Coeficientes de Influencia

Centrémonos ahora en la manera de obtener los coeficientes de influencia. En nuestro caso esto se reduce al cálculo de las integrales

$$\int_{elemento_k} \frac{\partial}{\partial z'}\left(1/r'_{ik}\right)\cdot d\sigma'_k \,, \quad \int_{elemento_k} x_0 \frac{\partial}{\partial z'}\left(1/r'_{ik}\right)\cdot d\sigma'_k \quad \text{y} \quad \int_{elemento_k} y_0 \frac{\partial}{\partial z'}\left(1/r'_{ik}\right)\cdot d\sigma'_k \quad \text{sobre}$$

un triángulo genérico definido por las coordenadas x,y,z de cada vértice. Se presentarán dos métodos de resolución: el de Hess y Smith y el de Newman. Ambos métodos conducen a soluciones analíticas de las integrales y realmente son equivalentes, salvo por la mayor generalidad del método de Newman y su mayor facilidad a la hora de programarlo y de extenderlo a integrales con términos lineales, bilineales y de cualquier grado. Comentaremos ambos métodos para el desarrollo de la primera integral, sin términos lineales y posteriormente ampliaremos los resultados de Newman para las integrales con términos lineales.

El método de paneles implementado en el presente proyecto usa principalmente el método de Newman, aunque se utilizó el método de Hess para cálculos sobre la estela donde el potencial se distribuye de forma continua sobre los elementos.

Método de Hess y Smith[2]

La primera integral puede ponerse de la siguiente forma:

$$\int_{elemento_k} \frac{\partial}{\partial z}\left(1/r\right)\cdot d\sigma_k = \int_{elemento_k} \frac{-z}{\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+z^2\right]^{3/2}} dx_0 dy_0 \qquad (4.1)$$

[2] A continuación se traduce [7] para facilitar la comprensión del lector. Dicho artículo se encuentra aquí de forma parcial, centrándonos únicamente en la obtención de los coeficientes de influencia.

En esta ecuación (x,y,z) son las coordenadas del punto donde hemos colocado la singularidad (punto P). La distancia entre este punto y un punto genérico del plano (x_0,y_0,0) viene dada por r.

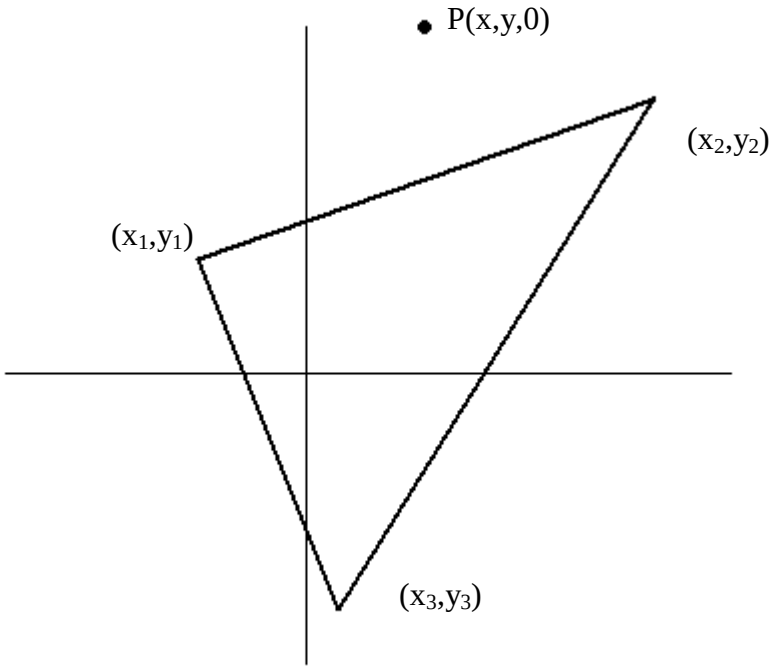


Ilustración 13: Elemento triangular, numeración de los vértices

Obsérvese que el orden de los vértices es favorable al sentido de las agujas del reloj a diferencia de nuestro sistema de organización de los elementos, es necesario reordenarlos antes de proceder a la integración.

