

### 3. ANÁLISIS DINÁMICO DE UNA ESTRUCTURA

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

El problema que va a resolverse es el de dos vigas como las de la figura 23 de donde cuelga una masa en uno de sus extremos. Posteriormente se cortará el cable que une la masa con la estructura convirtiendo el problema en uno dinámico.

El objetivo es realizar un análisis estático del problema para ver las condiciones iniciales del problema dinámico, y luego calcular la respuesta en el tiempo del problema.

Posteriormente y con los resultados obtenidos para poder estimar el tipo de barra usado y el rango del acelerómetro, se realizará un experimento igual en el laboratorio y se comprobará si ambos cálculos concuerdan.

#### 3.2. ANÁLISIS TEÓRICO

La estructura es como se muestra en la figura:

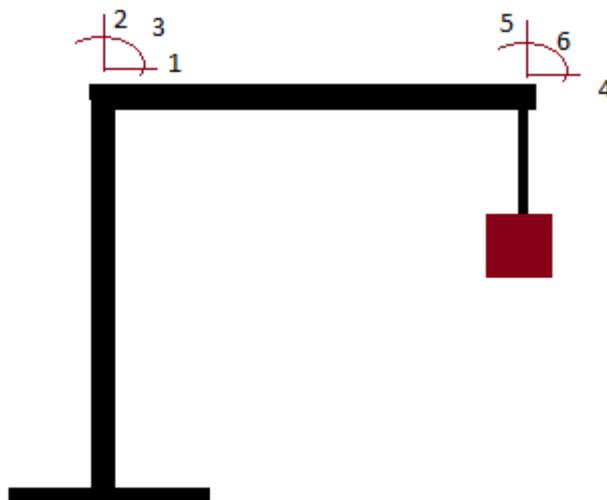


Figura 29: Grados de libertad del sistema

Los grados de libertad son los mostrados en la figura, 1, 2, 4, 5 son desplazamientos y 3 y 6 giros.

Para plantear el problema una vez identificados los grados de libertad es necesario saber el tipo que barras se usan. Las propiedades de estas son como siguen:

$$E = 2.1 \cdot 10^{10} \text{ Kg/m}^2$$

$$\begin{aligned}
 A &= 3.5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \\
 I &= 4.92 \cdot 10^{-10} \text{m}^4 \\
 L_h &= 0.68 \text{ m} \\
 L_v &= 0.65 \text{ m} \\
 \rho &= 7850 \text{ Kg/m}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_h &= L_h A \rho \\
 m_v &= L_v A \rho
 \end{aligned}$$

La sección que se ha tomado es una cuadrada hueca de 1 cm de lado y 1 mm de espesor.

Con estos datos la matriz de rigidez de la barra horizontal es:

$$K_h = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_h} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L_h^3} & \frac{6EI}{L_h^2} & 0 & -\frac{12EI}{L_h^3} & \frac{6EI}{L_h^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L_h^2} & \frac{4EI}{L_h} & 0 & -\frac{6EI}{L_h^2} & \frac{2EI}{L_h} \\ -\frac{EA}{L_h} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L_h^3} & -\frac{6EI}{L_h^2} & 0 & \frac{12EI}{L_h^3} & -\frac{6EI}{L_h^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L_h^2} & \frac{2EI}{L_h} & 0 & -\frac{6EI}{L_h^2} & \frac{4EI}{L_h} \end{bmatrix}$$

Para la vertical solo son necesarios los grados de libertad 1,2 y 3, del extremo girados 90 grados la matriz de rigidez queda:

$$K_v = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_v^3} & 0 & \frac{6EI}{L_v^2} \\ 0 & \frac{EA}{L_v} & 0 \\ \frac{6EI}{L_v^2} & 0 & \frac{4EI}{L_v} \end{bmatrix}$$

Sumando ambas matrices el resultado es:

$$K_h = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_h} + \frac{12EI}{L_v^3} & 0 & \frac{6EI}{L_v^2} & -\frac{EA}{L_h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L_h^3} + \frac{EA}{L_v} & \frac{6EI}{L_h^2} & 0 & -\frac{12EI}{L_h^3} & \frac{6EI}{L_h^2} \\ \frac{6EI}{L_v^2} & \frac{6EI}{L_h^2} & \frac{4EI}{L_h} + \frac{4EI}{L_v} & 0 & -\frac{6EI}{L_h^2} & \frac{2EI}{L_h} \\ -\frac{EA}{L_h} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L_h^3} & -\frac{6EI}{L_h^2} & 0 & \frac{12EI}{L_h^3} & -\frac{6EI}{L_h^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L_h^2} & \frac{2EI}{L_h} & 0 & -\frac{6EI}{L_h^2} & \frac{4EI}{L_h} \end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas es, siendo  $m_s$  la masa suspendida.

