

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

5.1. Introducción

En este capítulo se aborda la implementación numérica necesaria para la resolución del problema. Para ello, primero se explicará en detalle el método de los elementos finitos, que es el método de cálculo que emplea Abaqus. La sección se centrará en el problema bidimensional de tensión plana.

5.2. El Método de los Elementos Finitos en Problemas de Elasticidad Bidimensional

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico general que permite obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales asociadas a un problema físico con una geometría complicada.

El problema de la interfaz hueso-cemento se modela como un problema de elasticidad bidimensional. Concretamente, se trata de un problema de tensión plana, entendiéndose como tal un problema en el que una de las dimensiones del elemento, el espesor, es mucho menor que las otras dos, y sobre él actúan únicamente cargas contenidas en su plano medio. Este estado de tensión plana permite establecer la hipótesis de que todas las secciones perpendiculares al eje z se deforman en su plano y de manera idéntica, y por tanto, para los cálculos sólo se considerará el plano x - y .

Antes de aplicar el método de los elementos finitos al problema de la interfaz es importante

explicar el problema real y las simplificaciones que se adoptan para poder resolverlo mediante el MEF. En el problema real, las cargas que soporta una prótesis son variables en el tiempo, ya que, como se ha comentado anteriormente, una persona realiza diferentes actividades a lo largo del día y cada una de ellas transmite una carga distinta a la interfaz, pero también hay que tener en cuenta que un gran porcentaje del tiempo la persona no está realizando ninguna actividad dinámica y las tensiones en ese caso permanecen constantes. Simular este comportamiento tan variable es difícil y por ello se adoptan las siguientes hipótesis:

- La primera hipótesis, que se ha explicado ya en capítulos anteriores, consiste en considerar que durante un cierto número de ciclos todas las variables del problema permanecen constantes. Esto nos permite pasar de un problema cuya carga depende del tiempo a otro en el que la carga es función del número de ciclos. Ese número de ciclos constituye un incremento.
- La segunda hipótesis consiste en despreciar los efectos dinámicos de las cargas a las que se encuentra sometida la prótesis, ya que estos se dan en intervalos de tiempo mucho menores que los intervalos en los que la persona no realiza ninguna actividad dinámica. En un estudio realizado por Morlock *et ál.* [20] se muestra el tiempo de duración de las actividades diarias de pacientes con artroplastias de cadera y se puede observar que el tiempo que la persona se encuentra sentada o de pie es mayor que el tiempo que está andando o subiendo escaleras. Por lo tanto la carga que se aplicará al modelo de interfaz será una carga constante en cada incremento.

Con estas dos hipótesis el problema se transforma en un problema elástico lineal a trozos, esto es, que en cada paso se resuelve un problema elástico lineal por medio del MEF, cuya solución es el dato de partida para la resolución del problema en el siguiente paso.

El desarrollo del método de los elementos finitos que se presenta a continuación se centrará en la resolución del problema para este caso concreto.

5.2.1. Teoría de la elasticidad bidimensional

Se definirán en primer lugar los conceptos de la elasticidad bidimensional necesarios para la aplicación del método de los elementos finitos. El problema de elasticidad bidimensional a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij,j} &= 0 \\
 \sigma_{ijkl} &= (1 - d)C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{el} \\
 \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\
 \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^c
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Se puede observar que en la ecuación de equilibrio no aparecen las fuerzas de volumen, ya que estas engloban tanto las fuerzas gravitatorias como las de inercia, que se consideran despreciables en nuestro problema. Además, en nuestro caso ha de considerarse el efecto del daño sobre el tensor de rigidez, así como el efecto del creep, que se suma a las deformaciones elásticas para obtener las deformaciones totales, que a su vez serán necesarias para el cálculo de los desplazamientos. Las tensiones, por otra parte, se calculan a partir de las deformaciones elásticas.

Al tratarse de un problema lineal a trozos, este problema debe ser resuelto en cada paso del análisis, de forma que el problema queda en forma matricial como:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{k+1} &= 0 \\
 \boldsymbol{\sigma}_{k+1} &= (1 - d_{k+1})\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^{el} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^c \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_{k+1} + \nabla \mathbf{u}_{k+1}^T) \\
 d_{k+1} &= d_k + \Delta d \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^c &= \boldsymbol{\varepsilon}_k^c + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

siendo $k + 1$ el número del paso que se está resolviendo, y Δd y $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c$ son el incremento del daño y el incremento de creep en cada paso, respectivamente.

A continuación se explica detalladamente cada campo presente en estas ecuaciones.

Campo de desplazamientos

Se define el vector de desplazamientos de un punto como

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son los desplazamientos del punto en las direcciones x e y , respectivamente.

