

Resolución Numérica de las ecuaciones.

Se tratará en éste capítulo de describir como resolver la ecuación de Green. Como hemos visto anteriormente, enfrentarnos a ella desde el punto de vista analítico es poco práctico, por lo que debemos partir de un enfoque numérico.

$$\alpha\Phi(\vec{x}) = 4\pi\vec{U}_\infty \cdot \vec{x} - \int_{\Sigma} \Phi(x_0)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{n}(x_0)d\sigma - \int_E \Gamma(y)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{n}(x_0)d\sigma \quad (2.1)$$

La idea básica será convertir esta ecuación integral en un sistema de ecuaciones lineales fácilmente resoluble. Para ello renunciamos a obtener una solución analítica del campo potencial $\Phi(x)$ para obtener en cambio una distribución de puntos donde conocemos ese valor. Sobre cada uno de esos puntos es aplicable la ecuación de Green por lo que tendremos un sistema de N ecuaciones. Además tendremos que aplicar una condición de Kutta numérica para cerrar el problema y obtener así una distribución de $\Gamma(y)$ realista.

Como se observa en la ecuación, es necesario realizar integrales de superficie sobre Σ y E y si los resultados que obtenemos para $\Phi(x)$ no van más allá de su valor en un punto no podemos llevar a cabo las integrales sin proponer algún tipo de modelo o interpolación de la distribución de $\Phi(x)$ sobre la superficie. Debido a la complejidad de las ecuaciones lo más sencillo es subdividir la integral en elementos, discretizando así la superficie.

$$\int_{\Sigma} \Phi(x_0)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{n}(x_0)d\sigma = \sum_{\text{elementos}} \int_{\text{elemento}_k} \Phi_k(x_0)\vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r_{ik}}\right) \cdot \vec{n}_k(x_0)d\sigma_k \quad (2.2)$$

(Donde i representa el nodo donde se encuentra la singularidad y k el elemento sobre el que integramos)

Estos elementos muestran una gran diversidad en cuanto a su geometría ya que pueden ser planos, curvos, rectangulares, triangulares, etc. Además

debemos modelar la distribución de $\Phi(x)$ sobre ellos con lo que tendremos distribuciones constantes, lineales, cuadráticas...

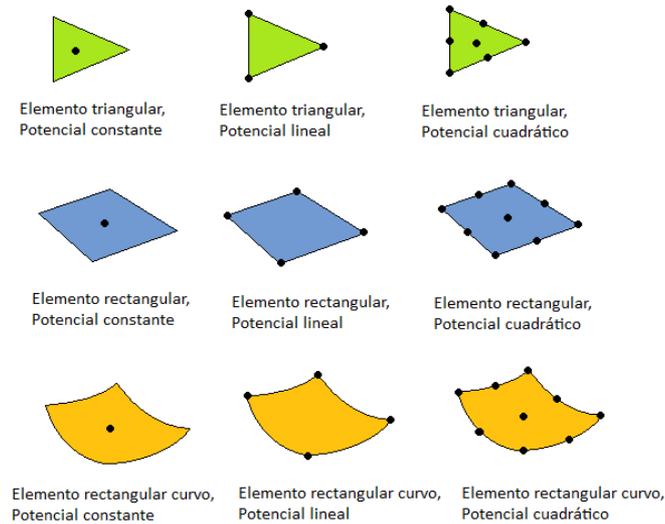


Ilustración 7: Elementos usuales

Para definir la geometría de los elementos debemos de aportar cierta información a la integral. Para elementos planos esta información se reduce a las coordenadas (x,y,z) de los vértices de nuestro elemento. Si queremos que el elemento sea curvo debemos introducir información sobre los distintos puntos a partir de los cuales realizaremos la interpolación. Ni que decir tiene que se buscarán siempre funciones polinómicas (por facilidad en la integración).