Vamos a realizar la integral según el procedimiento seguido en [7]. En este caso lo que se obtiene es el coeficiente de influencia correspondiente a una distribución uniforme (y de intensidad unidad) de manantiales sobre el panel. El coeficiente de influencia correspondiente a dobletes puede obtenerse por derivación.

$$\int_{elemento} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{elemento} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} dx_0 dy_0 \qquad (4.2)$$

Para la integración se adopta un sistema de coordenadas cilíndrico, cuyo eje z es paralelo al sistema de referencia local del panel. El ángulo θ es creciente en el sentido de las agujas del reloj y medido desde una referencia conveniente, por ejemplo desde el eje x negativo y el origen se encuentra en el punto P.

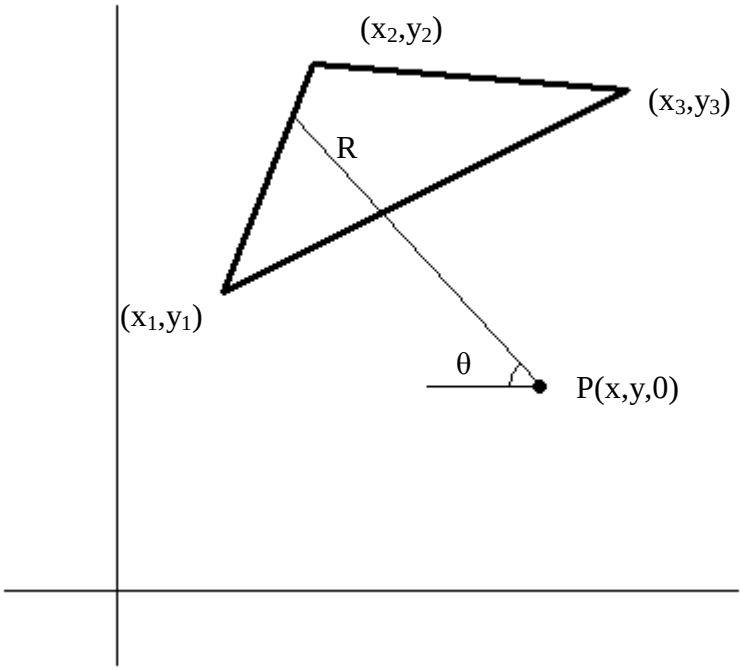


Ilustración 14: Definición del sistema de coordenadas cilíndrico

La distancia de un punto cualquiera del panel al punto se puede obtener como:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \tag{4.3}$$

Donde R es la distancia media en el plano del panel desde un punto cualquiera del panel hasta el punto P. Tras estos cambios la ecuación se presentará del siguiente modo:

$$\oint\int_0^R \frac{RdRd\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} \tag{4.4}$$

Donde la integración se hace desde R=0 hasta un punto del perímetro y la integración en θ se realiza recorriendo el perímetro en el sentido de las agujas del reloj.

La contribución a la integral de cada lado del polígono representará el valor de la integral para un triángulo definido por los puntos extremos del lado y el punto P. A medida que el perímetro es recorrido en sentido de las agujas del reloj, el ángulo dθ es positivo si el punto P está a la derecha del lado del polígono y negativo si está a la izquierda. Cuando los potenciales de los triángulos correspondientes a los cuatro lados se sumen para obtener la integral, las contribuciones de las partes de los triángulos fuera del polígono sumarán cero y por tanto el resultado será la integral total.