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_s g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con todos estos datos se obtiene como resultado el siguiente vector de desplazamientos nodales para los diferentes pesos, (tabla 3):

g.d.l.	1 kg	0.5 kg
$u_{01}$	0.0139 m	0.0070 m
$u_{02}$	-0.0000 m	0.0000 m
$\theta_{03}$	-0.0428 rad	-0.0214 rad
$u_{04}$	0.0139 m	0.0070 m
$u_{05}$	-0.0392 m	-0.0196 m
$\theta_{06}$	-0.0652 rad	-0.0326 rad

Tabla 3: valores de las condiciones de contorno iniciales

Estas serán las condiciones iniciales del problema dinámico.

Para abordar el problema dinámico es necesario construir la matriz de masa. Su expresión es como sigue haciendo los mismos cambios que en la matriz de rigidez:

$$M_h = \frac{m_1 L_h}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L_h & 0 & 54 & -13L_h \\ 0 & 22L_h & 4L_h^2 & 0 & 13L_h & -3L_h^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L_h & 0 & 156 & -22L_h \\ 0 & -13L_h & -3L_h^2 & 0 & -22L_h & 4L_h^2 \end{bmatrix}$$

$$M_v = \frac{m_2 L_v}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 22L_v \\ 0 & 140 & 0 \\ 22L_v & 0 & 4L_v^2 \end{bmatrix}$$

La suma de las matrices da como resultado la matriz de masa.

Con esto se puede resolver el problema dinámico:

$$K\ddot{u} + Mu = 0$$

Bajo las condiciones iniciales:  $u(t = 0) = u_0$ .

Que se resuelve mediante el problema de autovalores y autovectores:

$$|K - \omega^2 M| = 0$$

$$\omega_1 = 8617.1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 4203.2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 515.24 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = 192.05 \text{ rad/s}$$

$$\omega_5 = 17.83 \text{ rad/s}$$

$$\omega_6 = 47.91 \text{ rad/s}$$

Para poder representar los desplazamientos es necesario cambiar de coordenadas, esto se consigue mediante las masas modales de cada grado de libertad:

$$M_i = \phi_i^T M \phi_i$$

Siendo  $\phi_i$  el autovector asociado.

Así se pueden escribir las condiciones iniciales como:

$$\xi_{i0} = \frac{\phi_i^T M u_0}{M_i}$$

Siendo  $\xi_i$  la coordenada generalizada.

Para el análisis dinámico se va a suponer un amortiguamiento,  $\zeta$ . La solución general del problema es:

$$\xi_i(t) = e^{-\zeta\omega_i t}(A * \text{sen}(\omega_{0i}t) + B * \text{cos}(\omega_{0i}t))$$

$$\text{Con } \omega_{0i} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Que como está sujeto a condiciones iniciales de velocidad nula y desplazamiento el inicial antes calculado:

$$A = 0, B = \xi_{i0}$$

Resultando:

$$\xi_i(t) = \xi_{i0} e^{-\zeta\omega_i t} \text{cos}(\omega_{0i}t)$$

Como se quiere calcular la aceleración habrá que calcular la derivada segunda de esta coordenada generalizada respecto al tiempo:

$$\ddot{\xi}_i(t) = \xi_{i0} e^{-\zeta\omega_i t} (\omega_i^2 \zeta^2 \text{cos}(\omega_{0i}t) + 2\omega_i \omega_{0i} \zeta \text{sin}(\omega_{0i}t) - \omega_{0i}^2 \text{cos}(\omega_{0i}t))$$

Con esto se puede calcular las variables reales del problema:

$$u = \sum \phi_i \xi_i$$

$$\ddot{u} = \sum \phi_i \ddot{\xi}_i$$

Con esto podría elegirse un acelerómetro dentro del rango de aceleraciones para colocar en el extremo de la barra realizando un primer disparo inicial. Con los datos del acelerómetro se podrá estimar el amortiguamiento del sistema.

