

6. Cálculo de tensiones interlaminares en materiales compuestos

El cálculo de las tensiones mediante las expresiones de Lekhnitskii sólo son válidas para materiales anisótropos homogéneos, pero al considerar un material compuesto ésta hipótesis no resulta del todo cierta al estar compuesto de distintas láminas, cada una de las cuales se podrían aproximar por ortótropas homogéneas.

De esta forma, en este apartado se plantea una alternativa de metodología de cálculo a las ecuaciones de Lekhnitskii que permitan obtener de una forma más exacta las tensiones en la dirección perpendicular a las láminas.

6.1. Caso de una sola lámina anisótropa homogénea sometida a un momento constante bajo la hipótesis de lámina rebajada

En primer lugar para ejemplificar la metodología de cálculo se va a considerar un material anisótropo homogéneo sometido a un momento M_0 , de forma que la ecuación a obtener tendría que ser la de Lekhnitskii o al menos una que se aproxime a la misma. Podemos encontrar el problema representado en la siguiente imagen:

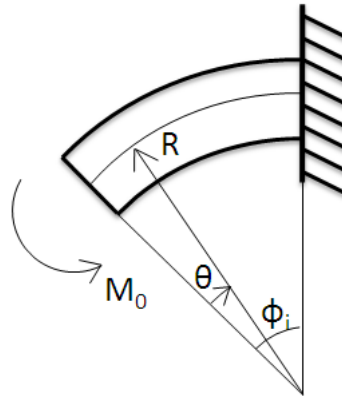


Figura 72: Problema completo a resolver.

Para realizar el cálculo se dividirá el material en N_l láminas (para este caso todas tendrán las mismas propiedades), de forma que la lámina i tendrá un radio medio dado por la siguiente expresión:

$$R_i = R + \frac{t}{2} \left(1 - \frac{2i - 1}{N_l} \right) \quad (6.1)$$

De forma que la lámina $i = 1$ será la externa (la de mayor radio) y la lámina $i = N_l$ la interna (menor radio). Para poder introducir la compatibilidad entre láminas se hace necesario introducir unas cargas $q_{zi}(\theta)$ en cada lámina (desconocida en principio) como se muestra en la siguiente figura:

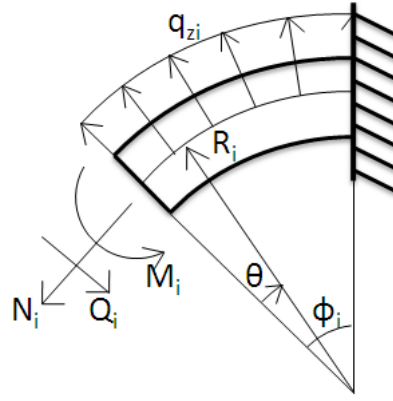


Figura 73: Descomposición en láminas.

De esta forma se pueden obtener las siguientes ecuaciones de equilibrio de los esfuerzos N , Q y M con signo positivo el definido en la figura anterior:

$$N_i = \frac{dQ_i}{d\theta} + q_{zi}R_i \quad (6.2a)$$

$$\frac{dN_i}{d\theta} + Q_i = 0 \quad (6.2b)$$

$$\frac{dM_i}{d\theta} + R_i \frac{dN_i}{d\theta} = 0 \quad (6.2c)$$

Por otro lado definiendo los desplazamientos y giro positivos según la siguiente figura se llega a las siguientes ecuaciones de compatibilidad y comportamiento:

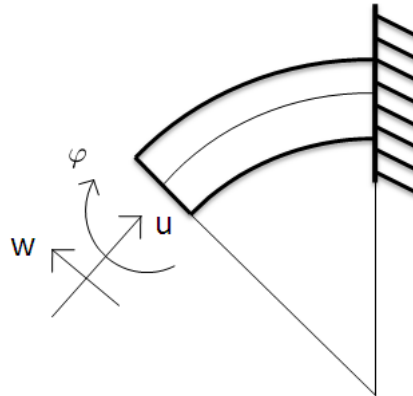


Figura 74: Definición de desplazamientos y deformaciones.

$$\frac{d\varphi_i}{d\theta} = R_i \frac{M_i}{(EI)_i} - R_i \frac{N_i}{(EV)_i} \quad (6.3a)$$

$$R_i \frac{N_i}{(EA)_i} - R_i \frac{M_i}{(EV)_i} = R_i \varepsilon_{22,i}^0 = \frac{du_i}{d\theta} + w_i \quad (6.3b)$$

$$R_i \varphi_i + \frac{dw_i}{d\theta} = u_i \quad (6.3c)$$

Donde para el caso considerado al tener un material homogéneo se tiene $EV = (EV)_i = \infty$. Es de interés mencionar que por equilibrio se deben de cumplir las siguiente relaciones entre los esfuerzos del material conjunto y de cada una de las láminas:

$$N = \sum_{i=1}^{N_l} N_i \quad ; \quad Q = \sum_{i=1}^{N_l} Q_i \quad ; \quad M = \sum_{i=1}^{N_l} (M_i + N_i(R_i - R)) \quad (6.4)$$

De esta forma sustituyendo en las ecuaciones (6.2b) y (6.2c) se obtienen exactamente las ecuaciones de equilibrio del material conjunto, y sustituyendo en la ecuación (6.2a) se observa que para que se obtenga la correspondiente ecuación de equilibrio del material conjunto se debe tener:

$$\sum_{i=1}^{N_l} q_{zi} R_i = 0 \quad (6.5)$$

Resolviendo el problema completo de todas las láminas en conjunto es directo obtener la siguiente solución como se vio en el apartado correspondiente a la ley de comportamiento:

$$M(\theta) = M_0 \quad ; \quad N(\theta) = 0 \quad ; \quad Q(\theta) = 0 \quad (6.6)$$

$$\varphi(\theta) = \frac{R}{EI} M_0 (\theta - \phi_i) \quad (6.7a)$$

$$w(\theta) = \frac{R^2}{EI} M_0 (\cos(\phi_i - \theta) - 1) \quad (6.7b)$$

$$u(\theta) = \frac{R^2}{EI} M_0 (\sin(\phi_i - \theta) + \theta - \phi_i) \quad (6.7c)$$

De esta forma, suponiendo que cada lámina se deformará de acuerdo a las anteriores deformaciones se obtiene que cada lámina tendrá los siguientes desplazamientos y giro:

$$\varphi_i(\theta) = \varphi(\theta) = \frac{R}{EI} M_0 (\theta - \phi_i) \quad (6.8a)$$

$$w_i(\theta) = w(\theta) = \frac{R^2}{EI} M_0 (\cos(\phi_i - \theta) - 1) \quad (6.8b)$$

$$u_i(\theta) = u(\theta) + \varphi(\theta)(R_i - R) = \frac{R}{EI} M_0 (R \sin(\phi_i - \theta) - (\phi_i - \theta) R_i) \quad (6.8c)$$

Es fácil ver que con estas expresiones se cumple automáticamente la ley de compatibilidad dada en la ecuación (6.3c) al cumplirse para el material conjunto:

$$0 = \frac{dw_i}{d\theta} + R_i \varphi_i - u_i = \frac{dw}{d\theta} + R_i \varphi - u - \varphi(R_i - R) = \frac{dw}{d\theta} + R \varphi - u$$

Usando la ley de comportamiento dada por la ecuación (6.3a) se puede llegar a:

$$M_i = \frac{(EI)_i}{R_i} \frac{R}{EI} M_0 \quad (6.9)$$

De forma similar a la ley de comportamiento dada por la ecuación (6.3b) se puede llegar a:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{(EA)_i}{R_i} \left(\frac{du_i}{d\theta} + w_i \right) = \frac{(EA)_i}{R_i} \left(\frac{du}{d\theta} + (R_i - R) \frac{d\varphi}{d\theta} + w \right) = \frac{(EA)_i}{R_i} (R_i - R) \frac{d\varphi}{d\theta} \\ N_i &= \frac{R}{R_i} (R_i - R) \frac{(EA)_i}{EI} M_0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Como M_i y N_i son constantes para todo θ se cumple automáticamente la ecuación de equilibrio 6.2c. Además de la ecuación (6.2b) llegamos a $Q_i = 0$, por lo que el cortante sera nulo en todas las láminas.