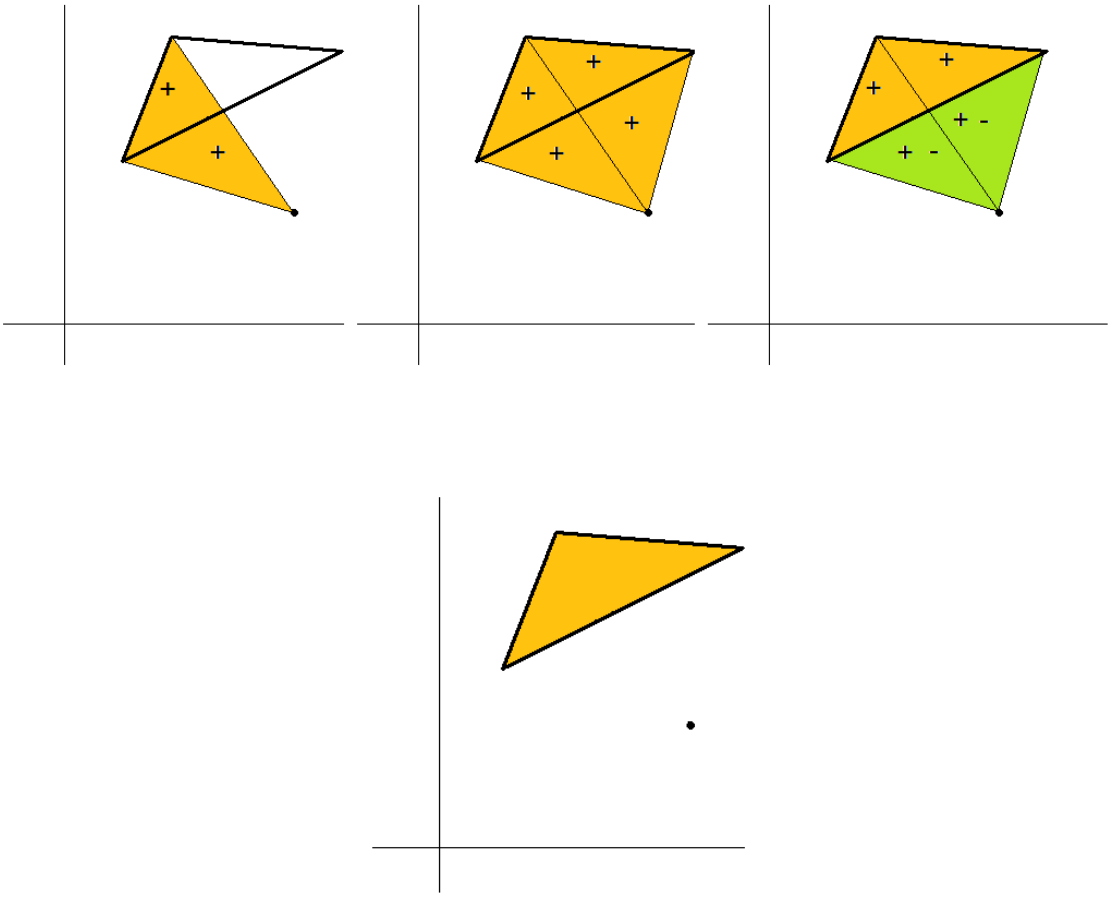


Ilustración 15: Influencia de cada lado en la integración

Ahora de la definición de r tenemos que:

$$dr = \frac{RdR}{\sqrt{R^2 + z^2}} \tag{4.5}$$

Y nuestra integral se convierte en:

$$\oint \left[\int_{|z|}^{r} dr \right] d\theta = \oint \left(r - |z| \right) d\theta \tag{4.6}$$

Como z no depende de la posición a lo largo del perímetro podemos escribir:

$$\oint r d\theta - |z| k \tag{4.7}$$

Donde k valdrá cero si se encuentra fuera del triángulo, 2π si está fuera o π si se encuentra justo en el lado.

El primer término de la última expresión se evalúa ahora calculando la contribución de un lado a la integral y sumando para los tres lados del triángulo. (Obviamente estos resultados pueden ser generalizados a polígonos que tengan cualquier número de lados). Para expresar la contribución a la integral del lado entre los puntos $(x_1,y_1,0)$ y $(x_2,y_2,0)$ introducimos las siguientes definiciones geométricas.