Campo de deformaciones

El campo de deformaciones se obtiene en función de los desplazamientos según la teoría general de la elasticidad, como

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.6)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (5.7)$$

En el caso de tensión plana, la deformación ε_z no es nula, pero sí lo es la tensión σ_z , por lo que el trabajo de deformación $\sigma_z \varepsilon_z$ es nulo. Así, el vector de deformaciones significativas se puede definir en forma matricial como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Campo de tensiones

De la ecuación (5.7) se deduce que τ_{xz} y τ_{yz} son nulas, por lo tanto el vector de tensiones significativas queda

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \right]^T \quad (5.9)$$

Relación tensión-deformación

Ya se ha visto tanto en secciones anteriores como en la ecuación (5.1) que la relación entre tensión y deformación se expresa mediante la ecuación constitutiva de la elasticidad, que para el caso general de un material con comportamiento isótropo es

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.10)$$

El tensor \mathbf{D} es el tensor de constantes elásticas, que particularizado para el caso de tensión plana tiene la forma:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

En el problema de la interfaz hay que añadirle a este tensor el efecto que ejerce el daño sobre él, como se indica en la ecuación (2.21). Si además el sólido está sometido a un estado de creep, la relación (5.10) debe modificarse, ya que como se ha comentado antes, la deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$ es ahora la suma de las deformación elásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ más la deformación debida al creep $\boldsymbol{\varepsilon}^c$, pero las tensiones son proporcionales a las deformaciones elásticas, quedando la ecuación constitutiva como sigue

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d)\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = (1 - d)\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^t - \boldsymbol{\varepsilon}^c) \quad (5.12)$$

5.2.2. Principio de los Trabajos Virtuales

Para obtener la ecuación de equilibrio del elemento se aplica el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV), cuya expresión se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \iint_A (\delta\varepsilon_x\sigma_x + \delta\varepsilon_y\sigma_y + \delta\gamma_{xy}\tau_{xy})dA &= \iint_A (\delta ub_x + \delta vb_y)dA + \\ + \oint_l (\delta ut_x + \delta vt_y)ds &+ \sum_i (\delta u_i U_i + \delta v_i V_i) \end{aligned} \quad (5.13)$$

El primer miembro de esta ecuación representa el trabajo que las tensiones σ_x , σ_y y τ_{xy} realizan sobre las deformaciones virtuales $\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$ y $\delta\gamma_{xy}$. El segundo miembro representa el trabajo de las fuerzas repartidas por unidad de volumen b_x , b_y ; de las fuerzas repartidas sobre el contorno t_x , t_y ; y de las fuerzas puntuales U_i , V_i sobre los desplazamientos virtuales δu , δv . A y l son, respectivamente, el área y el contorno de la sección transversal del sólido. En nuestro caso, esta ecuación puede simplificarse considerablemente, ya que en el problema no existen fuerzas de volumen ni fuerzas puntuales aplicadas en los nodos. Con esto, la ecuación quedaría reducida a la siguiente:

$$\iint_A (\delta\varepsilon_x\sigma_x + \delta\varepsilon_y\sigma_y + \delta\gamma_{xy}\tau_{xy})dA = \oint_l (\delta ut_x + \delta vt_y)ds \quad (5.14)$$

La ecuación (5.35) se puede escribir en forma matricial como

$$\iint_A \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \oint_l \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} ds \quad (5.15)$$

donde

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = [\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\gamma_{xy}]^T \quad ; \quad \delta\mathbf{u} = [\delta u, \delta v]^T \quad ; \quad \mathbf{t} = [t_x, t_y]^T \quad (5.16)$$

La ecuación (5.15) servirá como punto de partida para obtener las ecuaciones de la discretización.

5.2.3. Formulación de elementos finitos. Elemento rectangular de cuatro nodos.

La primera etapa del análisis es la división o discretización en elementos finitos, y a continuación la elección del tipo de función de forma que se va a usar para aproximar los desplazamientos en los nodos de dichos elementos.

La discretización geométrica del modelo de interfaz hueso-cemento se ha realizado con elementos rectangulares de cuatro nodos. Se verá a continuación cómo se realiza la discretización del campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones para este tipo de elemento, así como las ecuaciones de equilibrio de la discretización, que son aplicables a cualquier caso general con otro tipo de elementos.

Discretización del campo de desplazamientos

En elemento rectangular de cuatro nodos se pueden definir cuatro desplazamientos nodales en cada dirección. Para poder definir el desplazamiento en cualquier punto del interior del elemento es necesario establecer un sistema de coordenadas locales r y s , como el que se muestra en la fig. 5.1. El desplazamiento se definirá mediante un polinomio de cuatro coeficientes en r y s , que se determinarán imponiendo ocho condiciones de contorno, que corresponden a los desplazamientos en cada nodo del elemento rectangular de lados $2a \times 2b$.

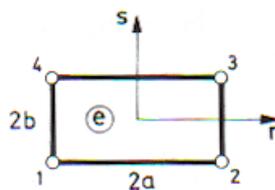


Figura 5.1: Elemento rectangular de cuatro nodos [6].

