



# MODELO DE COMPORTAMIENTO MECÁNICO DEL HUESO BAJO CARGAS CÍCLICAS

## **2.1. Introducción**

En este capítulo se describirá el modelo de comportamiento mecánico del tejido óseo que se utilizará en este proyecto. Para ello es necesario conocer cómo está formado el hueso, su estructura y sus propiedades mecánicas, entre las que cabe destacar las propiedades elásticas y viscoelásticas. A continuación se explicará el modelo de daño empleado. Hoy en día existen muchos modelos de comportamiento, algunos muy complejos, que tienen en cuenta los procesos biológicos y mecánicos que tienen lugar en el hueso. El que se explica en este capítulo tiene en cuenta tanto el efecto del creep como el de la fatiga debido a cargas cíclicas, pero no considera ningún proceso biológico del material, como el envejecimiento o la consolidación. Por último se verá como se introduce el concepto de daño en la ley de comportamiento del material según la mecánica del daño continuo.

## **2.2. Estructura del hueso**

El hueso es uno de los materiales más interesantes debido a su relación estructura-propiedades. En cuanto a sus propiedades mecánicas es un material anisótropo, heterogéneo, no lineal, viscoe-

lástico y presenta comportamiento termo-reológico complejo.

La composición general del hueso en volumen es de aproximadamente un tercio de minerales (fosfato y carbonato cálcico), un tercio de colágeno y otros componentes orgánicos, y otro tercio de agua. La complejidad de sus propiedades reside en su estructura. A nivel microestructural, el colágeno y los minerales se ensamblan en un compuesto microfibrilar. Según la disposición de las fibras se pueden identificar dos tipos de tejido óseo [3, 14]:

- Tejido óseo primario o inmaduro: se caracteriza por la organización aleatoria de las fibras de colágeno y es mecánicamente débil. Se da en huesos fetales o en la reparación de las fracturas, siendo reemplazado con el tiempo por hueso lamelar.
- Tejido óseo secundario o lamelar: las fibras de colágeno están alineadas paralelamente formando laminillas y es un hueso muy fuerte mecánicamente. Es el tejido que forma el hueso adulto.

Es a este nivel microestructural al que se refieren las propiedades mecánicas del tejido óseo, y concretamente, al hueso laminar, que es el hueso maduro. En la figura 2.1 podemos observar las distintas subestructuras del fémur.

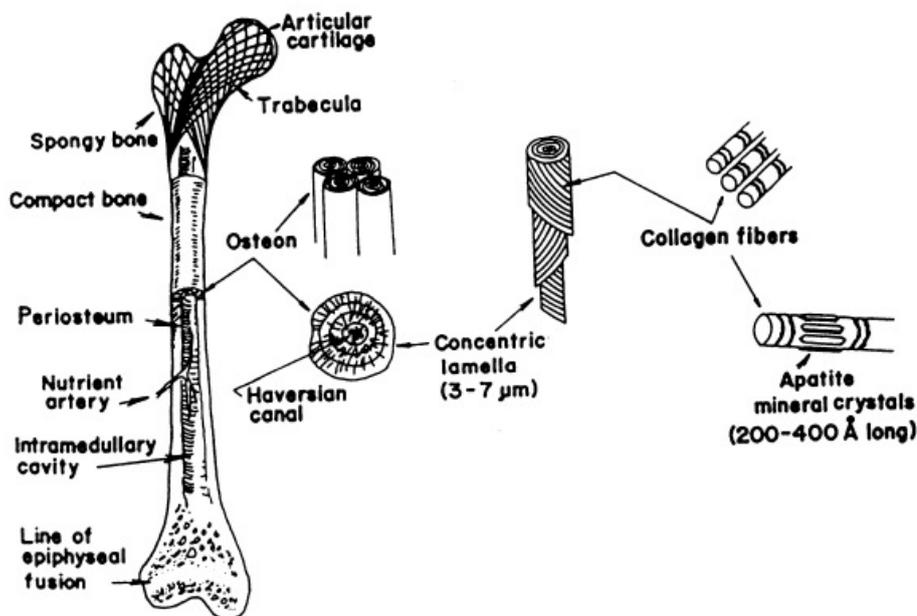


Figura 2.1: Niveles jerárquicos de estructura en un fémur humano [3].

