



# CAPÍTULO 6

## ANÁLISIS DEL MODO FUGOIDE DEL CÉFIRO



## CAPÍTULO 6

### ANÁLISIS DEL MODO FUGOIDE DEL CÉFIRO

#### 6.1 Introducción

Una vez realizado el trimado del avión para las condiciones de vuelo especificadas, se calcularán la frecuencia natural, el periodo, el amortiguamiento y el  $t_{1/2}$  (tiempo en el que la amplitud de la oscilación se reduce a la mitad) del modo longitudinal Fugoide, de forma analítica y a partir de los resultados de la simulación. Esto va a permitir conocer cómo de aproximado es el modelo aerodinámico linealizado en torno al punto de equilibrio frente a una evolución temporal del sistema, teniendo en cuenta que el modelo de simulación, es un modelo no lineal. No hay que olvidar, que todos los cálculos realizados para la obtención de los parámetros del modo Fugoide, se hacen a partir de las ecuaciones de la dinámica longitudinal del avión linealizadas en torno al punto de equilibrio. Este punto de equilibrio, es el punto de trimado del vuelo de crucero definido en el capítulo anterior.

#### 6.2 Cálculo analítico

Se parten de las ecuaciones dinámicas longitudinales adimensionales del avión y se resuelve el sistema. Las ecuaciones dinámicas longitudinales completas del sistema podemos expresarlas en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\theta} \\ \alpha \\ \hat{q} \end{bmatrix}$$

Estas submatrices toman las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{bmatrix} 2\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & M_{22} &= \begin{bmatrix} -C_{m\hat{\alpha}} & \hat{I}_y \\ (2\mu - C_{z\hat{\alpha}}) & 0 \end{bmatrix} & A_{11} &= \begin{bmatrix} C_{X\hat{u}} & C_{Zs} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{12} &= \begin{bmatrix} C_{X\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & A_{21} &= \begin{bmatrix} C_{m\hat{u}} & 0 \\ (2C_{Zs} + C_{Z\hat{u}}) & 0 \end{bmatrix} & A_{22} &= \begin{bmatrix} C_{m\alpha} & C_{m\hat{q}} \\ C_{Z\alpha} & (2\mu + C_{Z\hat{q}}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



En la siguiente tabla se muestran los resultados de los coeficientes de fuerzas y momentos y las derivadas de estabilidad correspondientes al Céfiro en las condiciones de vuelo trimado.

Parámetro	Valor
$\mu$	74.1
$C_{m\hat{\alpha}}$	-4.26
$C_{z\hat{\alpha}}$	-1.275
$C_{x\hat{u}} \cong -M_S(\partial C_D/\partial M)_S$	$\approx 0$
$C_{z_s}$	-0.884
$C_{x\alpha}$	-0.372
$C_{m\hat{u}} \cong M_S(\partial C_m/\partial M)_S$	$-1.32 \cdot 10^{-3}$
$C_{z\hat{u}} \cong -M_S(\partial C_L/\partial M)_S$	$\approx 0$
$C_{m\alpha}$	-0.9136
$C_{m\hat{q}}$	-14.47
$C_{z\alpha}$	-4.973
$C_{z\hat{q}}$	-9.06

**Tabla 6.1** Derivadas y coeficientes del Céfiro en el vuelo trimado de crucero.

Para resolver el sistema se implementa el modelo en Matlab obteniendo los autovalores de la matriz  $M^{-1}A$  siendo M y A las matrices descritas anteriormente.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Dado que el sistema de la dinámica longitudinal es adimensional, los resultados obtenidos serán adimensionales. Se resuelve el problema de autovalores y autovectores ejecutando el archivo "modelo\_comp" y se obtienen las características del modo de oscilación Fugoide.

$$\lambda_1 = n + i\omega \quad \lambda_2 = n - i\omega \quad \omega_n^2 = \omega^2 + n^2 \quad \xi^2 = \frac{n^2}{\omega_n^2}$$



