4. Relaciones $P-\delta$ simplificadas

En este apartado se busca obtener una ecuación que nos relacione la carga P aplicada sobre la probeta con el desplazamiento δ que se obtiene en los rodillos. Además una vez desarrollada esta ecuación permitirá realizar una estimación más exacta de la relación entre la carga aplicada P y el momento M_0 obtenido en el punto de simetría de la probeta para de esta forma corroborar la exactitud de la norma ASTM D 6415/D 6415M – 06a en el cálculo de la misma.

En los siguientes apartados se presentan varios modelos en los que se según se va avanzando de uno a otro se va produciendo un incremento en el grado de complejidad.

Además en esta sección se utilizará la siguiente nomenclatura, a distinción de la usada en la normativa ASTM:

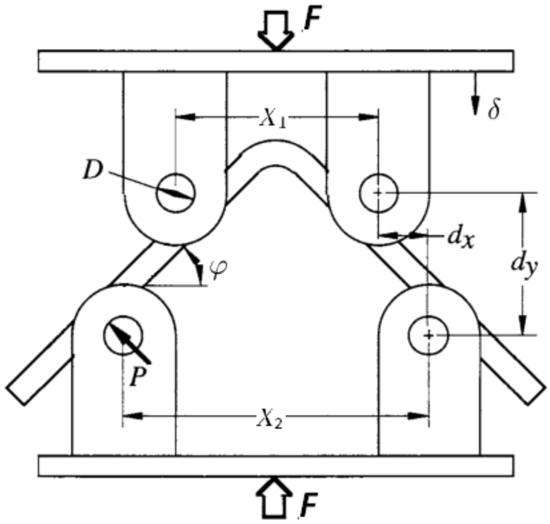


Figura 39: Terminología usada en la sección 4.

Cabe mencionar en particular el cambio de la nomenclatura en las cargas, así como que el ángulo que forma el tramo recto se pasa a llamar φ, reservando el término ϕ para el giro de las secciones en el modelo de barra.

4.1. Modelo recto sin cortante

En primer lugar se considerará un modelo simplificado del problema consistente en despreciar el tramo curvo y considerarlo como recto, de forma que el problema se reduce al representado en la siguiente figura:

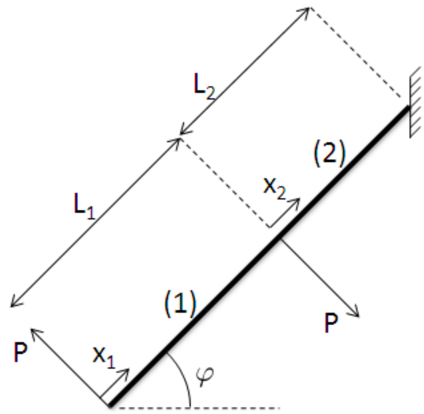


Figura 40: Modelo simplificado mediante barras rectas.

Se puede observar dos tramos principales en el modelo: uno primero sometido a cortante y momento flector (tramo (1)) y un segundo tramo sometido únicamente a momento flector (tramo (2)).

Las ecuaciones de equilibrio para el tramo (1) al no haber ninguna fuerza distribuida se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{dN}{dx_1} = 0; N(0) = 0 \longrightarrow N = 0 \tag{4.1a}$$

$$\frac{dQ}{dx_1} = 0; Q(0) = -P \longrightarrow Q = -P \tag{4.1b}$$

$$\frac{dM}{dx_1} = Q; M(0) = 0 \longrightarrow M = -Px_1 \tag{4.1c}$$

Donde los esfuerzos han sido definidos de la siguiente forma:

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz \quad ; \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z dz \quad ; \quad Q = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{13} dz \tag{4.2}$$

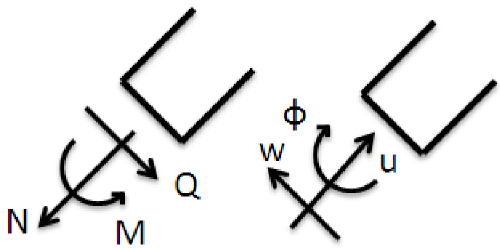


Figura 41: Esfuerzos y desplazamientos.

Para simplificar el problema este equilibrio se realiza en la situación indeformada pero considerando que el tramo (1) ha girado un ángulo correspondiente al giro que se obtendría en la barra manteniéndose recta cuando el desplazamiento entre rodillos es conocido de valor δ, por lo que retrocediendo al problema ILTS original implica que la longitud del tramo (1) dependerá del desplazamiento δ (llamémosle $L_1 = L_1(\delta)$).