A nivel macroscópico se puede distinguir entre dos tipos de hueso laminar [3, 14]:

- Hueso compacto o cortical: es un hueso denso que no presenta cavidades visibles. Su rigidez se debe al componente mineral, mientras que la viscoelasticidad se la confiere el componente orgánico de la matriz ósea.
- Hueso esponjoso o trabecular: es un hueso más poroso que muestra numerosas cavidades intercomunicadas. También es menos duro y más dúctil que el hueso cortical y tiene una gran capacidad para distribuir presiones y amortiguar cargas.

Aunque el modelo que se va a presentar puede ser válido para cualquier tipo de artroplastia, en este proyecto el análisis se enfoca al caso de la prótesis de cadera, en la que el hueso implicado es el fémur. El fémur pertenece a la clase de los huesos largos, que son huesos duros y densos con gran resistencia. En concreto, el fémur es el hueso más largo y fuerte del cuerpo humano.

Los huesos largos se dividen en tres partes: diáfisis, epífisis superior y epífisis inferior, tal y como se muestra en la figura 2.2. La diáfisis es la parte cilíndrica central del hueso y está constituida casi totalmente por hueso compacto, mientras que las epífisis son las extremidades del hueso, y están formadas por hueso esponjoso recubierto por una capa fina de hueso cortical.

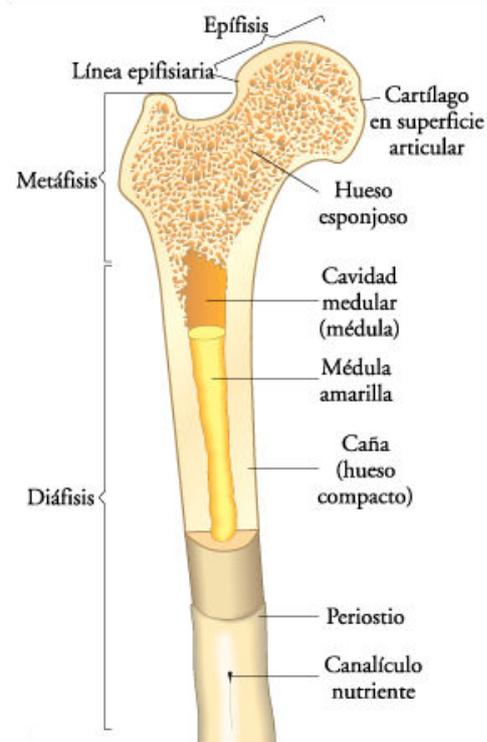


Figura 2.2: Anatomía del fémur [9].

La zona que se va a modelar, esto es, la interfaz hueso-cemento, pertenece a la diáfisis del fémur, por lo que en la sección 2.3 se tratarán principalmente las propiedades del hueso compacto.

## 2.3. Propiedades mecánicas del hueso

Esta sección se centrará en la descripción de las propiedades elásticas y viscoelásticas del hueso cortical. Es importante destacar que la característica más importante del tejido óseo es su rigidez, así como su gran resistencia a compresión. Su resistencia a tracción es intermedia, mientras que a cizallamiento es más débil.

### 2.3.1. Propiedades elásticas

El hueso cortical, en primera aproximación, se puede modelar como un sólido anisótropo, elástico lineal, cuya ecuación constitutiva es la ley de Hooke [15]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

Esta ecuación se puede reescribir usando la notación reducida como:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (2.2)$$

donde  $C_{ij}$  es el tensor de constantes elásticas o tensor de rigidez, compuesto por 36 constantes. Su inversa se denomina matriz de flexibilidad y se representa como  $S_{ij}$ .

La anisotropía del hueso puede simplificarse y modelarse como un material transversalmente isótropo [16], lo que quiere decir que existe una dirección preferente como único eje de simetría, y las direcciones transversales a ellas son mecánicamente equivalentes. En el caso del hueso, la dirección preferente es su eje de simetría. Con esta simplificación, la matriz de rigidez se reduce a 5 constantes elásticas y viene dada por:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

donde  $C_{66} = 1/2(C_{11} - C_{12})$ .

Los coeficientes de la matriz de flexibilidad se pueden obtener fácilmente mediante ensayos mecánicos en función del módulo de Young ( $E_i$ ), del coeficiente de Poisson ( $\nu_{ij}$ ) y del módulo de elasticidad transversal ( $G_i$ ), como se puede ver en la ecuación (2.4):

$$\mathbf{S}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

donde  $G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$ .