Entrando en las propiedades de las láminas es fácil ver las siguientes propiedades al ser un material anisótropo homogéneo (Como se tiene laminado simétrico al ser un material homogéneo, y por lo tanto $B = 0$):

$$(EA)_i = A_i = \bar{Q}_{22} \frac{t}{N_l} = \frac{A}{N_l} = \frac{EA}{N_l} \quad (6.11)$$

$$(EI)_i = D_i = \bar{Q}_{22} \frac{t^3}{12N_l^3} = \frac{D}{N_l^3} = \frac{EI}{N_l^3} \quad (6.12)$$

$$EI = EA \frac{t^2}{12} \quad (6.13)$$

Y sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (6.9) y (6.10) llegamos a:

$$M_i = \frac{R}{R_i} \frac{1}{N_l^3} M_0 \quad (6.14a)$$

$$N_i = \frac{R}{R_i} (R_i - R) \frac{12}{N_l t^2} M_0 \quad (6.14b)$$

Además sustituyendo la ecuación (6.1) de R_i podemos obtener las siguientes expresiones:

$$M_i = \frac{1}{1 + \frac{t}{2R} \left(1 - \frac{2i-1}{N_l}\right)} \frac{1}{N_l^3} M_0 = \frac{1}{N_l + \frac{t}{2R} (N_l - 2i + 1)} \frac{1}{N_l^2} M_0 \quad (6.15a)$$

$$N_i = \frac{1 - \frac{2i-1}{N_l}}{1 + \frac{t}{2R} \left(1 - \frac{2i-1}{N_l}\right)} \frac{6}{N_l t} M_0 = \frac{N_l + 1 - 2i}{N_l + \frac{t}{2R} (N_l + 1 - 2i)} \frac{6}{N_l t} M_0 \quad (6.15b)$$

Puede comprobarse fácilmente que realizando el correspondiente sumatorio se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N_l} N_i = \frac{6}{N_l t} M_0 \sum_{i=1}^{N_l} \frac{N_l + 1 - 2i}{N_l + \frac{t}{2R} (N_l + 1 - 2i)} \neq 0 \quad (6.16)$$

Sin embargo acorde a la ecuación (6.4) tendría que tomar un valor nulo. Usando unos valores típicos de $R = 9,5\text{mm}$ y $t = 5\text{mm}$ podemos comprobar que se obtienen los siguientes valores:

	$\sum_{i=1}^{N_l} N_i$
$N_l = 1$	0
$N_l = 2$	$-0,401691 M_0/t$
$N_l = 3$	$-0,482693 M_0/t$
$N_l = 4$	$-0,511636 M_0/t$
$N_l = 5$	$-0,525141 M_0/t$
$N_l = 10$	$-0,54326 M_0/t$
$N_l = 10^2$	$-0,549268 M_0/t$
$N_l = 10^3$	$-0,549328 M_0/t$
$N_l = 10^4$	$-0,549328 M_0/t$
$N_l = 10^{10}$	$-0,549114 M_0/t$
$N_l = 10^{100}$	$-0,549328 M_0/t$
$N_l = 10^{1000}$	$-0,549328 M_0/t$

También puede comprobarse que realizando el correspondiente sumatorio se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N_l} N_i (R_i - R) = -R \sum_{i=1}^{N_l} N_i \quad (6.17)$$

Y sustituyendo en el siguiente sumatorio:

$$\sum_{i=1}^{N_l} \frac{M_i + N_i (R_i - R)}{M_0} = \sum_{i=1}^{N_l} \frac{M_i - RN_i}{M_0} = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \frac{\frac{1}{N_l} - \frac{6R}{t} (N_l + 1 - 2i)}{N_l + \frac{t}{2R} (N_l + 1 - 2i)} \neq 1 \quad (6.18)$$

Sin embargo se tendría que tener un valor unidad para que hubiera equilibrio de momentos en cada sección. A continuación se presenta los valores que se obtienen para distintos N_l y los R y t típicos mencionados antes:

	$\sum_{i=1}^{N_l} \frac{M_i + N_i (R_i - R)}{M_0}$	$\sum_{i=1}^{N_l} \frac{M_i}{M_0}$
$N_l = 1$	1	1
$N_l = 2$	1,01762	0,254405
$N_l = 3$	1,03058	0,113463
$N_l = 4$	1,03601	0,0639025
$N_l = 5$	1,03869	0,0409213
$N_l = 10$	1,04243	0,0102383
$N_l = 10^2$	1,04371	$\sim 10^{-4}$
$N_l = 10^3$	1,04372	$\sim 10^{-6}$
$N_l = 10^4$	1,04372	$\sim 10^{-8}$
$N_l = 10^{10}$	1,04372	$\sim 10^{-20}$
$N_l = 10^{100}$	1,04372	$\sim 10^{-200}$
$N_l = 10^{1000}$	1,04372	$\sim 10^{-2000}$

Además para $N_l \rightarrow \infty$ se tendría que tener que $N_i/t_{lam} = N_i N_l/t$ tendiera a las tensiones generadas por el momento M_0 en el material completo, sin embargo se tiene:

$$\frac{N_i N_l}{t} = \frac{R}{R_i} (R_i - R) \frac{12}{t^3} M_0 \neq (R_i - R) \frac{12}{t^3} M_0 \quad (6.19)$$

Por lo tanto todo cabe indicar que el término R/R_i no debería estar ahí. Además al eliminar dicho término se consigue tener $\sum_{i=1}^{N_l} N_i = 0$ y además $\sum_{i=1}^{N_l} M_i + N_i (R_i - R) = M_0$.