Utilizando las hipótesis típicas de vigas gruesas los desplazamientos se pueden expresar según los desplazamientos de la línea media, e igualmente las deformaciones (siendo 1 la dirección perpendicular al plano del modelo 2D considerado, 2 la dirección de la viga y 3 la dirección restante):

$$u = u^o + \phi z \tag{4.3a}$$

$$w = w^o \tag{4.3b}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{du}{dx} = \varepsilon_{22}^o + z\frac{d\phi}{dx} \tag{4.3c}$$

$$\gamma_{23} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \phi + \frac{dw^0}{dx} = \gamma_{23}^o \tag{4.3d}$$

Para hacer más realista el problema en lugar de considerar la distribución $\gamma_{23} = \gamma_{23}^o$ se usará la siguiente aproximación:

$$\gamma_{23} = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{z}{t/2}\right)^2\right)\gamma_{23}^o \tag{4.4}$$

De esta forma se puede llegar a la siguiente ley de comportamiento para una barra recta de material compuesto:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{22}^o \\ \frac{d\phi}{dx} \\ \gamma_{23}^o \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Donde:

$$A = \sum \left(\bar{Q}_{22}(z_i - z_{i-1})\right) \tag{4.6a}$$

$$B = \sum \left(\bar{Q}_{22}\frac{1}{2}(z_i^2 - z_{i-1}^2)\right) \tag{4.6b}$$

$$C = \sum \left(\bar{Q}_{33}\left((z_i - z_{i-1}) - \frac{4}{3t^2}(z_i^3 - z_{i-1}^3)\right)\right) \tag{4.6c}$$

$$D = \sum \left(\bar{Q}_{22}\frac{1}{3}(z_i^3 - z_{i-1}^3)\right) \tag{4.6d}$$

De esta forma aplicando la ley de comportamiento al tramo (1) obtenemos las siguiente deformadas:

$$\varepsilon_{22}^o = -\frac{B}{\Delta}M = \frac{B}{\Delta}Px_1 \tag{4.7a}$$

$$\frac{d\phi}{dx_1} = \frac{A}{\Delta}M = -\frac{A}{\Delta}Px_1 \tag{4.7b}$$

$$\gamma_{23}^o = \frac{Q}{C} = -\frac{P}{C} \tag{4.7c}$$

$$\Delta = AD - B^2 \tag{4.7d}$$

Usando una condición de contorno $\phi(L_1) = \phi_1$ llegamos a la siguiente expresión del giro de la sección:

$$\phi(x_1) = \phi_1 + \frac{A}{\Delta}\frac{P}{2}(L_1^2 - x_1^2) \tag{4.8}$$

Entrando al tramo (2) y usando la misma hipótesis de que se tendrá una longitud de dicho tramo de $L_2(\delta)$ correspondiente a considerarlo indeformado y colineal con el tramo (1), se puede obtener los siguientes esfuerzos:

$$\frac{dN}{dx_2} = 0; N(0) = 0 \longrightarrow N = 0 \tag{4.9a}$$

$$\frac{dQ}{dx_2} = 0; Q(0) = P + Q(x_1 = L_1) = 0 \longrightarrow Q = 0 \tag{4.9b}$$

$$\frac{dM}{dx_2} = Q; M(0) = M(x_1 = L_1) = -PL_1 \longrightarrow M = -PL_1 \tag{4.9c}$$

Usando la ley de comportamiento para este tramo:

$$\varepsilon_{22}^o = -\frac{B}{\Delta}M = \frac{B}{\Delta}PL_1 \tag{4.10a}$$

$$\frac{d\phi}{dx_1} = \frac{A}{\Delta}M = -\frac{A}{\Delta}PL_1 \tag{4.10b}$$

$$\gamma_{23}^o = \frac{Q}{C} = 0 \tag{4.10c}$$

Con la condición de contorno de $\phi(L_2) = 0$ se llega a:

$$\phi(x_2) = \frac{A}{\Delta}PL_1(L_2 - x_2) \tag{4.11}$$

De esta forma se puede calcular ϕ_1 y sustituir en el giro del tramo 1:

$$\phi_1 = \phi(x_2 = 0) = \frac{A}{\Delta}PL_1L_2 \tag{4.12}$$

$$\phi(x_1) = \frac{A}{\Delta}P\left(\frac{L_1^2 - x_1^2}{2} + L_1L_2\right) \tag{4.13}$$

Suponiendo que se tiene un laminado tal que $B = 0$ (se tendrá entonces que $\varepsilon_{22}^o = 0$) y despreciando el efecto del cortante ($\gamma_{23}^o = 0$) se obtendrán los siguientes desplazamientos de la barra del tramo (1):

$$u^o = 0 \tag{4.14}$$

$$\frac{dw}{dx_1} = -\phi(x_1) \longrightarrow w(x_1) = -\frac{A}{\Delta}P\left(\frac{L_1^2x_1}{2} - \frac{x_1^3}{6} + L_1L_2x_1\right) + cte \tag{4.15}$$

$$\Delta w = w(x_1 = L_1) - w(x_1 = 0) = -\frac{A}{\Delta}P\left(\frac{L_1^3}{3} + L_1^2L_2\right) \tag{4.16}$$

