

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

INGENIERO AERONÁUTICO (PLAN 2002)

PROYECTO FIN DE CARRERA

**ANÁLISIS DEL VUELO DE
CRUCERO DE MÍNIMO COSTE
DE AVIONES COMERCIALES**

AUTOR: ALBERTO BERNAD BLANCH

TUTOR: DAMIÁN RIVAS RIVAS

22 de noviembre de 2013



*Dedicado a:
toda mi familia, especialmente a Paula*

Resumen

En el presente proyecto se analiza el vuelo de crucero de mínimo coste de aviones comerciales, teniendo en cuenta tanto los costes del combustible como los del tiempo. Se hace uso del cálculo variacional para obtener las condiciones que debe satisfacer el crucero para minimizar su coste y se calculan las leyes de control óptimas. La formulación se hace para un modelo general de aeronave (tanto de polar parabólica como de consumo específico de combustible) y los resultados se presentan para un modelo típico de aeronave civil de pasajeros de fuselaje ancho y dos motores.

Se analiza cómo afecta el alcance, el peso de la aeronave y el Índice de Coste (relación entre el coste del tiempo y el del combustible) a las trayectorias óptimas. Los resultados obtenidos se comparan con el crucero de mínimo consumo de combustible.

También se estudia el crucero imponiendo que el número de Mach y el coeficiente de sustentación sean constantes y se analiza su optimalidad.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
1.2. Revisión de la literatura	2
1.3. Motivación	4
1.4. Objetivos	4
2. Formulación del problema	7
2.1. Ecuaciones del movimiento	7
2.2. Condiciones iniciales	8
2.3. Coste del crucero	8
2.4. Modelos suplementarios	9
2.4.1. Modelo de tierra	9
2.4.2. Modelo de atmósfera	9
2.4.3. Modelo de aeronave	10
2.5. Formulación final del problema. Problema de minimización.	10
3. Formulación variacional	13
3.1. Ecuaciones de Euler - Lagrange	13
3.2. Sistema de Ecuaciones Algebraico-Diferenciales (DAE)	15
3.3. Índice de Coste nulo: $CI = 0$	17
3.4. Estratosfera: $k = 0$	19
3.5. Troposfera: $k > 0$	21

3.5.1.	Demostración de que en la troposfera necesariamente $M(r)$ y $C_L(r)$ no son constantes	21
3.5.2.	Troposfera: Resolución numérica del sistema DAE	22
4.	Formulación variacional: Análisis de resultados	25
4.1.	Resultados con Índice de Coste nulo	25
4.1.1.	$W(r)$, $\lambda(r)$, $\delta(r)$ y $h(r)$ para varios W_f	25
4.1.2.	h_i y h_f en función de W_f y r_f	26
4.1.3.	$m_F(r_f)$ y $t_f(r_f)$ para varios W_f	27
4.2.	Resultados en la estratosfera	28
4.2.1.	$M^*(CI)$ y $C_L^*(CI)$ para varios W_f y r_f	28
4.2.2.	$W(r)$, $\lambda(r)$, $\delta(r)$ y $h(r)$ para varios CI	29
4.2.3.	$h_i(CI)$ y $h_f(CI)$ para varios W_f y r_f	30
4.2.4.	$m_F(CI)$, $t_f(CI)$ y $DOC(CI)$ para varios W_f y r_f	31
4.3.	Resultados locales en la troposfera	33
4.3.1.	Resultados locales para varios CI	33
4.3.2.	Resultados locales para varios r_f	35
4.3.3.	Resultados locales para varios W_f	37
4.4.	Resultados globales en la troposfera	39
4.4.1.	M_i y M_f en función de r_f , W_f y CI	39
4.4.2.	C_{Li} y C_{Lf} en función de r_f , W_f y CI	40
4.4.3.	h_i y h_f en función de r_f , W_f y CI	41
4.4.4.	m_F en función de r_f , W_f y CI	42
4.4.5.	t_f en función de r_f , W_f y CI	43
4.4.6.	DOC en función de r_f , W_f y CI	44
5.	Crucero con M y C_L constantes	45
5.1.	Nueva formulación del problema	45
5.2.	Obtención de $DOC = f(M, C_L)$	46

5.2.1. Estratosfera: obtención de $DOC = f(M, C_L)$	46
5.2.2. Troposfera: obtención de $DOC = f(M, C_L)$	47
5.3. Minimización de $DOC = f(M, C_L)$	48
5.3.1. Estratosfera: minimización de $DOC = f(M, C_L)$	48
5.3.2. Troposfera: minimización de $DOC = f(M, C_L)$	49
6. Crucero con M y C_L constantes: Análisis de resultados	51
6.1. Comparación de M y C_L	51
6.2. Comparación de h	53
6.3. Comparación de m_F , t_f y DOC . Justificación de la aproximación	55
7. Resumen y conclusiones	59
7.1. Resumen de resultados	59
7.1.1. Efecto del CI	59
7.1.2. Efecto de r_f y W_f	60
7.2. Conclusiones y avances futuros	60
A. Modelo de aeronave	63
A.1. Modelo aerodinámico	63
A.2. Modelo propulsivo	64
B. Desarrollo de derivadas parciales	65
Notación matemática	67
Bibliografía	69

Capítulo 1

Introducción

A lo largo del capítulo se describe el contexto en el que se enmarca el presente proyecto y se realiza una revisión de la literatura en la que se clasifican los diversos tipos de optimización de trayectorias en función de numerosos criterios. En base a esto se justifica la motivación que origina el proyecto y sus objetivos principales.

1.1. Contexto

El presente proyecto se enmarca dentro de la *predicción y optimización de trayectorias*, rama de la Mecánica del Vuelo. Es una disciplina fundamental para la industria aeronáutica por numerosos aspectos, entre los que destaca que es la encargada de predecir la cantidad de combustible necesaria para realizar un determinado trayecto, y así conocer con cuánto combustible se ha de cargar la aeronave, teniendo en cuenta las reservas necesarias para imprevistos.

También es la disciplina encargada de la optimización de las trayectorias, es decir, de calcular las *ligaduras de vuelo* o *leyes de pilotaje* (grados de libertad que impone el piloto, como pueden ser la velocidad o la altitud) que permiten seguir una *trayectoria óptima* según diversos criterios. Los más frecuentes son:

- Para una carga de combustible dada, encontrar la trayectoria que maximiza el alcance.
- Para un alcance dado, encontrar la trayectoria que minimiza el consumo de combustible o el tiempo de vuelo.
- Para una altitud dada que se desea ascender o descender, encontrar la trayectoria que minimiza el tiempo necesario o la distancia horizontal recorrida.

Se puede optimizar cualquiera de las fases del vuelo, desde la fase de rodadura en tierra previa al despegue, hasta el aterrizaje, pasando por la subida y el descenso. Pero, sin ninguna duda, la fase más importante que requiere optimización es el crucero, debido a su mayor duración e impacto en el coste total de un vuelo. Por este motivo, la mayoría de los esfuerzos (y, en particular, el presente proyecto) se concentran en minimizar esta etapa del vuelo, que se define

por ser un vuelo *casi-estacionario*, es decir, se desprecian las fuerzas de inercia en las ecuaciones dinámicas. El crucero resulta ser *casi-horizontal*: la variación de altitud es ínfima en comparación con la distancia horizontal recorrida.

1.2. Revisión de la literatura

A continuación se realiza una clasificación general de los diversos métodos seguidos para la optimización de trayectorias de crucero, atendiendo a diversos criterios:

- **Función objetivo o magnitud que se desee optimizar.** Ésta puede ser, en principio, cualquier propiedad de la trayectoria. En un vuelo de crucero, los tres criterios más frecuentes son:
 - Para una carga de combustible dada, encontrar la trayectoria que maximiza el alcance o la autonomía.
 - Para un alcance dado, encontrar la trayectoria que minimiza el consumo de combustible. Equivale a maximizar el alcance para una carga de combustible dada.
 - Para un alcance dado, encontrar la trayectoria que minimiza el coste del vuelo. Es el caso del presente proyecto.

Hoy en día, es frecuente tener en cuenta otros efectos como la emisión de gases contaminantes o la generación de ruido.

- **Modelo de aeronave.** Usualmente (y así se hace en el presente proyecto) se considera la aeronave como una masa puntual y se le aplica equilibrio de fuerzas para obtener las ecuaciones dinámicas, para lo que se han de modelar las fuerzas aerodinámicas y propulsivas. Según las simplificaciones utilizadas en los modelos atmosférico, aerodinámico y propulsivo se obtienen unas trayectorias óptimas u otras o, incluso, puede darse el caso de que no exista solución, como ocurre cuando se utiliza la tradicional hipótesis de consumo específico constante y polar parabólica simétrica de coeficientes constantes, como demuestra Torenbeek [15]. Hoy en día, debido a la mejora de los métodos numéricos, se utilizan modelos muy generales y complejos que tienen en cuenta los efectos de la compresibilidad y de la altitud de vuelo.
- **Casi-Estacionario/No Estacionario.** En el primer caso, se desprecian las fuerzas de inercia en las ecuaciones dinámicas, y se simplifica el problema, mientras que en el segundo caso se obtiene una solución más exacta pero más compleja. En el presente proyecto se adopta dicha simplificación.
- **Con/Sin Restricciones.** Según si se impone alguna restricción al vuelo como por ejemplo, altitud de vuelo constante, o si se considera el problema libre de restricciones. En el presente proyecto no se considera ninguna restricción, lo que conduce a las soluciones más optimizadas posibles, denominadas *cruise climb*, que se caracterizan porque la altitud del vuelo aumenta conforme disminuye el peso de la aeronave. En la práctica, estas soluciones

no suelen estar permitidas debido a requisitos de control del tráfico aéreo, que habitualmente imponen una altitud de vuelo constante por tramos, el denominado *stepped cruise climb* que analiza Valenzuela et al. [16].

- **Método de resolución.** Los métodos de resolución existentes para la optimización de trayectorias se pueden clasificar en dos grandes grupos, que a continuación se explican brevemente (una descripción detallada de los mismos puede encontrarse en [7] y en [3]):
 - *Optimización estática o paramétrica.* Es el más sencillo desde el punto de vista matemático, consiste en encontrar una serie de parámetros que optimizan una función. Tiene como ventaja que permite imponer fácilmente restricciones al vuelo (de igualdad y de desigualdad). Como inconveniente, es un método menos general, pues no considera el caso de que las leyes de control varíen con el tiempo.
 - *Optimización dinámica o cálculo variacional.* Utilizado en el presente proyecto, consiste en encontrar una serie de funciones que optimizan un funcional. Es el método más general posible, que después se particulariza para resolver casos concretos. Dentro de la optimización dinámica se encuentra el *Control óptimo*, que divide las variables en dos tipos: de estado y de control. La solución proporciona leyes de control óptimas en función de las variables de estado, que pueden utilizarse directamente para controlar la aeronave a través de la trayectoria óptima. Un caso particular es el *Control óptimo singular*.