Los resultados que se obtienen son adimensionales. Los resultados dimensionales se obtendrían de los adimensionales de la siguiente manera:

$$\omega_{n\_dim} = \omega_{n\_adim} * \left(\frac{2u_s}{\bar{c}}\right) \quad T_{dim} = T_{adim} * \left(\frac{\bar{c}}{2u_s}\right) \quad t_{12dim} = t_{12adim} * \left(\frac{\bar{c}}{2u_s}\right)$$

$$\omega_{n\_dim} = 0.559 \text{ rad/s}$$

$$T_{dim} = 11.24 \text{ s}$$

$$t_{12dim} = 43.67 \text{ s}$$

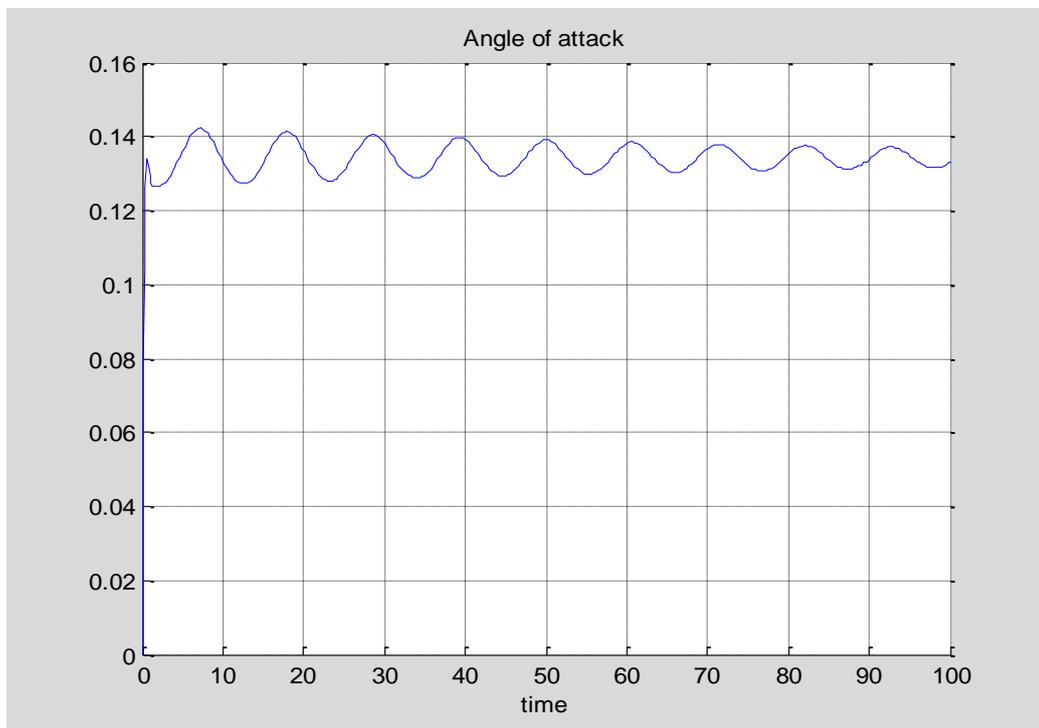
$$\xi = \frac{-n}{\omega_n} = 0.02838$$

El parámetro “n” es la parte real de los autovectores adimensionales asociados al modo de oscilación Fugoide.