Este error se debe a la hipótesis de lámina rebajada que se ha realizado para obtener las propiedades de rigidez A , B y D . Por lo tanto para ser consistentes hay que continuar usando los esfuerzos con dicha hipótesis, de forma que éstos quedan:

$$M_i = \frac{(EI)_i}{EI} M_0 = \frac{1}{N_l^3} M_0 \quad (6.20a)$$

$$N_i = (R_i - R) \frac{(EA)_i}{EI} M_0 = \left(1 - \frac{2i - 1}{N_l}\right) \frac{6}{N_l t} M_0 \quad (6.20b)$$

De esta forma es fácil observar que ya se cumplen los sumatorios de las ecuaciones (6.4):

$$\sum_{i=1}^{N_l} N_i = \frac{6}{t} M_0 - \frac{6}{N_l t} M_0 \sum_{i=1}^{N_l} \left(\frac{2i-1}{N_l} \right) = \frac{6}{t} M_0 + \frac{6}{N_l t} M_0 - \frac{12}{N_l^2 t} M_0 \sum_{i=1}^{N_l} i = 0 \quad (6.21a)$$

$$\sum_{i=1}^{N_l} M_i + N_i(R_i - R) = M_0 \sum_{i=1}^{N_l} \left(\frac{1}{N_l^3} + \frac{3}{N_l} \left(1 - \frac{2i-1}{N_l} \right)^2 \right) = M_0 \quad (6.21b)$$

Por lo tanto ya se dispone de los esfuerzos y es directo obtener las cargas sobre cada lámina q_{zi} de la ecuación de equilibrio (6.2a):

$$N_i = q_{zi} R_i \quad (6.22)$$

El siguiente paso consiste en obtener las tensiones a partir de la carga q_{zi} , lo que se puede hacer teniendo en cuenta que dicha carga será la diferencia de las tensiones aplicadas en la parte superior e inferior de la lámina:

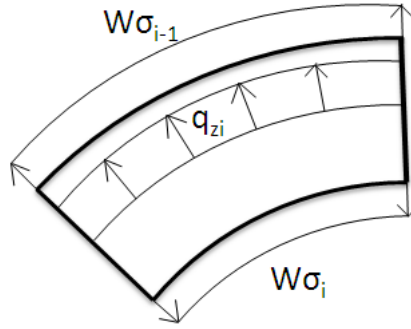


Figura 75: Equilibrio de tensiones.

$$\sigma_i \left(R_i - \frac{t}{2N_l} \right) = \sigma_{i-1} \left(R_i + \frac{t}{2N_l} \right) - \frac{q_{zi} R_i}{W} \quad (6.23)$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_0 = 0$ se tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{-1}{W \left(R_1 - \frac{t}{2N_l} \right)} q_{z1} R_1 \\ \sigma_2 &= \frac{-1}{W \left(R_2 - \frac{t}{2N_l} \right)} (q_{z1} R_1 + q_{z2} R_2) \\ \sigma_3 &= \frac{-1}{W \left(R_3 - \frac{t}{2N_l} \right)} (q_{z1} R_1 + q_{z2} R_2 + q_{z3} R_3) \end{aligned}$$

Y por lo tanto, como ecuación general se tendrá la siguiente expresión:

$$\sigma_i = \frac{-1}{W \left(R_i - \frac{t}{2N_l} \right)} \sum_{j=1}^i q_{zj} R_j \quad (6.24)$$

Para este caso considerado, en el cual $Q_i(\theta) = 0$, sustituyendo la ecuación de equilibrio (6.2a):

$$\sigma_i = \frac{-1}{W \left(R_i - \frac{t}{2N_l} \right)} \sum_{j=1}^i N_j \quad (6.25)$$

Desarrollando la ecuación:

$$\sigma_i = \frac{-1}{W \left(R_i - \frac{t}{2N_l} \right)} \frac{6}{N_l t} M_0 \sum_{j=1}^i \left(1 - \frac{2j-1}{N_l} \right) = \frac{1}{W \left(R_i - \frac{t}{2N_l} \right)} \frac{6}{N_l t} M_0 \left(i - \frac{i^2}{N_l} \right) \quad (6.26)$$

Despejando i de la ecuación (6.1) podemos obtener la siguiente expresión:

$$i = \frac{N_l}{2} \left(1 - \frac{2}{t} (R_i - R) \right) + \frac{1}{2} \quad (6.27)$$

y por lo tanto:

$$i - \frac{i^2}{N_l} = \frac{(2R_i N_l - 2N_l R + (N_l - 1)t)(t + N_l(2R - 2R_i + t))}{4N_l t^2} \quad (6.28)$$

De esta forma sustituyendo en la expresión de σ_i y haciendo el límite cuando $N_l \rightarrow \infty$ de forma que $r = R_i$ se llega a la siguiente expresión:

$$\sigma(r) = -\frac{6M_0}{Wt^3} \frac{(R + t/2 - r)(r - R + t/2)}{r} \quad (6.29)$$

Y expresando en función del radio exterior r_o y del interior r_i llegamos a la siguiente expresión para el cálculo de las tensiones:

$$\boxed{\sigma_r(r) = -\frac{6M_0}{Wt^3} \frac{(r_o - r)(r - r_i)}{r}}$$

Esta ecuación se puede obtener también de forma más rápida calculando el límite previamente en la tensión equivalente al axil N_i y después calculando la tensión por integración de la siguiente forma:

$$N_i = \frac{12M_0}{t^2 N_l} (R_i - R) \quad (6.30a)$$

$$\sigma_{\theta, N, i} = \frac{N_i}{t/N_l} = \frac{12M_0}{t^3} (R_i - R) \quad (6.30b)$$

$$\sigma_{\theta, N}(R_i) = \lim_{N_l \rightarrow \infty} \sigma_{\theta, N, i} = \frac{12M_0}{t^3} (R_i - R) \quad (6.30c)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{-1}{Wr} \int_r^{R+t/2} \sigma_{\theta, N}(R_i) dR_i = -\frac{6M_0}{Wt^3} \frac{(r_o - r)(r - r_i)}{r} \quad (6.30d)$$

Por otro lado se puede obtener el radio para el que se da la máxima tensión derivando dicha expresión, de forma que se llega a que éste tiene un valor de $r_{\sigma_{max}} = \sqrt{r_o r_i}$, y sustituyendo en la expresión de la tensión se llega a:

$$\sigma_{max} = -\frac{6M_0}{Wt^3} (\sqrt{r_o} - \sqrt{r_i})^2 \quad (6.31)$$

Si representamos dicha curva junto a la curva obtenida por las ecuaciones de Lekhnitskii para un valor típico de $k = \sqrt{7,5}$ se obtiene la siguiente gráfica:

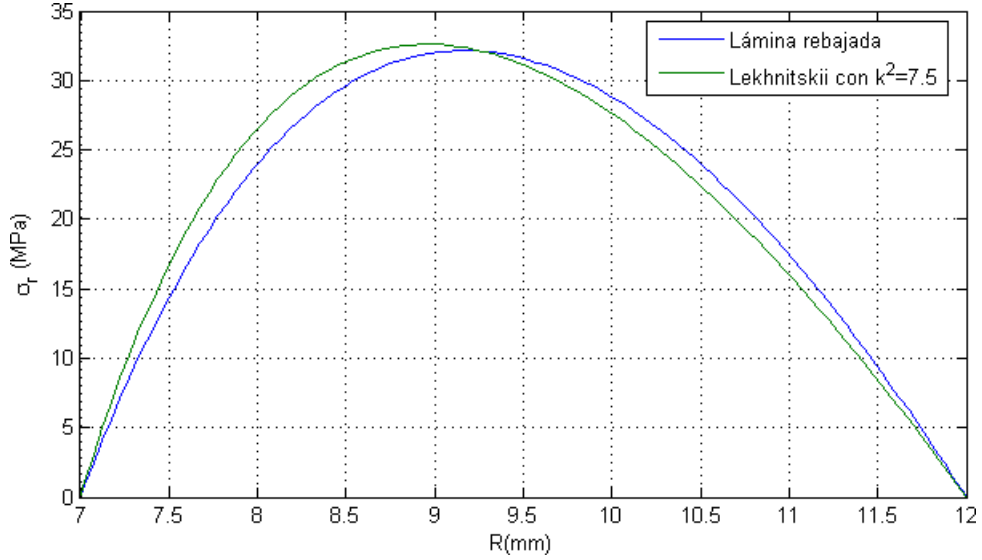


Figura 76: Comparación del modelo con lámina rebajada frente a Lekhnitskii.

