{x}) = 4\pi \vec{U}_{\infty} \cdot \vec{x} - \int_{\Sigma} \Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma - \int_E \Gamma(y) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma \quad (1.38)$$

A la vista de la ecuación anterior podemos hacer una nueva interpretación del problema. Las ecuaciones anteriores son equivalentes al cálculo del potencial generado en un punto por una distribución de dobletes sobre las superficies Σ y E bajo una corriente uniforme incidente.

Como se aprecia tenemos dos incógnitas: la distribución del potencial sobre la superficie ($\Phi(x)$) y la distribución de circulación a lo largo de la estela ($\Gamma(y)$). Por lo que debemos aportar más física al problema para poder resolverlo. El flujo típico alrededor de superficies sustentadoras se caracteriza por un desprendimiento suave de las líneas de corriente en el borde de salida del ala, evitando velocidades infinitas en este punto. Esta condición se denomina condición de Kutta. Se comentará más sobre esta condición al describir la resolución numérica de la ecuación de Green.