Por ejemplo, para el caso de un triángulo plano, la superficie de cada elemento puede definirse a través de una función polinómica F tal que:

$$F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) = 0 \tag{2.3}$$

Para definir la distribución del potencial plantearemos éste como una función polinómica dependiente del valor del potencial en cada uno de los puntos de evaluación. Así para un único punto de evaluación tenemos que:

$$\Phi(x) = \Phi_0 \quad (2.4)$$

En el caso de un triángulo con distribución de potencial lineal tendremos:

$$\Phi(x_0) = \Phi_0 + x_0 \Phi_x + y_0 \Phi_y \quad (2.5)$$

Que expresado en función del valor en los puntos de evaluación:

$$\Phi(x) = \Phi_1 + x \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{x_2} + y \left(\frac{(x_3 - x_2)\Phi_1}{x_2 y_3} - \frac{x_3 \Phi_2}{x_2 y_3} + \frac{\Phi_3}{y_3} \right) \quad (2.6)$$

A la hora de elegir un tipo de elemento entrarán en juego varios factores. El primero es la dificultad de integración. Intuitivamente se observa que es mucho más sencillo integrar sobre superficies planas que sobre superficies curvas. Después podemos situar el grado de fidelidad a la geometría original ya que hay elementos que no pueden representar una geometría cualquiera. Por ejemplo en el caso del elemento rectangular plano que imposibilitaría el mallado de alas con torsión, o sin ir más lejos, cualquier tipo de estela enrollable ya que el rectángulo se define por sus cuatro vértices y por regla general cuatro puntos no serán coplanarios en estas situaciones (no obstante estas dificultades podrían “maquillarse” mediante la obtención de paneles “medios” obtenidos por mínimos cuadrados entre los puntos de los vértices).

Otro factor a tener en cuenta será el grado de detalle o precisión que queramos, evidentemente una distribución de potencial cuadrático generará

menos error que una distribución constante aunque el costo computacional será mayor.

Hay una última consideración referente a la forma de obtener la velocidad. La velocidad deriva del potencial ($\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$) y para obtenerla de forma numérica hay diversas metodologías. Las más importantes son el método de diferencias finitas y la derivación directa de las ecuaciones.

La más fácil de ellas es el método de diferencias finitas. Este método se basa en el cálculo de las derivadas mediante la aproximación por incrementos de las diferentes variables. De esta forma necesitamos al menos el valor del potencial en varios puntos para llevar a cabo una derivación numérica y obtener la velocidad en uno de ellos.

Cuando usamos elementos de potencial constante es imposible obtener el valor de la velocidad en un punto sin tener la información de dos elementos colindantes. Sin embargo, el uso de elementos de potencial con distribución lineal o superior implica la posibilidad de identificar cada elemento con una distribución de velocidad sobre él. En el caso de elementos lineales podemos obtener una velocidad que consideraremos constante sobre todo el elemento.

El segundo método para la obtención de las velocidades es el más costoso computacionalmente. Se basa en la derivación directa de las ecuaciones del potencial. Una vez obtenemos el potencial en cada triángulo o nodo se multiplican estos valores por el de la derivada de las integrales (derivadas con respecto a “x”, “y” y “z” para obtener el vector velocidad) y se suman al efecto de la velocidad en el infinito. Este método sería en principio muy robusto, pues nos permite obtener la velocidad en cada punto del dominio D. De esta manera, para el caso de elementos con distribución de potencial

constante se podría identificar un vector velocidad con cada elemento y se salvarían las dificultades del método de diferencias finitas al necesitar más nodos que puntos de evaluación.

Desgraciadamente para el caso de elementos triangulares con potencial constate el resultado no es bueno. Aún partiendo de una distribución de potencial acertada, se generan errores en el análisis de la velocidad por motivos intrínsecos al tipo de elemento. Supongamos un mallado de elementos triangulares con distribución de potencial constante que hemos evaluado en el baricentro de los triángulos. La derivación directa de las ecuaciones del potencial es, realmente, una nueva integración sobre el cuerpo, lo que aumentará significativamente el error.