En la siguiente tabla-resumen (1.1) se indican diversas referencias que se han seguido en la elaboración del presente proyecto y se engloban dentro de la clasificación anteriormente expuesta:

Ref	Autor	Mín/Máx	Restric	Método	Estac	Viento
[15]	Torenbeek	Comb	Ambos	Derivadas logarítmicas	Casi-est	No
[4]	Cavcar et al.	Comb	Alt cte	Optimización paramétrica	Casi-est	No
[11]	Pargett et al.	Comb	Alt cte	Control Óptimo Singular	No est	No
[13]	Rivas et al.	Comb	Alt cte	Control Óptimo Singular	Casi-est	No
[12]	Rivas et al.	Alcance	Ambos	Cálculo Variacional	Casi-est	Ambos
[16]	Valenzuela et al.	Comb	Stepped	Optimización paramétrica	No est	No
[6]	Franco et al.	Comb	Alt cte	Control Óptimo Singular	No est	No
[5]	Franco et al.	Coste	Alt cte	Control Óptimo Singular	No est	Sí

Tabla 1.1: Clasificación de métodos de optimización de cruceros

(*) Mín/Máx: función objetivo a minimizar/maximizar. Restric: si existe alguna restricción. Comb: combustible. Alt: altitud. Cte: constante. Est: estacionario. Ambos: se refiere a que se analizan los dos casos (con/sin restricciones o con/sin viento). Stepped: Stepped cruise climb. Derivadas logarítmicas: equivale al Cálculo Variacional.

1.3. Motivación

El problema de minimizar el consumo de combustible en un vuelo de crucero, sea estacionario o no, está ampliamente estudiado en la literatura como se observa en la tabla (1.1). Sin embargo, conduce a soluciones “demasiado lentas”, es decir, los números de Mach óptimos obtenidos son menores que los que se utilizan habitualmente en la práctica. Como ejemplo podría destacarse a Rivas et al. [12] que, para la aeronave Boeing 767-300ER, obtiene un número de Mach óptimo de $M^* = 0,76$ que es menor que los habituales utilizados en la práctica (en las características técnicas de esta aeronave [1], se proporciona como valor típico del número de Mach durante el vuelo de crucero $M = 0,80$ que es en torno a un 5% superior).

En este contexto aparece el concepto del Coste Operativo Directo (DOC), que incluye tanto el coste del tiempo como el coste del combustible. A partir del Índice de Coste (CI), definido como el cociente entre el coste del tiempo y el coste del combustible, se calcula el DOC como: $DOC = m_F + CI \cdot t_f$, siendo m_F la masa total de combustible consumido y t_f el tiempo total que dura el crucero. Si se toma como función objetivo a minimizar este coste en lugar de únicamente la masa de combustible (que correspondería con el caso $CI=0$) se obtienen soluciones “más rápidas” y mucho más realistas. Cavcar et al. [4] observa este hecho: “aumentando sólo un 1% el consumo de combustible respecto al óptimo, el número de Mach aumenta un 4%, lo que es favorable si se tiene en cuenta el coste operativo directo”.

El potencial de ahorro económico utilizando correctamente el CI (eligiendo adecuadamente su valor en cada situación) es altísimo: en 2007, Boeing [14] lo cifró entre cuatro y cinco millones de US\$ anuales para una ruta aérea de 1000 millas. En el presente proyecto no se calcula qué valor del CI es el más adecuado para cada situación del vuelo sino que se toma éste como dato conocido y se analiza cómo afecta a las trayectorias óptimas.

Por otro lado, en la tabla (1.1) se observa que, en general, el caso más estudiado es el de vuelo a altitud constante, debido a requisitos de control del tráfico aéreo y el criterio de minimización más utilizado en la práctica es el de minimizar el consumo de combustible. Franco et al. [5] analiza el crucero de mínimo coste a altitud constante. Rivas et al. [12] analiza el crucero de mínimo combustible sin restricciones. Sin embargo, el vuelo de mínimo coste y sin restricciones no está estudiado, por lo que el presente proyecto pretende resolverlo de forma que pueda servir para comparar con los resultados obtenidos en otros tipos de crucero. El método empleado será el de Cálculo Variacional y se adoptan las simplificaciones de crucero casi-estacionario y sin viento.

1.4. Objetivos

El objetivo del presente proyecto consiste en minimizar el DOC de un crucero sin restricciones, dado un peso final de la aeronave W_f , un alcance r_f y un Índice de Coste CI . Se analiza como afecta la variación de cada uno de estos parámetros a las trayectorias óptimas, especialmente el CI . Se consideran tanto los casos en los que el vuelo se desarrolle íntegramente en la troposfera

o en la estratosfera.

Se hace un planteamiento mediante las técnicas del cálculo variacional para un modelo de aeronave lo más general posible, es decir, teniendo en cuenta los efectos de compresibilidad y altitud en la resistencia aerodinámica y en el consumo específico, y para un modelo de atmósfera también general. Las ecuaciones resultantes se particularizan para un modelo típico de aeronave civil de pasajeros de fuselaje ancho y dos motores, que opera en régimen subsónico pero a números de Mach elevados donde son importantes los efectos de compresibilidad, en particular se ha escogido el Boeing 767-300ER, y la Atmósfera Estandar Internacional ISA, aunque se podría haber elegido cualquier otro modelo de atmósfera y de aeronave debido a la gran generalidad del planteamiento.

Como limitaciones principales podrían señalarse que no se considera el efecto del viento y que no se analiza el caso en el que durante el vuelo se produzca la transición de troposfera a estratosfera.

Como en la solución de este problema se obtiene que el número de Mach y el coeficiente de sustentación varían muy poco durante el vuelo, también se estudia el crucero imponiendo que estos sean constantes y se analiza su optimalidad.

Capítulo 2

Formulación del problema

A lo largo del capítulo se formula el problema del vuelo de crucero de mínimo coste sin restricciones. Para ello, se desarrollan de forma detallada las ecuaciones del movimiento, proporcionando un modelo dinámico, se describen los modelos suplementarios necesarios, se define el *Coste Operativo Directo* y se calcula utilizando las ecuaciones del movimiento.

2.1. Ecuaciones del movimiento

Se considera que el vuelo de crucero es casi-estacionario, es decir, se pueden despreciar las fuerzas de inercia a la hora de establecer el balance de fuerzas. Debido a esto, las ecuaciones del movimiento que describen el crucero son las siguientes¹:

$$T = D \quad (2.1)$$

$$L = W \quad (2.2)$$

$$\frac{dr}{dt} = V \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{g} \frac{dW}{dt} = -cT \quad (2.4)$$

La ecuación (2.1) establece el equilibrio de fuerzas horizontales, entre el empuje T y la resistencia aerodinámica D . La ecuación (2.2) hace lo propio entre las fuerzas verticales, la sustentación L y el peso W . La ecuación (2.3) es cinemática y define la velocidad como la derivada respecto al tiempo de la distancia horizontal recorrida. La ecuación (2.4) propone un modelo de gasto de combustible proporcional al empuje generado por la aeronave, donde a la constante de proporcionalidad c se le denomina consumo específico. Las dos primeras ecuaciones son algebraicas, mientras que las dos últimas son diferenciales.

Para poder integrar estas ecuaciones es necesario proporcionar leyes de control para fijar los grados de libertad, en concreto en un vuelo de crucero son necesarias dos ligaduras de vuelo.

¹Estas ecuaciones están basadas en la hipótesis de que el ángulo de trayectoria γ es mucho menor que la unidad

También es necesario proporcionar unas condiciones iniciales a las ecuaciones diferenciales y unos modelos suplementarios (modelo de aeronave, modelo de tierra y modelo atmosférico), que complementen el sistema anterior.

2.2. Condiciones iniciales

Se considera que la distancia total del crucero r_f es un dato conocido, mientras que no lo es el tiempo que dura el crucero ni la carga de combustible. Por este motivo, interesa tomar como variable independiente la distancia horizontal r .

Por otro lado, en la ecuación del gasto de combustible es necesario imponer una condición de contorno, bien al principio del crucero, bien al final. Se ha optado por imponer la condición de contorno al final, es decir, $W(r = r_f) = W_f$ es conocido mientras que $W(r = 0) = W_i$ no lo es. El motivo de esta decisión es que interesa finalizar el crucero con el mínimo peso posible (aunque siempre con suficiente combustible en la reserva), independientemente de su distancia r_f . En cambio, el peso inicial del crucero sí que dependerá de la distancia, pues si ésta es mayor, la aeronave se cargará con más combustible. De esta manera, se pueden comparar convenientemente los resultados obtenidos para distintas distancias de crucero.

2.3. Coste del crucero

Como se explicó anteriormente, para resolver las ecuaciones del movimiento es imprescindible imponer unas ligaduras de vuelo. El objetivo del presente trabajo es encontrar las leyes de control óptimas que permitan seguir una trayectoria óptima de forma que se minimice el coste del crucero para un alcance dado. El coste del crucero es el *coste operativo directo (DOC)*, que tiene en cuenta el coste del combustible y el coste del tiempo de vuelo y puede expresarse como:

$$\overline{DOC} = c_f m_F + c_t t_f \quad (2.5)$$

donde c_f es el coste del combustible expresado en unidades monetarias por kilogramo, m_F es la masa total de combustible consumido durante el crucero en kilogramos, c_t es el coste del tiempo de vuelo en unidades monetarias por segundo y t_f es el tiempo total que dura el crucero en segundos. Es frecuente utilizar el parámetro *índice de coste (CI)* definido como $CI = c_t/c_f$ y medido por tanto en kg/s en el Sistema Internacional ². Valores realistas de este parámetro oscilan entre cero y tres, siendo 1,5 un caso típico.

En la ecuación (2.5) el *DOC* está medido en unidades monetarias, lo que no es muy conveniente, pues su valor depende del coste del kilogramo de combustible, que varía a lo largo del tiempo (depende principalmente del coste del barril de crudo, que varía según la situación geopolítica).

²En la práctica, no es habitual medir el CI en el Sistema Internacional, sino en el sistema anglosajón, midiendo el coste del tiempo en \$/h y el del combustible en cent/lb, resultando un CI medido en $\frac{\$/h}{cent/lb}$

Utilizando el CI , puede medirse en kilogramos de combustible:

$$DOC = \frac{\overline{DOC}}{c_f} = m_F + CI \cdot t_f \quad (2.6)$$

Esta nueva definición del DOC es la que se va a emplear a lo largo del trabajo.

2.4. Modelos suplementarios

En este apartado se describen modelos suplementarios de tierra, atmósfera y aeronave, que son necesarios para completar el sistema formado por las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4). Se describe lo fundamental de cara a la formulación del problema, mientras que detalles menos relevantes se reservan al apéndice A.

2.4.1. Modelo de tierra

Se considera un modelo de tierra plana con gravedad constante independientemente de la altitud del crucero, siendo su valor $g = 9,80665m/s^2$.

2.4.2. Modelo de atmósfera

Se considera que la atmósfera está en calma, es decir, que la velocidad del viento relativa a tierra es nula. Se considera el modelo de la Atmósfera Estándar Internacional (ISA), que define la densidad, presión, temperatura y velocidad del sonido como función de la altitud. El valor de estas magnitudes a nivel del mar se considera constante y se denota con el subíndice “0”. A lo largo del proyecto, se trabaja con el ratio de presiones $\delta = \frac{p}{p_0}$ como variable, por lo que interesa obtener la velocidad del sonido $a(\delta)$ y la altitud $h(\delta)$ en función de éste.