### 3.3. MONTAJE

Para empezar lo que hay que conseguir son las barras para hacer la experiencia. Estas barras están separadas, por tanto hay que realizar en sus extremos un corte en 45 grados para posteriormente soldarlas, (figura 25).



Figura 30: Corte de las barras

El siguiente paso es soldar dichas barras entre y sí empotrarlas al suelo (figura 31).

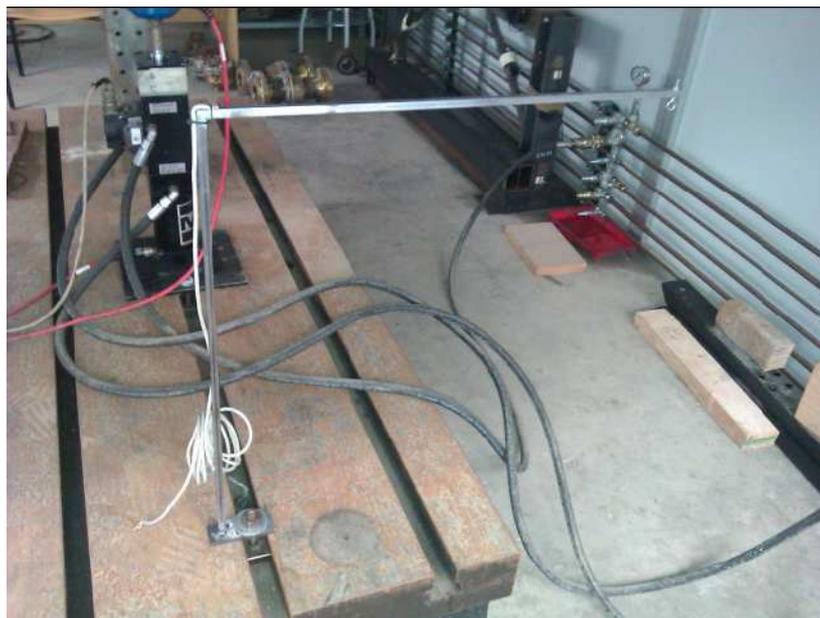


Figura 31: Barras soldadas y empotradas

Por último una vez se tiene la estructura se coloca el acelerómetro y galga extensométrica (figura 32).

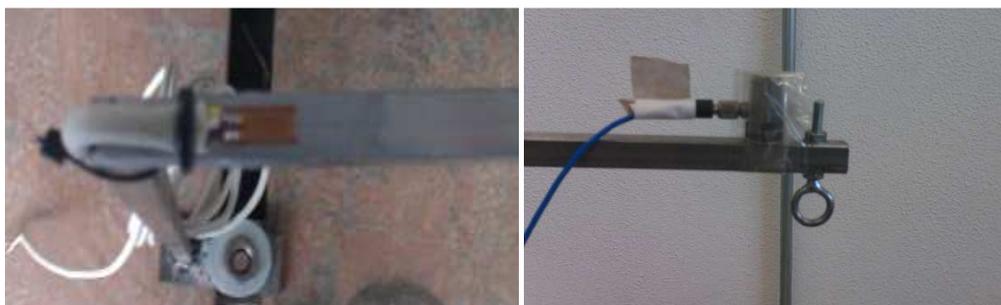


Figura 32: Galga extensométrica y acelerómetro

Una vez colocado todo es necesario leer las salidas de la banda y del acelerómetro. Para ello es necesario un hardware de adquisición de datos, (figura 33). Las salidas de ambos medidores se introducen en las correspondientes tarjetas que a su vez van conectadas al ordenador.

Dentro del ordenador es necesario indicar que tarjeta máquina se usa y que tarjeta de adquisición se usa, así mismo se realiza un sencillo programa en Lab-view donde obtenemos las salidas.



Figura 33: Hardware de adquisición de datos

Finalmente se coloca la masa, pesada previamente, colgando mediante un trozo de papel que puede ser cortado con tijeras, (figura 34).