Otros estudios han considerado el hueso como un material ortótropo, debido a las pequeñas diferencias existentes en las propiedades elásticas entre las direcciones radial y tangencial. En este caso las constantes están asociadas a tres direcciones perpendiculares y el tensor de rigidez contiene 9 coeficientes independientes, esto es:

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

La matriz de flexibilidad quedaría en este caso de la siguiente forma:

$$\mathbf{S}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Hay diversos estudios que han calculado los coeficientes  $C_{ij}$  para diferentes tipos de huesos humanos y animales [3].

En el caso de la interfaz cemento-hueso, el problema se considera bidimensional con tensión plana como primera aproximación, y se realiza la hipótesis de que el comportamiento del material es isótropo, tomándose como módulo elástico el del eje de simetría del hueso. De esta forma solo se necesita conocer dos valores característicos del hueso: su módulo elástico,  $E$  y el coeficiente de Poisson,  $\nu$ , obteniéndose a partir de estos el coeficiente de cizalladura,  $G$ . Aunque esta hipótesis no es del todo correcta, ya que las propiedades del hueso dependen de la dirección en la que se midan, se puede comprobar en el capítulo 6 que el hueso es un material mucho más resistente que el cemento, y por lo tanto, no tendrá apenas influencia en el deterioro de la interfaz. Por eso se considera un módulo elástico único para todo el hueso. Por otra parte, el coeficiente de Poisson es prácticamente el mismo tanto en dirección transversal como en dirección axial [15].

Hay diversas formas de calcular el módulo elástico del hueso. La que se ha empleado aquí tiene en cuenta el porcentaje de mineral que contiene el hueso, según un estudio de Hernández *et al.* [10]. En dicho estudio se establece una relación que determina el valor del módulo elástico en función de la fracción en volumen de hueso,  $(BV/TV)$  y la fracción de mineral,  $\alpha$ , como

$$E = 84,37(BV/TV)^{2,58 \pm 0,02} \alpha^{2,74 \pm 0,13} \quad (2.7)$$

El fémur es un hueso que presenta poca porosidad y un alto contenido en fracción mineral. Teniendo en cuenta el rango de valores para los que esta fórmula es aplicable (Tabla 2.1), se ha considerado un valor de fracción volumétrica de hueso de 0.843, y una fracción mineral de 0.662, obteniéndose un valor del módulo elástico de 17.53 GPa.

Por otra parte, para el coeficiente de Poisson se toma el valor 0.32 para todo el hueso. Y el coeficiente de cizalladura,  $G$ , definido como  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , toma el valor de 6.64 GPa.

Fuente	Rango de $\alpha$	Rango de $BV/TV$	Exponente de $\alpha$	Exponente de $BV/TV$
Hernández <i>et ál.</i> (2001)	0.174-0.662	0.022-0.843	2.58 (0.022)	2.74 (0.129)

Tabla 2.1: Exponentes de la fracción volumétrica y de la fracción mineral de hueso y rangos aplicables.

### 2.3.2. Propiedades viscoelásticas

Como se ha indicado al principio del capítulo, el hueso es un material viscoelástico. Para este tipo de materiales, la ley de Hooke para materiales elásticos lineales debe ser reemplazada por una

ecuación constitutiva que incluye la dependencia con el tiempo de las propiedades del material. El comportamiento del material se puede describir mediante el principio de superposición de Boltzmann de la forma que se muestra en la ecuación (2.8):

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.8)$$

Esto provoca una relajación de las tensiones, consistente en una disminución gradual de tensión cuando el material se somete a una deformación constante. La relajación de las tensiones produce también una relajación en el módulo elástico del hueso con el tiempo, como se puede observar en la ecuación (2.9):

$$E(t) = \frac{\sigma_1(t)}{\varepsilon_{1_0}} \quad (2.9)$$

En la sección 2.4 se verá como se modela el comportamiento viscoelástico del hueso mediante el creep.

## 2.4. Modelo de daño acumulativo del hueso

El modelo de hueso utilizado en este proyecto es un modelo de daño acumulativo desarrollado por Carter y Caler [4]. En él se combinan el daño dependiente del tiempo y el daño dependiente de los ciclos. El daño, como se introdujo en el capítulo anterior, es un parámetro adimensional que representa una degradación de las propiedades del material, y que se refleja en una pérdida de rigidez. La función daño se introduce de la siguiente forma:

$$D_T = D_S - H + D_D + D_A \quad (2.10)$$

donde  $D_T$  es el daño total en cualquier instante de tiempo;  $D_S$  es el daño debido a la tensión generalizada;  $H$  es el daño reparado debido a los procesos de consolidación; y  $D_D$  y  $D_A$  son los daños causados por enfermedad y envejecimiento, respectivamente. El valor de  $D_T$  puede variar entre 0 y 1, de manera que cuando toma el valor 1 se produciría la fractura del hueso.