La ISA parte de la hipótesis de que el gradiente de temperaturas α_T es constante e igual a $-6,5 K/km$ en la troposfera ($h < 11 km$), mientras que en la estratosfera ($h > 11 km$) su valor es nulo. Sabiendo esto y bajo las hipótesis de que el aire es un gas perfecto, mediante las ecuaciones de la fluidoestática se llega a las siguientes expresiones para $a(\delta)$ y $h(\delta)$, donde a las magnitudes en la tropopausa ($h_* = 11 km$) se les ha denotado con el subíndice “*”:

$$h(\delta) = \begin{cases} \frac{\Theta_0}{\alpha_T} \left(1 - \delta^{\frac{R_g \alpha_T}{g}} \right) & \text{si } \delta > \delta_* \quad (\text{troposfera}) \\ h_* + \frac{R_g \Theta_0}{g} \cdot \ln \left(\frac{\delta_*}{\delta} \right) \cdot \delta_*^{\frac{R_g \alpha_T}{g}} & \text{si } \delta \leq \delta_* \quad (\text{estratosfera}) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$a(\delta) = \begin{cases} a_0 \cdot \delta^{\frac{R_g \alpha_T}{2g}} & \text{si } \delta > \delta_* \quad (\text{troposfera}) \\ a_0 \cdot \delta_*^{\frac{R_g \alpha_T}{2g}} & \text{si } \delta \leq \delta_* \quad (\text{estratosfera}) \end{cases} \quad (2.8)$$

Siendo $\Theta_0 = 288,15 K$ (temperatura a nivel del mar), $R_g = 287,053 J/(kgK)$ (constante de los gases para el aire), $\delta_* = 0,2233$ (ratio de presiones en la tropopausa) y $a_0 = 340,3 m/s$ (velocidad del sonido a nivel del mar).

2.4.3. Modelo de aeronave

Los resultados se presentan para un modelo típico de aeronave civil de pasajeros de fuselaje ancho y dos motores, que opera en régimen subsónico pero a números de Mach elevados donde son importantes los efectos de compresibilidad, en particular se ha escogido el Boeing 767-300ER cuyos datos necesarios se detallan en el apéndice A.

El modelo aerodinámico que se detalla en el apéndice A proporciona la polar del avión, es decir, el coeficiente de resistencia aerodinámica C_D en función del coeficiente de sustentación C_L y del Mach de vuelo M :

$$C_D = C_D(M, C_L) \quad (2.9)$$

La sustentación y la resistencia aerodinámica se obtienen a partir :

$$L = q_0 \delta M^2 C_L \quad (2.10)$$

$$D = q_0 \delta M^2 C_D(M, C_L) \quad (2.11)$$

donde $q_0 = \frac{1}{2} \kappa p_0 S$ es una constante conocida, siendo $\kappa = 1,4$ el ratio de calores específicos, S la superficie alar de referencia, $\delta = \frac{p}{p_0}$ es el ratio de presiones y p_0 es la presión a nivel del mar, que según la ISA (atmósfera estándar internacional) es de $p_0 = 101326 Pa$.

Utilizando la ecuación de equilibrio vertical (2.2) y la definición del coeficiente de sustentación (2.10) se obtiene:

$$C_L = \frac{W}{q_0 \delta M^2} \quad (2.12)$$

En cuanto al modelo propulsivo, se va a utilizar el siguiente modelo:

$$c = \frac{a(h)}{L_H} C_C(M) \quad (2.13)$$

donde L_H es el calor latente del combustible y C_C es el coeficiente de consumo específico de combustible, que puede considerarse que es sólo función del Mach de vuelo (en realidad también depende del coeficiente de empuje, aunque esta dependencia es muy débil según Miele [10]). En el apéndice A, se detalla la función $C_C(M)$ empleada.

2.5. Formulación final del problema. Problema de minimización.

En este apartado se plantea el problema de minimizar una función de coste sujeta a una ligadura. Para ello en primer lugar se busca expresar el DOC como una integral de la variable independiente r , que se hace de la siguiente manera:

$$DOC = m_F + CI \cdot t_f = \frac{1}{g} (W_i - W_f) + CI \cdot t_f = \frac{-1}{g} \int_{W_i}^{W_f} dW + CI \int_0^{t_f} dt$$

Ahora se realiza el cambio de variable de integraci3n

$$DOC = \int_0^{r_f} \left(\frac{-1}{g} \frac{dW}{dt} \frac{dt}{dr} + CI \frac{dt}{dr} \right) dr$$

Si en la f3rmula del DOC sustituimos la ecuaci3n de fuerzas horizontales (2.1), la ecuaci3n m1sica (2.4), la ecuaci3n cinem1tica (2.3) y la definici3n del Mach de vuelo, $M = V/a$, se obtiene la siguiente expresi3n:

$$DOC = \int_0^{r_f} \left[\frac{c(M, \delta)D(M, \delta, W) + CI}{a(\delta)M} \right] dr \quad (2.14)$$

La ecuaci3n anterior expresa el coste total del crucero como una integral cuyo valor se desea minimizar. El objetivo es encontrar el control 3ptimo expresado en forma de ligaduras de vuelo $M^*(r)$, $\delta^*(r)$ que generan una trayectoria 3ptima $W^*(r)$ tal que el DOC es m3nimo.

Adem1s, la trayectoria 3ptima $W^*(r)$ debe cumplir con las ecuaciones del movimiento (ecuaciones (2.1) a (2.4)). A partir de ellas (y utilizando que $V = aM$) se obtiene la siguiente ecuaci3n diferencial y su correspondiente condici3n de contorno:

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{gc(M, \delta)D(M, \delta, W)}{a(\delta)M}, \quad W(r = r_f) = W_f \quad (2.15)$$

En definitiva el problema a resolver se resume en:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } DOC &= \int_0^{r_f} \left[\frac{c(M, \delta)D(M, \delta, W) + CI}{a(\delta)M} \right] dr, \quad (\text{con } r_f \text{ conocido}) \\ \text{sujeto a } \frac{dW}{dr} &= -\frac{gc(M, \delta)D(M, \delta, W)}{a(\delta)M}, \quad W(r = r_f) = W_f \text{ (conocido)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse de forma m1s compacta utilizando las funciones gen1ricas $F(M, \delta, W)$ y $f(M, \delta, W)$:

$$\begin{aligned} \text{m3n } DOC &= \int_0^{r_f} F(M, \delta, W) dr, \quad (\text{con } r_f \text{ conocido}) \\ \text{s.a. } \frac{dW}{dr} &= f(M, \delta, W), \quad W(r = r_f) = W_f \text{ (conocido)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

siendo :

$$\begin{aligned} F(M, \delta, W) &= \frac{c(M, \delta)D(M, \delta, W) + CI}{a(\delta)M} \\ f(M, \delta, W) &= -\frac{gc(M, \delta)D(M, \delta, W)}{a(\delta)M} \end{aligned} \quad (2.18)$$

En el cap3tulo 3 se resuelve este problema mediante c1lculo variacional y en el cap3tulo 4 se analizan los resultados obtenidos.

En el cap3tulo 5 se aborda el problema en el caso de volar a M y C_L constantes; con estas restricciones de vuelo el problema de minimizaci3n es trivial y puede resolverse utilizando c1lculo infinitesimal. Los resultados obtenidos se analizan en el cap3tulo 6.

Capítulo 3

Formulación variacional

En el presente capítulo se plantea la resolución del problema formulado en el capítulo 2, utilizando para ello las técnicas del cálculo variacional. En concreto, se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange y se obtiene un sistema de Ecuaciones Algebraico-Diferenciales. Posteriormente se analizan casos particulares. El objetivo es encontrar los sistemas de ecuaciones de la forma más simplificada, aunque la resolución de los mismos se reserva al capítulo 4.

3.1. Ecuaciones de Euler - Lagrange

En el capítulo 2 se obtuvo el siguiente problema, ecuación (2.18):

$$\begin{aligned} \text{mín } DOC &= \int_0^{r_f} F(M, \delta, W) dr, & (\text{con } r_f \text{ conocido}) \\ \text{s.a. } \frac{dW}{dr} &= f(M, \delta, W), & W(r = r_f) = W_f \text{ (conocido)} \\ F(M, \delta, W) &= \frac{c(M, \delta)D(M, \delta, W) + CI}{a(\delta)M} \\ f(M, \delta, W) &= -\frac{gc(M, \delta)D(M, \delta, W)}{a(\delta)M} \end{aligned} \tag{3.1}$$

El objetivo es encontrar las leyes óptimas de vuelo $M^*(r)$, $\delta^*(r)$ y $W^*(r)$ que minimicen DOC , cumpliendo con la ecuación del gasto del combustible, que representa una ligadura.

Se define la función $H = F(M, \delta, W) + \lambda(r)[\dot{W} - f(M, \delta, W)]$, siendo $\lambda(r)$ el multiplicador de Lagrange. Nótese que H es una función de M , δ , W y \dot{W} pero no de \dot{M} ni $\dot{\delta}$, lo que provoca que las derivadas parciales de H respecto a estas dos últimas variables sean nulas. Las ecuaciones de

Euler-Lagrange proporcionan:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial M} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{M}} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial M} - \lambda(r) \frac{\partial f}{\partial M} = 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial \delta} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\delta}} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \delta} - \lambda(r) \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial W} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{W}} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial W} - \lambda(r) \frac{\partial f}{\partial W} - \frac{d\lambda}{dr} = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Las *condiciones de contorno naturales* son aquellas que se imponen en los extremos que son libres. En este caso, los extremos $W(r=0)$, $M(r=0)$, $\delta(r=0)$, $M(r=r_f)$, $\delta(r=r_f)$ son libres, pues se desconoce su valor, mientras que el peso final es conocido: $W(r=r_f) = W_f$. Por tanto, se tienen las siguientes condiciones de contorno naturales, aunque sólo una es de utilidad, pues las demás se cumplen de forma trivial al no depender H de \dot{M} ni de $\dot{\delta}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial \dot{M}}(r=0) &= \frac{\partial H}{\partial \dot{M}}(r=r_f) = 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial \dot{\delta}}(r=0) &= \frac{\partial H}{\partial \dot{\delta}}(r=r_f) = 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial \dot{W}}(r=0) &= 0 \Rightarrow \lambda(r=0) = 0
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

El conjunto de las ecuaciones de Euler-Lagrange, la condición de contorno natural no trivial, la ligadura del consumo de combustible y su condición de contorno forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: $M(r)$, $\delta(r)$, $W(r)$ y $\lambda(r)$. Este sistema representa las condiciones necesarias (aunque no suficientes) para la optimalidad:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial F}{\partial M} - \lambda(r) \frac{\partial f}{\partial M} \\
 0 &= \frac{\partial F}{\partial \delta} - \lambda(r) \frac{\partial f}{\partial \delta} \\
 \frac{d\lambda}{dr} &= \frac{\partial F}{\partial W} - \lambda(r) \frac{\partial f}{\partial W}, \quad \lambda(r=0) = 0 \\
 \frac{dW}{dr} &= f(M, \delta, W), \quad W(r=r_f) = W_f
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Las derivadas parciales de F y f respecto a W , M y δ son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial W} &= \frac{c}{aM} \frac{\partial D}{\partial W} \\
 \frac{\partial f}{\partial W} &= -\frac{gc}{aM} \frac{\partial D}{\partial W} \\
 \frac{\partial F}{\partial M} &= \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{M^2} (cD + CI) + \frac{1}{M} \left(D \frac{\partial c}{\partial M} + c \frac{\partial D}{\partial M} \right) \right] \\
 \frac{\partial f}{\partial M} &= -\frac{g}{a} \left[-\frac{1}{M^2} cD + \frac{1}{M} \left(D \frac{\partial c}{\partial M} + c \frac{\partial D}{\partial M} \right) \right] \\
 \frac{\partial F}{\partial \delta} &= \frac{1}{M} \left[-\frac{1}{a^2} \frac{da}{d\delta} (cD + CI) + \frac{1}{a} \left(D \frac{\partial c}{\partial \delta} + c \frac{\partial D}{\partial \delta} \right) \right] \\
 \frac{\partial f}{\partial \delta} &= -\frac{g}{M} \left[-\frac{1}{a^2} \frac{da}{d\delta} cD + \frac{1}{a} \left(D \frac{\partial c}{\partial \delta} + c \frac{\partial D}{\partial \delta} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2. Sistema de Ecuaciones Algebraico-Diferenciales (DAE)