Por trigonometría, al ser $u^o = 0$, se puede relacionar de la siguiente forma Δw con el desplazamiento entre rodillos δ:

$$\delta = -\Delta w \cos\varphi \tag{4.17}$$

Donde φ es el ángulo que forma el brazo en el ensayo, y el cual también depende de δ. De esta forma sustituyendo el valor de Δw y despejando la carga P se puede llegar a la siguiente expresión de la relación $P - \delta$ del ensayo:

$$P = \frac{\delta}{\frac{A}{\Delta}\left(\frac{L_1^3}{3} + L_1^2L_2\right)\cos\varphi} \tag{4.18}$$

Donde $\varphi(\delta)$ se obtiene acorde al procedimiento de la normativa ASTM comentada y una vez obtenido se tiene:

$$L_1 = \frac{d_x}{\cos\varphi} + (2R_r + t)\tan\varphi \tag{4.19}$$

$$L_2 = \frac{X_1}{2\cos\varphi} - (R_r + t/2)\tan\varphi \tag{4.20}$$

4.2. Modelo curvo sin cortante

Para mejorar la precisión de este modelo el tramo (2) del apartado anterior se puede dividir en dos tramos: un tramo (2) recto más corto que en el caso anterior, y un tramo (3) correspondiente a la zona curva.

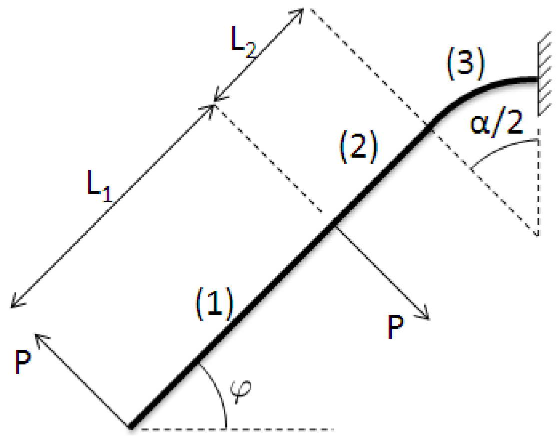


Figura 42: Modelo con barra curva.

De forma análoga al apartado anterior usando una condición de contorno $\phi(x_2 = L_2) = \phi_2$ se llega al siguiente giro:

$$\phi(x_2) = \phi_2 + \frac{A}{\Delta} P L_1 (L_2 - x_2) \tag{4.21}$$

Y por lo tanto el giro ϕ_1 toma el siguiente valor:

$$\phi_1 = \phi_2 + \frac{A}{\Delta} P L_1 L_2 \tag{4.22}$$

Con respecto al tramo (3) la definición de los esfuerzos permanecen de la misma forma y las ecuaciones de equilibrio quedan como sigue:

$$N = \frac{dQ}{d\theta} \tag{4.23a}$$

$$Q + \frac{dN}{d\theta} = 0 \tag{4.23b}$$

$$\frac{dM}{d\theta} = QR \tag{4.23c}$$

Con las condiciones de contorno $N(0) = 0$, $Q(0) = 0$ y $M(0) = -PL_1$ se puede llegar a la siguiente solución de los esfuerzos:

$$N = 0; Q = 0; M = -PL_1 \tag{4.24}$$

En este caso las deformaciones respecto a las deformaciones de la línea media quedan como sigue donde z crece hacia radios mayores con origen en la línea media:

$$u = u^o + \phi z \tag{4.25a}$$

$$w = w^o \tag{4.25b}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{R}{R+z}\varepsilon_{22}^o + \frac{Rz}{R+z}\frac{d\phi}{dx} \tag{4.25c}$$

$$\gamma_{23} = \frac{R}{R+z}\gamma_{23}^o \tag{4.25d}$$

Usando la hipótesis de lámina rebajada $R >> t/2$ (no resulta del todo razonable) se puede llegar a las siguientes aproximaciones:

$$\varepsilon_{22} \simeq \varepsilon_{22}^o + z\frac{d\phi}{dx} \tag{4.26a}$$

$$\gamma_{23} \simeq \gamma_{23}^o \tag{4.26b}$$

Esta hipótesis permite que la definición de las matrices A, B y D permanezca de la misma forma. Igual que en el caso de las vigas rectas se puede cambiar la expresión de γ_{23} por la siguiente expresión para aproximarse más a los valores reales:

$$\gamma_{23} = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right)\gamma_{23}^o \tag{4.27}$$

De esta forma se llega a la misma ley de comportamiento que en el caso de vigas rectas, y usando $x = R\theta$, $dx = Rd\theta$ se puede obtener las siguientes deformadas para el caso considerado:

$$\varepsilon_{22}^o = -\frac{B}{\Delta}M = \frac{B}{\Delta}PL_1 \tag{4.28a}$$

$$\frac{d\phi_3}{d\theta} = R\frac{A}{\Delta}M = -R\frac{A}{\Delta}PL_1 \tag{4.28b}$$

$$\gamma_{23}^o = \frac{Q}{C} = 0 \tag{4.28c}$$

Con la condición de contorno de $\phi(\theta = \alpha/2) = 0$ se llega a:

$$\phi(\theta) = \frac{A}{\Delta}PL_1R\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) \tag{4.29}$$

