

2. VIBRACIÓN DE UNA PLACA CUADRADA

2.1. INTRODUCCIÓN

Cuando una placa vibra cercana a su frecuencia natural esta entrara en resonancia, lo que implicará que habrá regiones con grandes desplazamientos y otras donde los desplazamientos serán nulos, éstas regiones serán las líneas nodales. Si se esparce una sustancia granular sobre la placa los granos tenderán a quedarse en las líneas nodales formando figuras características. Para empezar esta experiencia es de ayuda describir qué son las figuras y como se descubrieron. La Persona que le da su nombre es Ernst Chladni (1756-1827) que fue un físico alemán que investigó la vibración del sonido. Chladni descubrió que si esparcía arena en una placa y la hacía vibrar con un arco de violín, la arena se distribuía formando patrones geométricos ordenados. Durante años exhibió su descubrimiento por toda Francia como una curiosidad de circo.



Figura 1: Imagen de Ernst Chladni

Sin embargo Chladni nunca llegó a realizar un modelo matemático que explicara las figuras. Sería Sophie Germain (1777-1831) quien en 1811 se presentó a un concurso convocado por la Academia de París, donde buscaban ese modelo matemático para explicar las formas de Chladni. La mayoría de los matemáticos ni lo intentó porque Lagrange había afirmado que los modelos matemáticos disponibles de la época eran inadecuados para su resolución. Sophie Germain durante mucho tiempo estudió las figuras, lo que le sirvió para presentar un trabajo basándose en anteriores resultados de Euler. Ese año fue criticada por la falta de precisión al pasar de una línea a una superficie por lo que no fue tomada en cuenta. Posteriormente en 1813 publicó otro trabajo del mismo tema sin ser tomada en cuenta, para finalmente en 1816, ganar el primer lugar situándola entre los mejores matemáticos. Fue entonces cuando se convirtió en la primera mujer en recibir un premio de estas características. Esto hizo que los matemáticos la aceptaran entre sus círculos.

La solución que propuso era de la forma:

$$N^2 \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

Donde N es una constante x, y, z las coordenadas espaciales y t la temporal. [Case and Leggett 2005].

Posteriormente fueron muchos otros los que se vieron sorprendidos por estas figuras, científicos de la talla de Lord Rayleigh que estaba muy interesado en el sonido, u otra mujer como Mary Waller. [Kverno and Nolen 2010].

La principal aplicación que tuvo a lo largo de la historia este experimento fue la de creación de instrumentos musicales, así Félix Savart, físico del siglo XIX, que en 1830 se hizo la siguiente pregunta: ¿Qué sonido poseen la parte frontal y trasera de un violín antes de ser unidas? [Case and Leggett 2005] Para averiguarlo, llevó a cabo un experimento que hoy sería imposible de repetir: desmontó una docena de Stradivarius y Guarneris, a los que aplicó la técnica de Ernst Chladni, como en placas planas el polvo saltaba en las zonas que más vibraban y se posaba en aquéllas que permanecían casi inmóviles. El resultado eran unas manchas características.



Figura 2: Patrón nodal de una tapa de violín

Más de un siglo después, Hutchins [Case and Leggett 2005] continuó con este experimento: utilizando un generador electrónico de tono en vez de un arco, y polvo brillante del que se usa como adorno navideño, examinó las

partes frontal y trasera de unos 200 violines (que obviamente no eran Stradivarius) desmontados durante veinte años. Descubrió que cada una de las maneras en que los violines vibraban generaba una característica mancha Chladni, y que los violines de mayor calidad vibraban prácticamente de la misma manera cuando se los sometía a los mismos sonidos. Si la superficie era demasiado delgada o demasiado gruesa en algunos lugares, la vibración era diferente. Esto es un principio que siempre han conocido los fabricantes de violines, pero sin llegar realmente a entenderlo. El método tradicional era golpear suavemente las dos partes del violín en puntos estratégicos y hallar el grosor correcto guiándose por el sonido de los golpes. Pero esto sólo estaba al alcance de oídos muy entrenados. El sistema de Chladni no sólo hace mucho más fácil este proceso, sino que elimina el margen de error humano.

Hoy en día la aplicación normal es meramente académica como se muestra en laboratorios de enseñanzas básicas y universidades. La principal ventaja es la sencillez del montaje y sobre todo la vistosidad que lo hacen aptos tanto para los cursos más elementales de música como para un curso de enseñanzas técnicas.

Existen otros medios para calcular estos patrones modales que no son invasivos para el instrumento, como la interferometría holográfica láser, por lo que el análisis en instrumentos es poco aplicable.

2.2. MONTAJE

El montaje es sencillo ya que se han adquirido en el mercado todos los elementos necesarios para la realización de la experiencia. La lista de piezas así como su funcionamiento se detalla a continuación:

- Generador de funciones

Este será el elemento que controle el experimento. El objetivo del generador de funciones es alimentar al cuerpo excitador de una función sinusoidal. Esta señal debe ser controlable en todo momento, tanto en frecuencia como en amplitud. Lo primero que se ve en el aparato de la figura 3 es un display digital donde se especifica el rango de frecuencias que puede generarse (abajo a la izquierda), la frecuencia que está generando en la parte superior, y en la parte inferior derecha el tipo de onda generado.



Figura 3: Generador de funciones

El generador de funciones tiene la posibilidad de introducir dos tipos de funciones, bien sinusoidal o bien en forma de escalón. Se consigue una u otra simplemente pulsando el botón de cambio de modo. Posteriormente existe un botón de escala para cambiar de una escala de hasta 3 kHz con incrementos de 0.05 Hz, a una escala de hasta 50 kHz con incrementos de 1 Hz. Simplemente pulsando dicho botón cambiamos de una escala a otra.

En el display aparece siempre debajo de uno de los dígitos una línea, ese es el dígito de la frecuencia que se puede modificar. Para seleccionar el dígito existen dos botones de izquierda a derecha. Una vez seleccionado el que se quiere modificar existe una rueda analógica que girando en sentido horario aumenta y disminuye en el contrario.

Por último existe otra rueda analógica que controla la amplitud de la salida. El funcionamiento es el mismo de la anterior rueda. Todos estos mandos pueden observarse en la figura 4:



Figura 4: Mandos del generador de funciones

- Generador de vibraciones

El generador de vibraciones (figura 5) es el elemento que sirve para transmitir la fuerza excitadora a la placa, que será alimentado por el generador de funciones, y en su parte superior estará unido con la placa. Este elemento lo único que tiene son dos entradas donde va la información de la señal así como la corriente eléctrica necesaria para que funcione. En la parte superior tiene una clavija donde se enganchará la placa.



Figura 5: Generador de vibraciones

- Placa cuadrada

La placa cuadrada tiene unas dimensiones de 180x180x1 cotas en mm, y un peso de 213 g, por lo que en principio parece que se trata de un acero. El color es negro y en su centro tiene una clavija que encaja con la del generador de vibraciones.

- Cables de seguridad

Los cables son una pareja de cables de seguridad de laboratorio, van desde el generador de vibraciones hasta el de funciones. Por ellos va la información.

- Azúcar

Es azúcar común que puede adquirirse en un supermercado. Se ha elegido este material porque las partículas entre sí presentan poca cohesión. Esto es importante pues si se usaban otros elementos como serrín quedaban pegados a la plancha y no se conseguían las formas. Además al ser la placa negra el contraste de colores es el adecuado.

- Tapones para los oídos

Son necesarios si se va a manipular el equipo durante un tiempo prolongado, puede ser muy molesto y dañino para el oído.

Una vez descritas todas las partes es el momento de montarlas. Lo primero que va a montarse es la placa sobre el generador de vibraciones. La clavija está preparada para un correcto acople, sin embargo hay que tener especial cuidado con que la placa quede en posición completamente horizontal. Cuando el sistema vibre la gran parte de azúcar caerá a un lado si está desnivelado con lo que no se apreciarán las figuras.

Al generador de vibraciones se le conectan los dos cables de seguridad y en el otro extremo el generador de funciones. La conexión es sencilla de realizar basta con introducirlos por los correspondientes orificios. La conexión eléctrica va al generador de funciones, este es el único elemento que va conectado a corriente. Antes de conectarlo es necesario cerciorarse que todos los equipos están apagados. Por último se esparce el azúcar por encima de la placa debiendo quedar está cubierta completamente sin que quede una capa gruesa de la misma. El montaje completo se observa en la figura 6.



Figura 6: Montaje del oscilador

2.3. EXPERIENCIA

Lo primero es calibrar si la placa está completamente horizontal, Para ello se induce una frecuencia baja pero con una amplitud grande, hasta que se observe que los granos de azúcar no caen por los lados. Una frecuencia de unos 15 Hz sería suficiente. Una vez realizado este paso previo se empieza con la práctica en sí, en primer lugar y como medida de protección es conveniente colocarse los tapones en los oídos.

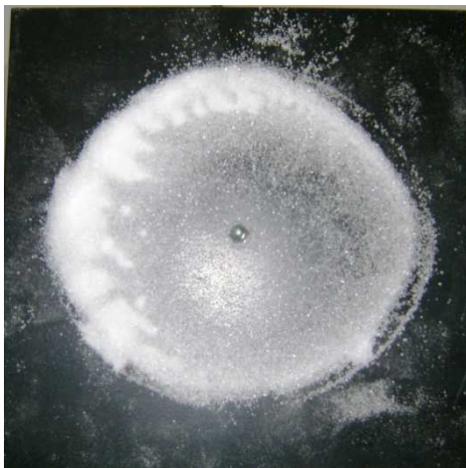
Se empezará a aumentar la frecuencia de Hercio en Hercio hasta que se alcance una figura resonante, esto se puede observar de dos formas diferentes, en primer lugar de forma acústica, se escucha un sonido más agudo y en segundo porque los granos empiezan a saltar. Una vez se ha aproximado a una frecuencia que cumpla estas características se cambia el incremento a uno más preciso y se busca que la figura quede lo más nítida posible.

Este proceso se debe repetir para ir viendo las diferentes figuras aumentando la frecuencia poco a poco. Cada vez que se aumenta la frecuencia es necesario aumentar la amplitud de la oscilación. Para frecuencias bajas (menores de 500 Hz) si se usa la máxima amplitud los granos saltan demasiado y se caen la mayoría, con lo que no se ve correctamente, sin embargo para frecuencias altas es indispensable poner la máxima amplitud ya que en caso contrario no se observa con nitidez.

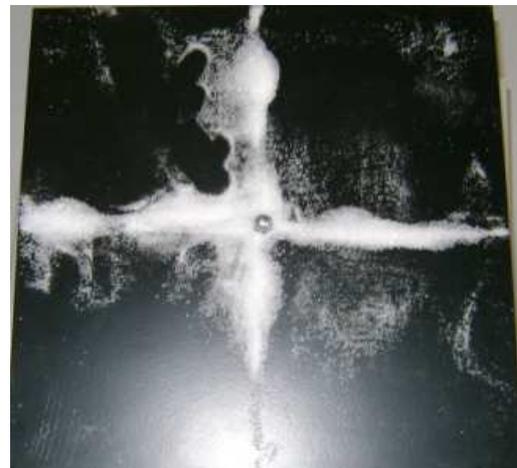
Hacerlo de esta forma es necesario la primera vez que se realiza la práctica pues las frecuencias propias se buscan a ciegas, y resulta bastante molesto para el oído. De hecho a partir de una frecuencia los tapones se hacen imprescindibles.