Se puede observar que este modelo no capta del todo el comportamiento real de un material anisótropo homogéneo si no se puede despreciar el espesor t frente a R , provocando además que devuelva un mínimo de las tensiones levemente inferior al real, por lo que desde un punto de vista del cálculo de la rotura no se sitúa en el lado de la seguridad, aunque sí devuelve valores bastante aproximados. Además estima mal el punto de rotura de la probeta a lo largo del espesor. Es por eso que se ha considerado que para las geometrías de probetas dadas es conveniente el cálculo sin dicha hipótesis.

6.2. Caso de una sola lámina anisótropa homogénea sometida a un momento constante sin la hipótesis de lámina rebajada

Anteriormente en la obtención de las deformaciones se tenía:

$$\varepsilon_{22}(x, R_i) = \frac{R}{R_i} \varepsilon_{22}^0(x) + \frac{R(R_i - R)}{R_i} \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (6.32)$$

El cual usando la hipótesis de lámina rebajada se aproximó de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{22}(x, R_i) = \varepsilon_{22}^0(x) + (R_i - R) \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (6.33)$$

Esta hipótesis es válida cuando $t \ll R$, es decir, considerando $R \simeq R_i$. Si se desea realizar un cálculo más exacto sin lámina rebajada hay que calcular las propiedades A , B y D sin dicha hipótesis, y en este caso:

$$N = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{22} dz = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}_{22} \varepsilon_{22} dz = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}_{22} \left(\frac{R}{R+z} \varepsilon_{22}^0 + \frac{Rz}{R+z} \frac{d\varphi}{dx_1} \right) dz \quad (6.34a)$$

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{22} z dz = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}_{22} z \left(\frac{R}{R+z} \varepsilon_{22}^0 + \frac{Rz}{R+z} \frac{d\varphi}{dx_1} \right) dR \quad (6.34b)$$

De esta forma las propiedades A , B y D se redefinen de la siguiente forma:

$$A = \sum \left(\bar{Q}_{22} R \log \left(\frac{R+z_i}{R+z_{i-1}} \right) \right) \quad (6.35a)$$

$$B = \sum \left(\bar{Q}_{22} R \left(z_i - z_{i-1} - R \log \left(\frac{R+z_i}{R+z_{i-1}} \right) \right) \right) \quad (6.35b)$$

$$D = \sum \left(\bar{Q}_{22} R \left(R^2 \log \left(\frac{R+z_i}{R+z_{i-1}} \right) + \frac{z_i}{2} (z_i - 2R) - \frac{z_{i-1}}{2} (z_{i-1} - 2R) \right) \right) \quad (6.35c)$$

Cabe indicar que para un laminado simétrico ya no se tiene $B = 0$, ni siquiera cuando el material es isótropo.

Si el material estuviera compuesto por una sola lámina, como se ha considerado en este apartado, se tendría:

$$A = \left(\bar{Q}_{22} R \log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) \right) \quad (6.36a)$$

$$B = \left(\bar{Q}_{22} R \left(t - R \log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) \right) \right) \quad (6.36b)$$

$$D = \left(\bar{Q}_{22} R^2 \left(R \log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) - t \right) \right) = -RB \quad (6.36c)$$

De esta forma cada lámina de las N_l en la que se divida el material para el modelo tendrá unas rigideces A , B y D distintas dependientes del radio medio que tenga dicha lámina, a diferencia del caso de lámina rebajada en el cual todas las láminas tenían las mismas propiedades. De esta forma cada lámina en la que se divida el material tendrá las siguientes propiedades:

$$A_i = \left(\bar{Q}_{22} R_i \log \left(\frac{2R_i + t/N_l}{2R_i - t/N_l} \right) \right) \quad (6.37a)$$

$$B_i = \left(\bar{Q}_{22} R_i \left(\frac{t}{N_l} - R_i \log \left(\frac{2R_i + t/N_l}{2R_i - t/N_l} \right) \right) \right) \quad (6.37b)$$

$$D_i = \left(\bar{Q}_{22} R_i^2 \left(R_i \log \left(\frac{2R_i + t/N_l}{2R_i - t/N_l} \right) - \frac{t_l}{N_l} \right) \right) = -R_i B_i \quad (6.37c)$$

Además trabajando con éstas ecuaciones se puede llegar fácilmente a las siguientes expresiones:

$$(EA)_i = W \frac{A_i D_i - B_i^2}{D_i} = W \frac{-A_i R - B_i}{R} = W \bar{Q}_{22} \frac{t}{N_l} \quad (6.38a)$$

$$(EV)_i = W \frac{A_i D_i - B_i^2}{B_i} = -W(A_i R_i + B_i) = -W \bar{Q}_{22} R_i \frac{t}{N_l} = -R_i (EA)_i \quad (6.38b)$$

$$(EI)_i = W \frac{A_i D_i - B_i^2}{A_i} = W B_i \frac{-A_i R - B_i}{A_i} = B_i \frac{(EV)_i}{A_i} = (EV)_i \left(\frac{t/N_l}{\log \left(\frac{2R_i + t/N_l}{2R_i - t/N_l} \right)} - R_i \right) \quad (6.38c)$$

En primer lugar cabe observar que $(EA)_i$ no depende de R_i , por lo que todas las láminas independientemente de su radio tendrán la misma rigidez ante un esfuerzo de tracción. Además su valor es exactamente el mismo que en el caso de la hipótesis de lámina rebajada. En segundo lugar se observa que cuando $R_i \rightarrow \infty$ entonces $(EV)_i \rightarrow \infty$, como era de esperar al ser válida en dicho caso la hipótesis de lámina rebajada.

En este caso es fácilmente comprobable que las leyes de comportamiento de la viga curva quedarán de la siguiente forma:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = R_i \frac{M_i}{(EI)_i} - R_i \frac{N_i}{(EV)_i} \quad (6.39a)$$

$$\varepsilon_{22}^0 = R_i \frac{N_i}{(EA)_i} - R_i \frac{M_i}{(EV)_i} \quad (6.39b)$$

Igualando los desplazamientos como se vio en el apartado anterior se puede llegar a las siguientes ecuaciones que relacionan los esfuerzos de cada lámina con el esfuerzo M_0 sobre el material homogéneo equivalente:

$$R_i \frac{M_i}{(EI)_i} - R_i \frac{N_i}{(EV)_i} = R \frac{M_0}{EI} \quad (6.40a)$$

$$R_i \frac{N_i}{(EA)_i} - R_i \frac{M_i}{(EV)_i} = (R_i - R) R \frac{M_0}{EI} - R \frac{M_0}{EV} \quad (6.40b)$$