Figura 34: montaje final

### 3.4. DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

La forma de unir la carga al sistema requería que fuera posible su corte de manera instantánea sin que influyera en los resultados, es por eso que se ha ideado que sea mediante unas tiras de papel que irán roscadas al sistema por un lado y enganchada mediante un nudo a la propia barra.

Lo primero que hay que hacer es saber qué salidas vamos a obtener, para la galga extensométrica el software del ordenador nos proporcionará las microdeformaciones directamente, mientras que para el acelerómetro lo que se mide es el voltaje de salida, cuya conversión es 106.1 mV por g.

Una vez sabidas las salidas hay que saber qué se quiere medir. Lo primero es la deformación estática de la barra, el momento aplicado es:

$$M = -PL_h$$

Que hace que la tensión sea:

$$\sigma = -\frac{M}{I}y$$

Con  $y = \frac{h}{2}$ . Siendo h la mitad de la sección.

Igualando a la ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{PL_h h}{2EI}$$

Para realizar este cálculo y dado que el ajuste de la banda es manual se miden primero las microdeformaciones sin carga, y este valor se le restará a todas las medidas que se hagan.

Las microdeformaciones teóricas son: 82.26 y 164.53 para cargas de 0.5 kg y 1 kg. Las experimentales son: 79.47 y 154.50, donde se ha cogido la media del valor medido durante 20 segundos en todos los casos. Se observa como los resultados son inferiores, esto puede ser debido principalmente a que la colocación de la banda no está justo en el extremo ni tampoco la carga aplicada en el otro extremo, con lo que el valor de la longitud sería menor. No obstante los resultados son bastante satisfactorios y avalan los resultados de deformación obtenidos mediante al cálculo analítico.

En todo este rango de trabajo se comprueba como el acelerómetro está a cero.

Después del análisis estático, se va a hacer el dinámico, bajo las condiciones de contorno expuestas, lo primero que observamos es como las medidas de la banda extensométrica para el análisis dinámico no sirven, pues el tiempo que tarda en ajustarse el valor de la banda es mayor que el propio del sistema dando resultados como el de la siguiente gráfica.