Sustituyendo las ecuaciones (3.5) en las ecuaciones (3.4) se llega al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 0 &= (1 + \lambda g) \left[-cD + M \left(D \frac{\partial c}{\partial M} + c \frac{\partial D}{\partial M} \right) \right] - CI \\
 0 &= (1 + \lambda g) \left[-\frac{1}{a} \frac{da}{d\delta} cD + D \frac{\partial c}{\partial \delta} + c \frac{\partial D}{\partial \delta} \right] - \frac{1}{a} \frac{da}{d\delta} CI \\
 \frac{d\lambda}{dr} &= \frac{(1 + \lambda g)c}{aM} \frac{\partial D}{\partial W}, & \lambda(r=0) &= 0 \\
 \frac{dW}{dr} &= -\frac{gcD}{aM}, & W(r=r_f) &= W_f
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

A continuación se desarrollan las derivadas parciales de la resistencia aerodinámica y del consumo específico, utilizando para ello (2.11), (2.12) y (2.13):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial D}{\partial W} &= q_0 \delta M^2 \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \frac{\partial C_L}{\partial W} = q_0 \delta M^2 \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \frac{1}{q_0 \delta M^2} = \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \\
 \frac{\partial D}{\partial M} &= q_0 \delta M \left(2C_D + M \frac{\partial C_D}{\partial M} - 2C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \\
 \frac{\partial D}{\partial \delta} &= q_0 M^2 \left(C_D - C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \\
 \frac{\partial c}{\partial M} &= \frac{a}{L_H} \frac{dC_C}{dM} \\
 \frac{\partial c}{\partial \delta} &= \frac{1}{L_H} \frac{da}{d\delta} C_C(M)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13), y el sistema (3.7) en el sistema (3.6) se llega a un sistema de Ecuaciones Algebraico-Diferenciales en función de los coeficientes adimensionales C_D , C_D y C_C que se analiza en el siguiente apartado.

3.2. Sistema de Ecuaciones Algebraico-Diferenciales (DAE)

Se ha obtenido el siguiente sistema de Ecuaciones Algebraico-Diferenciales (DAE):

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{(1 + g\lambda)aq_0\delta M^2}{L_H} \left[MC_D \frac{dC_C}{dM} + C_C \left(C_D + M \frac{\partial C_D}{\partial M} - 2C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \right] - CI \\
 0 &= \frac{(1 + g\lambda)aq_0M^2C_C}{L_H} \left(C_D - C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) - \frac{1}{a} \frac{da}{d\delta} CI \\
 \frac{d\lambda}{dr} &= \frac{(1 + g\lambda)C_C}{L_H} \frac{\partial C_D}{M \partial C_L}, & \lambda(0) &= 0 \\
 \frac{dW}{dr} &= -\frac{gq_0\delta MC_C C_D}{L_H}, & W(r_f) &= W_f
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

El término $\frac{1}{a} \frac{da}{d\delta}$ puede calcularse utilizando la ecuación (2.8):

$$\frac{1}{a} \frac{da}{d\delta} = \begin{cases} \frac{R_g \alpha_T}{2g} \frac{1}{\delta} & \text{si } \delta > \delta_* \text{ (troposfera)} \\ 0 & \text{si } \delta \leq \delta_* \text{ (estratosfera)} \end{cases} \tag{3.9}$$

Este término puede reescribirse como $\frac{1}{a} \frac{da}{d\delta} = k \frac{1}{\delta}$, siendo k la siguiente función discontinua (puesto que $a(\delta)$ es continua pero no derivable):

$$k(\delta) = \begin{cases} \frac{Rg\alpha T}{2g} & \text{si } \delta > \delta_* \quad (\text{troposfera}) \\ 0 & \text{si } \delta \leq \delta_* \quad (\text{estratosfera}) \end{cases} \quad (3.10)$$

Utilizando esto y la ecuación (2.12) se llega finalmente al siguiente sistema DAE:

$$\begin{aligned} CI &= \frac{(1+g\lambda)aW}{L_H} \frac{1}{C_L} \left[MC_D \frac{dC_C}{dM} + C_C \left(C_D + M \frac{\partial C_D}{\partial M} - 2C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \right] \\ kCI &= \frac{(1+g\lambda)aW}{L_H} \frac{1}{C_L} \left[C_D - C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right] C_C \\ \frac{d\lambda}{dr} &= \left[\frac{gC_C}{ML_H} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right] \frac{(1+g\lambda)}{g}, \quad \lambda(0) = 0 \\ \frac{dW}{dr} &= \left[\frac{gC_C}{ML_H} \frac{C_D}{C_L} \right] (-W), \quad W(r_f) = W_f \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde las dos primeras expresiones son relaciones algebraicas y las otras dos son ecuaciones diferenciales. Se tiene el mismo número de incógnitas (que son funciones dependientes de r) que de ecuaciones, cuatro, que son: $\lambda(r)$, $W(r)$, $M(r)$, $\delta(r)$. El sistema se completa con las siguientes relaciones, que se obtuvieron anteriormente:

- $a(\delta)$, proporcionado por el modelo de atmósfera, ecuación (2.8).
- $k(\delta)$, calculado en la ecuación (3.10) a partir del modelo de atmósfera (ecuación 2.8).
- $C_C(M)$, proporcionado por el modelo propulsivo descrito en el apéndice A.
- $C_D(M, C_L)$, proporcionado por el modelo aerodinámico descrito en el apéndice A.
- $C_L = \frac{W}{q_0 \delta M^2}$, obtenido del equilibrio de fuerzas verticales.

Observése que todas las funciones que aparecen son continuas y derivables, excepto $k(\delta)$ y $a(\delta)$ que son, respectivamente, no continua y no derivable cuando $\delta = \delta_*$, es decir, cuando se atraviesa la tropopausa. Por este motivo, mientras que el crucero se realice sin atravesarla, es decir, íntegramente en la troposfera o en la estratosfera, puede asegurarse que se cumplen las condiciones de regularidad exigidas. Se omite del estudio el caso en que la solución la atraviesa, al no cumplirse dichas condiciones.

En los próximos apartados se resuelve el sistema (3.11) para los tres casos en los que es posible:

- $CI = 0$: Índice de Coste nulo. En este caso, el sistema DAE se puede desacoplar y resolverse en primer lugar las dos ecuaciones algebraicas y, posteriormente, las dos ecuaciones diferenciales. En este caso particular, no existe singularidad incluso si se cruza la tropopausa.
- $k = 0$: Crucero realizado íntegramente en la estratosfera ($\delta < \delta_*$). Ocurre lo mismo que en el caso anterior, aunque se obtienen ecuaciones algebraicas distintas.

- $k > 0$: Crucero realizado íntegramente en la troposfera ($\delta > \delta_*$). En este caso, no es posible desacoplar en general el sistema DAE.

3.3. Índice de Coste nulo: $CI = 0$

En este apartado se va a particularizar el sistema DAE (3.11) obtenido en el apartado anterior al caso particular de que el índice de coste es cero, es decir, que el coste del tiempo sea nulo. Por tanto, la resolución de este problema conduce a una trayectoria en la que se busca únicamente minimizar el consumo del combustible, independientemente de lo que dure el vuelo. Este problema lo analiza en detalle Rivas et al. [12] obteniendo los mismos resultados que se muestran a continuación. Sustituyendo $CI = 0$ y simplificando se llega a:

$$\begin{aligned}
 0 &= MC_D \frac{dC_C}{dM} + C_C \left(C_D + M \frac{\partial C_D}{\partial M} - 2C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \\
 0 &= C_D - C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \\
 \frac{d\lambda}{dr} &= \left[\frac{gC_C}{ML_H} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right] \frac{(1+g\lambda)}{g}, & \lambda(0) &= 0 \\
 \frac{dW}{dr} &= \left[\frac{gC_C}{ML_H} \frac{C_D}{C_L} \right] (-W), & W(r_f) &= W_f
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nótese que en el sistema resultante ya no aparecen las funciones $k(\delta)$ y $a(\delta)$, por lo que ya no existe singularidad cuando se atraviesa la tropopausa $\delta = \delta_*$.

Además, si se sustituye la segunda ecuación en la primera, ésta se simplifica:

$$0 = MC_D \frac{dC_C}{dM} + MC_C \frac{\partial C_D}{\partial M} - C_C C_D \tag{3.13}$$

Se observa que en este caso particular las dos ecuaciones algebraicas quedan desacopladas de las dos ecuaciones diferenciales, pues son únicamente dos ecuaciones con dos incógnitas, el número de Mach y el coeficiente de sustentación. Por tanto, estas dos ecuaciones pueden resolverse numéricamente (en concreto, se ha utilizado la función *fsolve* de Matlab, que permite resolver sistemas algebraicos de ecuaciones), obteniendo los valores óptimos M^* y C_L^* que son constantes a lo largo del crucero. Es más, puesto que en las ecuaciones algebraicas no aparece ningún parámetro, ni W_f ni r_f , queda probado que M^* y C_L^* no dependen de ninguno de ellos, sino que dependen exclusivamente del modelo de aeronave. A partir de estos puede obtenerse $\delta^*(W)$ utilizando la ecuación (2.12):

$$\delta^*(W) = \frac{W}{q_0(M^*)^2 C_L^*} \tag{3.14}$$

Esta expresión define un *cruise climb* (conforme el peso disminuye, la altitud aumenta), de forma que la variación de la presión es proporcional al peso de la aeronave. Por tanto, este tipo de crucero es el que minimiza el consumo de combustible para un alcance dado (o maximiza el

alcance para una carga de combustible dada). Nótese que si se define la eficiencia aerodinámica como $E = \frac{C_L}{C_D}$, la primera y la segunda relación algebraica son equivalentes a :

$$\frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{ME}{C_C} \right) = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial E}{\partial C_L} = 0 \quad (3.16)$$

es decir, el número de Mach debe ser tal que el parámetro $\frac{ME}{C_C}$ sea máximo, como ya observó Torrenbeek [15]. Para cada Mach de vuelo concreto, el coeficiente de sustentación que minimiza el consumo de combustible es aquel que maximiza la eficiencia aerodinámica.