Despejando M_i y N_i de dichas ecuaciones se puede llegar a los siguientes esfuerzos:

$$M_i = \frac{R}{R_i} \frac{M_0}{EI} \frac{1}{\kappa_i} \left(\frac{1}{(EA)_i} + \frac{R_i - R}{(EV)_i} - \frac{EI}{(EV)_i EV} \right) \quad (6.41a)$$

$$N_i = \frac{R}{R_i} \frac{M_0}{EI} \frac{1}{\kappa_i} \left(\frac{1}{(EV)_i} + \frac{R_i - R}{(EI)_i} - \frac{EI}{(EI)_i EV} \right) \quad (6.41b)$$

$$\kappa_i = \frac{1}{(EI)_i (EA)_i} - \frac{1}{(EV)_i^2} \quad (6.41c)$$

Si sustituimos las ecuaciones (6.38) para expresar todas las rigideces de lámina en función única de $(EA)_i$ obtendremos las siguientes expresiones:

$$\kappa_i = \frac{1}{R_i^2 (EA)_i^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{t/R_i}{N_l \log \left(\frac{2R_i+t/N_l}{2R_i-t/N_l} \right)}} - 1 \right) \quad (6.42a)$$

$$M_i = \frac{R}{R_i} \frac{M_0}{EI} \frac{1}{\kappa_i (EA)_i} \left(1 + \frac{R - R_i}{R_i} + \frac{EI}{R_i EV} \right) \quad (6.42b)$$

$$N_i = \frac{R}{R_i^2} \frac{M_0}{EI} \frac{1}{\kappa_i (EA)_i} \left(-1 + \frac{\frac{R_i - R}{R_i} - \frac{EI}{R_i EV}}{1 - \frac{t/R_i}{N_l \log \left(\frac{2R_i+t/N_l}{2R_i-t/N_l} \right)}} \right) \quad (6.42c)$$

Y sustituyendo κ_i :

$$M_i = \frac{RR_i M_0 (EA)_i}{EI} \left(\frac{N_l \log \left(\frac{2R_i+t/N_l}{2R_i-t/N_l} \right)}{t/R_i} - 1 \right) \left(\frac{R}{R_i} + \frac{EI}{R_i EV} \right) \quad (6.43a)$$

$$N_i = \frac{RM_0 (EA)_i}{EI} \left(\frac{N_l \log \left(\frac{2R_i+t/N_l}{2R_i-t/N_l} \right)}{t/R_i} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{R}{R_i} - \frac{EI}{R_i EV}}{1 - \frac{t/R_i}{N_l \log \left(\frac{2R_i+t/N_l}{2R_i-t/N_l} \right)}} - 1 \right) \quad (6.43b)$$

Cabe mencionar que estas ecuaciones son válidas también para el caso de que las láminas sean distintas al no haber aplicado aun dicha hipótesis. De esta forma sustituyendo las expresiones de las rigideces para este caso de que todas las láminas tienen las mismas propiedades se llega a las siguientes expresiones, habiendo tenido en cuenta que $(EA)_i = EA/N_l$ para este caso:

$$M_i = \frac{R_i}{R} M_0 \frac{\log \left(\frac{2R_i+t/N_l}{2R_i-t/N_l} \right) - t/(N_l R_i)}{\log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) - t/R} \quad (6.44a)$$

$$N_i = \frac{M_0}{R} \frac{\log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) \frac{1}{N_l} - \log \left(\frac{2R_i+t/N_l}{2R_i-t/N_l} \right)}{\log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) - t/R} \quad (6.44b)$$

Para el cálculo de las tensiones en primer lugar se calcula la tensión circunferencial equivalente del axil y se realiza el límite para infinitas láminas en esta tensión:

$$\sigma_{\theta, N, i} = \frac{N_i}{t/N_l} = \frac{M_0}{Rt} \frac{\log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) - N_l \log \left(\frac{2R_i+t/N_l}{2R_i-t/N_l} \right)}{\log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) - t/R} \quad (6.45a)$$

$$\sigma_{\theta, N}(R_i) = \lim_{N_l \rightarrow \infty} \sigma_{\theta, N, i} = \frac{M_0}{Rt} \frac{\log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) - t/R_i}{\log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) - t/R} \quad (6.45b)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{-1}{W_r} \int_r^{R+t/2} \sigma_{\theta, N}(R_i) dR_i = -\frac{M_0}{WRrt} \frac{\log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) \left(R + \frac{t}{2} - r \right) - t \log \left(\frac{2R+t}{2r} \right)}{\log \left(\frac{2R+t}{2R-t} \right) - t/R} \quad (6.45c)$$

Sustituyendo los valores $r_o = R + t/2$ y $r_i = R - t/2$ así como desarrollando se puede llegar a la siguiente ecuación:

$$\sigma_r(r) = -\frac{M_0}{WRrt} \frac{\log\left(\frac{r_o}{r_i}\right)(r_o - r) - t \log\left(\frac{r_o}{r}\right)}{\log\left(\frac{r_o}{r_i}\right) - t/R}$$

Si representamos dicha curva junto a la curva obtenida por las ecuaciones de Lekhnitskii para un valor típico de $k = \sqrt{7,5}$ y la obtenida anteriormente para la lámina rebajada se obtiene la siguiente gráfica:

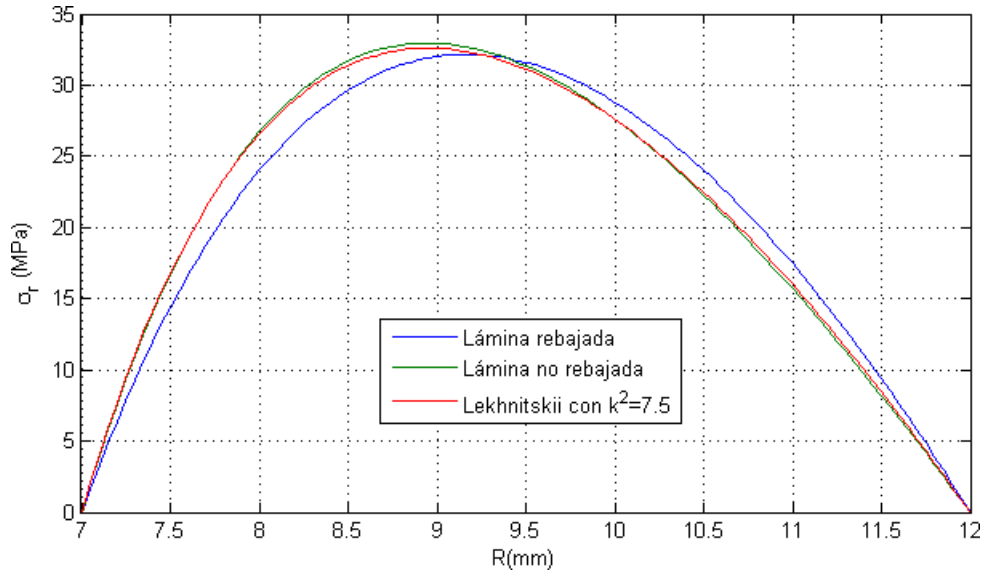


Figura 77: Comparación del modelo con lámina rebajada y no rebajada frente a Lekhnitskii.

Se puede observar que con respecto al valor típico de $k = \sqrt{7,5}$ se están cometiendo errores del orden del 1 %, por lo que son errores muy pequeños. Sin embargo, si se usa un valor de $k = 1$, en el libro *Anisotropic Plates* de *S. G. Lekhnitskii* se puede encontrar que la distribución σ_r teórica exacta toma la siguiente forma:

$$\sigma_r(r) = \frac{M_0}{Wr_o^2g} \left(\rho^2 \log(\rho) \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) - (1 - \rho^2) \log\left(\frac{r_o}{r}\right) \right) \quad (6.46a)$$

$$g = \left(\frac{1 - \rho^2}{2} \right)^2 - (\rho \log(\rho))^2 \quad (6.46b)$$

Y comparando los valores obtenidos de la expresión anterior con la expresión obtenida por esta metodología se observan errores que ya son del orden del 0,1 %, por lo que la expresión anterior es aun más exacta para materiales que tengan rigideces E_r y E_θ próximas.