En primera aproximación, se pueden despreciar tanto los daños debidos a la enfermedad y envejecimiento como el daño reparado por consolidación, considerando únicamente en el análisis el daño debido a la tensión generalizada. Este daño,  $D_S$ , se puede obtener como una suma de la fracción del daño debido a la fatiga (daño dependiente del número de ciclos) y la fracción del daño debido al creep (daño dependiente del tiempo). A continuación se detallan los modelos de cada uno de ellos.

### 2.4.1. Fallo por creep

Se denomina creep o fluencia lenta al incremento de deformación que sufre un material cuando se le aplica una carga constante. Es una propiedad que se da en materiales viscoelásticos, y ocurre como resultado de exponer al material durante un largo tiempo a niveles de tensión altos pero que se encuentren por debajo del límite elástico.

El daño por creep depende tanto del tiempo como de la carga aplicada, incrementándose progresivamente hasta que se produce la fractura del hueso cuando el daño alcanza el valor unidad. Bajo una tensión constante, el tiempo de fallo se define como:

$$T_B = A \sigma^{-B} \quad (2.11)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes determinadas empíricamente y sus valores son  $3,02 \times 10^{35}$  y 17,95, respectivamente, para tensiones expresadas en megapascales y tiempo en segundos. La tensión  $\sigma$  es la tensión principal máxima de tracción.

A partir de esta ecuación se obtiene la tasa de daño acumulado con el tiempo de la siguiente forma:

$$\frac{dD_C}{dt} = \frac{1}{A\sigma^{-B}} \quad (2.12)$$

El daño en función del tiempo puede obtenerse integrando esta ecuación, resultando lo siguiente:

$$D_C = \int_0^t (1/A\sigma(t)^{-B}) dt \quad (2.13)$$

Sin embargo, como se explicó en la introducción, en este proyecto no se mide el tiempo transcurrido desde que comienza el análisis, sino el número de ciclos de carga transcurridos. La relación entre el tiempo y los ciclos de carga es fácil de obtener sabiendo la frecuencia a la que es aplicada la carga, mediante la relación  $n = \frac{\omega t}{2\pi}$ , siendo  $n$  el número de ciclos de carga aplicados y  $\omega$  la frecuencia en radianes/segundo. Con esta modificación la tasa de daño acumulado pasa a ser de la siguiente forma:

$$\frac{dD_C}{dn} = \frac{dD_C}{dt} \frac{dt}{dn} = \frac{2\pi}{A\sigma^{-B}\omega} \quad (2.14)$$

Al integrar esta ecuación para implementarla en Abaqus hay que tener en cuenta que el daño se calcula de forma incremental en cada paso, es decir, que se mantiene constante durante un cierto número de ciclos y se incrementa en el paso siguiente como se expresa en la siguiente ecuación:

$$D_C^{i+1} = D_C^i + 2\pi \frac{\Delta N}{A\sigma^{-B}\omega} \quad (2.15)$$

donde  $\Delta N$  es el número de ciclos de cada paso del análisis durante los cuales las variables permanecen constantes y el índice  $i$  es el paso  $i$ -ésimo del análisis.

### 2.4.2. Fallo por fatiga debido a cargas cíclicas

El daño por fatiga depende del número de ciclos de fallo del material, que a su vez depende de la carga aplicada. El número de ciclos de fallo que resiste el material se define como

$$N_{fallo} = F\Delta\sigma^{-G} \quad (2.16)$$

donde  $F$  y  $G$  son constantes obtenidas empíricamente y cuyos valores son  $2,51 \times 10^{30}$  y  $30,4$ , respectivamente [30], con la tensión expresada en megapascales, y  $\sigma$  es nuevamente la tensión principal máxima de tracción.

El daño total por fatiga se puede obtener mediante la regla de Miner-Palmgren [19]

$$D_F = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{N_{fallo_i}} \quad (2.17)$$

donde  $N_{fallo_i}$  es el número de ciclos de carga que causan el fallo para el nivel de tensión aplicado en el paso  $i$ -ésimo y  $n_i$  el actual número de ciclos de carga impuestos en ese paso.