La longitud del lado es:

$$d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4.8}$$

El coseno y el seno del ángulo que forma el lado con el eje se calculan de:

$$\begin{aligned} \cos_{12} &= \frac{x_2 - x_1}{d_{12}} \\ \sin_{12} &= \frac{y_2 - y_1}{d_{12}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Trazamos ahora una perpendicular al lado que pasará por el punto (x,y,0) (proyección de P en el plano), con lo que definimos la coordenada s_{12} como la distancia medida desde el punto de intersección de la perpendicular con la prolongación del lado. El sentido positivo de s_{12} va desde $(x_1,y_1,0)$ a $(x_2,y_2,0)$. Por lo que para un punto (x,y) del lado del triángulo tenemos que la coordenada s_{12} se define como:

$$s_{12} = (x_1 - x)\cos_{12} + (y_1 - y)\sin_{12} \tag{4.10}$$

En particular, la coordenada s_{12} asociada a los puntos extremos del lado $(x_1,y_1,0)$ y $(x_2,y_2,0)$ es respectivamente:

$$\begin{aligned} s_{12}^{(1)} &= (x_1 - x)\cos_{12} + (y_1 - y)\sin_{12} \\ s_{12}^{(2)} &= (x_2 - x)\cos_{12} + (y_2 - y)\sin_{12} \end{aligned} \tag{4.11}$$

La distancia (medida en el sentido perpendicular al lado) entre el punto (x,y,0) y la prolongación al lado será:

$$R_{12} = (x - x_1)\sin_{12} - (y - y_1)\cos_{12} \tag{4.12}$$

Que será positiva si el punto (x,y,0) está a la derecha del lado con respecto a la dirección formada por $(x_1,y_1,0)$ a $(x_2,y_2,0)$ y negativa si está a la izquierda. Las distancias desde el punto P hasta los puntos extremos del lado son, respectivamente:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + z^2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Finalmente, la integral puede expresarse en términos de las siguientes cantidades

$$Q_{12} = \ln\left(\frac{r_2 + s_{12}^{(2)}}{r_1 + s_{12}^{(1)}}\right) = \ln\left(\frac{r_1 + r_2 + d_{12}}{r_1 + r_2 - d_{12}}\right) \tag{4.14}$$

$$J_{12} = \operatorname{sgn}(R_{12})\left[\tan^{-1}\left(\left|\frac{z}{R_{12}}\right|\frac{s_{12}^{(2)}}{r_2}\right) - \tan^{-1}\left(\left|\frac{z}{R_{12}}\right|\frac{s_{12}^{(1)}}{r_1}\right)\right] = \tan^{-1}\left(\frac{|z|R_{12}\left(r_1 s_{12}^{(2)} - r_2 s_{12}^{(1)}\right)}{r_2 r_1 R_{12}^2 + z^2 s_{12}^{(2)} s_{12}^{(1)}}\right) \quad (4.15)$$

Es preferible utilizar la segunda forma de la ecuación superior, ya que la primera no está definida a lo largo de la extensión del lado. En la primera forma de (4.15), las arcotangentes están definidas en la rama principal ([-π/2, π/2]), y en la segunda forma en el rango ([-π, π]) .

La contribución del lado entre los puntos $(x_1,y_1,0)$ y $(x_2,y_2,0)$ a la integral de línea de r es :

$$I_{12} = R_{12}Q_{12} + |z|J_{12} \quad (4.16)$$

Haciendo lo mismo para todos los lados del triángulo tenemos finalmente que la integral vale:

$$I_{12} + I_{23} + I_{31} - |z|\Delta\theta \quad (4.17)$$

Para el caso del doblete basta con derivar el anterior resultado con respecto a z y el resultado será:

$$\int_{elemento} \vec{\nabla}_0(1/r)\cdot\vec{n}(\vec{x}_0)d\sigma = -\operatorname{sgn}(z)[k - J_{12} - J_{23} - J_{31}] \quad (4.18)$$

Donde k valdrá 0 si nos encontramos fuera del triángulo, π si nos encontramos justo en el lado y 2π si nos encontramos dentro de él.

Coeficientes de influencia según Newman[3]

J. N. Newman obtuvo una forma más general de obtener estos coeficientes de influencia (véase [8]). Se basó en la utilización del teorema de Gauss-Bonnet

[3] A continuación se traduce [8] para facilitar la comprensión del lector. Dicho artículo se encuentra aquí de forma parcial, centrándonos únicamente en la obtención de los coeficientes de influencia.

de geometría diferencial, de tal manera que se evita la integración directa sobre la superficie del panel.

Además, con el desarrollo propuesto por Newman queda claro que la integración también es válida para cualquier panel curvilíneo cuyos contornos estén compuestos por segmentos rectos.