Toda frecuencia característica debe ser anotada y la figura fotografiada para su análisis posterior.

Durante todo el proceso es necesario añadir azúcar. Dado que los granos suelen caer por los lados, es recomendable echar más por el centro.



a) 94 Hz



b) 115 Hz



c) 152 Hz



d) 386 Hz



e) 647 Hz



f) 924 Hz



g) 1065 Hz



h) 1551 Hz



i) 1823 Hz



j) 1880 Hz



k) 2036 Hz



l) 2142 Hz



m) 2681 Hz



n) 3267 Hz



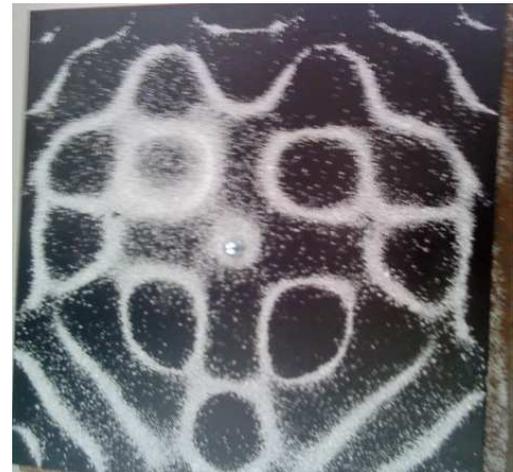
o) 3432 Hz



p) 3585 Hz



q) 3720 Hz



r) 4059 Hz



s) 4359 Hz



t) 4526 Hz

Figura 7: Figuras de Chladni

Las figuras se pueden observar de forma nítida (figura 7), y el contraste entre la placa y el azúcar es realmente vistoso. Encontrar más frecuencias superiores sería posible, ya que la potencia del generador de vibraciones no lo permite.

En términos generales se puede considerar un éxito esta parte, pues se ha logrado lo propuesto, visualizar las formas nodales en una placa cuadrada.

2.4. BASE TEÓRICA

El fundamento físico consiste en un fenómeno de resonancia. Cuando la vibración que se induce sobre la placa tiene una frecuencia que coincide con la propia de la placa las

oscilaciones se hacen importantes en amplitud en todo los puntos menos en las líneas nodales, donde teóricamente los desplazamientos son cero.

Se va a intentar predecir a las frecuencias que ocurren dichas líneas nodales y la forma que presentan.

2.4.1. FORMULACIÓN CLÁSICA

Se va a usar la teoría clásica de placas.

- 1) El espesor de la placa es pequeño comparado con las otras dos componentes espaciales.
- 2) El material de la placa es elástico lineal.
- 3) El desplazamiento vertical de los puntos del plano medio no depende de z , sólo de x e y .
- 4) Los puntos pertenecientes al plano medio sólo sufren desplazamiento vertical.
- 5) La tensión perpendicular al plano medio se desprecia.

Los momentos resultantes son los siguientes:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Siendo $w(x,y)$ el desplazamiento vertical y donde D es la rigidez a flexión:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Siendo h el espesor, E módulo de Young y ν el de Poisson.

Los esfuerzos cortantes son:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Con lo que la ecuación de movimiento (equilibrio en la dirección z) es:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f(x, y, t) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Que se puede escribir como:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t)$$

Siendo ρ la densidad, y f una fuerza transversal distribuida actuando por unidad de área. La fuerza transversal se supondrá cero para calcular el problema, la cual será la solución del problema homogéneo.

Esta última es la ecuación que vamos a resolver. En primer lugar como se quieren calcular los modos naturales y pese que en el experimento hay una fuerza excitadora, no intervendrá en esos modos. La solución de los desplazamientos verticales depende de las dos variables espaciales más del tiempo. Se va a probar una solución por separación de variables de la forma:

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\omega^2$$

$$-\frac{\beta_1^2}{W(x, y)} \nabla^4 W(x, y) = -\omega^2$$

Donde ω es una constante (frecuencia angular) y $\beta_1^2 = \frac{D}{\rho h}$.

Ambas ecuaciones pueden escribirse de la forma:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + T(t)\omega^2 = 0$$

$$\nabla^4 W(x, y) - \lambda^4 W(x, y) = 0$$

Donde $\lambda^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}$

La solución general para la primera de las ecuaciones es:

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Para la otra ecuación se escribirá como:

$$(\nabla^4 - \lambda^4)W(x, y) = (\nabla^2 - \lambda^2)(\nabla^2 + \lambda^2)W(x, y) = 0$$

Según la teoría de ecuaciones lineales diferenciales, la solución completa se obtiene como superposición de las siguientes ecuaciones:

$$(\nabla^2 + \lambda^2)W_1(x, y) = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + \lambda^2 W_1(x, y) = 0$$

$$(\nabla^2 - \lambda^2)W_2(x, y) = \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} - \lambda^2 W_2(x, y) = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$W_1 = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + A_2 \sin \alpha x \cos \beta y + A_3 \cos \alpha x \sin \beta y + A_4 \cos \alpha x \cos \beta y$$

$$W_2 = A_5 \sinh \theta x \sinh \phi y + A_6 \sinh \theta x \cosh \phi y + A_7 \cosh \theta x \sinh \phi y + A_8 \cosh \theta x \cosh \phi y$$

Con:

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \theta^2 + \phi^2$$

Quedando cerrado el problema a falta de las condiciones de contorno que determinarán las constantes.

Se puede observar como la solución de la ecuación es el producto de una componente que depende del tiempo y otra que depende exclusivamente de la posición espacial. Esta solución por separación de variables tiene un sentido físico pues se puede hacer uso de la idea de que cada punto de la placa funciona como un oscilador armónico donde las líneas nodales tienen siempre desplazamiento cero, del mismo modo que ocurre para ondas estacionarias en cuerdas.

La ecuación parece complicada de resolver analíticamente. Se van a aplicar las condiciones de contorno necesarias para al menos acotar el problema y si fuera posible la resolución analítica. En caso contrario se optaría por solución numérica.

Las condiciones de contorno son de empotramiento en el centro. En las figuras se puede ver como siempre hay un nodo en ese punto. Y bordes libres. Sea la placa cuadrada supongamos que tiene unas dimensiones de $a \times a$.

Por tanto según se ha dicho las condiciones de contorno son:

En el punto medio:

Desplazamiento cero en el centro de la placa y momentos no permitidos, empotramiento:

$$W\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial W\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial W\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}{\partial y} = 0$$

Para los bordes se tienen condiciones de borde libre, momentos igual a cero:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{(0,y)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{(a,y)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{(x,0)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{(x,a)} = 0$$

Y cortantes y cruzados también, que según Kirchoff se pueden escribir conjuntamente como:

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right)_{(0,y)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right)_{(a,y)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}\right)_{(x,0)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}\right)_{(x,a)} = 0$$

Quedando cerrado el problema con estas condiciones de contorno.

2.4.2. FORMULACIÓN DE RITZ

La resolución del problema anterior por métodos analíticos es realmente complicado. Quien resuelve completamente el problema es Ritz con el cálculo variacional. [Ritz 1909]

Las figuras de Chladni para una placa cuadrada corresponde a los valores de autovalores y autofunciones del problema del operador biarmónico, en efecto la ecuación como se vio anteriormente es la siguiente ecuación de Helmholtz:

$$\Delta^2 W = \lambda W$$

Con $\lambda = \frac{\rho h \omega^2}{D}$

Bajo las condiciones de contorno:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{(0,y)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{(a,y)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{(x,0)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{(x,a)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right)_{(0,y)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right)_{(a,y)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}\right)_{(x,0)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right)_{(x,a)} = 0$$

Hasta la fecha (1908) este problema no se había resuelto Kirchhoff (1850) solo consiguió resolver el del caso particular de placa circular y Voigt (1893) el de una placa apoyada en todos sus extremos. Para otra configuración la ecuación diferencial tiene una solución más complicada, de hecho Rayleigh dijo "The Problem of a rectangular plate, whose edges are free, is one of the great difficulty, and has for the most part resisted attack". [Rayleigh (1894)]

Walther Ritz propuso usar el principio de minimización de la energía, de donde la ecuación fue derivada y del mismo modo su funcional, (en adelante se supondrá que la placa tiene dimensiones -1,1 en ambas coordenadas):

$$J(w) := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

De acuerdo con el principio de minimización la solución es el mínimo del problema sujeto a las restricciones.

$$J(w) \rightarrow \min, \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \omega^2 dx dy = \text{const},$$

Y para este problema de minimización se pueden obtener los autovalores de la ecuación diferencial usando el teorema fundamental del cálculo variacional. De hecho este método sirve para otras geometrías diferentes. La idea fundamental de Ritz fue buscar una solución aproximada del problema como combinación de unas funciones, llamadas funciones coordinadas "Grundfunktionen" de la forma:

$$w_s = \sum_{m=0}^s A_m w_m(x, y)$$

Ritz propuso que se podían elegir polinomios para las funciones básicas $w_m(x, y)$, para más precisión, mayores modos, es mejor usar funciones coordinadas:

$$\begin{aligned} w_{mn} &= u_m(x)u_n(y) + u_m(y)u_n(x) \\ w'_{mn} &= u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x) \end{aligned}$$

Donde $u_m(x)$ son las autofunciones conocidas para una barra unidimensional y libre, donde las condiciones de contorno deben ser ajustadas a la nueva situación:

$$\frac{d^4 u_m}{dx^4} = k_m^4 u_m, \text{ con } \frac{d^2 u_m}{dx^2} = 0, \frac{d^3 u_m}{dx^3} = 0 \text{ en } x = \{-1, 1\}$$

Estas condiciones conducen a la función:

$$u_m = \begin{cases} \frac{\cosh k_m \cos k_m x + \cos k_m \cosh k_m x}{\sqrt{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m}}, \tan k_m + \tanh k_m = 0, m \text{ par} \\ \frac{\sinh k_m \sin k_m x + \sin k_m \sinh k_m x}{\sqrt{\sinh^2 k_m - \sin^2 k_m}}, \tan k_m - \tanh k_m = 0, m \text{ impar} \end{cases}$$

La aproximación de Ritz toma la forma:

$$w_s := \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^s A_{mn} u_m(x) u_n(y)$$

Para poder determinar los coeficientes A_{mn} , volvemos a meter la solución dentro del funcional,

$$J(w_s) := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Imponiendo que sea mínimo bajo la condición:

$$U(w_s) := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_s^2 dx dy = \text{const},$$