Una vez resueltas las dos relaciones algebraicas se procede a la resolución de las dos ecuaciones diferenciales del sistema (3.12), que en este caso particular es muy sencilla y puede hacerse de forma analítica. Sustituyendo M^* y C_L^* en la segunda ecuación diferencial se obtiene:

$$\frac{dW}{dr} = - \left[\frac{gC_C(M^*)C_D(M^*, C_L^*)}{L_H M^* C_L^*} \right] W = -B \cdot W$$

donde se ha definido la constante $B = \frac{gC_C(M^*)C_D(M^*, C_L^*)}{L_H M^* C_L^*}$ con unidades de [1/m]. Integrando en ambos lados de la ecuación y utilizando la condición de contorno $W(r_f) = W_f$ se obtiene finalmente la ley que representa la variación óptima del peso con la distancia recorrida:

$$W^*(r) = W_f \cdot e^{B(r_f-r)} \quad (3.17)$$

De forma similar, sustituyendo M^* y C_L^* en la primera ecuación diferencial del sistema (3.12) y agrupando los términos constantes se obtiene:

$$\frac{d\lambda}{dr} = \left[\frac{gC_C(M^*)}{L_H M^*} \frac{\partial C_D}{\partial C_L}(M^*, C_L^*) \right] \frac{(1+g\lambda)}{g} = A \frac{(1+g\lambda)}{g}$$

donde se ha definido la constante $A = \frac{g}{L_H} \frac{C_C(M^*)}{M^*} \frac{\partial C_D}{\partial C_L}(M^*, C_L^*)$ con unidades de [1/m]. Integrando en ambos lados de la ecuación y utilizando la condición inicial $\lambda(0) = 0$ se obtiene finalmente la ley que representa la variación óptima de $\lambda(r)$:

$$1 + g \cdot \lambda^*(r) = e^{Ar} \quad (3.18)$$

Nótese que, debido a que según la segunda ecuación algebraica del sistema (3.12) $\frac{\partial C_D}{\partial C_L}(M^*, C_L^*) = C_D(M^*, C_L^*)/C_L^*$, las dos constantes coinciden $A = B$. Esto permite encontrar una integral primera del movimiento, es decir, una magnitud que se mantiene constante a lo largo del crucero. Multiplicando entre sí las ecuaciones (3.17) y (3.18) se llega a:

$$[1 + g \cdot \lambda^*(r)] W^*(r) = \text{cte (no depende de } r) = W_f \cdot e^{Ar_f} = W_i \quad (3.19)$$

En el apartado 4.1 se muestran los resultados obtenidos numéricamente para el modelo de aeronave descrito en el apéndice A.

3.4. Estratosfera: $k = 0$

En este apartado se particulariza el sistema DAE (3.11) al caso de que todo el vuelo se realice en la estratosfera, siendo el índice de coste distinto de cero (si éste fuese cero se llegaría al caso del apartado 3.3).

Según la ecuación (3.10), si todo el vuelo se desarrolla en la estratosfera $\delta < \delta_*$ entonces $k(\delta) = 0$. En este apartado se demuestra que sustituyendo $k = 0$ en el sistema DAE (3.11), se vuelve a obtener que el número de Mach y el coeficiente de sustentación son constantes a lo largo del crucero, igual que ocurría en el caso $CI = 0$ en el apartado 3.3, aunque los valores óptimos son distintos. Sustituyendo $k = 0$ en la segunda ecuación algebraica de (3.11) se deduce que, de nuevo:

$$0 = C_D - C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \quad (3.20)$$

Ahora en las dos ecuaciones diferenciales del sistema (3.11) se definen las funciones $A(M, C_L)$ y $B(M, C_L)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dr} &= \left[\frac{gC_C}{ML_H} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right] \frac{(1+g\lambda)}{g} = A \frac{(1+g\lambda)}{g} \\ \frac{dW}{dr} &= \left[\frac{gC_C}{ML_H} \frac{C_D}{C_L} \right] (-W) = -B \cdot W \end{aligned} \quad (3.21)$$

Debido a (3.20), se obtiene que $A(M, C_L) = B(M, C_L) \quad \forall M, C_L$. Si en las dos ecuaciones se despejan A y B y se igualan entre sí, se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{g}{(1+g\lambda)} \frac{d\lambda}{dr} &= \frac{-1}{W} \frac{dW}{dr} \\ gW \frac{d\lambda}{dr} + (1+g\lambda) \frac{dW}{dr} &= 0 \\ \frac{d}{dr} [(1+g\lambda)W] &= 0 \\ [1+g\lambda(r)] W(r) &= \text{cte (no depende de } r) \\ [1+g\lambda(r)] W(r) &= [1+g\lambda(\theta)] W(0) = W_i \end{aligned} \quad (3.22)$$

Se ha obtenido de nuevo que la magnitud $(1+g\lambda)W$ se mantiene constante a lo largo del crucero e igual a W_i (nótese que W_i es constante pero desconocida), al igual que ocurría en el caso de $CI = 0$ en el apartado 3.3. Gracias a esto y al hecho de que según el modelo atmosférico (ecuación (2.8)) la velocidad del sonido en la estratosfera a_* es constante, las dos ecuaciones algebraicas del sistema (3.11) quedan desacopladas de las diferenciales nuevamente, obteniéndose un sistema algebraico de dos ecuaciones con tres incógnitas, W_i , M y C_L , por lo que hay que completarlo con una tercera ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{CIL_H}{a_* W_i} &= \frac{1}{C_L} \left[MC_D \frac{dC_C}{dM} + C_C \left(C_D + M \frac{\partial C_D}{\partial M} - 2C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \right] \\ 0 &= C_D - C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Además, si se sustituye la segunda ecuación en la primera, ésta se simplifica:

$$\begin{aligned}\frac{CIL_H}{a_*W_i} &= \frac{1}{C_L} \left[MC_D \frac{dC_C}{dM} + MC_C \frac{\partial C_D}{\partial M} - C_C C_D \right] \\ 0 &= C_D - C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Estas dos ecuaciones proporcionan:

$$M^*, C_L^* = f(CI/W_i) \Rightarrow A(M^*, C_L^*) = f(CI/W_i) \quad (3.25)$$

Es decir, los valores óptimos M^* y C_L^* son constantes a lo largo del crucero, al igual que ocurría en el caso de $CI = 0$, aunque su valor es distinto pues el sistema algebraico es distinto. En concreto, dependen del parámetro CI/W_i (todavía desconocido), mientras que en el caso de $CI = 0$ no dependían de ningún parámetro, sólo del modelo de aeronave.

La resolución de las dos ecuaciones diferenciales (3.21) es idéntica al caso de $CI = 0$ ya que, al ser M^* y C_L^* constantes, también lo son las funciones $A(M^*, C_L^*)$ y $B(M^*, C_L^*)$. Por ello, son integrables analíticamente y, procediendo de forma similar al caso de $CI = 0$, se obtiene:

$$W^*(r) = W_f \cdot e^{B(r_f - r)} \quad (3.26)$$

$$1 + g \cdot \lambda^*(r) = e^{Ar} \quad (3.27)$$

Si ahora se particulariza $r = 0$ en la ecuación (3.26), se obtiene la relación que completa el sistema algebraico (3.24): $W_i = W_f \cdot e^{Br_f}$. Si se sustituye en (3.24), se obtiene finalmente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, M y C_L :

$$\begin{aligned}\frac{CIL_H}{a_*W_f} &= \frac{e^{Br_f}}{C_L} \left[MC_D \frac{dC_C}{dM} + MC_C \frac{\partial C_D}{\partial M} - C_C C_D \right] \\ 0 &= C_D - C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L}\end{aligned}\quad (3.28)$$

Por tanto, estas dos ecuaciones pueden resolverse numéricamente (de nuevo, se ha utilizado la función *fsolve* de Matlab), obteniendo los valores óptimos M^* y C_L^* que son constantes a lo largo del crucero. A partir de M^* y C_L^* puede obtenerse $\delta^*(W)$ utilizando la ecuación (2.12):

$$\delta^*(W) = \frac{W}{q_0(M^*)^2 C_L^*} \quad (3.29)$$

De nuevo, al igual que ocurría en el caso de que $CI = 0$ en el apartado 3.3, se obtiene un *cruise climb* (conforme el peso disminuye, la altitud aumenta), de forma que la variación de la presión es proporcional al peso de la aeronave.

Para que todo el razonamiento sea válido, es necesario comprobar que $\delta_i^* < \delta_*$ y utilizando (3.29) se obtiene una relación entre los parámetros que asegura que la solución es válida:

$$\frac{W_i}{q_0(M^*)^2 C_L^*} = \frac{W_f \cdot e^{B(M^*, C_L^*)r_f}}{q_0(M^*)^2 C_L^*} < \delta_* \quad (3.30)$$

En el apartado 4.2 se muestran los resultados obtenidos numéricamente para el modelo de aeronave descrito en el apéndice A.

3.5. Troposfera: $k > 0$

En este apartado se resuelve el sistema de Ecuaciones Algebraico-Diferenciales DAE (3.11) al caso particular de que todo el vuelo se realice en la troposfera, siendo el índice de coste distinto de cero (si éste fuese cero se llegaría al caso del apartado 3.3). En esta ocasión, ya no es posible desacoplar las ecuaciones algebraicas de las diferenciales, por lo que ha de resolverse numéricamente el sistema DAE (3.11), sabiendo que $k = \frac{R_g \alpha_T}{2g} > 0$.

En primer lugar se demuestra que en la troposfera necesariamente $M(r)$ y $C_L(r)$ no son constantes, lo que evita que puedan utilizarse técnicas similares a la de los apartados 3.3 y 3.4 para desacoplar el sistema DAE. A continuación, se explica cómo resolver numéricamente dicho sistema.

3.5.1. Demostración de que en la troposfera necesariamente $M(r)$ y $C_L(r)$ no son constantes

El sistema DAE (3.11) también puede expresarse como:

$$CI = \frac{(1+g\lambda)aW}{L_H} \frac{1}{C_L} \left[MC_D \frac{dC_C}{dM} + C_C \left(C_D + M \frac{\partial C_D}{\partial M} - 2C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \right] \quad (3.31)$$

$$\frac{kCI}{(1+g\lambda)aW} = \frac{C_C}{L_H} \left(\frac{C_D}{C_L} - \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \quad (3.32)$$

$$0 = \frac{g}{(1+g\lambda)} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{gC_C}{ML_H} \frac{\partial C_D}{\partial C_L}, \quad \lambda(0) = 0 \quad (3.33)$$

$$0 = \frac{1}{W} \frac{dW}{dr} + \frac{gC_C}{ML_H} \frac{C_D}{C_L}, \quad W(r_f) = W_f \quad (3.34)$$

Sumando (3.33) y (3.34) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{g}{W(1+g\lambda)} \left(W \frac{d\lambda}{dr} + \frac{(1+g\lambda)}{g} \frac{dW}{dr} \right) + \frac{gC_C}{ML_H} \left(\frac{C_D}{C_L} - \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \\ 0 &= \frac{1}{W(1+g\lambda)} \frac{d}{dr} \left[\frac{(1+g\lambda)}{g} W \right] + \frac{C_C}{ML_H} \left(\frac{C_D}{C_L} - \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si en la expresión anterior se sustituye la ecuación (3.32) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{W(1+g\lambda)} \frac{d}{dr} \left[\frac{(1+g\lambda)}{g} W \right] + \frac{1}{M} \frac{kCI}{(1+g\lambda)W a} \\ \frac{d}{dr} [(1+g\lambda)W] &= -\frac{kgCI}{Ma} < 0, \quad \forall r \end{aligned} \quad (3.36)$$

En definitiva, se demuestra que la magnitud $(1+g\lambda)W$ decrece a lo largo del crucero. Puesto que a también decrece a lo largo del crucero (pues, conforme disminuye el peso de la aeronave se

incrementa la altitud de vuelo), de la ecuación (3.32) se deduce que el término $C_C \left(\frac{C_D}{C_L} - \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \right)$ necesariamente crece a lo largo del crucero. Como este término es una función exclusiva de M y C_L , queda demostrado que $M(r)$ y $C_L(r)$ han de variar necesariamente a lo largo del vuelo.