Al igual que pasaba en los casos anteriores de los tramos rectos, la longitud del tramo curvo dependerá del desplazamiento δ, por lo que $\alpha/2$ será función de δ. Además al considerar esta dependencia se puede llegar a $\alpha/2 = \varphi$. Una vez calculado $\phi(\theta)$ es directo obtener el valor de ϕ_2 y por lo tanto de ϕ_1:

$$\phi_2 = \phi(\theta = 0) = \frac{A}{\Delta}PL_1R\frac{\alpha}{2} \tag{4.30}$$

$$\phi_1 = \frac{A}{\Delta}PL_1\left(L_2 + R\frac{\alpha}{2}\right) \tag{4.31}$$

Procediendo de forma similar al desarrollo mostrado en el apartado anterior se puede llegar al siguiente valor de Δw:

$$\Delta w = -\frac{A}{\Delta}P\left(\frac{L_1^3}{3} + L_1^2L_2 + L_1^2R\frac{\alpha}{2}\right) \tag{4.32}$$

Por lo tanto la nueva relación $P-\delta$ queda de la siguiente forma:

$$P = \frac{\delta}{\frac{A}{\Delta}\left(\frac{L_1^3}{3} + L_1^2L_2 + L_1^2R\frac{\alpha}{2}\right)\cos\varphi} \tag{4.33}$$

El ángulo φ y la longitud L_1 se siguen obteniendo de la misma forma, y para este caso:

$$L_2 = \frac{X_1}{2\cos\varphi} - (R_r + t/2)\tan\varphi - R\tan\varphi \tag{4.34}$$

Es directo observar que en este modelo $L_2 + R\alpha/2$ es menor que L_2 en el modelo recto, por lo que este modelo se obtendrá más rígido que el anterior, sobre todo debido a que al considerarlo recto se está considerando una longitud mayor.

4.3. Modelo curvo con cortante

El cortante sólo afecta al tramo (1), en el cual tendremos:

$$\gamma_{23}^{o} = -\frac{P}{C} = \phi + \frac{dw^0}{dx} \tag{4.35}$$

Por lo tanto integrando obtendremos la siguiente expresión de w:

$$\frac{dw}{dx_1} = -\phi - \frac{P}{C} \longrightarrow w(x_1) = -\frac{A}{\Delta}P\left(\frac{L_1^2 x_1}{2} - \frac{x_1^3}{6} + L_1 L_2 x_1 + L_1 x_1 R\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{Px_1}{C} + cte$$

$$\Delta w = w(x_1 = L_1) - w(x_1 = 0) = -\frac{A}{\Delta}P\left(\frac{L_1^3}{3} + L_1^2 L_2 + L_1^2 R\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{PL_1}{C} \tag{4.36}$$

Y por lo tanto en este caso la relación $P - \delta$ queda de la siguiente forma:

$$P = \frac{\delta}{\left[\frac{A}{\Delta}\left(\frac{L_1^3}{3} + L_1^2 L_2 + L_1^2 R\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{L_1}{C}\right]\cos\varphi} \tag{4.37}$$

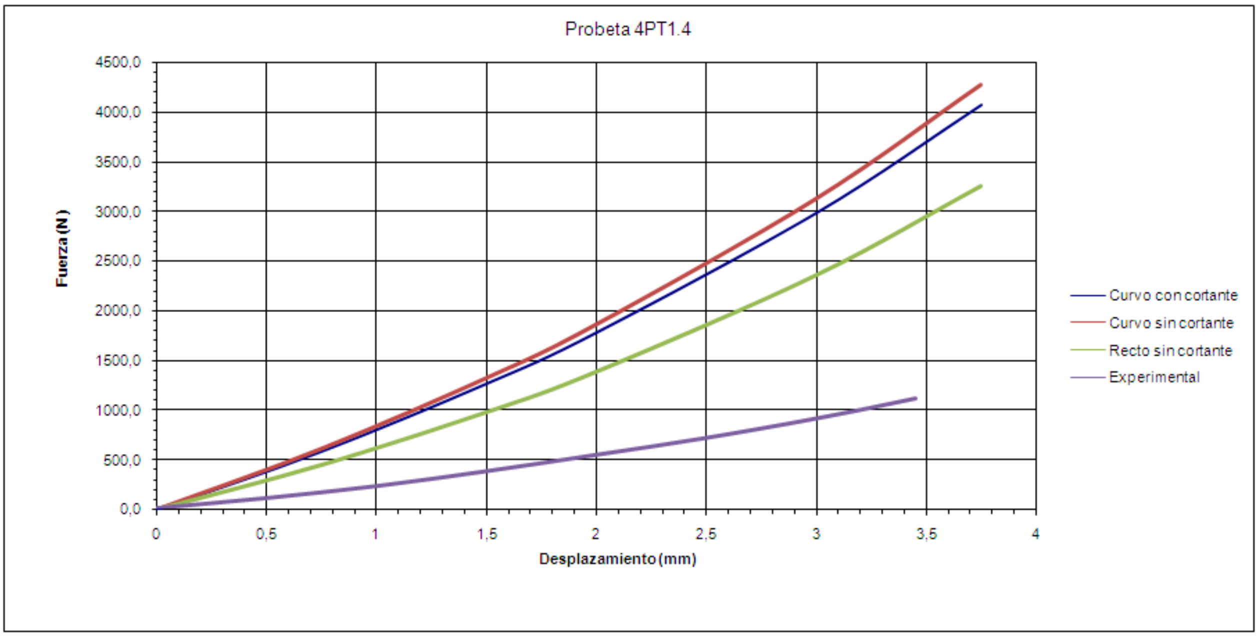
4.4. Comparación con resultados experimentales