Como en el caso de Hess partiremos de un panel cuyos vértices se ordenan en el sentido de las agujas del reloj (a diferencia de nuestra numeración, que habrá que alterar antes de la integración). El punto de evaluación P será un punto cualquiera del espacio (x,y,z).

Recordemos la integral de partida, el potencial generado por una distribución de dobletes constante es el siguiente:

$$\iint_S \vec{\nabla}_0(1/r)\cdot\vec{n}d\sigma = \iint_S \frac{\partial}{\partial z}(1/r)d\sigma = -z\iint_S \left[(x-x_0.)^2+(y-y_0.)^2+z^2\right]^{-3/2} dx_0 dy_0 \qquad (4.19)$$

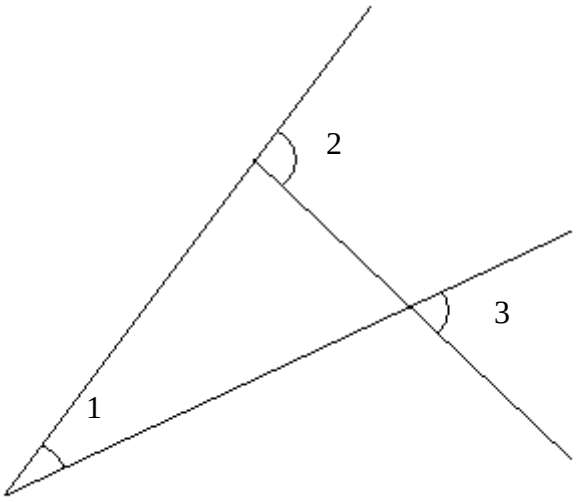
Por comodidad prescindiremos del signo negativo para llevar a cabo la integral.

La última forma de la ecuación puede asociarse con el flujo a través del panel debido a una fuente en punto P. Se sigue de esto que el valor de la integral será igual al ángulo sólido del panel, visto desde el punto P, y estableciendo que el signo de z será el mismo que el del ángulo sólido.

$$\Omega = \int_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}d\sigma}{r^3} \qquad (4.20)$$

El ángulo sólido del panel puede ponerse en función de propiedades independientes para cada vértice. Para este propósito se definen tres sectores con respecto a los correspondientes vértices, como se muestra en la figura, de

forma que la diferencia entre los dominios de el primer y segundo sector, más el tercero, es el dominio del triángulo. Si el valor de la integral de superficie sobre cada sector se define como I_n, se sigue que:



$$Total = I_1 - I_2 + I_3$$

De acuerdo a la definición tenemos que cada una de las integrales es igual al ángulo sólido del correspondiente sector referido al punto P (donde estamos midiendo el potencial). Del teorema de Gauss-Bonnet de geometría diferencial se sigue que el ángulo sólido del panel desde el punto P es igual a la suma:

$$Total = I_1 - I_2 + I_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi \qquad (4.21)$$

Donde β es el ángulo interior de cada vértice en el plano tangente a la esfera. Para un panel rectangular, el último término de la ecuación será -2π, y para un polígono con N lados será $-(N-2)\ \pi$. Obtengamos el término β_n correspondiente a un vértice cualquiera. Para simplificar las ecuaciones que siguen se asumirá que el vértice está en el origen del sistema de referencia generalizando el resultado a un vértice cualquiera en $(x_n,y_n,0)$.

El objetivo principal es determinar el ángulo entre dos segmentos consecutivos (estando definido cada segmento por dos vértices consecutivos) del polígono (nótese que los segmentos están incluidos en el plano z=0 al estarlo los vértices). Se define el ángulo θ_n como el ángulo polar del segmento que une el vértice "n" con el vértice "n+1".

Para determinar el ángulo β_n visto desde P lo que hacemos es girar el sistema de referencia hasta hacerlo coincidir con un sistema de referencia (u,v,w). Para ello se gira un ángulo α (el ángulo α viene definido por la proyección de P en el plano y el eje x local) alrededor del eje z', y después un ángulo φ alrededor de eje y' (ángulo entre P y el eje z'), con lo que la transformación sería:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\alpha & \cos\phi\sin\alpha & -\sin\phi \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\phi\cos\alpha & \sin\phi\sin\alpha & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Ó

$$\begin{aligned} x + iz &= R\sin\phi e^{i\alpha} \\ y &= R\cos\phi \end{aligned} \tag{4.23}$$

De tal forma que el eje w coincide con el radio vector que va desde el origen hasta el punto P.