Para poder resolver el problema aproximado es necesario determinar un número finito de coeficientes A_{mn} . Para poder evaluar el funcional $J(w_s)$ hay que evaluar los términos de la integral, el primero de los cuales es:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 \sum_{m,n} A_{mn} u_m(x) u_n(y)}{\partial x^2} \right)^2 dx dy \\ &= \sum_{m,n} \sum_{p,q} A_{mn} A_{pq} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u_m(x)}{\partial x^2} u_n(y) \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x^2} u_q(y) dx dy \end{aligned}$$

Este último término de integral lo llamaremos c_{mnpq}^1 que puede ser calculado si u_n es conocido, es suficiente evaluar las integrales de forma numérica para obtener los números c_{mnpq}^1 . De la misma forma podemos obtener el resto de términos.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \sum_{m,n} \sum_{p,q} A_{mn} A_{pq} c_{mnpq}^2$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} dx dy = \sum_{m,n} \sum_{p,q} A_{mn} A_{pq} c_{mnpq}^3$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = \sum_{m,n} \sum_{p,q} A_{mn} A_{pq} c_{mnpq}^4$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_s^2 dx dy = \sum_{m,n} A_{mn}^2, \text{ por ortogonalidad}$$

Donde todos los coeficientes c_{mnpq}^2, c_{mnpq}^3 y c_{mnpq}^4 quedan definidos. Usando los multiplicadores de Lagrange λ para minimizar:

$$J(w_s) - \lambda U(w_s) \rightarrow \min,$$

Que es equivalente a minimizar el problema.

$$J_s(a) := a^T K a - \lambda a^T a \rightarrow \min$$

Definiendo el vector a como:

$$a := [A_{00}, A_{01}, A_{10}, \dots]$$

Y la matriz:

$$K := \begin{bmatrix} \alpha_{00}^{00} & \alpha_{01}^{00} & \alpha_{10}^{00} & \dots \\ \alpha_{00}^{01} & \alpha_{01}^{01} & \alpha_{10}^{01} & \dots \\ \alpha_{00}^{10} & \alpha_{01}^{10} & \alpha_{10}^{10} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Con $\alpha_{mn}^{pq} := c_{mnpq}^1 + c_{mnpq}^2 + c_{mnpq}^3 + c_{mnpq}^4$ usando la notación original de Ritz. Para minimizar $J_s(a)$ calculamos el gradiente respecto de a y lo igualamos a cero para obtener:

$$K a = \lambda a,$$

Problema de autovalores discreto, para cada autovalor λ^1 se tiene un autovector $a^1 := [A_{00}^1, A_{01}^1, \dots]$ y la correspondiente autofunción:

$$w_s^1 := \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^s A_{mn}^1 u_m(x) u_n(y)$$

El problema de autovalores de la ecuación diferencial se ha reducido al cálculo de integrales con el objetivo de obtener la matriz, y mediante los autovalores resolver la ecuación lineal algebraica. Ambas cosas son sencillas hoy en día con un ordenador. Sin embargo en la época de Ritz no se disponía de esta herramienta, quien tuvo que hacer los cálculos a mano y después resolver el problema de autovalores, ambas tareas de enormes proporciones. Para las integrales, Ritz primero tuvo que aproximar las funciones básicas, u_m , que según su definición contienen la solución de la ecuación transcendental. Sólo hay que calcular los primeros valores de k_m , pues rápidamente toma el valor de $m\pi/2 - \pi/4$, que aproxima las funciones para m para:

$$u_m = \cos\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \cosh\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x}{\sqrt{2} \cosh\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi}$$

Una función parecida para m impar. Nuevas aproximaciones son necesarias hasta alcanzar la solución teórica del problema de autovalores. [Ritz 1909]

$$\begin{cases} 0 = (\alpha_{00}^{(00)} - \lambda_s) A_{00} + \alpha_{01}^{(00)} A_{01} + \alpha_{10}^{(00)} A_{10} + \dots + \alpha_{ss}^{(00)} A_{ss}, \\ 0 = \alpha_{00}^{(01)} A_{00} + (\alpha_{01}^{(01)} - \lambda_s) A_{01} + \alpha_{10}^{(01)} A_{10} + \dots + \alpha_{ss}^{(01)} A_{ss}, \\ \dots \\ 0 = \alpha_{00}^{(ss)} A_{00} + \alpha_{01}^{(ss)} A_{01} + \alpha_{10}^{(ss)} A_{10} + \dots + (\alpha_{ss}^{(ss)} - \lambda_s) A_{ss}. \end{cases}$$

Ritz intento calcular este problema para los seis primeros coeficientes A_0, A_1, \dots, A_5 que al ser un problema simétrico quedan determinados, [Ritz 1909]:

$u_m(y) = v_m$ gesetzt und

$$w = A_0 u_1 v_1 + A_1 (u_1 v_3 + v_1 u_3) + A_2 u_3 v_3 + A_3 (u_1 v_5 + u_5 v_1) + A_4 (u_3 v_5 + u_5 v_3) + A_5 u_5 v_5.$$

Das System (53) wird hier

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = (13,95 - \lambda) A_0 - 32,08 A_1 + 18,60 A_2 + 32,08 A_3 - 37,20 A_4 + 18,60 A_5, \\ 0 = -16,04 A_0 + (411,8 - \lambda) A_1 - 120,0 A_2 - 133,6 A_3 + 166,8 A_4 + 140 A_5, \\ 0 = +18,60 A_0 - 240,0 A_1 + (1686 - \lambda) A_2 - 218,0 A_3 - 1134 A_4 + 330 A_5, \\ 0 = +16,04 A_0 - 133,6 A_1 + 109,0 A_2 + (2945 - \lambda) A_3 - 424 A_4 + 179 A_5, \\ 0 = -18,6 A_0 + 166,8 A_1 - 567 A_2 - 424 A_3 + (6303 - \lambda) A_4 - 1437 A_5, \\ 0 = +18,6 A_0 + 280 A_1 - 330 A_2 + 358 A_3 - 2874 A_4 + (13674 - \lambda) A_5. \end{array} \right.$$

Hoy día resolver este problema se puede hacer de forma sencilla mediante métodos numéricos, por ejemplo usando Maple para conseguir los coeficientes de la función transcendental que define k_m . Una vez se tiene k_m se define las autofunciones u_m usadas por Ritz para construir las funciones coordinadas. Finalmente evaluar numéricamente la integral para conseguir las entradas de la matriz, tomando $v = 0.225$ para que sea igual que el ejemplo de Ritz.

Se obtiene la siguiente matriz,

13.95000000	-32.21614500	18.60000000	32.21614504	-37.20000000	18.60000002
-16.10807250	406.1196695	-119.9256010	-133.5499734	172.0806028	-83.55402336
18.60000000	-239.8512019	1684.464298	217.9828187	-1136.623991	329.5350388
16.10807252	-133.5499735	108.9914093	2945.466708	-427.1327599	179.2413502
-18.60000000	172.0806029	-568.3119956	-427.1327599	6325.441344	-1441.531357
18.60000002	-167.1080467	329.5350388	358.4827005	-2883.062714	13672.20612

Mientras que Ritz obtuvo esta otra [Ritz 1909]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = (13,95 - \lambda) A_0 - 32,08 A_1 + 18,60 A_2 + 32,08 A_3 - 37,20 A_4 + 18,60 A_5, \\ 0 = -16,04 A_0 + (411,8 - \lambda) A_1 - 120,0 A_2 - 133,6 A_3 + 166,8 A_4 + 140 A_5, \\ 0 = +18,60 A_0 - 240,0 A_1 + (1686 - \lambda) A_2 - 218,0 A_3 - 1134 A_4 + 330 A_5, \\ 0 = +16,04 A_0 - 133,6 A_1 + 109,0 A_2 + (2945 - \lambda) A_3 - 424 A_4 + 179 A_5, \\ 0 = -18,6 A_0 + 166,8 A_1 - 567 A_2 - 424 A_3 + (6303 - \lambda) A_4 - 1437 A_5, \\ 0 = +18,6 A_0 + 280 A_1 - 330 A_2 + 358 A_3 - 2874 A_4 + (13674 - \lambda) A_5. \end{array} \right.$$

Comparando ambas matrices la obtenida con diez cifras y las que obtuvo Ritz, que aproxima a la computada por Maple, ambas aproxima las funciones trascendentes. Se puede observar en rojo como debería ser modificada la aproximación de Ritz, y en verde los dígitos que necesitarían ser modificados. Se pueden observar dos errores de imprenta el signo de A_3 en la tercera ecuación, y el de A_2 en la última. Y puede que un error en los términos A_5 de la segunda ecuación y A_1 en la última, donde deberían ser el doble que el otro, siendo ambos incorrectos en un amplio margen.

Una vez que Ritz obtuvo la solución del problema discreto, tenía que obtener los autovalores y autovectores para poder obtener la solución de los modos de la placa usando las funciones coordinadas. En los tiempos de Ritz no existían métodos numéricos disponibles. Para ello uso una aproximación polinómica, que a día de hoy se sabe que es una desastrosa aproximación. Hoy día existen métodos potentes que resuelven eficientemente el problema. El método que usó Ritz consistió en fijar una componente del autovector y tomaba la aproximación del autovalor de la primera diagonal. Después hacía lo mismo con el resto de las 5 ecuaciones e iteraba, aun así resolver este problema a mano es tedioso, así que Ritz inventó lo que hoy en día llamamos el jacobiano [Ritz 1908]. Con esta aproximación para el autovector se puede calcular la corrección del autovalor usando la primera ecuación, y con no muchas iteraciones se obtendrían buenas aproximaciones. El algoritmo quedaría de esta manera:

$$K\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$$

Para $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ es equivalente a solucionar el problema de ecuaciones no lineales:

$$\mathbf{f}(\lambda, a_1, \dots, a_n) := K\mathbf{a} - \lambda\mathbf{a} = 0$$

Donde se ha fijado una componente tal y como hizo Ritz, $a_0 = 1$, el algoritmo de Ritz da como solución $\lambda^0 = 13.95$ y $a_1^0, \dots, a_n^0 = 0$, y calculando cada iteración $k = 0, 1, \dots$

$$f_j(\lambda^k, a_1^k, \dots, a_{j-1}^k, a_{j+1}^k, \dots, a_n^k) = 0; j = 1, 2, \dots, n.$$

Y con estos datos las nuevas aproximaciones:

$$f_0(\lambda^{k+1}, a_1^{k+1}, \dots, a_n^{k+1}) = 0$$

Es de notar que en cada paso del algoritmo, se resuelve solo una ecuación escalar lineal, Implementando el método en Matlab se obtiene:

$$\lambda = 12.4711$$

Se ve como la componente dominante del autovector es la primera, correspondiente al elemento diagonal, y como el autovalor converge. Si se quieren obtener las soluciones exactas, se usa el siguiente programa de Matlab:

$$\lambda = 12.4653$$

Que primero calcula todos los autovalores, ordenándolos y luego muestra el primero. Se observa como al menos se necesitan cuatro iteraciones para poder calcular los 3 primeros dígitos. Es interesante ver como la aproximación elegida por Ritz tiene una influencia en los autovalores. Si calculamos los que se obtienen con la solución aproximada y con la matriz exacta obtenemos:

12.47	12.49	12.49
379.85	379.14	379.34
1579.79	1556.84	1559.28
2887.06	2899.82	2899.93
5969.67	5957.80	5961.32
14204.92	14233.73	14235.30

Que muestra como el error es pequeño.