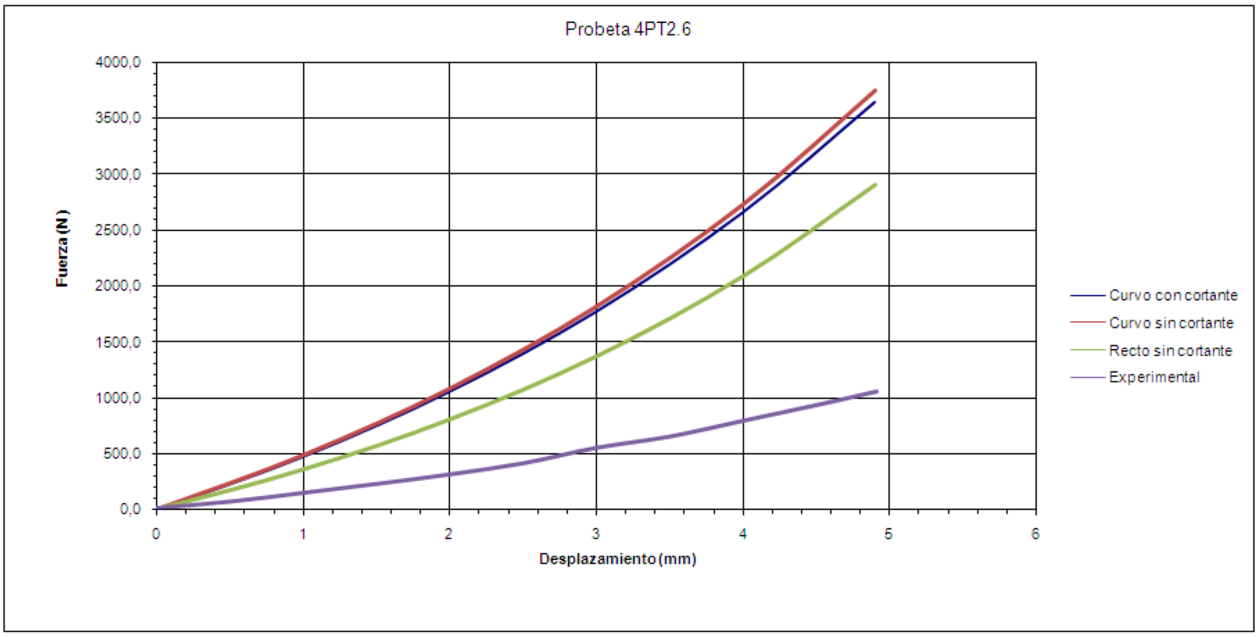
Tomando una probeta media de cada serie ensayada y representando tanto los resultados experimentales como los obtenidos por los tres modelos anteriores se obtienen los siguientes resultados, calculando la fuerza total aplicada sobre la probeta a partir del esfuerzo P de la siguiente forma (donde W es el ancho de la probeta):