Por lo tanto debido a estos errores casi despreciables se puede considerar validada esta metodología y se puede extender al caso de láminas con distintas propiedades (materiales compuestos), lo cual se hará en los siguientes apartados.

6.3. Caso de material compuesto sometido a un momento constante con la hipótesis de lámina rebajada

Recuperando las ecuaciones obtenidas para el material compuesto por una sola lámina homogénea antes de aplicar dicha hipótesis teníamos que las ecuaciones que nos permiten resolver este problema son las siguientes:

$$N_i = (R_i - R) \frac{(EA)_i}{EI} M_0 \quad (6.47a)$$

$$\sigma_i = \frac{-1}{W \left(R_i - \frac{t}{2N_i} \right)} \sum_{j=1}^i N_j \quad (6.47b)$$

De forma que dividiendo cada lámina del material compuesto en más subláminas se puede aplicar las ecuaciones anteriores para obtener en primer lugar los valores de N_i en cada sublámina y posteriormente sustituir obteniendo las tensiones interlaminares.

6.4. Caso de material compuesto sometido a un momento constante sin la hipótesis de lámina rebajada

En este caso igualmente las ecuaciones fueron obtenidas anteriormente y quedan como se presenta a continuación:

$$N_i = \frac{R}{R_i} \frac{M_0}{EI} \frac{1}{\kappa_i} \left(\frac{1}{(EV)_i} + \frac{R_i - R}{(EI)_i} - \frac{EI}{(EI)_i EV} \right) \quad (6.48a)$$

$$\kappa_i = \frac{1}{(EI)_i (EA)_i} - \frac{1}{(EV)_i^2} \quad (6.48b)$$

$$\sigma_i = \frac{-1}{W \left(R_i - \frac{t}{2N_i} \right)} \sum_{j=1}^i N_j \quad (6.48c)$$

6.5. Caso de material compuesto sometido a momento y axil en el extremo sin la hipótesis de lámina rebajada

Por último para llegar a unas ecuaciones más exactas del problema se va a considerar que tenemos un axil N_0 y un momento M_0 en $\theta = \phi_i$ (utilizando la nomenclatura utilizada cuando se dedujo la ley de comportamiento). En este caso el momento, el axil y el cortante no serán constantes al moverse por θ , por lo que las tensiones interlaminares tampoco lo serán, y de esta forma lo que nos interesará será las tensiones en $\theta = \phi_i$, punto en el que se carece de esfuerzo cortante y en el cual se considerará la tensión de rotura, pudiendo obtener las tensiones igualmente para el resto de puntos.

Recordando de la ley de comportamiento se tenía las siguientes expresiones del axil, cortante y momento flector a lo largo del tramo curvo:

$$N(\theta) = N_0 \cos(\theta - \phi_i) \quad (6.49a)$$

$$Q(\theta) = N_0 \sin(\theta - \phi_i) \quad (6.49b)$$

$$M(\theta) = RN_0 - RN_0 \cos(\theta - \phi_i) + M_0 \quad (6.49c)$$

Por otro lado utilizando las ecuaciones (6.39) es fácil obtener las siguientes expresiones:

$$R_i \frac{M_i}{(EI)_i} - R_i \frac{N_i}{(EV)_i} = R \frac{M(\theta)}{EI} - R \frac{N(\theta)}{EV} \quad (6.50a)$$

$$R_i \frac{N_i}{(EA)_i} - R_i \frac{M_i}{(EV)_i} = R \frac{N(\theta)}{EA} - R \frac{M(\theta)}{EV} + (R_i - R) \left(R \frac{M(\theta)}{EI} - R \frac{N(\theta)}{EV} \right) \quad (6.50b)$$

De donde se puede despejar las siguientes expresiones:

$$M_i = \frac{R}{R_i} \frac{1}{\kappa_i} \left[\frac{1}{(EA)_i} \left(\frac{M(\theta)}{EI} - \frac{N(\theta)}{EV} \right) + \frac{1}{(EV)_i} \left(\frac{N(\theta)}{EA} - \frac{M(\theta)}{EV} + (R_i - R) \left(\frac{M(\theta)}{EI} - \frac{N(\theta)}{EV} \right) \right) \right] \quad (6.51a)$$

$$N_i = \frac{R}{R_i} \frac{1}{\kappa_i} \left[\frac{1}{(EV)_i} \left(\frac{M(\theta)}{EI} - \frac{N(\theta)}{EV} \right) + \frac{1}{(EI)_i} \left(\frac{N(\theta)}{EA} - \frac{M(\theta)}{EV} + (R_i - R) \left(\frac{M(\theta)}{EI} - \frac{N(\theta)}{EV} \right) \right) \right] \quad (6.51b)$$

$$\kappa_i = \frac{1}{(EI)_i(EA)_i} - \frac{1}{(EV)_i^2} \quad (6.51c)$$

Por otro lado de la ecuación (6.2b) podemos obtener la expresión que nos determina Q_i , derivando por lo tanto $dQ_i/d\theta$, y sustituyendo $\theta = \phi_i$ en todas las expresiones llegamos a los siguientes valores:

$$M_i(\phi_i) = \frac{R}{R_i} \frac{1}{\kappa_i} \left[\frac{1}{(EA)_i} \left(\frac{M_0}{EI} - \frac{N_0}{EV} \right) + \frac{1}{(EV)_i} \left(\frac{N_0}{EA} - \frac{M_0}{EV} + (R_i - R) \left(\frac{M_0}{EI} - \frac{N_0}{EV} \right) \right) \right] \quad (6.52a)$$

$$N_i(\phi_i) = \frac{R}{R_i} \frac{1}{\kappa_i} \left[\frac{1}{(EV)_i} \left(\frac{M_0}{EI} - \frac{N_0}{EV} \right) + \frac{1}{(EI)_i} \left(\frac{N_0}{EA} - \frac{M_0}{EV} + (R_i - R) \left(\frac{M_0}{EI} - \frac{N_0}{EV} \right) \right) \right] \quad (6.52b)$$

$$\left. \frac{dQ_i}{d\theta} \right|_{\theta=\phi_i} = \frac{R}{R_i} \frac{1}{\kappa_i} \left[\frac{1}{(EV)_i} \left(-\frac{RN_0}{EI} - \frac{N_0}{EV} \right) + \frac{1}{(EI)_i} \left(\frac{N_0}{EA} + \frac{RN_0}{EV} + (R_i - R) \left(-\frac{RN_0}{EI} - \frac{N_0}{EV} \right) \right) \right] \quad (6.52c)$$

Recordando la ecuación de equilibrio (6.2a) podemos obtener la siguiente expresión para las cargas interlaminares:

$$q_{zi}(\phi_i)R_i = N_i(\phi_i) - \left. \frac{dQ_i}{d\theta} \right|_{\theta=\phi_i}$$

$$q_{zi}(\phi_i)R_i = \frac{R}{R_i} \frac{M_0 + RN_0}{\kappa_i} \left[\frac{1}{EI(EV)_i} + \frac{1}{(EI)_i} \left(\frac{R_i - R}{EI} - \frac{1}{EV} \right) \right] \quad (6.53)$$

De esta forma la expresión de $q_{zi}(\phi_i)R_i$ es la misma que se tenía anteriormente con la salvedad de que al momento M_0 hay que sumarle una cantidad RN_0 que cambiará la distribución de esfuerzos interlaminares. Esto contradice para materiales homogéneos a lo que se tenía con Lekhnitskii, puesto que según dichas expresiones un esfuerzo N_0 no producía cargas interlaminares en los puntos en los cuales el cortante es nulo, como es el caso de $\theta = \phi_i$, sin embargo en los casos considerados se tiene que $RN_0 \ll M_0$, por lo que el cambio al considerarlo va a ser despreciable.