3.5.2. Troposfera: Resolución numérica del sistema DAE

El sistema DAE (3.11) se ha resuelto utilizando la función *ode15s* de Matlab¹. Para ello se ha transformado en un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODE) introduciendo una *matriz de masas* (matriz que premultiplica a la columnas de las derivadas) de la forma siguiente (obsérvese que la matriz de masas es singular, es decir, su determinante es nulo):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{W} \\ \dot{M} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(\lambda, W, M, \delta) \\ f_2(\lambda, W, M, \delta) \\ f_3(\lambda, W, M, \delta) \\ f_4(\lambda, W, M, \delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda(r=0) \\ W(r=0) \\ M(r=0) \\ \delta(r=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_i \\ M_i \\ \delta_i \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

f_1, f_2, f_3 y f_4 son funciones genéricas que agrupan todos los términos que no tienen derivadas de las ecuaciones del sistema DAE (3.11) y que dependen de λ, W, M y δ (también dependen de C_L , pero éste puede expresarse en función de W, M y δ utilizando la ecuación (2.12)). Mediante esta transformación, se transforma el sistema DAE en un sistema ODE con sus condiciones iniciales impuestas al principio del crucero, cuando $r = 0$. Respecto a las condiciones iniciales, surgen ahora dos problemas:

- Se ha impuesto W_i , pero es desconocido. Por otro lado, no se ha utilizado W_f , que es un dato conocido.
- Se ha impuesto M_i y δ_i , pero estas dos condiciones iniciales son “ficticias”², pues no existían en el sistema DAE original (las relaciones algebraicas no necesitan condiciones de contorno), sino que aparecen al realizar la transformación de sistema DAE a sistema ODE.

El primero se resuelve utilizando el *método del disparo* que es un proceso iterativo que consta de los siguientes pasos:

1. Tomar $k = 1$ (k es un contador de iteraciones). Elegir un valor inicial de W_i^1 .
2. Resolver el sistema DAE, obteniéndose: $\lambda^k(r), W^k(r), M^k(r), \delta^k(r)$. Particularizar $W^k(r_f)$.
3. Obtener el error de la iteración actual, como $\Delta W^k = W^k(r_f) - W_f$.
4. Elegir una nueva aproximación de $W_i^{k+1} = W_i^k + \Delta W^k$. Tomar $k = k + 1$.
5. Repetir los pasos 2, 3 y 4 hasta que el error sea menor que el deseado: $|\Delta W^k| < \Delta W^{máx}$

El segundo se resuelve imponiendo unos valores de M_i y δ_i lo suficientemente cercanos a los valores reales de forma que la resolución numérica del sistema DAE converja³. Estos

¹En la web de MathWorks (www.mathworks.es/es/help/matlab/ref/ode15s.html) se explica con más detalle cómo utilizar la función *ode15s* y *ode23t* para resolver sistemas DAE

²Se conocen en la literatura como *inconsistentes*: condiciones iniciales que no cumplen las relaciones algebraicas

³De forma más precisa, se permite imponer condiciones iniciales inconsistentes, pero con un valor suficientemente cercano a unas condiciones iniciales que sean consistentes

valores impuestos no juegan el papel de condiciones iniciales sino de iterantes iniciales. Estos se consiguen mediante un *método de continuación*: se parte de $CI = 0$, cuya solución es conocida del apartado 3.3, y se aumenta el valor del CI de forma gradual, tomando como iterante inicial de M y δ (también se hace lo mismo para W_i^1) para cada CI la solución del CI inmediatamente inferior, es decir:

$$\begin{aligned} M_i|_{CI=CI_n} &= M(0)|_{CI=CI_{n-1}} \\ \delta_i|_{CI=CI_n} &= \delta(0)|_{CI=CI_{n-1}} \\ W_i|_{CI=CI_n} &= W(0)|_{CI=CI_{n-1}} \end{aligned}$$

Una vez transformado el sistema DAE en un sistema ODE y explicado como obtener las condiciones iniciales, existen numerosas funciones *ode* de Matlab que permiten su resolución, aunque la mayoría no son útiles para este caso pues, aunque permiten introducir una matriz de masas, esta no debe ser singular. La gran ventaja de la función *ode15s* de Matlab (cuyo algoritmo está basado en las fórmulas de diferenciación numéricas NDFs) frente a las otras funciones *ode* es que sí que permite resolver sistemas cuyas matrices de masa sean singulares. Otra función que también lo permite es *ode23t* cuyo algoritmo está basado en la regla del trapecio utilizando un interpolante libre.

Para resolver el sistema es necesario fijar los tres parámetros r_f , W_f y CI . Una vez hecho esto, la resolución del sistema permite obtener las cuatro incógnitas del problema: $\lambda(r)$, $W(r)$, $M(r)$, $\delta(r)$. Además, a partir de $\delta(r)$ del modelo atmosférico (2.7), se obtiene $h(r)$ y a partir de $\delta(r)$, $M(r)$ y $W(r)$, se obtiene $C_L(r)$ de su definición (2.10).

En los apartados 4.3 y 4.4 se muestran los resultados obtenidos numéricamente para el modelo de aeronave descrito en el apéndice A. En primer lugar, en el apartado 4.3 se resuelve el sistema para diversos valores de los parámetros r_f , W_f y CI , y se representan las funciones $\lambda(r)$, $W(r)$, $M(r)$, $C_L(r)$, $\delta(r)$ y $h(r)$, que son las variables locales, pues dependen de la variable independiente r .

Posteriormente, en el apartado 4.4 se parte de los resultados locales para obtener variables globales, que ya no dependen de r , como son la masa total consumida a lo largo del crucero m_F , el tiempo total empleado t_f y el coste total del crucero DOC , a partir de:

$$m_F = \frac{W_i - W_f}{g} \quad (3.38)$$

$$t_f = \int_0^{r_f} \frac{1}{a(r)M(r)} dr \quad (3.39)$$

$$DOC = m_F + CI \cdot t_f \quad (3.40)$$

También pueden considerarse variables globales el valor de las variables locales en los extremos del crucero, o al principio o al final, por lo que también se representan para su comparación.

Capítulo 4

Formulación variacional: Análisis de resultados

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos en la resolución numérica de los problemas planteados en el capítulo 3 para el modelo de aeronave descrito en el apéndice A. En primer lugar, se resuelve el problema con $CI = 0$, planteado en el apartado 3.3. Posteriormente, se resuelve el problema con $k = 0$, planteado en el apartado 3.4. Por último, se resuelve el problema con $k > 0$, planteado en el apartado 3.5. Los resultados obtenidos se clasifican en: *locales* (evolución de las variables con la variable independiente r) y *globales* (variables que no dependen de r).

4.1. Resultados con Índice de Coste nulo

En este apartado se muestran los resultados obtenidos en la resolución numérica del problema con $CI = 0$, planteado en el apartado 3.3 para el modelo de aeronave descrito en el apéndice A. La resolución de las dos ecuaciones algebraicas del sistema (3.12) conduce a $M^* = 0,7621$ y $C_L^* = 0,4429$. Las constantes definidas en el apartado 3.3 valen $A = B = 3,4715 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1}$, nótese que al ser su valor tan bajo, las exponenciales se pueden aproximar por rectas para valores no muy elevados de r_f .

4.1.1. $W(r)$, $\lambda(r)$, $\delta(r)$ y $h(r)$ para varios W_f

Una vez obtenidos M^* y C_L^* es posible obtener la evolución de las variables locales en función de r . En las figuras 4.1 a 4.4 se representan las funciones $W^*(r)$, $\lambda^*(r)$, $\delta^*(r)$ y $h^*(r)$ para un crucero de una distancia total de $r_f = 4000 \text{ km}$ y para varios pesos finales W_f .

En la figura 4.1 se observa que, como es lógico, el peso disminuye conforme el avión avanza, de forma aproximadamente lineal (en realidad es una exponencial negativa). Se obtiene que el crucero es un *cruise climb* pues conforme disminuye el peso la altitud aumenta (figura 4.4).

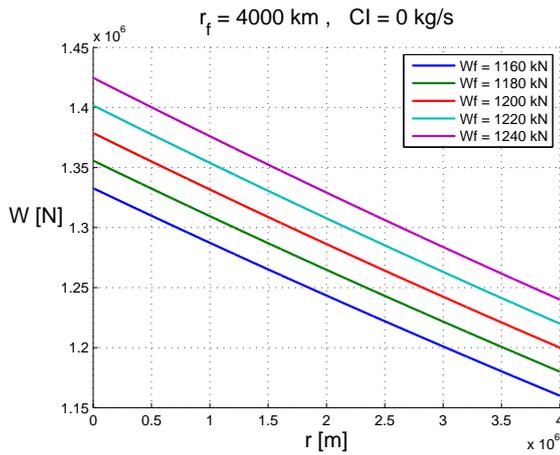


Figura 4.1: $W(r)$ para varios W_f

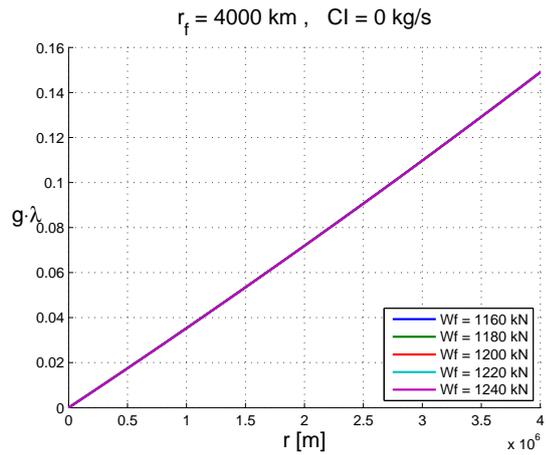


Figura 4.2: $g \cdot \lambda(r)$ para varios W_f

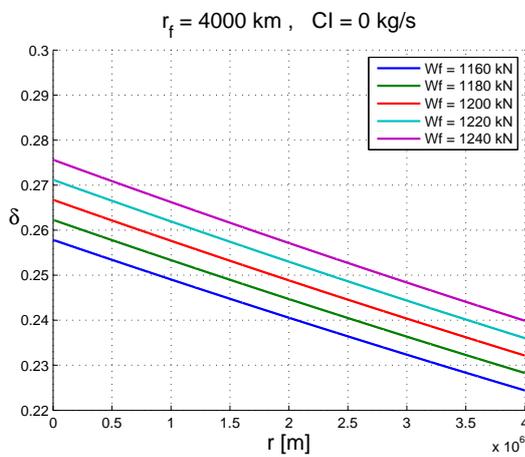


Figura 4.3: $\delta(r)$ para varios W_f

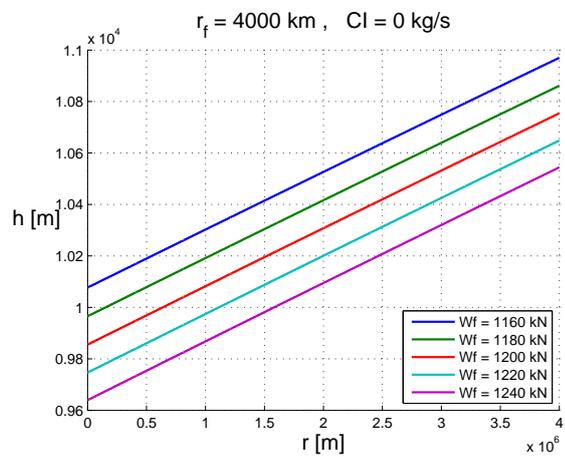


Figura 4.4: $h(r)$ para varios W_f

En la figura 4.2 se representa $g \cdot \lambda^*(r)$ que, como se dedujo en la ecuación (3.18), no depende del peso final. Se comprueba que crece de forma aproximadamente lineal desde 0 (recordar que la condición de contorno impuesta era $\lambda(0) = 0$) hasta un valor cercano a 0,15. Este resultado no tiene ningún significado físico relevante, pero es de gran utilidad para los apartados en los que $CI \neq 0$, pues las soluciones obtenidas para el caso $CI = 0$ no serán muy distintas de las que se obtengan para CI pequeños aunque distintos de cero, por lo que pueden utilizarse para resolver numéricamente el caso $CI \neq 0$ en un método de continuación, explicado en el apartado 3.5.