Habiendo obtenido estos resultados numéricos Ritz, ver figura 8 con los casos obtenidos por Ritz, los comparó con los que se obtienen de experimentos físicos hechos por Chladni. Se observa en la figura el primer tipo de simetría que Ritz calculó. Se observa como en el caso II, el resultado experimental y teórico son muy similares, (en el caso I trivial también). En el caso III, no existen medidas disponibles. El IV no fue obtenido por Chladni y vemos como surgen patrones algo complicados. Ritz empleó su método para calcular el tono del sonido, y los comparó con los obtenidos experimentalmente. A causa del gran costo computacional, Ritz solo usó su método completo para aproximar los 9 primeros. Para el resto sólo uso el primer término. Es asombroso como los resultados están de acuerdo con los experimentos de Chladni.

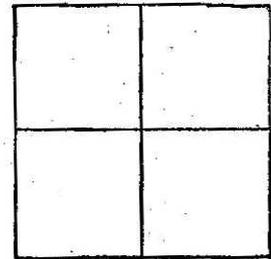
Los originales se muestran a continuación [Ritz 1909]:

A. Lösungen, die in x und y ungerade und symmetrisch sind:

I. Grundton. $\lambda = 12,43 - 18,0 \delta \mu.$

$$\begin{aligned} \omega = & \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 + 0,0394(u_1 v_3 + v_1 u_3) \\ & - 0,0040 u_3 v_3 - 0,0034(u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ & + 0,0011(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,0019 u_5 v_5. \end{aligned}$$

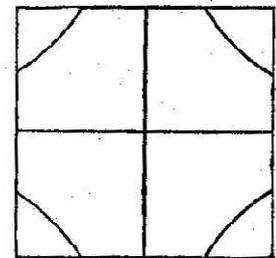
Fig. 1.



II. $\lambda = 378 - 57 \delta \mu.$

$$\begin{aligned} \omega = & -0,075 u_1 v_1 + (u_1 v_3 + u_3 v_1) \\ & + 0,173 u_3 v_3 + 0,045(u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ & - 0,015(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,029 u_5 v_5. \end{aligned}$$

Fig. 2.



Es ist

y beob. :	0,530	0,578	0,630	0,690	0,752	0,819	0,893
x beob. :	0,937 ₅	0,8750	0,812 ₅	0,7500	0,687 ₅	0,6250	0,562 ₅
x ber. - x beob. :	-0,003	-0,002	0,000	-0,001	-0,000 ₅	0,000	0,000

III. $\lambda = 1554.$

$$\begin{aligned} \omega &= 0,009 u_1 v_1 - 0,075 (u_1 v_3 + v_1 u_3) \\ &+ u_3 v_3 - 0,057 (u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ &+ 0,121 (u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,007 u_5 v_5. \end{aligned}$$

Messungen fehlen.

R.

IV. $\lambda = 2945.$

$$\omega = u_1 v_5 + u_5 v_1.$$

Diese Figur fehlt bei Chladni.

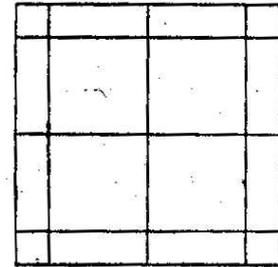
V. $\lambda = 6303.$

$$\omega = u_3 v_5 + u_5 v_3.$$

VI. $\lambda = 13674.$

$$\omega = u_5 v_5.$$

Fig. 3.



20

Fig. 4.

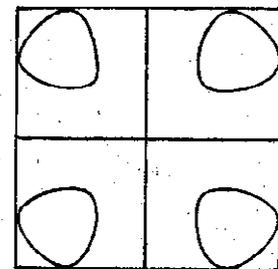


Fig. 5.

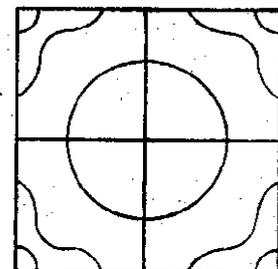


Fig. 6.

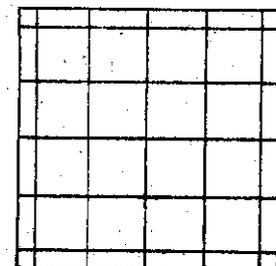


Figura 8: Original del libro de Ritz [Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik]

Si representamos esos modos las figuras quedan para los mismos autovalores de las figuras como:

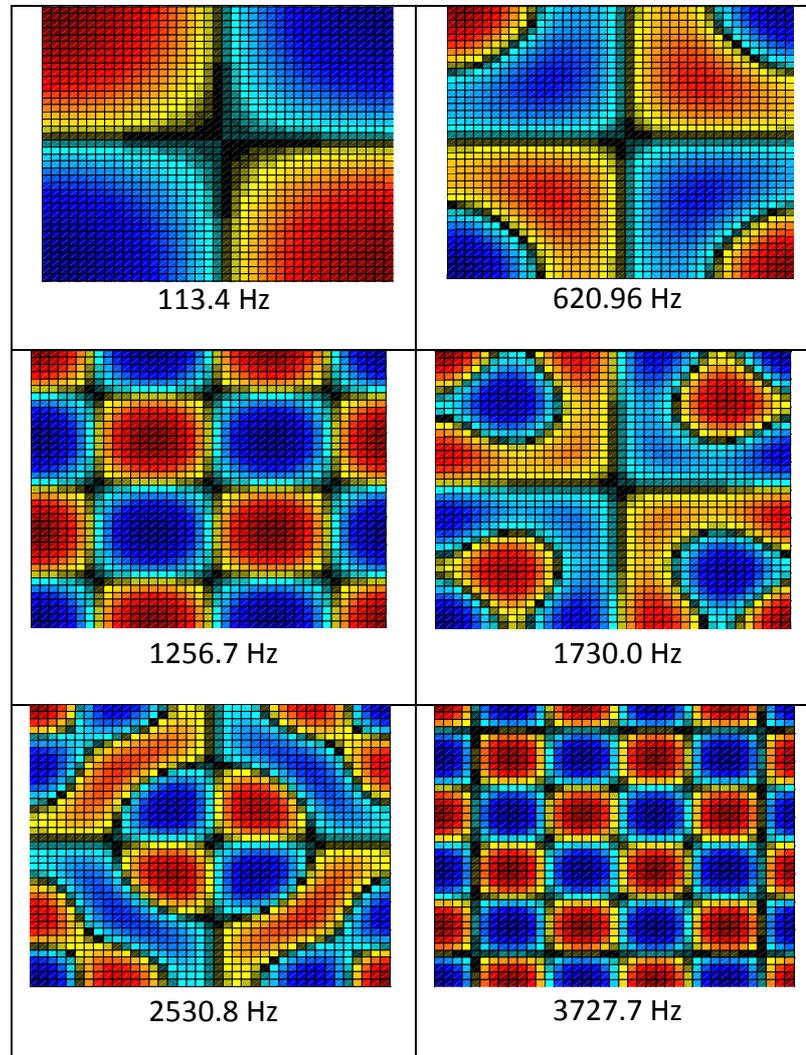


Figura 9: Figuras calculadas por el método de Ritz.

Las frecuencias que aparecen debajo se han realizado deshaciendo el cambio:

$$v = \sqrt{\frac{\lambda D}{\rho h 4\pi^4}}$$

Se observa como las formas coinciden con las calculadas a mano por Ritz. (En negro las partes de desplazamiento cero). En el capítulo de comparación se verá como cuadra con lo obtenido en elementos finitos.

Rayleigh acusó a Ritz de plagio pues sostenía que sus ideas estaban presentes en trabajos previos, es por eso que se conoce al método como Rayleigh-Ritz, sin embargo y de

acuerdo con Leissa (2005) este nombre no está del todo justificado y debería darse la autoría a Ritz.

2.4.3. FORMULACIÓN ACÚSTICA

Existe otra forma de tratar el problema mediante la ecuación de onda en 2D. Las figuras siguientes (figura 10) son las que obtuvo Chladni, y son las que vamos a intentar representar, (se observa como coinciden con las de Ritz en el apartado anterior)

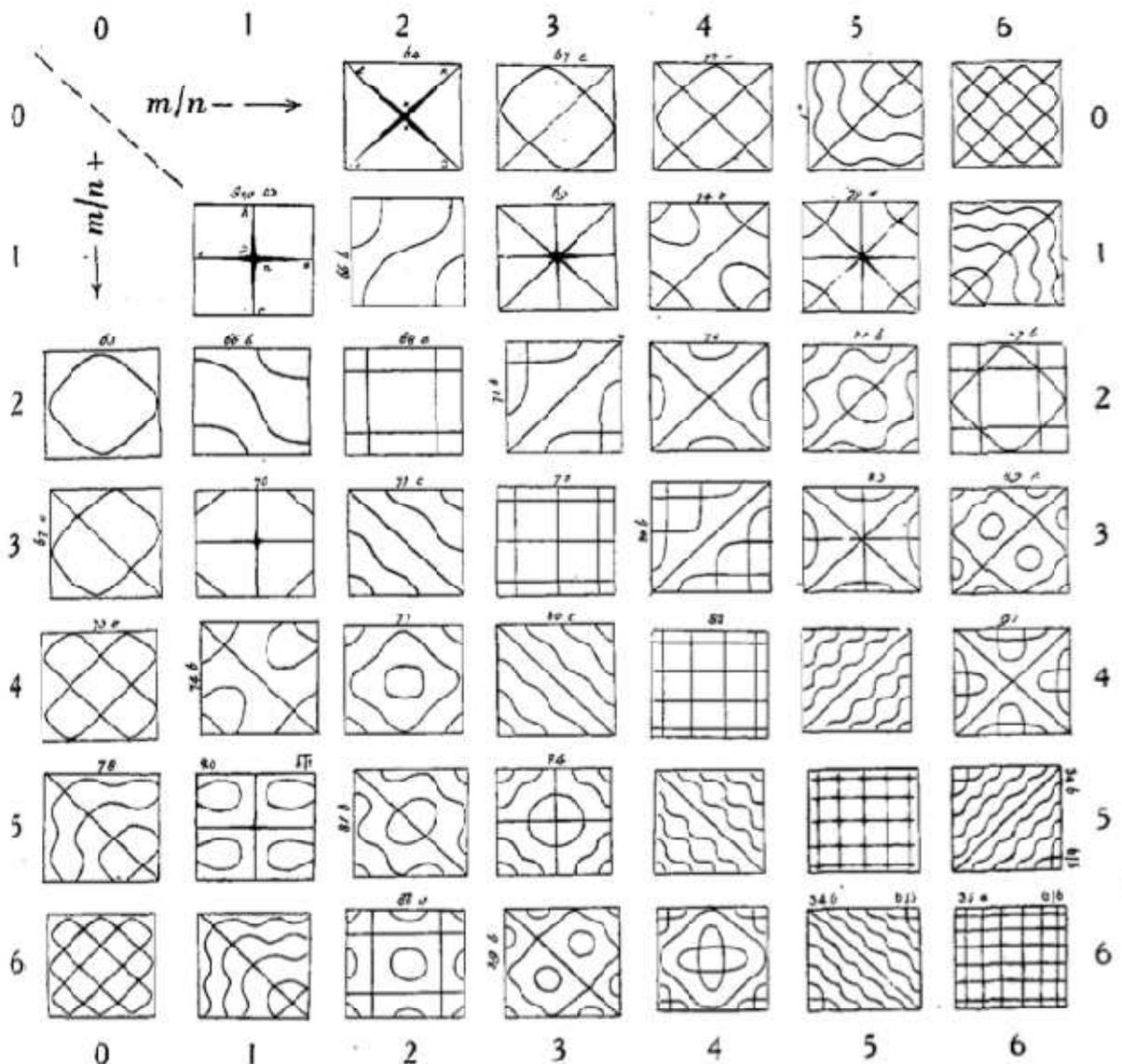


Figura 10: Figuras dibujadas por Chladni

La ecuación de onda para una placa plana es:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2}$$

Siendo c la velocidad de la onda en la placa y U el desplazamiento de un punto (x, y) perpendicular a la placa para cualquier instante t .