### 6.3 Resultados de la simulación

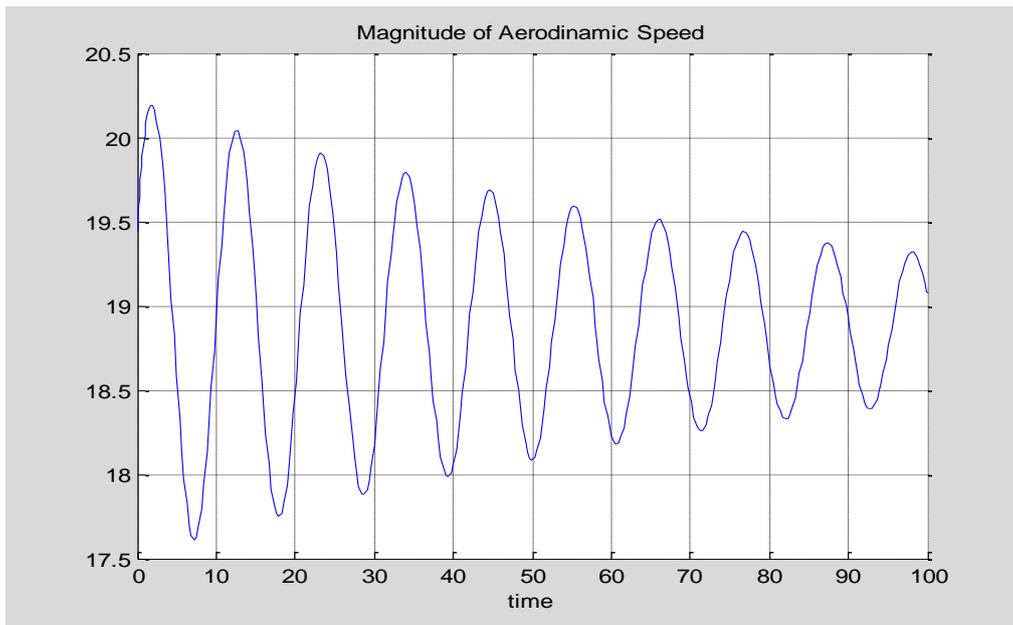
En este apartado, se van a obtener los parámetros del modo Fugoide a partir de los resultados de la simulación del vuelo de crucero equilibrado definido en el capítulo de trimado del avión Céfiro.

Para excitar el modo Fugoide, lo que se va a hacer es partir de un ángulo de ataque fuera del equilibrio del vuelo de crucero, por ejemplo  $0^\circ$ .



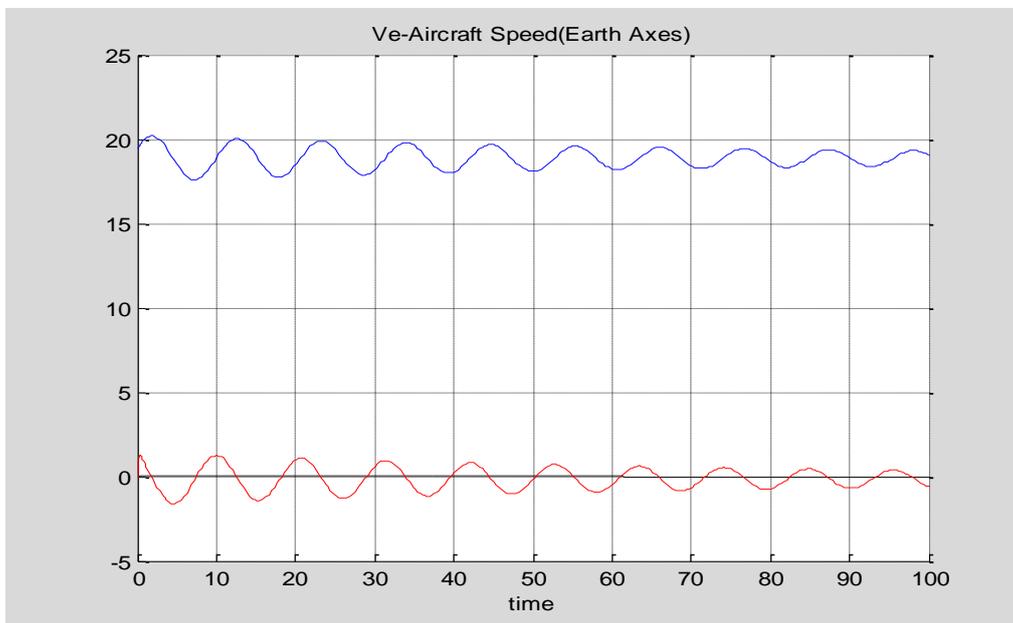
**Figura 6.1** Evolución temporal del ángulo de ataque del Céfiro (en radianes).