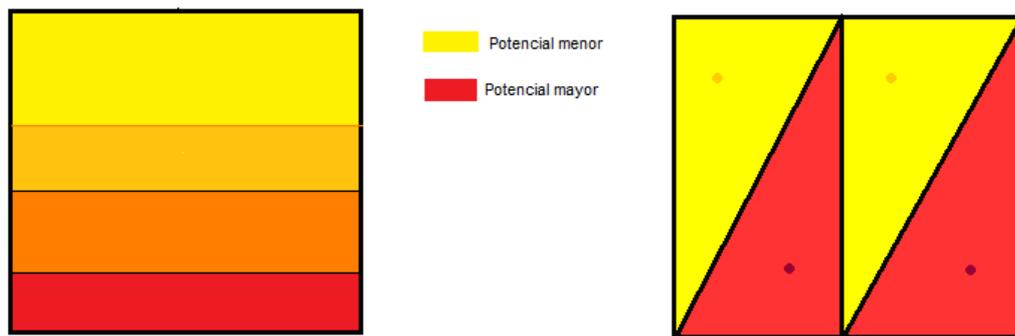


Ilustración 8: Efecto "cuña": distribución de potencial "realista"; distribución de potencial con triángulos de potencial constante

En efecto, en un mallado de elementos triangulares muchos de estos elementos actuarán como "cuña" puesto que imponen en todos sus extremos un valor de potencial igual al de su baricentro lo cual afecta negativamente a los triángulos aledaños. En la imagen superior se observa como el triángulo izquierdo, que debería estar influido mayoritariamente por elementos con su mismo valor de potencial se ve en cambio muy afectado por los triángulos de potencial menor que le rodean.

El resultado final se observa en ejemplos como éste donde las velocidades experimentan saltos bruscos en puntos donde el efecto “cuña” es más acusado (obsérvese el punto de remanso en la esfera y la sorprendente distribución de presión justo al lado, con un salto de rojo oscuro a rojo claro para después volver a un rojo oscuro):