Nuevamente se va a usar un método de separación de variables para resolver esta ecuación. Vuelve a ser recurrente pues como se dijo antes parece claro que para pequeños desplazamientos la solución física está desacoplada, pero en esta ocasión más fuertemente pues se supondrán desacopladas x e y también. Se escribe por tanto:

$$X = X(x)$$

$$Y = Y(y)$$

$$T = T(t)$$

Y el desplazamiento:

$$U(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

Derivando respecto a cada una de las variables:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} = X(x)Y(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} = Y(y)T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} = X(x)T(t) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de onda:

$$\frac{1}{c^2} X(x)Y(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = Y(y)T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)T(t) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

Que al dividir por las tres variables resulta:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \frac{1}{T(t)} = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{1}{X(x)} + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{1}{Y(y)}$$

Ambos lados de la ecuación son independientes el uno del otro, por tanto iguales a una constante, llamémosle $-k^2$.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2$$

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k^2$$

Con la segunda ecuación operamos de la misma manera:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_1^2$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_2^2$$

$$-(k_1^2 + k_2^2) = -k^2$$

Con lo que las soluciones que se obtienen son:

$$\begin{aligned} T(t) &= a_1 e^{\pm i c k t} \\ X(x) &= a_2 e^{\pm i k_1 x} \\ Y(y) &= a_2 e^{\pm i k_2 y} \end{aligned}$$

Donde podemos reescribir conjuntamente, siendo A una constante:

$$U = A \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\}_{k_1 x} \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\}_{k_2 y} \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\}_{c k t}$$

Los corchetes indican que pueden ser tanto senos como cosenos la solución.

El problema que se plantea queda de la siguiente forma introduciendo las condiciones de contorno:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2}; \quad 0 < x < a, 0 < y < a, t > 0$$

$$U\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0; \quad t > 0$$

$$U(x, y, 0) = 0;$$

Aplicando la condición de contorno a la solución:

$$U = A \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} k_1 \left\{ \frac{a \sin}{2 \cos} \right\} k_2 \left\{ \frac{a \sin}{2 \cos} \right\} ckt = 0$$

El último término es siempre cero, por tanto los dos primeros deben serlo independientemente:

$$\left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} k_1 \frac{a}{2} = 0$$

$$\left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} k_2 \frac{a}{2} = 0$$

Tomando el seno por ejemplo:

$$\sin k_1 \frac{a}{2} = 0, k_1 = \frac{2m\pi}{a}$$

$$\cos k_2 \frac{a}{2} = 0, k_2 = \frac{2n\pi}{a}$$

Donde m y n son factores integrantes, resultando la solución del problema:

$$U = A \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} ckt$$

Aplicando la condición de que la placa está inicialmente plana nos quedamos con el término $\cos(ckt)$:

$$U = A \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \cos(ckt)$$

Metiendo esta solución en la ecuación de onda se obtiene:

$$(ck)^2(-U) = c^2 \left(-\frac{2^2 m^2 \pi^2}{a^2} u - \frac{2^2 n^2 \pi^2}{a^2} u \right)$$

Resultando,

$$(ck)^2 = \frac{4c^2\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2)$$

La solución es:

$$U = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) [A_{mn} \cos(ckt) + B_{mn} \sin(ckt)]$$

Donde:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^a u_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx dy$$

$$B_{mn} = \frac{4}{abck} \int_0^a \int_0^a \dot{u}_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx dy$$

Estas condiciones iniciales vienen determinadas por condiciones arbitrarias que definirán las condiciones iniciales, pudiendo calcularlas de acuerdo al desarrollo de la serie de Fourier.

Para esta solución se puede suponer otro par de factores integrantes contruidos de la misma forma (sugerido por Rayleigh and Strutt 1945) que darían como resultado para las líneas nodales:

$$C \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + D \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 0$$

Con esta solución se pueden cazar las soluciones simétricas que se obtienen en la placa y que a la postre son las que se producen. Con esta solución fueron calculados todos los patrones de Chladni. En la siguiente, figura 11, se muestran observándose como las formas coinciden con las de la figura 10.

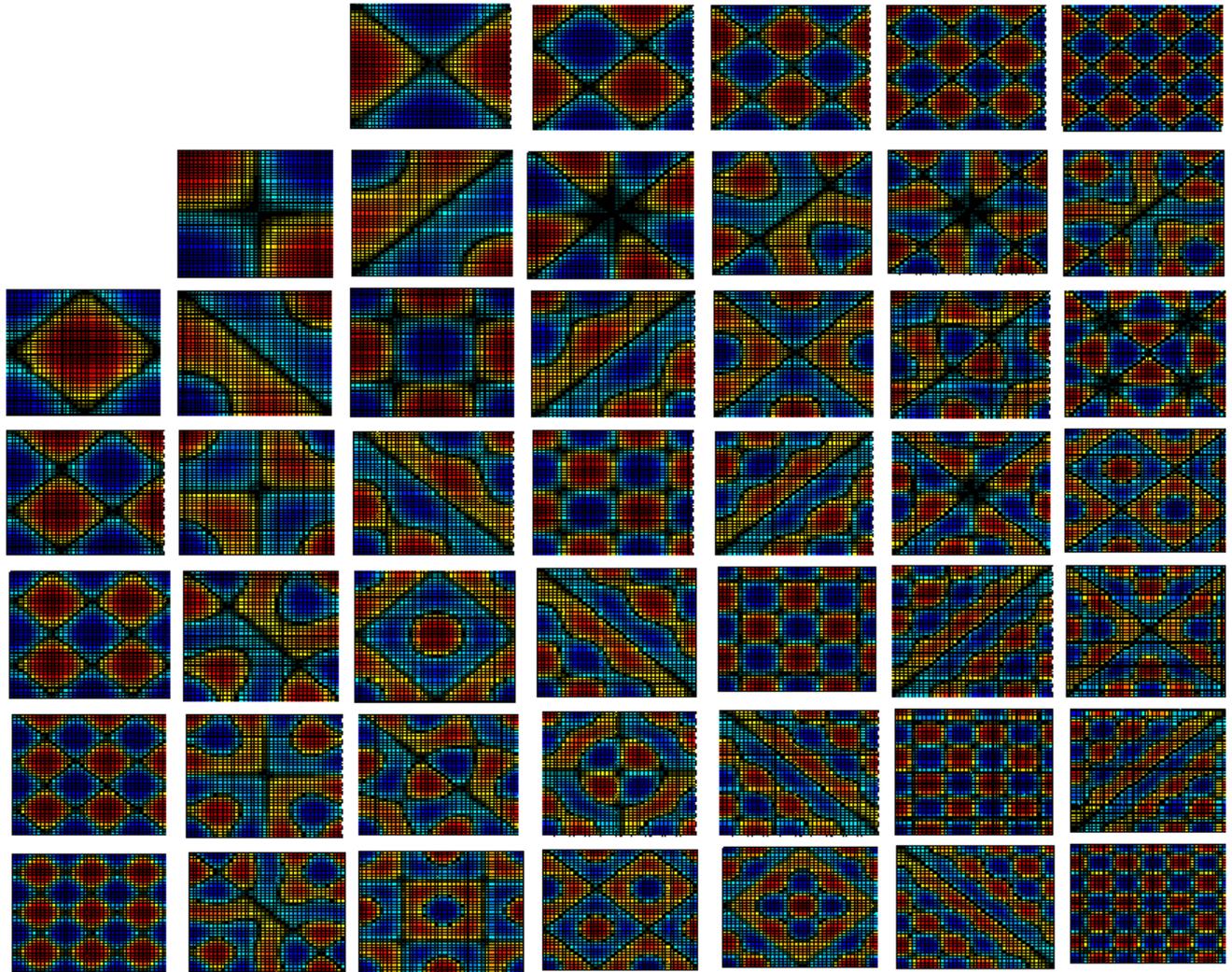


Figura 11: Patrones usando la ecuación de onda

El último punto que queda por tratar es el de las frecuencias naturales. Se ha demostrado como la expresión es de la forma:

$$\omega_{mn} = \lambda_{mn}^2 \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2}$$

Los valores de $\lambda_{mn}^2 = \alpha^2 + \beta^2$ son desconocidos pero sabemos que será un factor que anule una serie de cosenos y senos, por tanto de la forma:

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \text{ o } \alpha = \frac{m\pi}{2a}$$

$$\beta = \frac{n\pi}{a} \text{ o } \beta = \frac{n\pi}{2a}$$

2.5. ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS

Para la realización de un análisis por elementos finitos se hará una simulación con Nastran-Patran usando los datos de la placa real:

Dimensiones: $180 \times 180 \times 1 \text{ mm}^3$

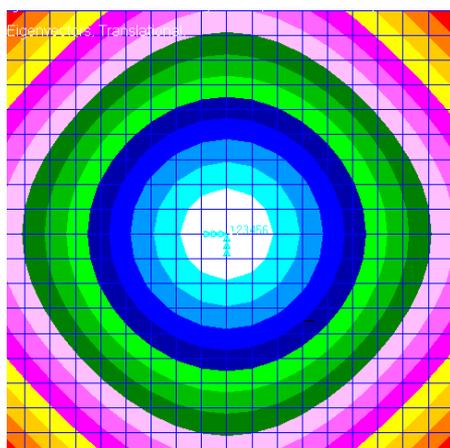
Masa: 213 g

Densidad: $\rho = 6574.074 \text{ kg/m}^3$

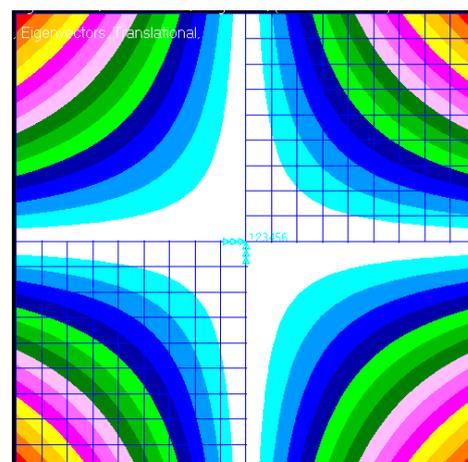
El material lo desconocemos pero dados los datos de densidad se supondrá que se trata de acero, se tomara como módulo de Young $E = 210 \text{ MPa}$ y como coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

El análisis que va a realizarse es idéntico al planteado en el laboratorio, una placa empotrada en su centro con bordes libres forzada a oscilar a una frecuencia determinada. Las frecuencias a las que se harán oscilar la placa serán las cercanas a las obtenidas en el laboratorio con el fin de obtener los mismos patrones. Están añadidas varias frecuencias que en el laboratorio no aparecen, esto es debido a que no se trataban de frecuencias resonantes y por tanto la diferencia de desplazamientos no es lo suficientemente grande como para crear líneas nodales.