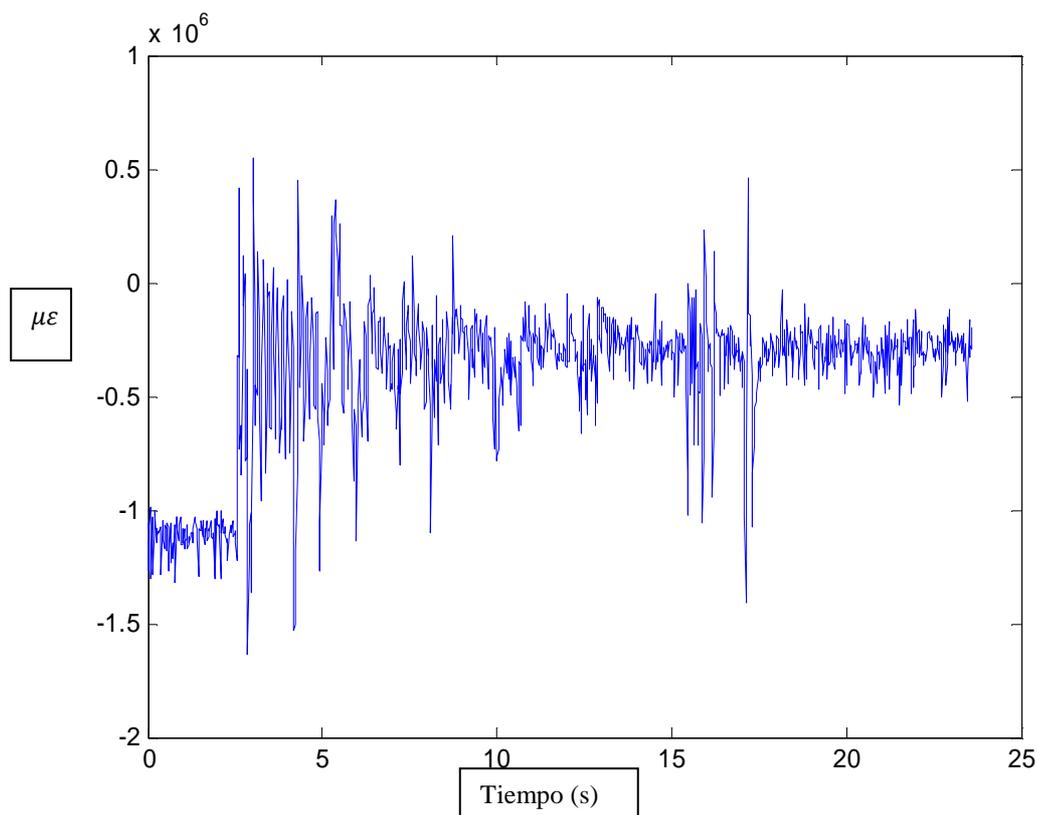


Figura 35: Salida de la galga frente al tiempo para una masa de 1 kg

Se observa que al principio parece que se amortigua, pero luego rápidamente el ruido es tan grande que no permite que se observe nada reseñable, la única conclusión que se puede sacar es ver cómo se encontraba cargado el sistema con un valor elevado de las microdeformaciones para luego disminuir bruscamente en el momento en el cual la carga dejaba de estar aplicada.

Sin embargo para el acelerómetro los resultados sí son mejores. El amortiguamiento se aprecia como sigue la forma determinada. Se ha usado un valor del 4.6% para aproximarlos en todos los modos de vibración. La frecuencia es algo más alta en la realidad que en la simulación numérica. Y por último se observa como el amortiguamiento del sistema no es constante, cuando las amplitudes son pequeñas el amortiguamiento del sistema disminuye, por lo que las amplitudes experimentales en azul no se amortiguan a la misma velocidad que las simuladas en rojo, (figuras 36 a 39).