Si aplicamos la transformación a la ecuación del segmento $y = x\tan(\theta_n)$ tenemos la relación:

$$\frac{u}{v} = \frac{\cos\phi\cos(\theta_n - \alpha)}{\sin(\theta_n - \alpha)} \tag{4.24}$$

Lo que representa la proyección de un segmento con ángulo polar θ_n en el plano (u,v). Ahora podemos expresar el ángulo β_n (visto desde P) de la siguiente forma:

$$\beta_n = \tan^{-1}\left[\frac{\tan(\theta_n - \alpha)}{\cos\phi}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{\tan(\theta_{n+1} - \alpha)}{\cos\phi}\right] \tag{4.25}$$

Podemos obtener una forma alternativa definiendo un par de rotaciones diferente, rotando primero un ángulo ψ alrededor del eje y', y después un ángulo δ alrededor del eje z' hasta llegar al sistema u,v,w donde el eje v coincide con el radio vector que va desde el origen hasta el punto P. Ahora la transformación nos proporciona la siguiente ecuación para el segmento:

$$\frac{u}{w} = \frac{\cos\theta\cos\psi\cos\delta - \sin\theta\sin\delta}{-\cos\theta\sin\psi} \tag{4.26}$$

Con lo que:

$$\beta_n = \tan^{-1}\left[\frac{\tan\theta_n \sin\delta - \cos\psi\cos\delta}{\sin\psi}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{\tan\theta_{n+1}\sin\delta - \cos\psi\cos\delta}{\sin\psi}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\tan\theta_n\left(x^2+z^2\right) - xy}{Rz}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{\tan\theta_{n+1}\left(x^2+z^2\right) - xy}{Rz}\right] \tag{4.27}$$

Donde se ha tenido en cuenta que la transformación puede expresarse como:

$$\begin{aligned} x + iz &= R\sin\delta e^{i\psi} \\ y &= R\cos\delta \end{aligned} \tag{4.28}$$

Debido a que la arcotangente no es única, se debe determinar la rama correcta a usar. El ángulo sólido es una cantidad comprendida entre -2π y 2π, con el mismo signo que z.

Para un polígono con tres vértices cóncavos tenemos que $0 < \beta_n \leq \pi$. Para z> 0 los denominadores de la ecuación son positivos, y con la rama principal de la arcotangente ([-π/2, π/2]), β_n tendrá el mismo signo que $\tan\theta_n - \tan\theta_{n+1}$ independientemente de las coordenadas. Para un triangulo "normal", dos de estas diferencias son positivas y la otra negativa. Entonces para una de las tres integrales hay que añadir π a la ecuación para obtener correctamente el ángulo sólido.

Al cancelarse este "π" con el último valor del teorema de Gauss-Bonnet podemos reemplazar la ecuación directamente por la suma de los cuatro términos de β_n.

Desde el punto de vista computacional puede ser interesante simplificar la expresión dada por la ecuación. Para ello notemos que:

$$\begin{aligned}\tan\theta_n &= \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = \frac{\delta y_n}{\delta x_n} \\ \tan\theta_{n+1} &= \frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{x_{n+2}-x_{n+1}} = \frac{\delta y_{n+1}}{\delta x_{n+1}}\end{aligned} \tag{4.29}$$

Sustituyendo y agrupando tenemos que:

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{\nabla}_0(1/r)\cdot\vec{n}\,d\sigma = -\sum_{n=1}^{3}\Bigg[&\tan^{-1}\frac{\delta y_n\left[(x-x_n)^2+z^2\right]-\delta x_n(x-x_n)(y-y_n)}{R_n z\,\delta x_n} \\ &-\tan^{-1}\frac{\delta y_n\left[(x-x_{n+1})^2+z^2\right]-\delta x_n(x-x_{n+1})(y-y_{n+1})}{R_{n+1} z\,\delta x_n}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.30}$$