Resolviendo el sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas se obtienen los coeficientes de cada desplazamiento y los desplazamientos se pueden escribir como:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad ; \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \quad (5.17)$$

Las funciones N_i se denominan funciones de forma, obtenidas a partir de las coordenadas r y s

de cada elemento como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{r}{a}\right)\left(1 - \frac{s}{b}\right) ; & N_2 &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\left(1 - \frac{s}{b}\right) \\ N_3 &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\left(1 + \frac{s}{b}\right) ; & N_4 &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{r}{a}\right)\left(1 + \frac{s}{b}\right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Las ecuaciones (5.17) pueden escribirse de forma matricial como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (5.19)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4] ; & \mathbf{N}_i &= \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}^{(e)} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \\ \mathbf{a}_4^{(e)} \end{Bmatrix} ; & \mathbf{a}_i^{(e)} &= \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Discretización del campo de deformaciones

Si sustituimos las ecuaciones (5.17) en (5.4)-(5.7) y tenemos en cuenta que en este caso $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}$ y $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s}$ obtenemos el campo de deformaciones discretizado, que en forma matricial se representaría como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i^{(e)} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \\ \mathbf{a}_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (5.21)$$

donde la matriz \mathbf{B} es la matriz de deformación del elemento, compuesta por las matrices \mathbf{B}_i , que son las matrices de deformación del elemento i

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Particularizando \mathbf{B} para las funciones de forma de la ecuación (5.18) se obtiene

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} -b_2 & 0 & | & b_2 & 0 & | & b_1 & 0 & | & -b_1 & 0 \\ 0 & -a_2 & | & 0 & -a_1 & | & 0 & a_1 & | & 0 & a_2 \\ -a_2 & b_2 & | & -a_1 & b_2 & | & a_1 & b_1 & | & a_2 & b_1 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4b} \left(1 + \frac{r}{a}\right) & , & & a_2 &= \frac{1}{4b} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \\ b_1 &= \frac{1}{4a} \left(1 + \frac{1}{b}\right) & , & & b_2 &= \frac{1}{4a} \left(1 - \frac{1}{b}\right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Discretización del campo de tensiones

Las tensiones se obtienen sustituyendo directamente la ecuación (5.21) en la ecuación (5.12), obteniéndose

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^t - \boldsymbol{\varepsilon}^c) = (1-d)\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} - (1-d)\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^c \quad (5.25)$$

Ecuaciones de equilibrio de la discretización

Para obtener las ecuaciones de equilibrio se parte del PTV aplicado a un elemento aislado. La ecuación (5.15) aplicada al elemento aislado se escribe como

$$\iint_{A^{(e)}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \oint_{l^{(e)}} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} ds \quad (5.26)$$

De las ecuaciones (5.19) y (5.21) se puede escribir

$$\delta\mathbf{u}^T = [\delta\mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{N}^T \quad ; \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\delta\mathbf{a}^{(e)}]^{(e)} \mathbf{B}^T \quad (5.27)$$

Sustituyendo las ecs. (5.27) en (5.26) y sacando como factor común $\delta\mathbf{a}^{(e)}$ se obtiene

$$[\delta\mathbf{a}^{(e)}]^T \left[\iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dA \right] = [\delta\mathbf{a}^{(e)}]^T \left[\oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds \right] \quad (5.28)$$

Como los desplazamientos virtuales son arbitrarios, se pueden eliminar de la ec. (5.28), obteniendo

$$\iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds \quad (5.29)$$

Si se sustituye en esta última ecuación el vector de tensiones de la ecuación (5.25) se obtiene

$$\iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T ((1-d)\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} - (1-d)\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^c) dA = \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds \quad (5.30)$$

Operando se llega finalmente a

$$\left[\iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T (1-d) \mathbf{D} \mathbf{B} dA \right] \mathbf{a}^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} (1-d) \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^c dA = \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds \quad (5.31)$$

que de acuerdo a la formulación incremental del problema expresada en las ecuaciones (5.2) quedaría como

$$\left[\iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T (1-d_{k+1}) \mathbf{D} \mathbf{B} dA \right] \mathbf{a}_{k+1}^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} (1-d_{k+1}) \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^c dA = \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds \quad (5.32)$$

con

$$d_{k+1} = d_k + \Delta d \quad (5.33)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^c = \boldsymbol{\varepsilon}_k^c + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.34)$$

que se encuentran definidos en los capítulos anteriores para el hueso y para el cemento.

La ecuación (5.31) se puede resumir en la siguiente:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)} \quad (5.35)$$

donde $\mathbf{K}^{(e)}$ es la matriz de rigidez del elemento, definida como

$$\mathbf{K}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T (1-d) \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (5.36)$$

y $\mathbf{f}^{(e)}$ el vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_{\varepsilon}^{(e)} + \mathbf{f}_t^{(e)} \quad (5.37)$$

Este vector se descompone en las fuerzas correspondientes a deformaciones debidas al creep y en las fuerzas en el contorno, respectivamente.

$$\mathbf{f}_{\varepsilon}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T (1-d) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^c dA \quad (5.38)$$

$$\mathbf{f}_t^{(e)} = \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds \quad (5.39)$$

Y finalmente, la ecuación matricial global del problema se escribe como

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (5.40)$$