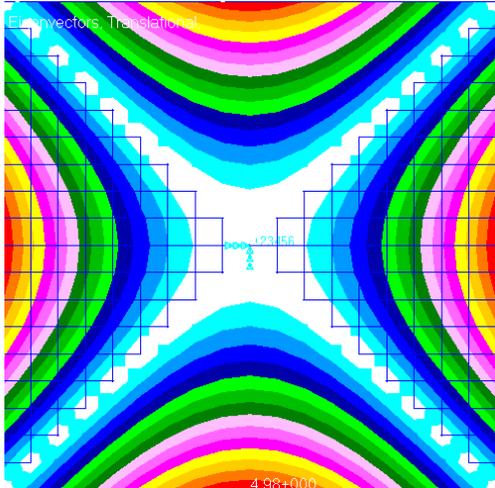
Las figuras que se obtiene son las siguientes, en blanco los puntos de amplitud cero y así hasta el rojo, en la figura (i) se puede apreciar la escala de colores:



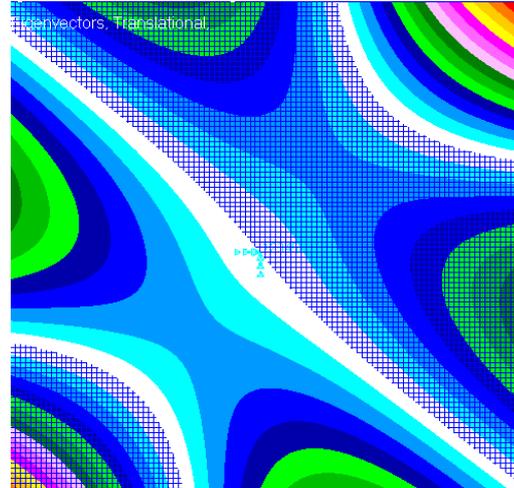
i) 93.77 Hz



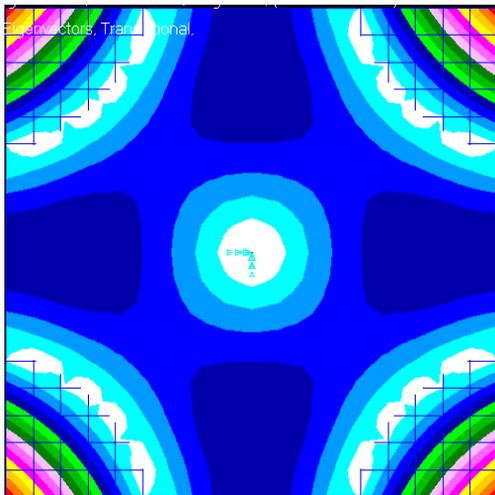
ii) 112.39 Hz



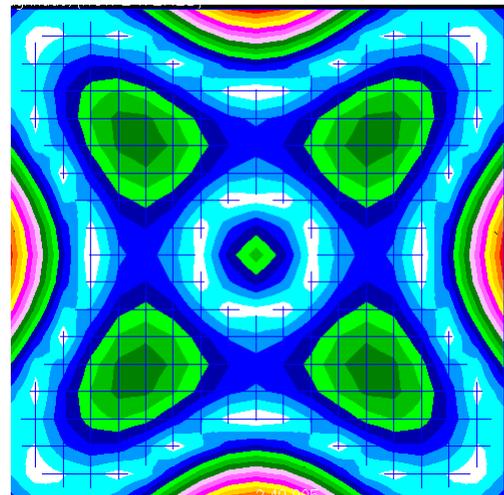
iii) 162.89 Hz



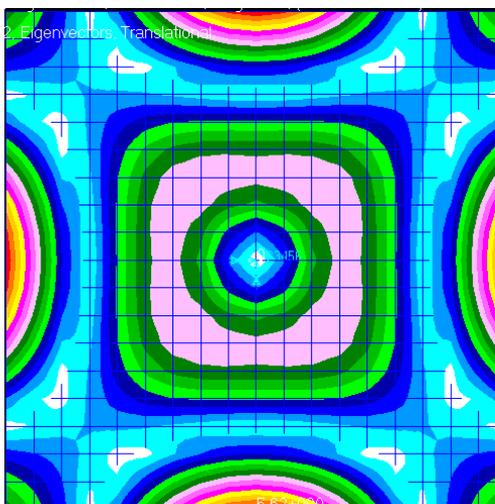
iv) 230 Hz



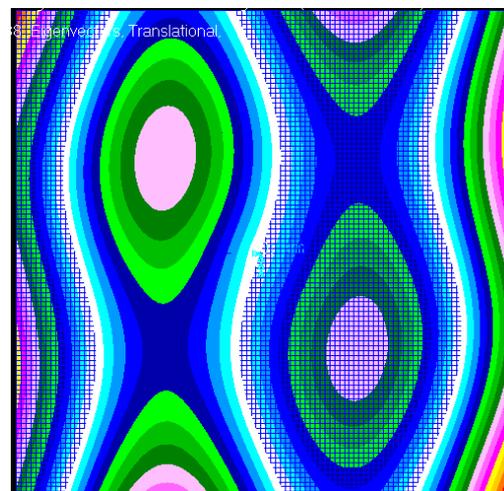
v) 379.5 Hz



vi) 673 Hz



vii) 750.82 Hz



viii) 790.06 Hz

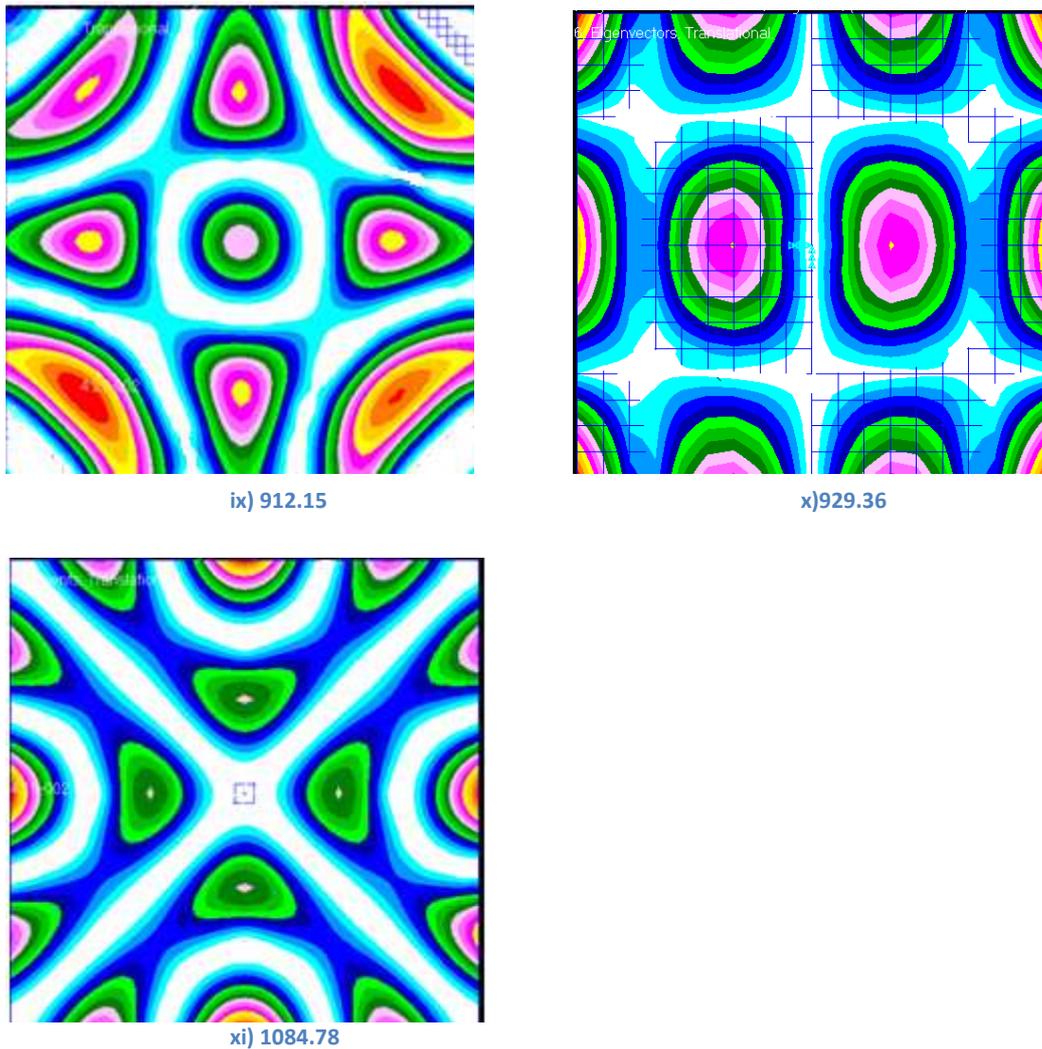


Figura 12: Patrones usando elementos finitos.

Como se observa coinciden en las formas y de forma aproximada en las frecuencias. Se comprueba como para la forma de 162.89 Hz se obtenía en la realidad 152 Hz, o como para la forma de 379.5 Hz se obtenía 386 Hz. Más adelante se discutirán estos resultados.

También se va a realizar un estudio paramétrico de las variables que se suponen que intervienen en la respuesta, como son el espesor, densidad, módulo elástico y módulo de Poisson. El análisis será de modos naturales. Se elegirá un modo por su forma, sobre este se variarán el resto de parámetros, (el modo elegido es el de la figura v).

En primer lugar analizaremos el comportamiento frente al espesor, a priori debe cumplirse que la rigidez de la placa será mayor cuanto mayor sea el espesor por tanto las

frecuencias naturales aumenten, los resultados proporcionados por elementos finitos son los siguientes.