En la Figura 6.1 se puede observar tanto el periodo de oscilación del modo Fugoide como el rápido amortiguamiento del modo Corto Periodo al inicio de las oscilaciones.

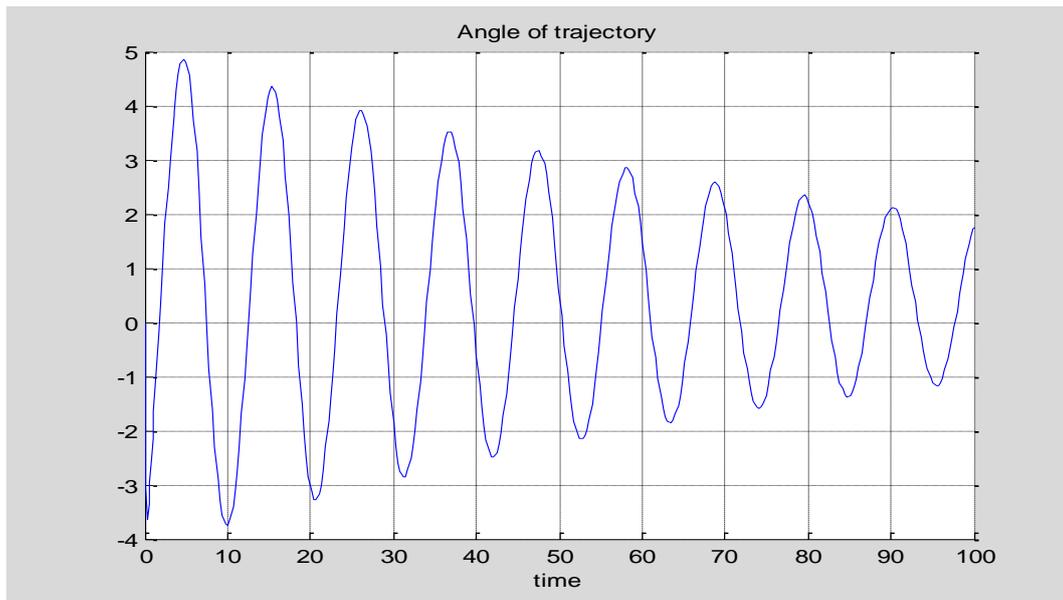


**Figura 6.2** Evolución temporal de la magnitud de la velocidad aerodinámica del Céfiro (m/s).

- Velocidad en el eje Tierra "x"
- Velocidad en el eje Tierra "y"
- Velocidad en el eje Tierra "z"