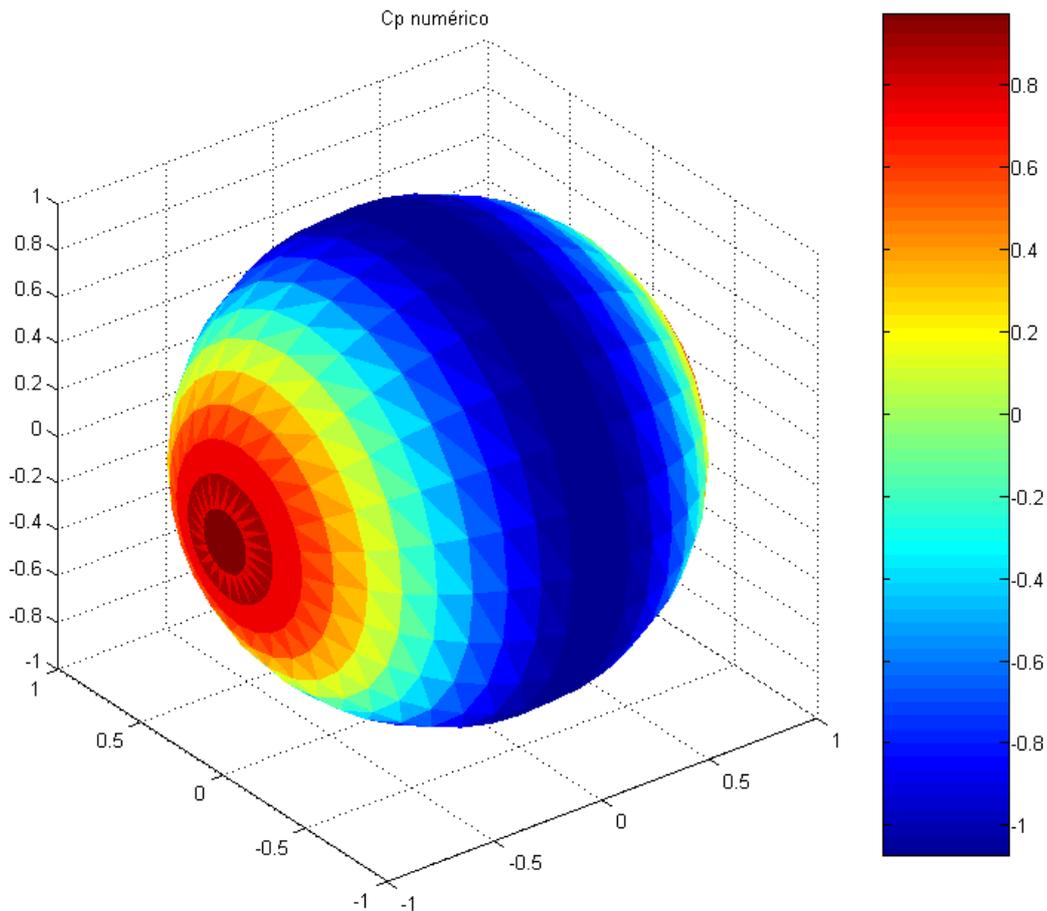


Ilustración 9: Distribución de velocidades sobre un mallado esférico de validación (Método directo)

Principalmente por motivos como éste, el método de derivación de las ecuaciones del potencial pierde toda su robustez y resulta totalmente desaconsejado al menos para el caso de elementos triangulares de potencial constante. En cambio, este método es muy útil para obtener velocidades en cualquier punto del dominio D ó en la estela, donde el efecto cuña se desvanece al evaluar lejos de los triángulos o al no haber variaciones de

potencial en ciertas direcciones. Este método se explicará en detalle al comentar las metodologías de posicionamiento de la estela.

Por todo lo visto anteriormente, si tenemos en cuenta la adaptabilidad y versatilidad del elemento, así como esta última consideración y la facilidad para la integración se deduce que los elementos triangulares planos con distribución de potencial lineal son los más indicados para la realización de un método de paneles “rápido” y que aporte soluciones con buen grado de exactitud a cualquier geometría.

Usando este tipo de elemento podemos desarrollar las integrales de la siguiente forma:

$$\int_{\text{elemento}_k} \Phi_k(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r_{ik}} \right) \cdot \vec{n}_k(x_0) d\sigma_k = \int_{\text{elemento}_k} \Phi_k(x_0, y_0, z_0, \Phi_0, \Phi_x, \Phi_y) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r_{ik}} \right) \cdot \vec{n}_k(x_0) d\sigma_k \quad (2.7)$$

La elección de un elemento plano permite facilitar las integrales mediante una transformación de coordenadas que identifique a la normal del elemento con la dirección perpendicular al plano x-y. Por comodidad se ha elegido el siguiente sistema de coordenadas local:

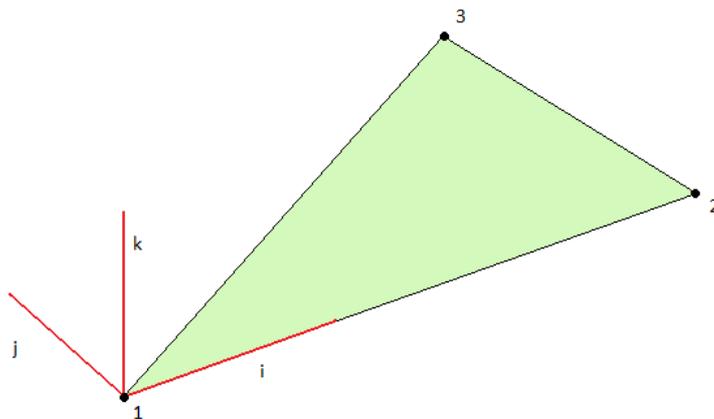


Ilustración 10: Ejes locales

Como se observa en la imagen se numeran los nodos pertenecientes a el elemento k en el sentido dextrógiro. El origen de nuestro centro de coordenadas se coloca en el nodo 1 y el eje i será paralelo al segmento 1-2. Como hemos dicho el eje k es paralelo a nuestra normal y el eje j vendrá dado por ser perpendicular a i y k.