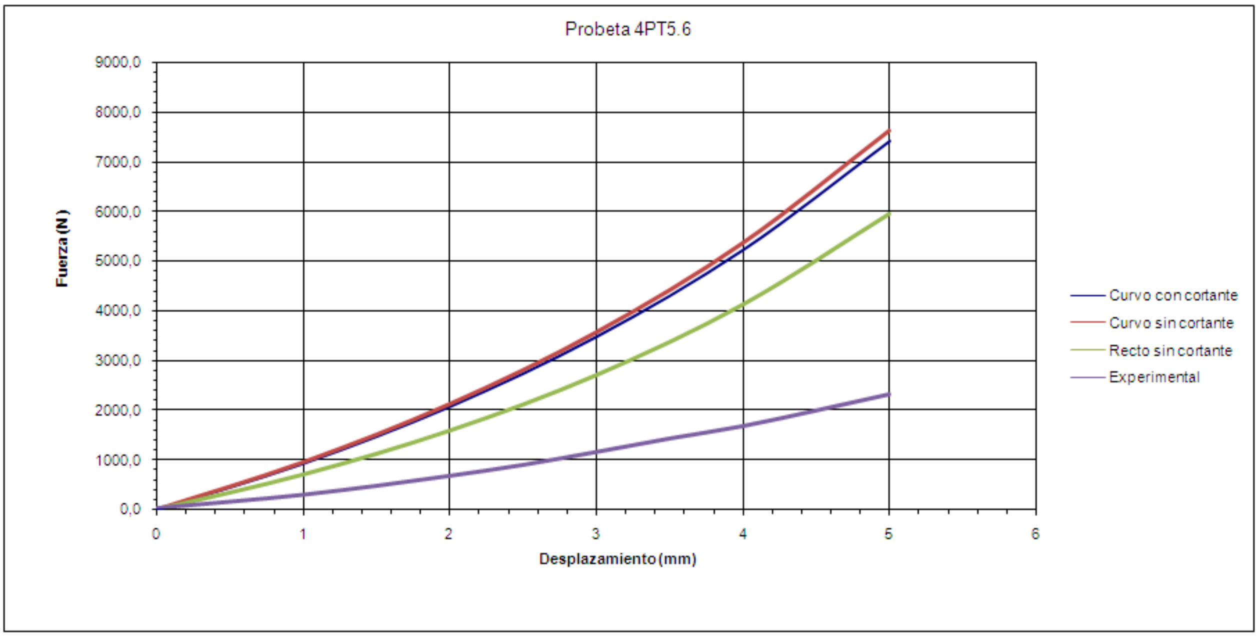
$$F = 2PW cos(\phi) \tag{4.38}$$

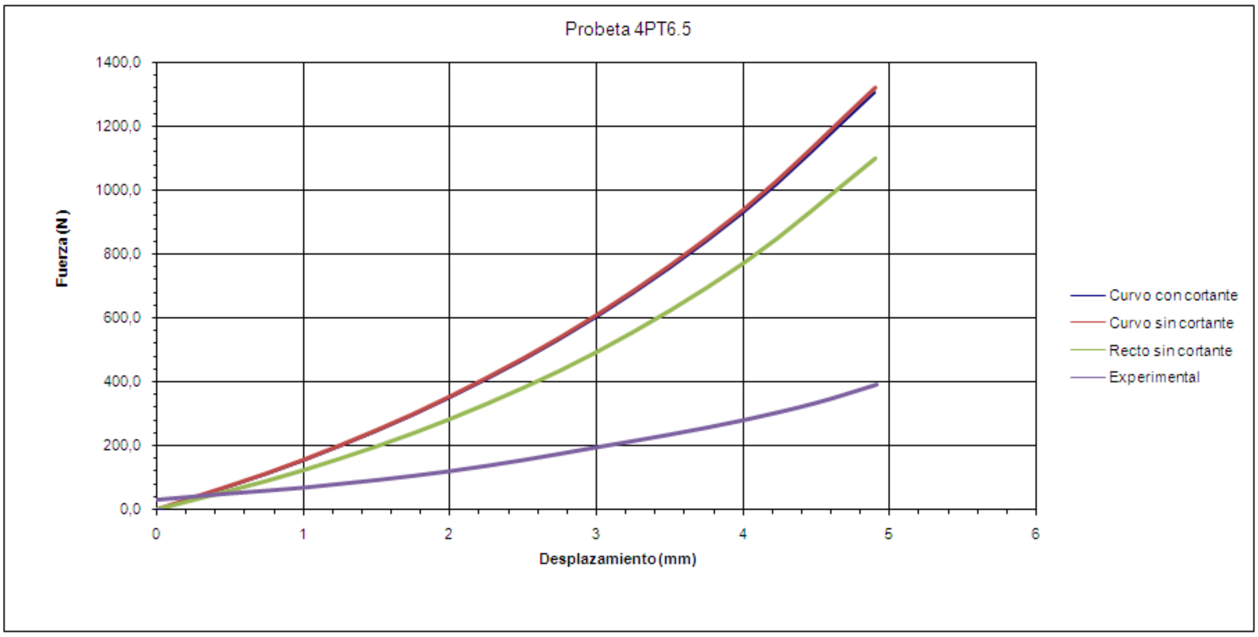
Además cabe mencionar las siguientes propiedades que se han calculado para cada probeta a partir de los apilados y geometría de las probetas, ordenador de menor a mayor espesor:

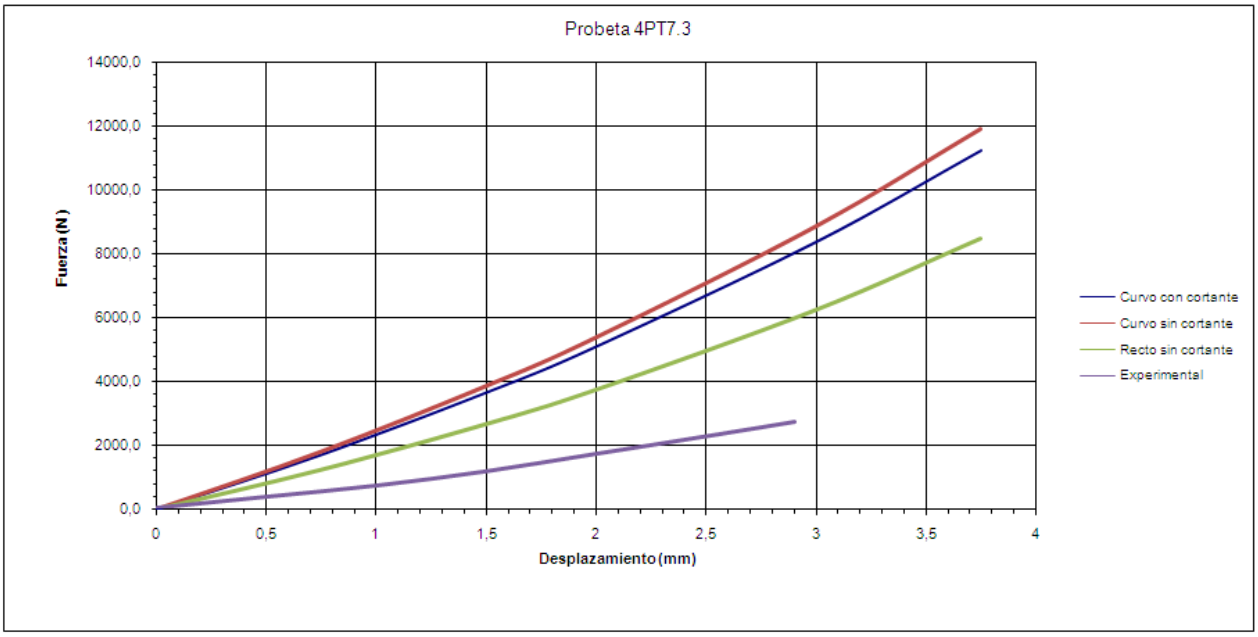
Probeta	A (GPamm)	B (GPamm^2)	D (GPamm^3)	C (GPamm)
4PT6.5	99.19	0	19.37	7.56
4PT2.6	195.22	0	114.96	10.76
4PT5.6	192.6	0	110.41	10.62
4PT1.4	227.42	0	195.4	10.84
4PT7.3	338.45	0	560.44	18.25
4PT9.6	565.41	0	3233.37	31.18
4PT8.4	660.34	0	4615.51	31.46

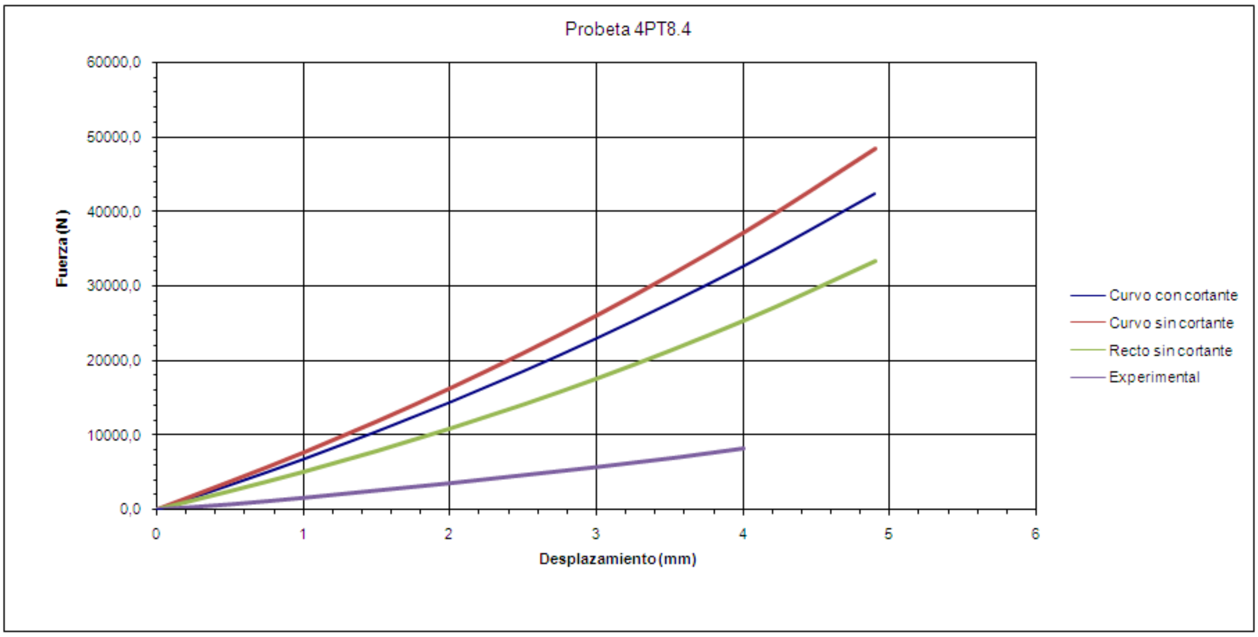

Probeta 4PT1.4
Fuerza (N)
4500,0
4000,0
3500,0
3000,0
2500,0
2000,0
1500,0
1000,0
500,0
0,0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
Desplazamiento (mm)
Curvo con cortante
Curvo sin cortante
Recto sin cortante
Experimental