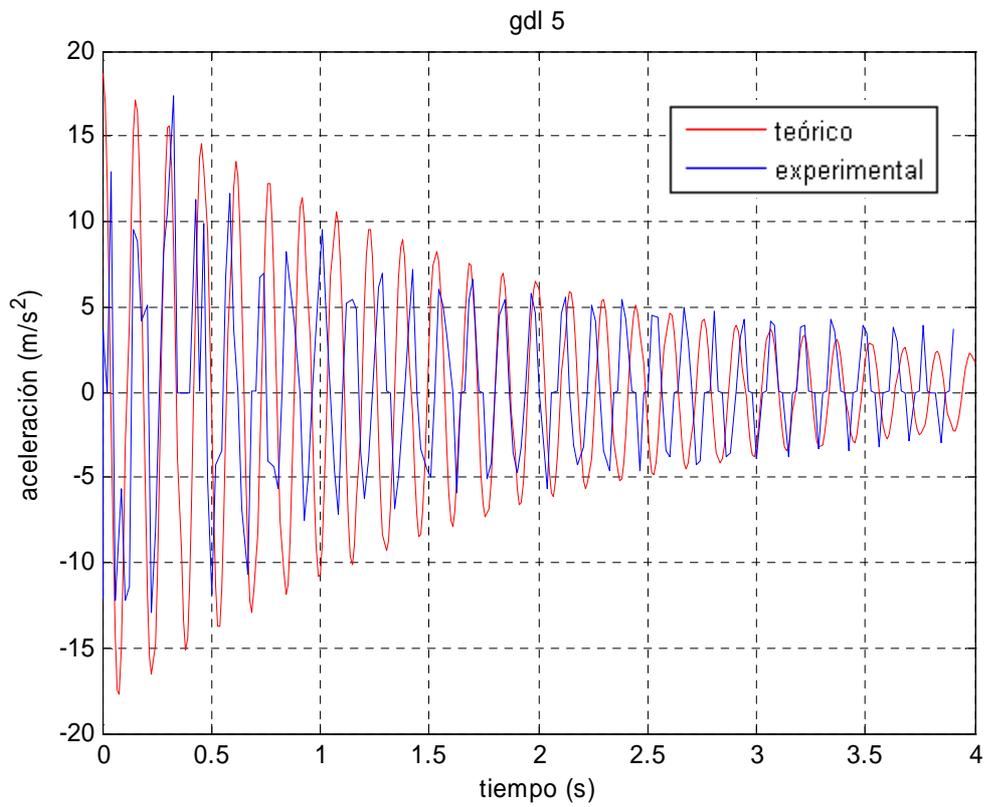


Figura 36: Aceleración para 1 kg. Experimento 1

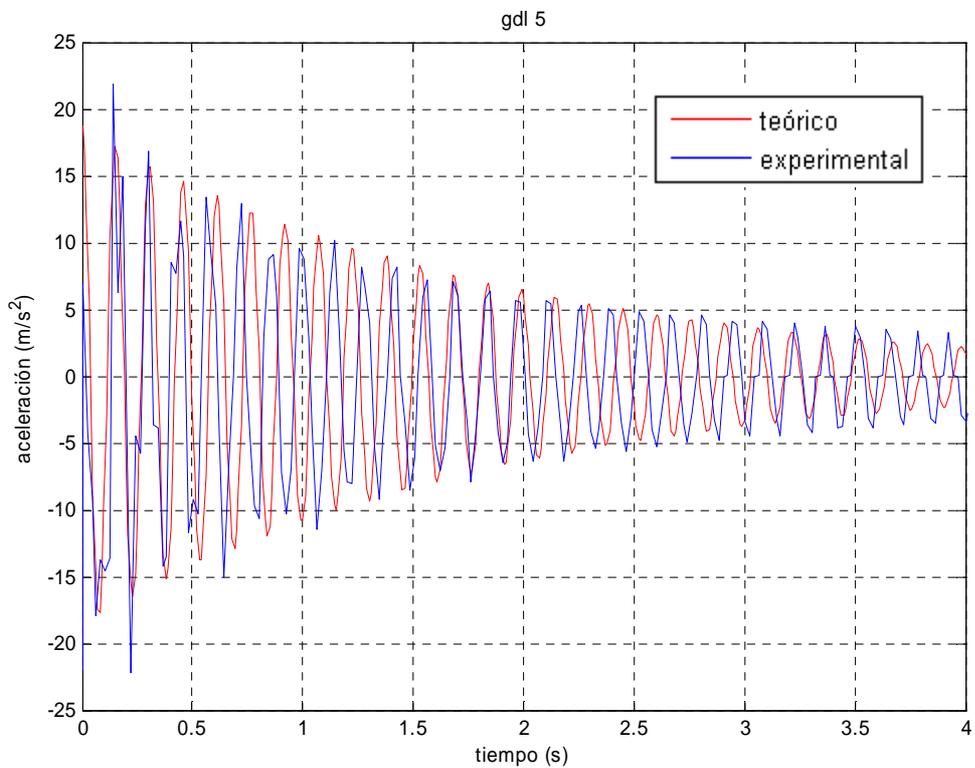


Figura 37: Aceleración para 1 kg. Experimento 2

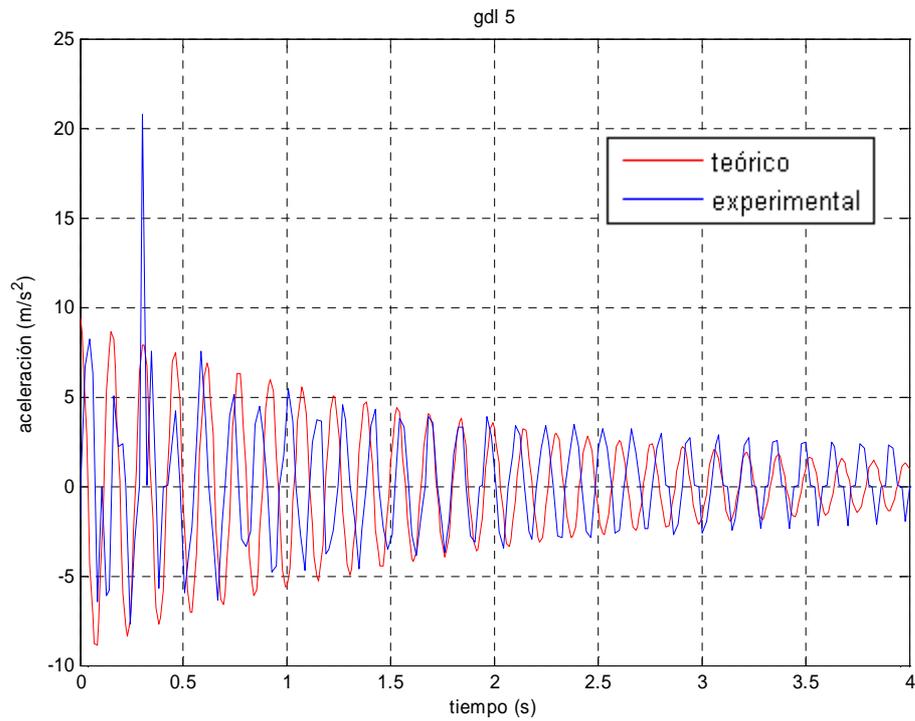


Figura 38: Aceleración para 0.5 kg. Experimento 1

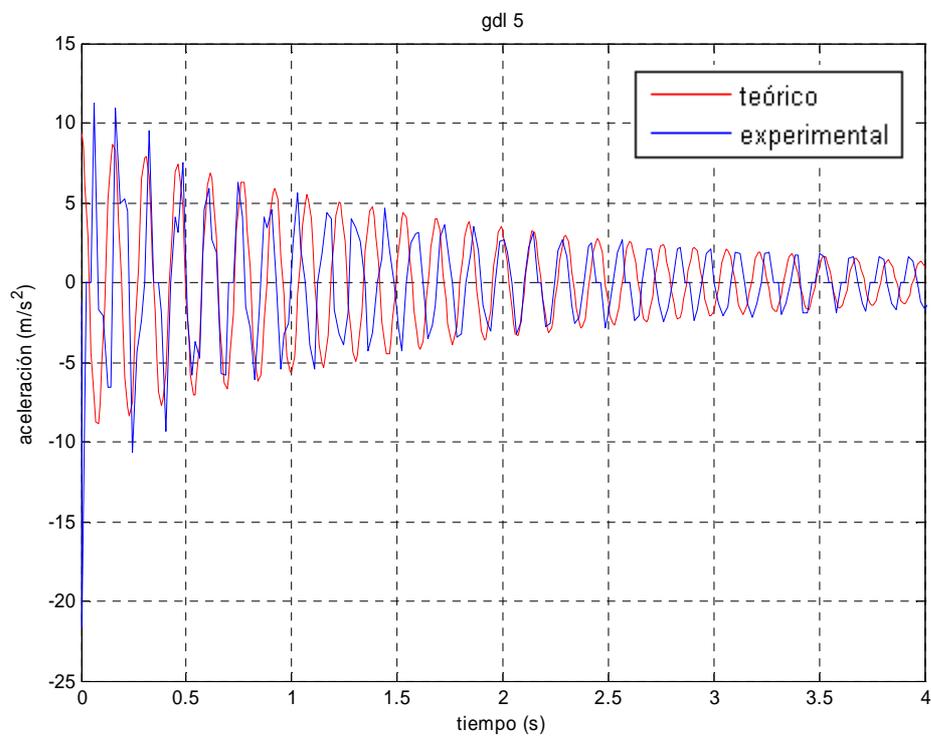


Figura 39: Aceleración para 0.5 kg. Experimento 2

### **3.5. CONCLUSIONES**

El primer objetivo era la implementación en el laboratorio de una estructura sencilla a la que poder realizar unas mediciones con galga extensométrica y acelerómetro, esto se ha realizado con éxito. La experiencia se ha repetido dos veces para cada masa con el fin de obtener más datos, en ambos casos los resultados son parecidos si bien existen variaciones como un pico de aceleración.

En segundo lugar se ha hecho un análisis estático del problema y se ha comparado con los resultados experimentales, las soluciones obtenidas han sido bastante buenas, con errores no superiores del 4 %, con lo que los esfuerzos en las barras se han calculado correctamente. Y el desplazamiento del extremo es un valor correcto.

Posteriormente en el análisis dinámico se ha calculado en laboratorio la respuesta a unas condiciones iniciales en el acelerómetro y galga. Los resultados obtenidos en la galga no han sido buenos para este análisis. En el acelerómetro sin embargo sí, la salida se ha modulado según indicaba la conversión y se ha estimado el amortiguamiento del sistema y se ha visto como está dentro del rango de una estructura de acero.

En definitiva se han cubierto todos los objetivos marcados al inicio y los resultados en el laboratorio han casado con los teóricos.