Los pares de arcotangentes en la ecuación pueden agruparse utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\tan^{-1}\left(\frac{s_1}{c_1}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{s_2}{c_2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{s_3}{c_3}\right) \tag{4.31}$$

Donde s_n y c_n son los correspondientes factores en el numerador y denominador de cada término de la ecuación para n=1,2 y s_3 y c_3 vienen dados por:

$$s_3 = s_1 c_2 - s_2 c_1$$
$$c_3 = c_1 c_2 + s_1 s_2 \qquad (4.32)$$

Si utilizamos esta última expresión, la última arcotangente de la ecuación debe ser evaluada en la rama ([-π, π]) sin considerar de forma separada los argumentos de la arcotangente del miembro de la izquierda.

El primer miembro de (4.31) está mal condicionado numéricamente cuando el punto P está situado directamente encima o debajo de un vértice, por lo que es preferible la utilización del segundo miembro de (4.31).

En el análisis anterior se ha supuesto un panel plano situado en el plano z=0. Sin embargo, los resultados de las ecuaciones son válidos para el caso más general de un panel curvo cuyo contorno son segmentos rectos.

Integrales de coeficientes lineales

Para extender el análisis precedente e incluir una distribución lineal de dobletes en cada panel, consideraremos dos integrales definidas como:

$$-z\iint_S \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \frac{dx_0 dy_0}{r^3} \qquad (4.33)$$

Lo que es equivalente a las integrales $\int_{elemento_k} x_0 \frac{\partial}{\partial z'}\left(1/r'_{ik}\right) \cdot d\sigma'_k$ y $\int_{elemento_k} y_0 \frac{\partial}{\partial z'}\left(1/r'_{ik}\right) \cdot d\sigma'_k$ colocadas en forma matricial.

La primera integral puede expresarse de la siguiente manera mediante el teorema de Green (de nuevo obviamos el signo negativo):

$$z\iint_S x_0 \frac{dx_0 dy_0}{r^3} = z\iint_S (x_0 - x)\frac{dx_0 dy_0}{r^3} + zxI_0 = -z\iint_S \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r}\right)dx_0 dy_0 + xI_0 = -z\oint_C \left(\frac{1}{r}\right)dy_0 + zxI_0 \tag{4.34}$$

Donde I_0 representa el valor de la integral sin términos lineales que se calculo en anteriores apartados. Operando de la misma forma para la integral dependiente de y_0:

$$z\iint_S y_0 \frac{dx_0 dy_0}{r^3} = z\oint_C \left(\frac{1}{r}\right)dx_0 + zyI_0 \tag{4.35}$$

Al estar definidos los vértices y lados en el sentido de las agujas del reloj al contrario que la definición de la integral de línea, debemos variar el signo para llegar a la siguiente expresión, que presenta el valor de las integrales como la suma del aporte de cada lado:

$$z\iint_S \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \frac{dx_0 dy_0}{r^3} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} I_0 \pm z\sum_{n=1}^{3} \begin{pmatrix} \sin\theta_n \\ \cos\theta_n \end{pmatrix} \int_{Lado_n} \left(\frac{1}{r}\right)dl \tag{4.36}$$

La última integral se resuelve fácilmente siendo su valor:

$$\int_{Lado_n} \left(\frac{1}{r}\right)dl = Q_n = \ln\left(\frac{r_n + r_{n+1} + d_{n+1,n}}{r_n + r_{n+1} - d_{n+1,n}}\right) \tag{4.37}$$

Donde r_n es la distancia entre el punto P y el vértice "n" y $d_{n+1,n}$ la longitud del segmento entre "n" y "n+1".

El resultado final es:

$$\iint_S \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \vec{\nabla}_0\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{n}d\sigma = -z\iint_S \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \frac{dx_0 dy_0}{r^3} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} I_0 \mp z\sum_{n=1}^{3} \begin{pmatrix} \sin\theta_n \\ \cos\theta_n \end{pmatrix} Q_n \tag{4.38}$$

De manera que ya podemos resolver todas las integrales necesarias para afrontar el problema.