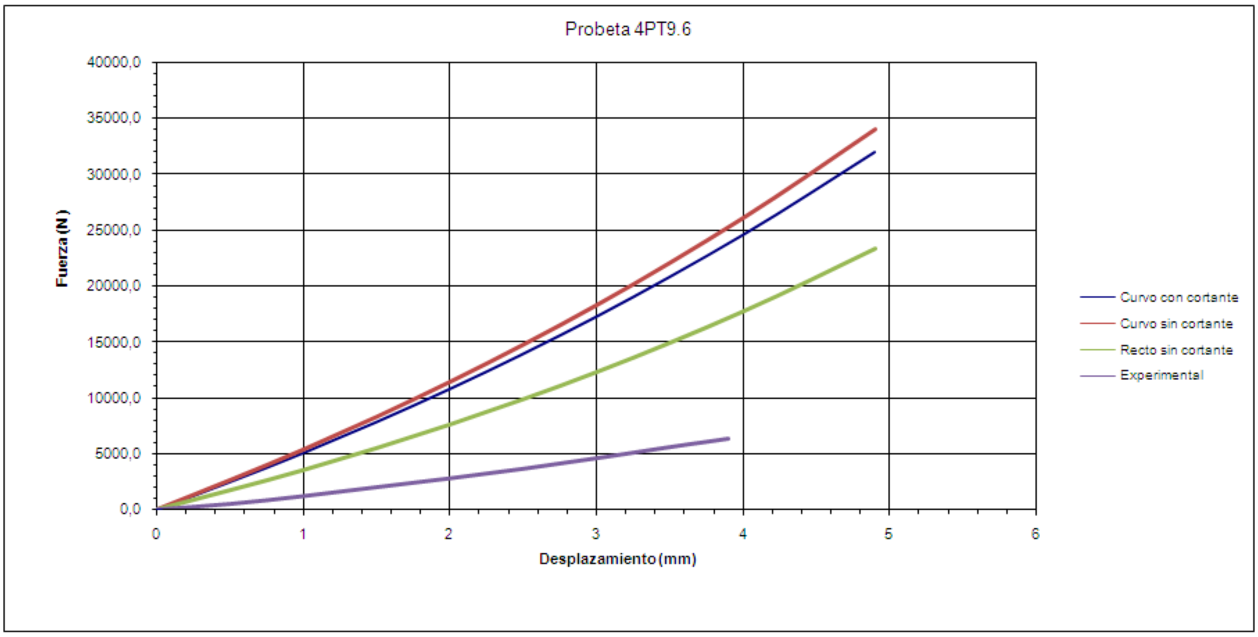

Probeta 4PT2.6
Fuerza (N)
4000,0
3500,0
3000,0
2500,0
2000,0
1500,0
1000,0
500,0
0,0
0
1
2
3
4
5
6
Desplazamiento (mm)
Curvo con cortante
Curvo sin cortante
Recto sin cortante
Experimental


Probeta 4PT5.6
Fuerza (N)
Desplazamiento (mm)
9000,0
8000,0
7000,0
6000,0
5000,0
4000,0
3000,0
2000,0
1000,0
0,0
0
1
2
3
4
5
6
Curvo con cortante
Curvo sin cortante
Recto sin cortante
Experimental


Probeta 4PT6.5
Fuerza (N)
Desplazamiento (mm)
1400,0
1200,0
1000,0
800,0
600,0
400,0
200,0
0,0
0
1
2
3
4
5
6
Curvo con cortante
Curvo sin cortante
Recto sin cortante
Experimental


Probeta 4PT7.3
14000,0
12000,0
10000,0
8000,0
6000,0
4000,0
2000,0
0,0
Fuerza (N)
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
Desplazamiento (mm)
Curvo con cortante
Curvo sin cortante
Recto sin cortante
Experimental


Probeta 4PT8.4
60000,0
50000,0
40000,0
30000,0
20000,0
10000,0
0,0
Fuerza (N)
0
1
2
3
4
5
6
Desplazamiento (mm)
Curvo con cortante
Curvo sin cortante
Recto sin cortante
Experimental



En primer lugar cabe comentar que el modelo recto es el que mejor aproxima los resultados experimentales en todos los casos. Esto se debe a que estos modelos están devolviendo rigideces muy elevadas con respecto a las reales, y el modelo recto al considerar una longitud mayor tendrá por lo tanto una rigidez inferior. Por otro lado se observan siempre unos errores en el cálculo de la carga F para un desplazamiento δ del orden del 200 %, por lo que son unas aproximaciones bastante inexactas del problema. Por último cabe comentar que el cortante parece mostrar una mayor importancia en las probetas de gran espesor respecto a la longitud L_1, como son por ejemplo la 4PT8 y la 4PT9.