Por último como se demostró anteriormente las tensiones se calcularían de la siguiente forma a partir de las cargas interlaminares calculadas:

$$\sigma_i = \frac{-1}{W \left(R_i - \frac{t}{2N_i} \right)} \sum_{j=1}^i q_{zj} R_j \quad (6.54)$$

6.6. Resultados experimentales

Una vez desarrollada la teoría interesa observar los resultados que devuelve para las distintas probetas de forma que se pueda obtener una tensión de rotura (tensión máxima que se produzca en la distribución calculada) para la carga de rotura que se ha obtenido experimentalmente, para lo cual hay que realizar un cálculo intermedio del momento (y en su caso del axil) en el punto de simetría, el cual se realizará mediante la correlación obtenida en el apartado de la relación $P - \delta$ y descrita por las ecuaciones (5.86) y (5.85).

Para facilitar las referencias a los distintos métodos se usará la siguiente terminología:

- Modelo ILTS_CT_1: Modelo de material compuesto sometido a un momento constante con la hipótesis de lámina rebajada.
- Modelo ILTS_CT_2: Modelo de material compuesto sometido a un momento constante sin la hipótesis de lámina rebajada.
- Modelo ILTS_CT_3: Modelo de material compuesto sometido a momento y axil en el punto de simetría con la hipótesis de lámina rebajada.
- Modelo ILTS_CT_4: Modelo de material compuesto sometido a un momento constante con la hipótesis de lámina rebajada considerando las propiedades de compresión en las zona sometidas a la misma.

De esta forma si se representa las distribuciones de tensiones obtenidas para un mismo momento aplicado por los distintos métodos junto con el punto de rotura experimental se pueden obtener las siguientes gráficas. En ellas hay que recordar que las líneas rojas verticales indican que todas o la gran mayoría de las probetas han roto por ese punto, mientras que las verdes indican que sólo algunas probetas han roto por ahí.

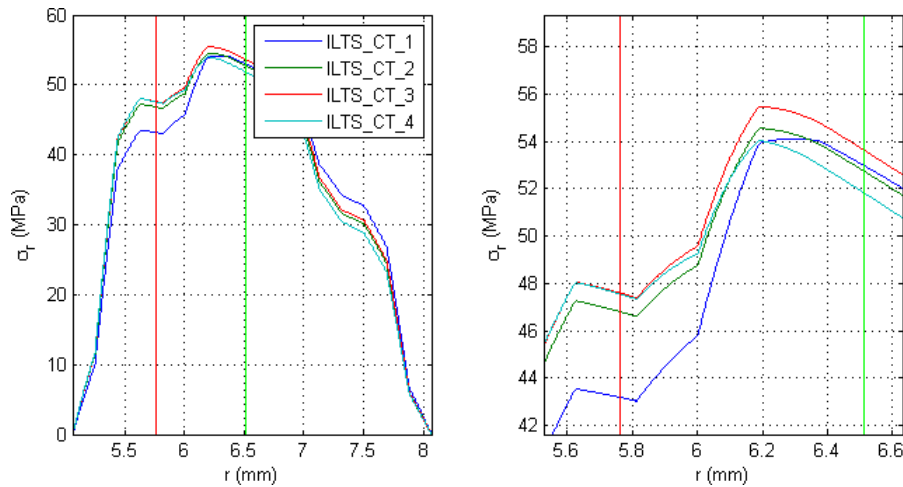


Figura 78: Distribución de tensiones interlaminares en las probetas 4PT1.

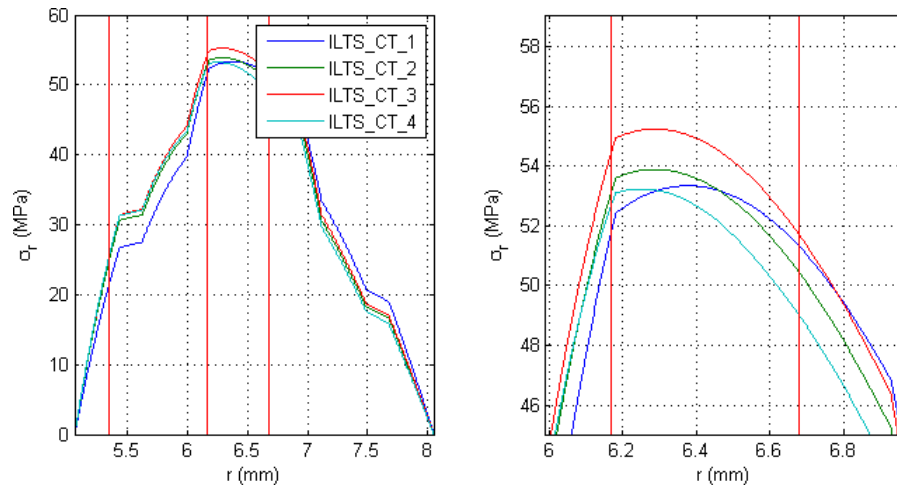


Figura 79: Distribución de tensiones interlaminares en las probetas 4PT2.

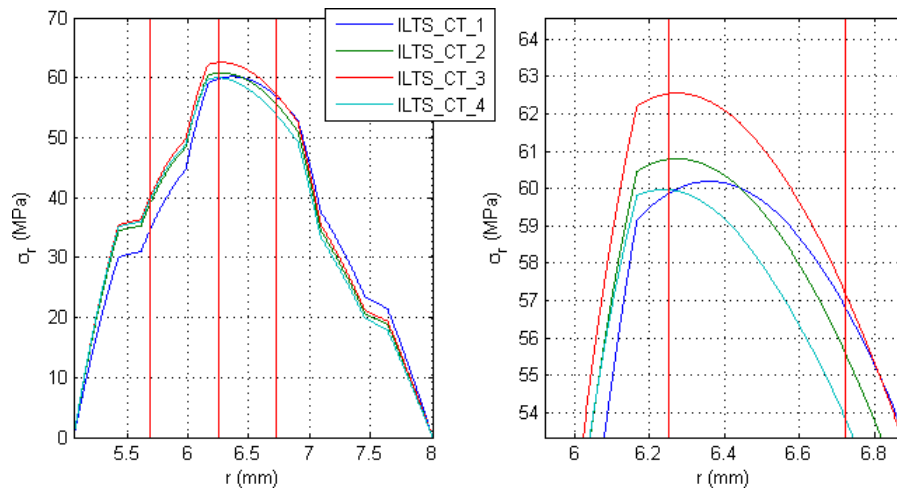


Figura 80: Distribución de tensiones interlaminares en las probetas 4PT5.