Aplicando la ley de Miner a la ecuación (2.16) y el mismo procedimiento que en el caso anterior se obtiene la ecuación de daño acumulativo por fatiga para cada paso, expresándose de la siguiente forma:

$$D_F^{i+1} = D_F^i + \frac{\Delta N}{F\Delta\sigma^{-G}} \quad (2.18)$$

### 2.4.3. Daño total acumulativo en el hueso

La obtención del daño acumulativo total es muy sencilla, consiste simplemente en sumar cada uno de los daños debidos al creep y la fatiga en cada paso, es decir, para el mismo número de ciclos.

$$D_S^i = D_F^i + D_C^i \quad (2.19)$$

Introduciendo las ecuaciones (2.15) y (2.18) en la ecuación anterior se obtiene:

$$D_S^{i+1} = D_S^i + 2\pi \frac{\Delta N}{A\sigma^{-B}\omega} + \frac{\Delta N}{F\Delta\sigma^{-G}} \quad (2.20)$$

El fallo o rotura del hueso se producirá cuando  $D_S$  alcance el valor unidad. Cuando se alcanza este valor ya no es necesario seguir analizando el problema porque se ha producido el fallo en la interfaz cemento-hueso de la prótesis.

Una vez obtenido el daño total, éste se introduce en la ley de comportamiento de forma sencilla, basándose en el modelo de daño isótropo de la mecánica del daño continuo. El tensor de rigidez quedaría modificado de la siguiente forma

$$\hat{\mathbf{C}} = (1 - d)\mathbf{C} \quad (2.21)$$

donde  $\hat{\mathbf{C}}$  es el tensor efectivo de comportamiento del hueso.

Como en este caso el modelo de daño está basado en la tensión, esto equivaldría a definir un tensor de tensiones efectivo,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , que representa la tensión que se necesita aplicar a un material virgen para obtener la misma deformación que está soportando el material dañado bajo un tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ . En el caso isótropo se expresa así,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - d} \quad (2.22)$$

Esta ecuación solo es válida en el caso de que las microgrietas permanezcan siempre abiertas. En el caso de que se cierren bajo compresión, hay que añadir un parámetro de cierre de grietas,  $h$ , cuyo valor se encuentra entre 0 y 1, que depende del tipo de material y de la carga aplicada. El parámetro se introduce de la siguiente forma:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - hd)} \quad (2.23)$$

Si  $h = 1$  las microgrietas están completamente abiertas, mientras que si  $h = 0$ , están completamente cerradas. La definición de las tensiones efectivas implica una nueva definición del módulo elástico del material dañado en función del módulo elástico del material intacto como,

$$\bar{E} = E(1 - hd) \quad (2.24)$$

Los materiales con este tipo de comportamiento se suelen modelar mediante una función de energía potencial específica libre,  $\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ , o su transformada dual  $\psi_e^*(\boldsymbol{\sigma}^e)$ . En este caso no tendremos en cuenta la apertura de las microgrietas, es decir, que  $h = 0$ , por lo que la función potencial queda de la siguiente forma:

$$\psi_e^* = \frac{1}{2\rho E} \left[ \frac{1 + \nu}{1 - d} \mathbf{S}_{ij} \mathbf{S}_{ij} + \frac{1 - 2\nu}{3(1 - d)} \langle \boldsymbol{\sigma}_{kk} \rangle^2 \right] \quad (2.25)$$

donde  $\mathbf{S}_{ij}$  es el tensor desviador de tensiones,  $\rho$  la densidad,  $E$  el módulo de Young,  $\nu$  el coeficiente de Poisson y los paréntesis  $\langle \cdot \rangle$  significan

$$\begin{cases} \langle x \rangle = x & \text{si } x \geq 0 \\ \langle x \rangle = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

A partir de esta función se obtiene la ley constitutiva del material dañado como

$$\varepsilon_{ij} = \rho \frac{\partial \psi_e^*}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1 + \nu}{E(1 - d)} \mathbf{S}_{ij} + \frac{1 - 2\nu}{3E(1 - d)} \langle \sigma_{kk} \rangle \delta_{ij} \quad (2.27)$$

Esta ecuación se puede poner en forma matricial y se obtendría el tensor de flexibilidad del material,  $\mathbf{C}^{-1}$ , o bien su inversa, el tensor constitutivo,  $\mathbf{C}$ , definido de tal manera que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Este modelo de comportamiento es aplicable a los dos materiales, cada uno con sus respectivas funciones de daño y creep definidas como se ha visto en este capítulo para el caso del hueso y como se verá en el capítulo siguiente para el caso del cemento.