4.1.2. h_i y h_f en función de W_f y r_f

En la figura 4.5 se representan h_i^* y h_f^* en función de la distancia total del crucero r_f y para varios pesos finales W_f y en la figura 4.6 se representan en función de W_f para varios r_f .

En las figuras 4.5 y 4.6 se observa que, mientras que h_f es sólo función de W_f (si W_f crece entonces h_f decrece), h_i decrece con r_f por lo que cuanto mayor sea r_f mayor es el incremento de altitud $\Delta h = h_f - h_i$. Cuanto mayor sea W_f menor será la altitud a la que se desarrollará el

4.1. Resultados con Índice de Coste nulo

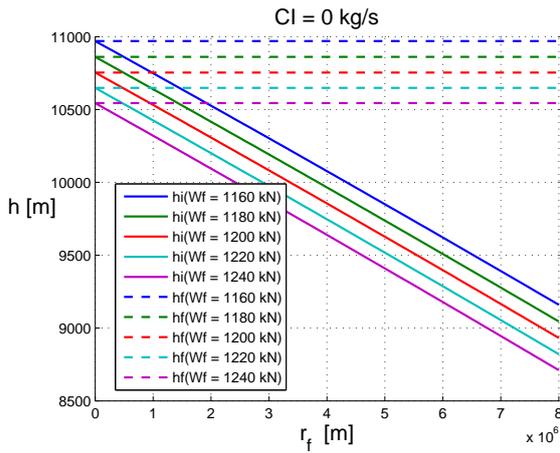


Figura 4.5: $h_i(r_f)$ y $h_f(r_f)$ para varios W_f

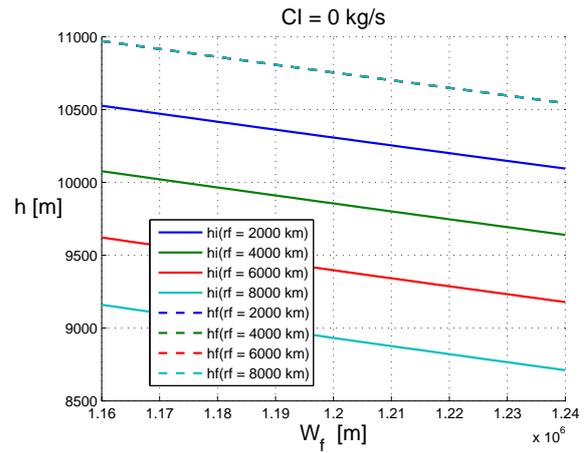


Figura 4.6: $h_i(W_f)$ y $h_f(W_f)$ para varios r_f

vuelo (tanto h_i como h_f). Las figuras 4.5 y 4.6 permiten además comprobar que el vuelo es casi-horizontal pues la distancia horizontal recorrida es considerablemente mayor que la vertical, por lo que la hipótesis de $\gamma \ll 1$ que se utilizó en el apartado 2.1 es correcta¹.

4.1.3. $m_F(r_f)$ y $t_f(r_f)$ para varios W_f

En las figuras 4.7 y 4.8 se representan m_F y t_f en función de r_f y para varios W_f . En la figura 4.7 se observa que el consumo de combustible crece con la distancia del crucero y con el peso final. En la figura 4.8 se comprueba que el tiempo de vuelo también aumenta con r_f , mientras que decrece, aunque poco, con W_f . Esto se debe a que cuanto mayor sea el peso final, son menores las altitudes de vuelo (figura 4.4), mayores las velocidades del sonido (según el modelo atmosférico (2.8) decrece con la altitud) y, por tanto, son mayores las velocidades de vuelo $V = aM$ (M es independiente de W_f).

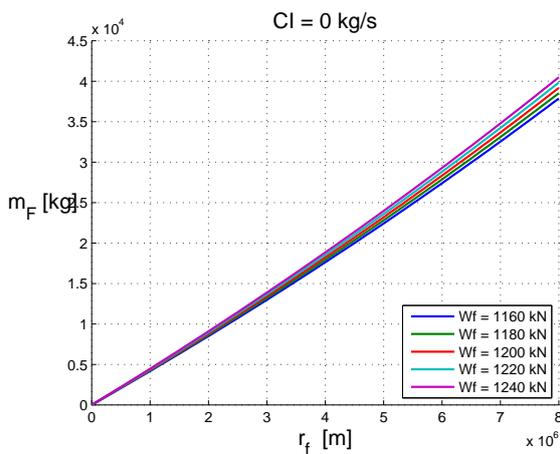


Figura 4.7: $m_F(r_f)$ para varios W_f

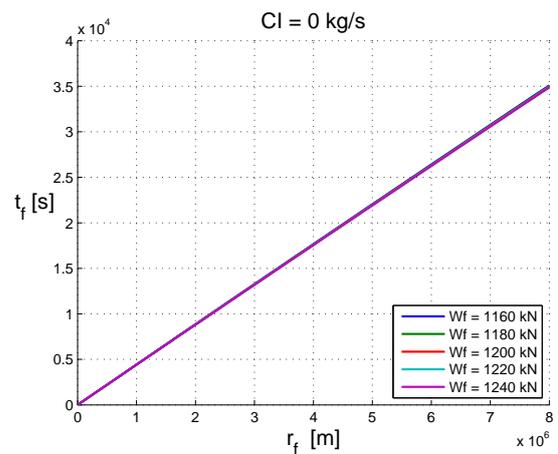


Figura 4.8: $t_f(r_f)$ para varios W_f

¹Por ejemplo, para $r_f = 4000 \text{ km}$ y $W_f = 1160 \text{ kN}$ se tiene $\Delta h = 890 \text{ m}$ y $\gamma \approx \frac{890}{4 \cdot 10^6} = 2,2250 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \ll 1$

4.2. Resultados en la estratosfera

En este apartado se resuelve el problema con $k = 0$, planteado en el apartado 3.4, particularizado para el modelo de avión definido en el apéndice A. Se mostrarán en primer lugar los resultados del sistema algebraico y, posteriormente, del sistema diferencial de ecuaciones.

La resolución de las dos ecuaciones algebraicas (3.24) permite obtener en función de los parámetros CI , r_f y W_f el número de Mach óptimo M^* y el coeficiente de sustentación óptimo C_L^* . Estos se mantienen constantes a lo largo de todo el crucero y a partir de estos se obtiene $\delta_f = \frac{W_f}{q_0 C_L^* M^{*2}}$ y $\delta_i = \frac{W_f \cdot e^{Br_f}}{q_0 C_L^* M^{*2}}$. Finalmente, del modelo atmosférico (2.8) se obtiene $h_f(\delta_f)$ y $h_i(\delta_i)$. Se representan estos resultados para varios W_f y r_f en función del CI . Se han elegido valores de W_f y r_f tales que siempre se cumpla la restricción $\delta(r) < \delta_* \forall r$ (o su equivalente $h(r) > h_* \forall r$), para que los resultados mostrados sean válidos. Para que esto se cumpla, en general se han elegido valores poco realistas de r_f y de W_f , pues los dos son demasiado pequeños para el modelo de aeronave para el que se han particularizado las ecuaciones (Boeing 767-300ER).

4.2.1. $M^*(CI)$ y $C_L^*(CI)$ para varios W_f y r_f

En las figuras 4.9 y 4.10 se representan M^* y C_L^* en función del CI para varios W_f y con un valor de $r_f = 2000 \text{ km}$, mientras que en las figuras 4.11 y 4.12 se hace lo mismo pero para varios r_f y con un valor de $W_f = 1000 \text{ kN}$.

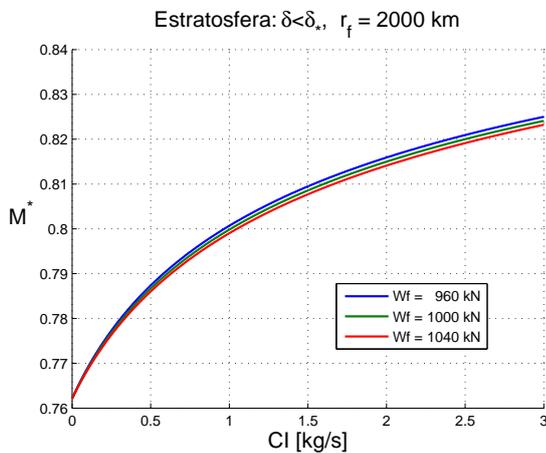


Figura 4.9: $M^*(CI)$ para varios W_f

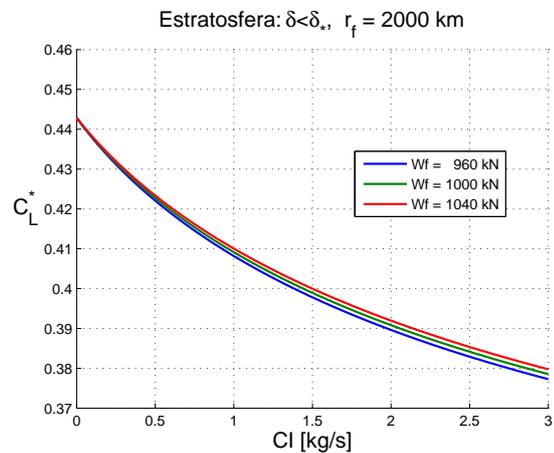


Figura 4.10: $C_L^*(CI)$ para varios W_f

En las figuras 4.9 y 4.11 se observa que, como es evidente, a mayor CI el número de Mach óptimo es mayor, es decir, $\partial M^*/\partial CI > 0$. Esto se debe a que al aumentar el coste del tiempo respecto al del combustible, compensa viajar a mayor velocidad pese a consumir más. Se observa que el efecto del CI es cada vez menor, es decir, $\partial^2 M^*/\partial CI^2 < 0$. Esto se debe a que se está volando a números de Mach cercanos al Mach de divergencia, que se caracterizan porque pequeños incrementos del número de Mach, que provocan pequeñas disminuciones en el tiempo de vuelo, producen grandes incrementos de la resistencia aerodinámica, con grandes incrementos

4.2. Resultados en la estratosfera

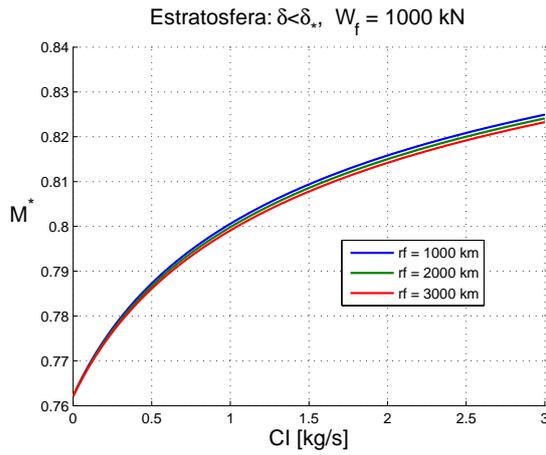


Figura 4.11: $M^*(CI)$ para varios r_f

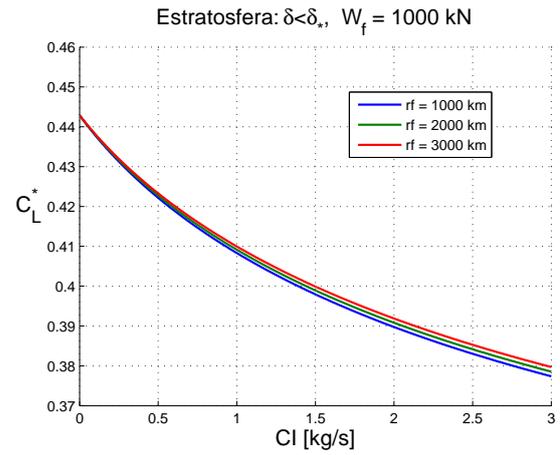


Figura 4.12: $C_L^*(CI)$ para varios r_f

del consumo de combustible. También se atenúa el efecto del CI con W_f (figura 4.9) y con r_f (figura 4.11).