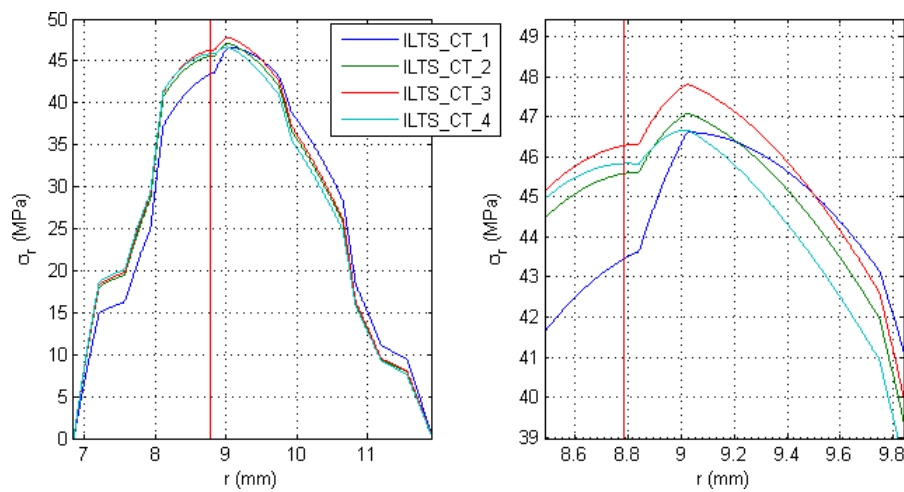


Figura 81: Distribución de tensiones interlaminares en las probetas 4PT6.

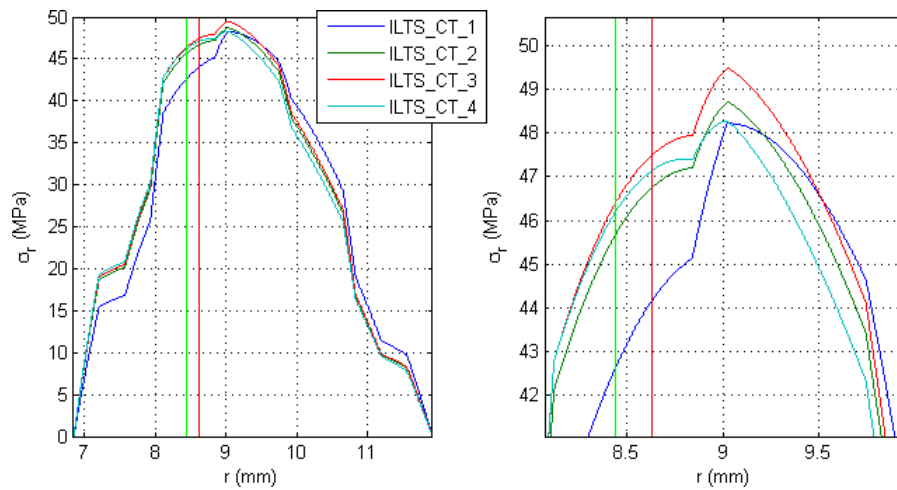


Figura 82: Distribución de tensiones interlaminares en las probetas 4PT7.

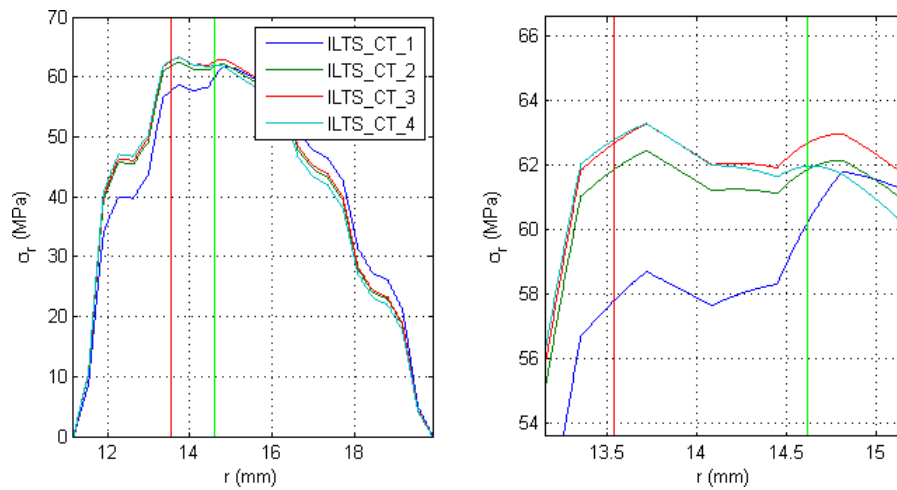


Figura 83: Distribución de tensiones interlaminares en las probetas 4PT8.

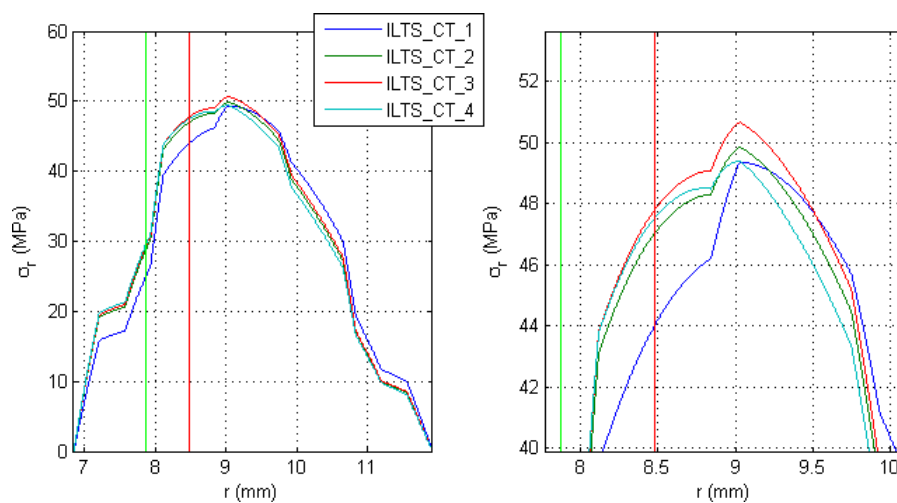


Figura 84: Distribución de tensiones interlaminares en las probetas 4PT9.

Cabe destacar en primer lugar que en la probeta 4PT8 se ha conseguido aproximar mucho mejor el punto de rotura al eliminar la hipótesis de lámina rebajada, por lo que dicha hipótesis tiene efectos importantes en la distribución de tensiones teórica obtenida. Por otro lado el considerar o no considerar N_0 como ya se observaba en las ecuaciones obtenidas sólo afecta en que se tendrá un momento M_0 mayor y por lo tanto la distribución de tensiones será igual pero con valores levemente mayores. De esta forma N_0 no añade errores en la forma de la distribución a los resultados, y sólo afecta levemente a los valores numéricos. Por último el considerar las distintas propiedades de compresión en las zonas sometidas a la misma sí que afecta a la distribución de tensiones, provocando que haya mayores tensiones en las zonas sometidas a compresión y por lo tanto que los puntos de rotura se aproximen a radios menores, tal y como se observa en los valores experimentales.

Con respecto a los resultados numéricos cabe observar que el punto de rotura teórico obtenido con el modelo ILTS_CT_4 se aproxima de forma bastante exacta al experimental, siendo un poco diferente en las probetas 4PT1, donde el punto de rotura experimental se aproxima menos a las máximas tensiones calculadas.