**Figura 6.3** Evolución temporal de las tres componentes de la velocidad del Céfiro en ejes Tierra (en m/s).

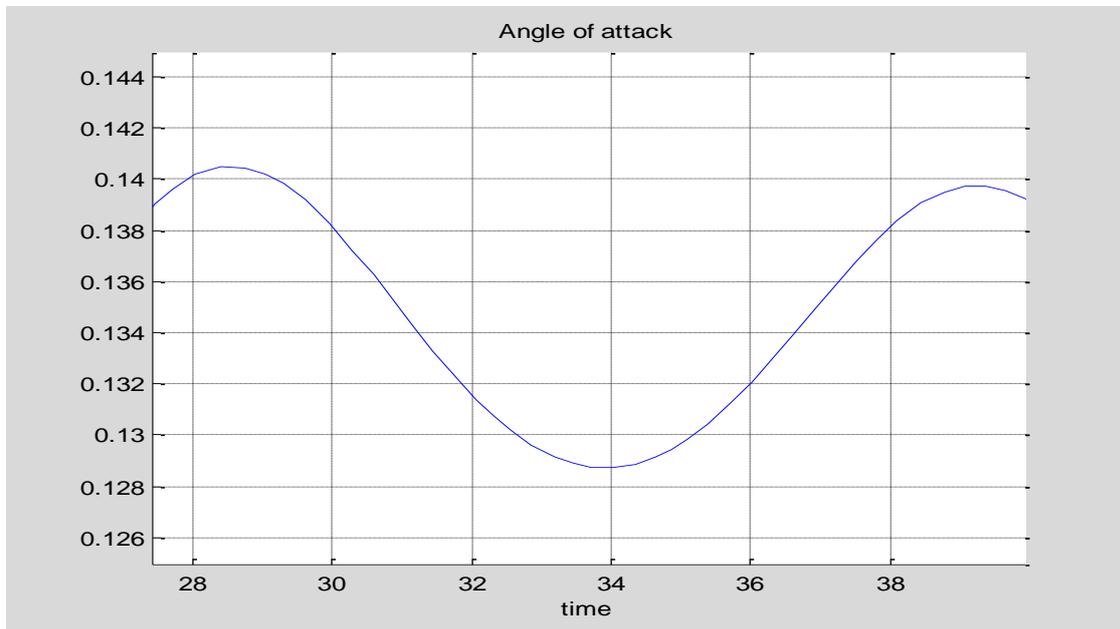


**Figura 6.4** Evolución temporal del ángulo de trayectoria ( $\gamma$ ) del Céfiro (en grados).

En este gráfico se observa como en el vuelo de crucero, la velocidad lateral del avión en el eje “y” no varía al estar en un vuelo rectilíneo equilibrado. También se puede observar en los gráficos representados, que los valores de velocidad del avión en ejes Tierra, la velocidad aerodinámica, el ángulo de ataque y el ángulo de trayectoria, se amortiguan y convergen a los valores de equilibrio del vuelo de crucero definido.

Como se comentó anteriormente, de la evolución con respecto al tiempo de las variables del modelo de simulación, se pueden obtener los parámetros del modo de oscilación Fugoid. Los valores obtenidos son prácticamente los mismos que los obtenidos de forma analítica.

De la siguiente gráfica del ángulo de ataque, a la que se le ha hecho un “zoom”, se puede obtener el periodo de oscilación del modo Fugoide.



**Figura 6.5** Zoom de la gráfica del ángulo de ataque (en radianes).

De la gráfica del ángulo de trayectoria (Figura 6.4), se aprecia que el tiempo en el que la amplitud de la oscilación se reduce a la mitad, es de aproximadamente de 43s. A partir del periodo se puede obtener la frecuencia natural de oscilación.

$$\omega_{n\_dim} = \omega_{n\_adim} * \left( \frac{2u_s}{\bar{c}} \right) = \frac{2\pi}{T_{dim}} = 0.5463 \text{ rad/s}$$

$$T_{dim} = T_{adim} * \left( \frac{\bar{c}}{2u_s} \right) = 11.5 \text{ s}$$

$$t_{12dim} = t_{12adim} * \left( \frac{\bar{c}}{2u_s} \right) = 43 \text{ s}$$

$$\xi = \frac{-n}{\omega_n} = 0.028$$

El amortiguamiento se obtiene gráficamente a partir del decremento logarítmico.

$$\delta = \ln \frac{e^{nt}}{e^{n(t+T)}} = -nT = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$



El parámetro “n” es la parte real de los autovectores adimensionales asociados al modo de oscilación Fugoide. Despejando, se obtiene la siguiente expresión con la que se puede calcular el amortiguamiento gráficamente a partir del decremento logarítmico.

$$\xi = \sqrt{\frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2}}$$

En la siguiente tabla se puede ver una comparativa entre los parámetros del modo Fugoide obtenidos de manera analítica, con los obtenidos gráficamente a través de la simulación.

Modo Fugoide		
	Resultados analíticos	Resultados de la simulación
$\omega_{n\_dim}$	0.559 rad/s	0.546 rad/s
$T_{dim}$	11.24 s	11.5 s
$t_{12dim}$	43.67 s	43 s
$\xi$	0.02838	0.028

**Tabla 6.2** Comparación de los resultados del modo Fugoide.

De esta tabla y según la proximidad entre resultados, se puede deducir que el modelo aerodinámico programado en la primera parte del proyecto está bien estimado.