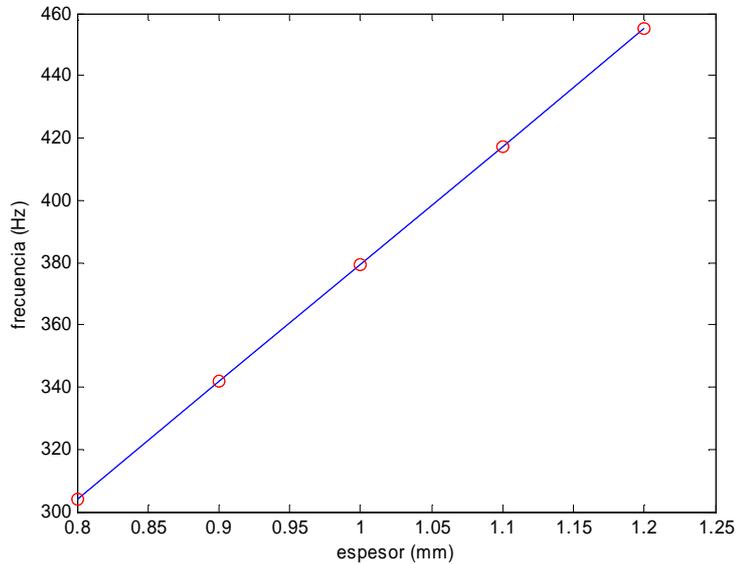


Figura 13: Frecuencia frente a espesor

Como se predijo el comportamiento con el espesor (figura 13) es de aumentar la frecuencia natural, además se puede ver como el comportamiento es lineal en este rango. Ahora se va a ver el comportamiento frente al módulo de Poisson, cuanto mayor sea el módulo mas rigidez se presupone:

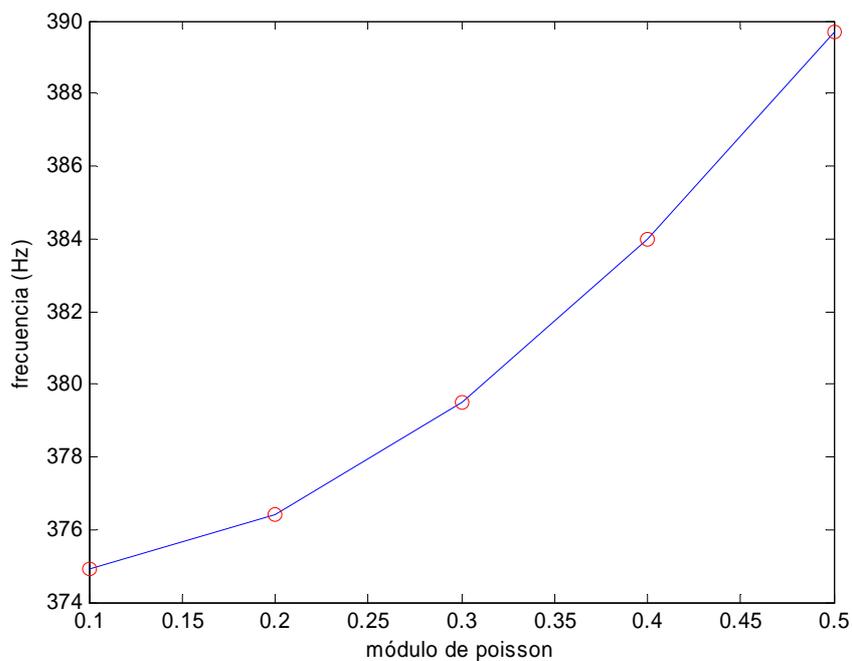


Figura 14: frecuencia frente a módulo de Poisson

Se comprueba como efectivamente aumenta y en este caso tiene una forma cuadrática (figura 14).

Para la densidad se espera que disminuya pues la masa aumenta y si se hace una analogía con un muelle cuya frecuencia natural es $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$.

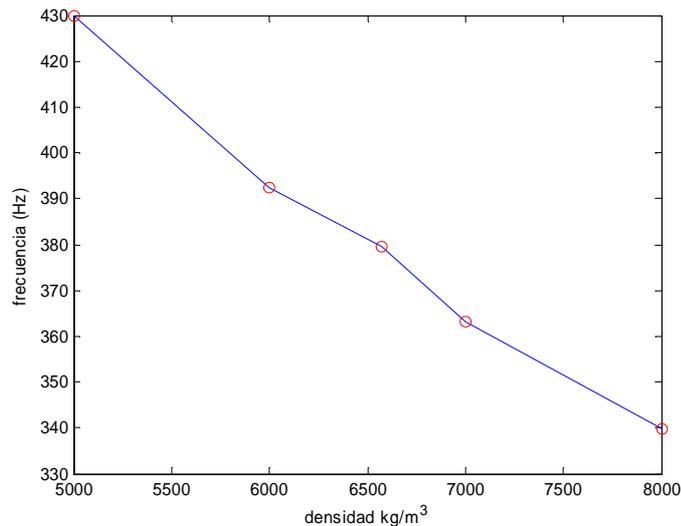


Figura 15: Frecuencia frente a densidad

El comportamiento se aproxima por una recta de pendiente negativa tal y como se esperaba, (figura 15).

Por último para el módulo elástico (figura 16) que es análogo a la rigidez debe aumentar:

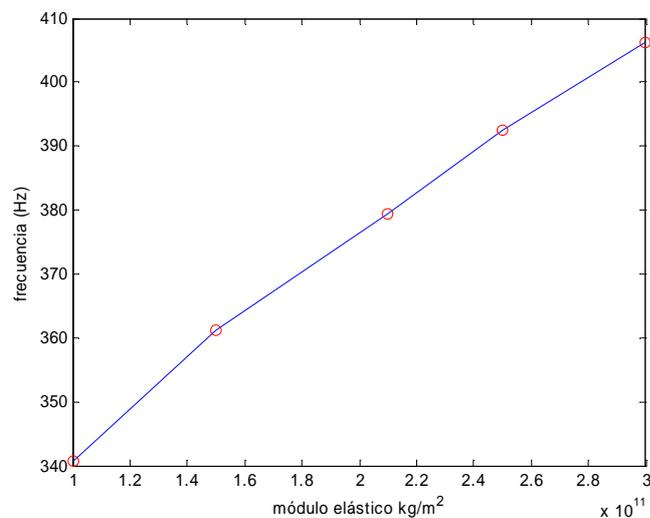


Figura 16: Frecuencia frente a módulo elástico

2.6. COMPARACION DE LOS RESULTADOS

En este apartado podemos dividir dos formas de las figuras y frecuencias.

Como se dijo en el punto 2.4.3. los resultados obtenidos mediante la formulación acústica coinciden completamente con los experimentales de Chladni, es más estos coinciden con los obtenidos mediante la resolución del problema clásico resuelto mediante el método de Ritz, este método sí que daba las frecuencias del sistema, y será de esta manera como se comparará con los obtenidos en el laboratorio.

Veamos para los primeros modos como coinciden con las diferentes teorías, izquierda experimental, centro analítica (Ritz), derecha elementos finitos:

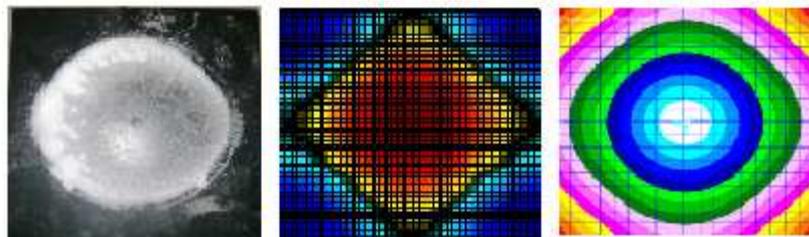


Figura 17: Comparación figura resonante 1

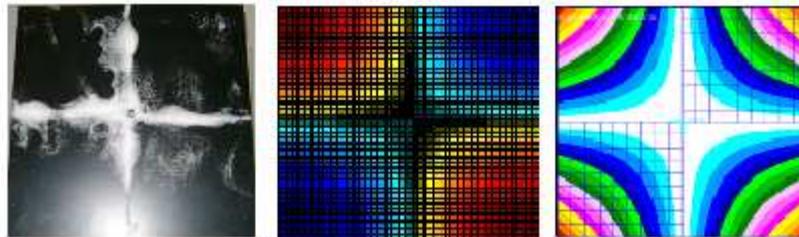


Figura 18: Comparación figura resonante 2

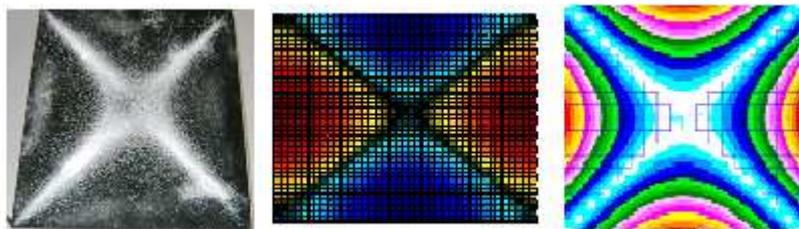


Figura 19: Comparación figura resonante 3

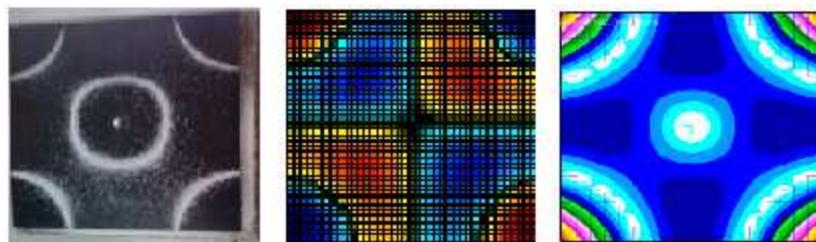


Figura 20: Comparación figura resonante 4

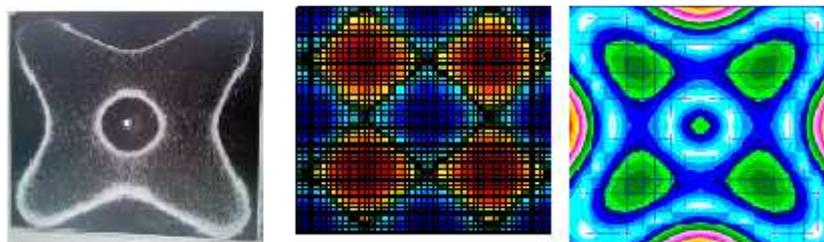


Figura 21: Comparación figura resonante 5

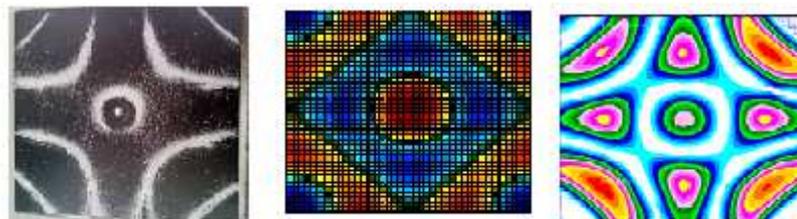


Figura 22: comparación figura resonante 6

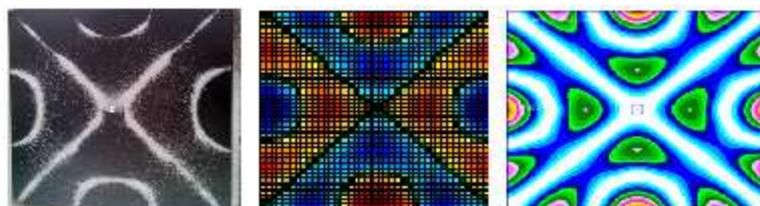


Figura 23: Comparación figura resonante 7

Las figuras coinciden en los tres casos y las frecuencias son próximas como se recogen en la siguiente tabla.