Las transformaciones anteriores permiten presentar la integral de la siguiente forma:

$$\int_{\text{elemento}_k} (\Phi_0 + x'_0 \Phi_x + y'_0 \Phi_y) \bar{\nabla}'_0 \left(\frac{1}{r'_{ik}} \right) \cdot \bar{n}'_k(x_0) d\sigma'_k = \Phi_0 \int_{\text{elemento}_k} \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{r'_{ik}} \right) \cdot d\sigma'_k + \Phi_x \int_{\text{elemento}_k} x_0 \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{r'_{ik}} \right) \cdot d\sigma'_k + \Phi_y \int_{\text{elemento}_k} y_0 \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{r'_{ik}} \right) \cdot d\sigma'_k \quad (2.8)$$

Donde, a su vez:

$$(\Phi_0, \Phi_x, \Phi_y) = F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \quad (2.9)$$

Es conveniente recordar que cada elemento tiene sus propios nodos 1, 2 y 3 y que en el cómputo global de nodos tendrán una numeración distinta, por lo que es necesario tener un “índice” de qué nodos pertenecen a cada triángulo (véase el capítulo referente al mallado).

Tras aplicar esta última expresión y suponiendo conocido el valor de las integrales (más adelante veremos como llevarlas a cabo) obtendremos lo siguiente:

$$\int_{\text{elemento}_k} (\Phi_0 + x'_0 \Phi_x + y'_0 \Phi_y) \bar{\nabla}'_0 \left(\frac{1}{r'_{ik}} \right) \cdot \bar{n}'_k(x_0) d\sigma'_k = C_{ik1} \Phi_{k1} + C_{ik2} \Phi_{k2} + C_{ik3} \Phi_{k3} \quad (2.10)$$

Hemos convertido la integral sobre el elemento en la suma de tres coeficientes por su correspondiente valor del potencial. Cada coeficiente $C_{ik(n)}$ se interpreta

como la influencia del nodo 1, 2 ó 3 del elemento k (es decir del nodo n en el cómputo global) sobre el punto i (si aceptamos la interpretación de que cada integral representa el efecto de una distribución de dobletes sobre el potencial de un punto en el espacio).

Cabe resaltar que el nodo Φ_{k1} puede ser el mismo que por ejemplo, el nodo Φ_{j3} ya que un mismo nodo interviene en distintos elementos, por lo que al generar la integral sobre todo el cuerpo sumando el efecto de todos los triángulos tendremos que el coeficiente que multiplica a Φ_j será la suma del efecto de Φ_j en todos los triángulos a los que pertenece. De esta manera pasamos a la siguiente interpretación de la integral:

$$\int_{\Sigma} \Phi(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma = \sum_{\text{elementos}} \int_{\text{elemento}_k} \Phi_k(x_0) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r_{ik}} \right) \cdot \vec{n}_k(x_0) d\sigma_k = \sum_{\text{Nodos}} C_{ij} \Phi_j \quad (2.11)$$

Sobre la estela el procedimiento es algo más complicado ya que desconocemos “a priori” la posición de la estela. Comentaremos más sobre el posicionamiento de la estela más adelante, de momento supongámosla conocida.

Por lo demás hay muchas similitudes con el caso del cuerpo y podemos llegar a la siguiente expresión:

$$\int_E \Gamma(y) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n}(x_0) d\sigma = \sum_{\text{elementos_estela}} \int_{\text{elemento_k_estela}} \Gamma_k(y) \vec{\nabla}_0 \left(\frac{1}{r_{ik}} \right) \cdot \vec{n}_k(x_0) d\sigma_k = \sum_{\text{Nodos_estela}} C_{ij} \Gamma_j \quad (2.12)$$

Pero como vimos antes la circulación Γ solo depende de “y” y es constante a lo largo de cada línea de corriente que sale de la estela por lo que podemos hacer una segunda agrupación de elementos afectados por una misma Γ_j .