Figura	Frecuencia (Hz) Experimental	Frecuencia (Hz) Aproximación de Ritz	Frecuencia (Hz) elementos finitos (Patran)
17	94	97.4	93.7
18	111	113.4	112.3
19	152	163.7	162.8
20	386	390.5	379.5
21	647	619.7	673.4
22	924	948.8	929.3
23	1065	1100.2	1085

Tabla 1: Frecuencias según los métodos

Se observa como los resultados en frecuencia son bastante buenos, para valores más altos no cuadran tan bien los valores. Esto puede ser debido al acoplamiento entre los modos que hacen que ningún modo domine de forma correcta, en el laboratorio si se puede observar pues lo que se ve es una combinación lineal de todos los modos participantes.

Chladni propuso una fórmula del siguiente tipo para el cálculo de las frecuencias, es una fórmula completamente empírica:

$$f = C(m + 2n)^p$$

En la ley el valor de la constante C sólo depende, en principio, de las propiedades del plato o platillo usado en el experimento. Sin embargo, el exponente puede sufrir pequeñas variaciones igual que el 2 multiplicando los nodos. También existe una expresión más general, del mismo tipo de la ley de Chladni:

$$f = C(m + bn)^p$$

Esta amplía la relación anterior de chladni, para distintos valores de “b” y “p”, a los platillos ya que existen pequeñas variaciones en estos valores. Pero esta ley solo es una aproximación al fenómeno creado, hasta el año 1816 Germain (1776-1831) encontró una forma más exacta que complementaba lo que había hecho Chladni. Publicó esta ecuación en “Memoir on the Vibrations of Elastic Plates” 1816 .

En las placas cuadradas los valores de “m,n” se pueden observar a simple vista en el experimento de Chladni.

m: el numero de modos en el eje x.
n: el numero de nodos en el eje y.

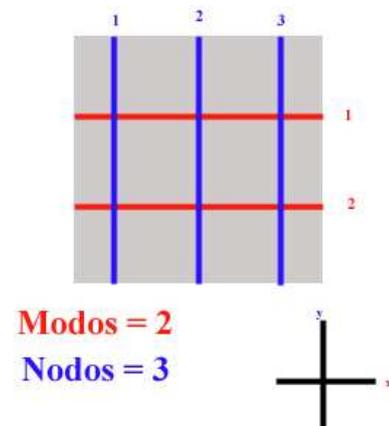


Figura 24: Forma de contar m y n.

Los valores de “m” y “n” se representan como coordenadas “(m,n)” estos valores se representan en un cuadrado como en el diagrama de arriba; si m= 2 y n = 1 el diagrama se representaría con dos modos horizontales (eje de x) y nodo vertical (eje de y).



Figura 25: Figura donde la pareja vale (2,0) o (0,2)



Figura 26: Figura donde la pareja vale (4,2) o (2,4)

La fórmula que va a usarse es la propuesta por Chladni, así que basándonos en las figuras obtenidas obtenemos la siguiente tabla de valores para los valores que están dentro de paréntesis:

$$f = C(m + 2n)^p$$

Frecuencia (Hz)	pareja
152	(2,0)
386	(2,2)
647	(2,1)
750	(3,1)
924	(4,0)
1065	(4,2)
1551	(4,3)
1823	(4,4)
2036	(5,2)
2142	(5,2)
2681	(5,3)
3267	(6,2)
3432	(6,4)
3585	(8,3)
3720	(8,5)
4059	(8,6)
4359	(8,8)
4526	(8,10)

Tabla 2: Frecuencia frente a pareja de valores (m,n)

Para calcular los valores de C y p se va a proceder de la siguiente forma:

$$f_i = C(m + 2n)_i^p$$

$$f_j = C(m + 2n)_j^p$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{f_i}{f_j} = \left(\frac{(m + 2n)_i}{(m + 2n)_j} \right)^p$$

Y tomando logaritmos:

$$\ln \frac{f_i}{f_j} = p \ln \left(\frac{(m + 2n)_i}{(m + 2n)_j} \right)$$

Despejando p:

$$p = \frac{\ln \frac{f_i}{f_j}}{\ln \left(\frac{(m + 2n)_i}{(m + 2n)_j} \right)}$$

Con esto se obtendría el valor de p, para el valor de C bastaría con sustituir para la frecuencia:

$$C = \frac{f_i}{(m + 2n)_i^p}$$

Con estos datos lo que se hace es combinar todas las posibles soluciones par i y j con fin de obtener el mejor resultado, de esta forma se obtienen los valores de $C = 15,6819629$ y $p = 1,63916022$. Con una desviación típica de 0,00748155, por lo que el resultado es realmente satisfactorio.

En la siguiente gráfica se pueden observar los valores de frecuencia y la que proporciona la ecuación de Chladni con los parámetros C y p calculados. La frecuencia en hercios frente al paréntesis de la ecuación de Chladni. En rojo están los valores obtenidos del experimento y en azul la curva calculada con los parámetros obtenidos. Como puede observarse las medidas están próximas a la curva, información que ya se sabía debido a los datos estadísticos obtenidos, (figura 27).

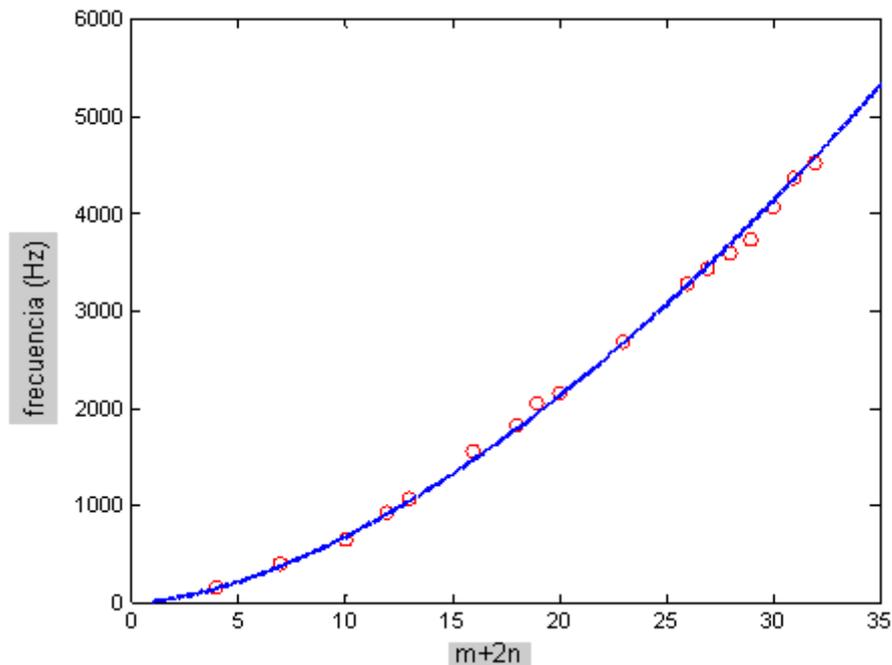


Figura 27: frecuencia frente a $m+2n$

Esta ecuación es la de Chladni, podría modificarse para el parámetro b y sería posible incluso conseguir mejores resultados. Con este parámetro tomando el valor $b = 1.78$, se obtiene $C = 16,7423803$ y $p = 1,66143436$, con una desviación típica de $0,00553743$. Realmente la diferencia no es grande, (figura 28).

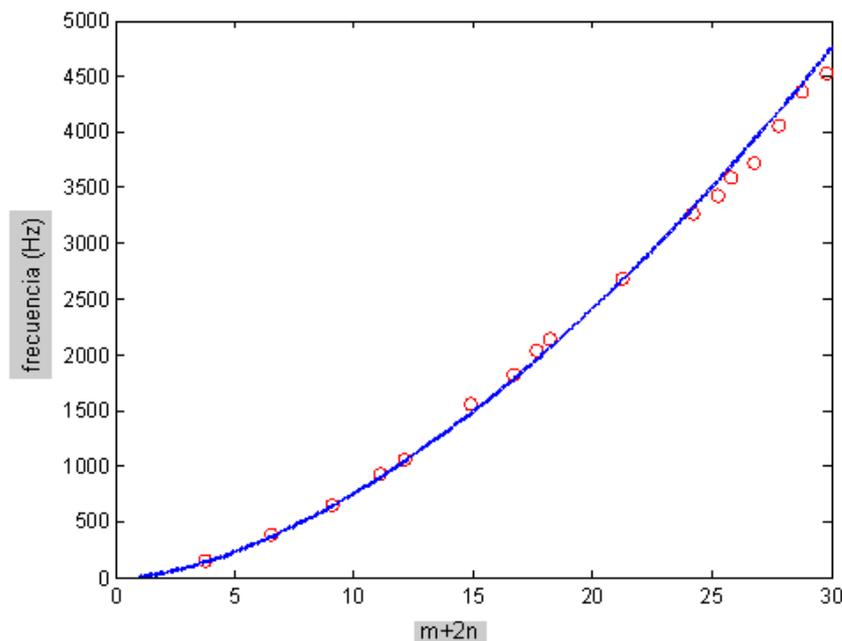


Figura 28: Frecuencia frente a $m+bn$, con $b = 1.78$

2.7. CONCLUSIONES

Lo primero que se propuso fue la construcción de una máquina que reprodujera el experimento de Chladni. En un primer momento se pensó en la fabricación mediante un altavoz unido a un programa de generación de frecuencias. Sin embargo se encontró en el mercado y por un precio ajustado los elementos para la realización de la práctica. Tras su adquisición se vio un perfecto funcionamiento, por lo que se puede considerar este punto como un éxito.

En segundo término la propia realización de la práctica donde se han encontrado las frecuencias naturales y se han observado las figuras características. El procedimiento es sencillo y automatizado.

En tercer lugar la formulación matemática del problema se ha tomado de diversa bibliografía donde el problema tal y como está planteado nunca se resolvió completamente. Las condiciones de contorno aquí expuestas son complicadas y la resolución viable es solo mediante métodos numéricos. La forma sí que se ha conseguido que coincida con los experimentos.

Posteriormente se ha hecho un modelo de elementos finitos, donde se han encontrado las formas de las primeras frecuencias naturales que han estado en consonancia con el resto de partes, quedando cerrado el análisis global.

Por último se han calculado las frecuencias naturales mediante la ley de Chladni. Los resultados han sido bastante satisfactorios como se ha podido apreciar en las gráficas, obteniendo la función experimental de Chladni.