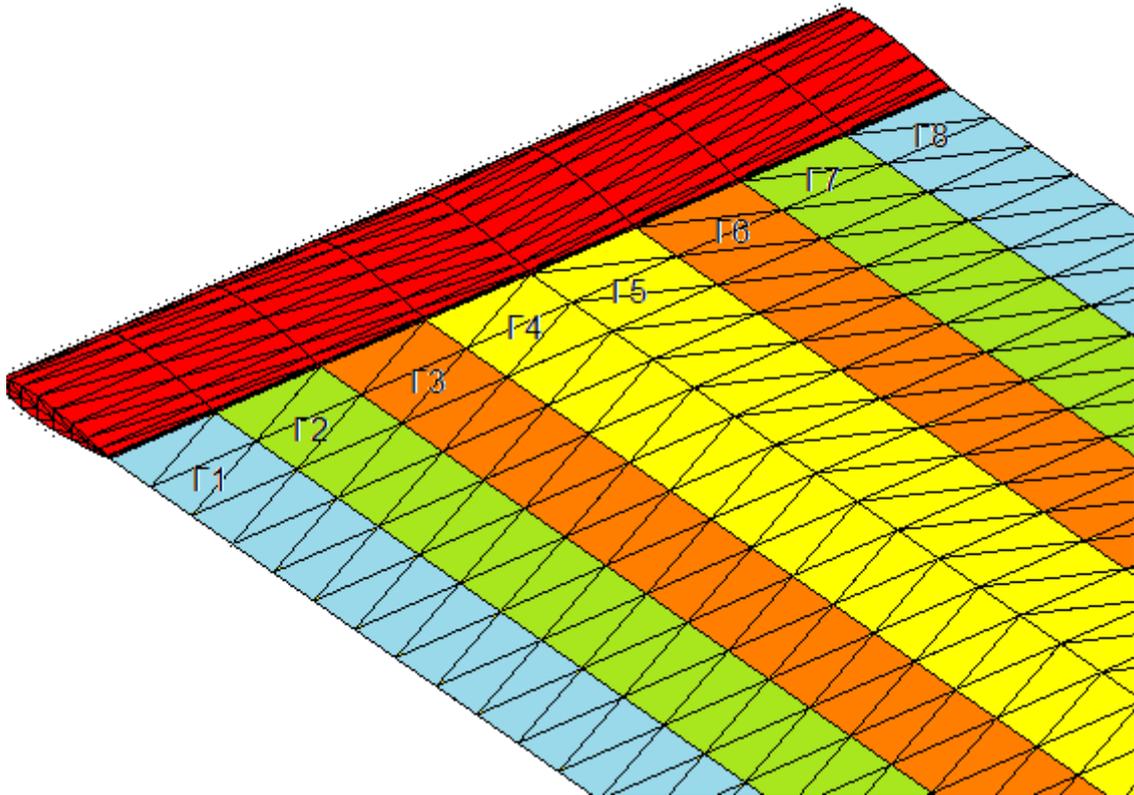


Ilustración 11: Mallado de la estela

Si consideramos la estela plana no habría problema en usar un sólo elemento rectangular por cada superficie de Γ constante. Pero si deseamos que nuestra estela se enrolle o se adapte automáticamente la única solución es integrar sobre cada uno de los elementos triangulares para después agruparlos en función de la circulación a la que se asocien. No obstante, estos elementos triangulares pueden modelarse con potencial constante o una distribución lineal dependiente solo de dos nodos (debido a la independencia de la circulación en la dirección de la corriente).

Tras esta discretización se tiene que para cada punto “i” donde evaluamos la ecuación:

$$\alpha_i \Phi_i = 4\pi \vec{U}_\infty \cdot \vec{x}_i - \sum_{\text{nodos_cuerpo}} C_{ik} \Phi_k - \sum_{\text{nodos_estela}} C_{ij} \Gamma_j \quad (2.13)$$

Tenemos N nodos en el cuerpo y M “líneas de corriente” en la estela. Al evaluar la ecuación en los N nodos del cuerpo aún nos queda imponer M ecuaciones más para resolver el problema. Como hemos dicho anteriormente aquí entra en juego la condición de Kutta.