La tendencia de las figuras 4.10 y 4.12 es consecuencia directa de las figuras 4.9 y 4.11: el comportamiento de C_L es el inverso al de M^2 debido a la fórmula (2.12), que implica $\delta_f = \frac{W_f}{q_0(M^*)^2 C_L^*}$ (como se verá posteriormente δ_f y h_f varían muy poco con CI).

4.2.2. $W(r)$, $\lambda(r)$, $\delta(r)$ y $h(r)$ para varios CI

Una vez obtenidos M^* y C_L^* es posible obtener la evolución de las variables locales en función de r . En las figuras 4.13 a 4.16 se representan las funciones $W^*(r)$, $\lambda^*(r)$, $\delta^*(r)$ y $h^*(r)$ para un crucero de una distancia total de $r_f = 2000 \text{ km}$, un peso final de $W_f = 1000 \text{ kN}$ y para varios valores del Índice de Coste CI .

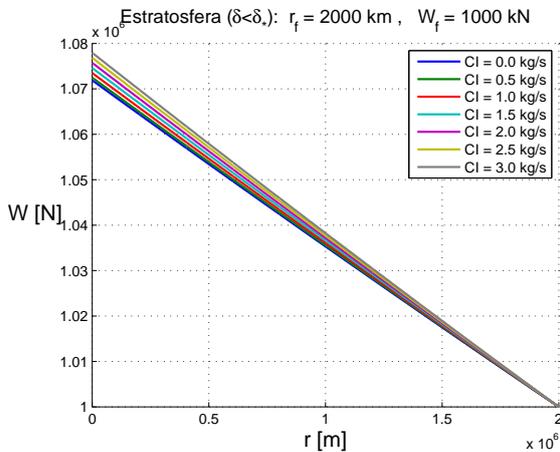


Figura 4.13: $W(r)$ para varios CI

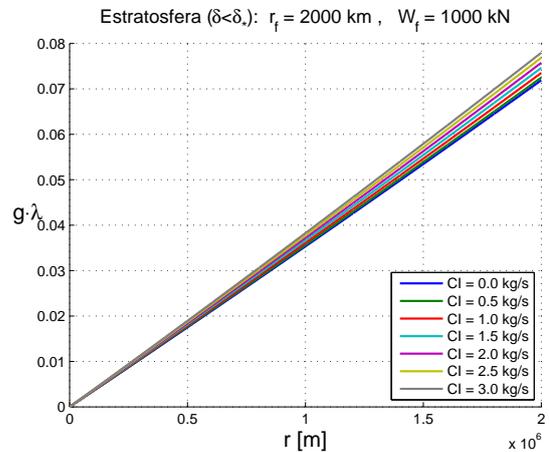


Figura 4.14: $g \cdot \lambda(r)$ para varios CI

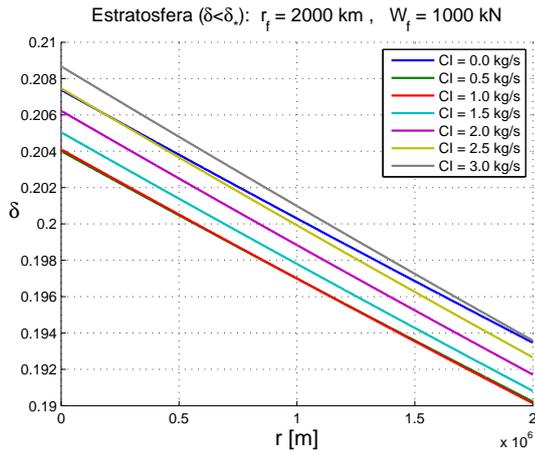


Figura 4.15: $\delta(r)$ para varios CI

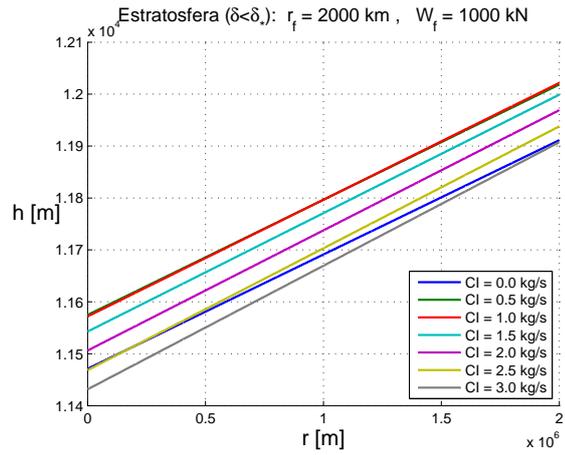


Figura 4.16: $h(r)$ para varios CI

Respecto a las tendencias de las funciones $W^*(r)$, $\lambda^*(r)$, $\delta^*(r)$ y $h^*(r)$ conforme aumenta r , en las figuras 4.13, 4.14 y 4.16 se observa que son similares a las del caso $CI = 0$ (figuras 4.1, 4.2 y 4.4): $W^*(r)$ y $\delta^*(r)$ decrecen con r de forma aproximadamente lineal, mientras que $\lambda^*(r)$ y $h^*(r)$ crecen.

Lo interesante de las figuras 4.13 a 4.16 es comprobar cómo se desplazan las curvas al variar el valor del CI . En la figura 4.13 se observa que el peso inicial de la aeronave aumenta con el CI , pues se necesita más combustible. Por el mismo motivo, la figura 4.14 muestra que λ_f aumenta con el CI , pues para el mismo W_f , un mayor W_i implica un mayor λ_f , debido a que siempre se cumple que $(1 + g\lambda)W = \text{cte} = W_i = (1 + g\lambda_f)W_f$. Las figuras 4.15 y 4.16 tienen una tendencia más compleja cuando varía el CI , pues tanto h_i como h_f tienen un máximo relativo con CI .

4.2.3. $h_i(CI)$ y $h_f(CI)$ para varios W_f y r_f

En la figura 4.17 se representan h_i y h_f en función del CI para varios W_f y con un valor de $r_f = 2000 \text{ km}$, mientras que en la figura 4.18 se hace lo mismo pero para varios r_f y con un valor de $W_f = 1000 \text{ kN}$.

A diferencia de las figuras 4.9 a 4.12, las figuras 4.17 y 4.18 tienen tendencias más complejas con el CI : $h_i(CI)$ y $h_f(CI)$ tienen un máximo relativo en un valor entre $CI = 0,5 \text{ kg/s}$ y $CI = 1 \text{ kg/s}$ (dependiendo de r_f y W_f). h_f varía considerablemente con W_f , levemente con CI y prácticamente nada con r_f ; mientras que h_i varía considerablemente con W_f y r_f , y levemente con CI .

4.2. Resultados en la estratosfera

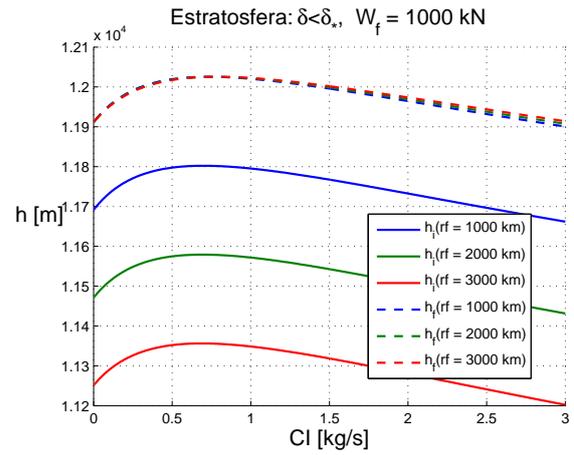
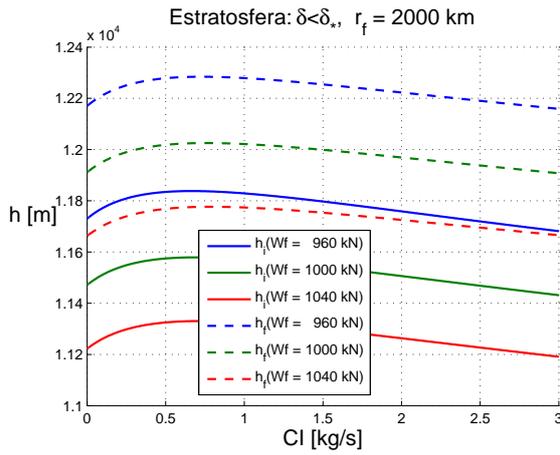


Figura 4.17: $h_i(CI)$ y $h_f(CI)$ para varios W_f Figura 4.18: $h_i(CI)$ y $h_f(CI)$ para varios r_f

4.2.4. $m_F(CI)$, $t_f(CI)$ y $DOC(CI)$ para varios W_f y r_f

En las figuras 4.19, 4.21 y 4.23 se representan m_F , t_f y DOC en función del CI para varios W_f y con un valor de $r_f = 2000 \text{ km}$, mientras que en las figuras 4.20, 4.22 y 4.24 se hace lo mismo pero para varios r_f y con un valor de $W_f = 1000 \text{ kN}$.

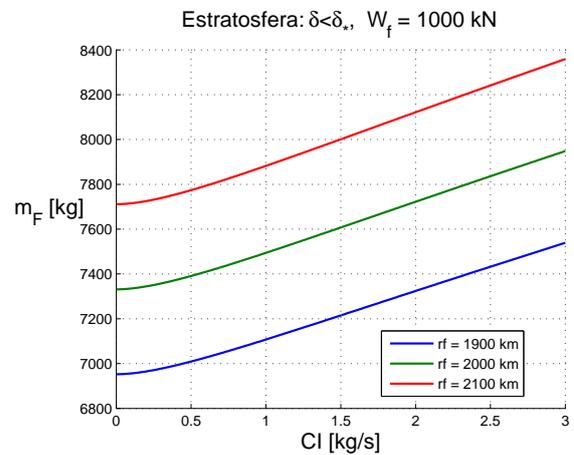
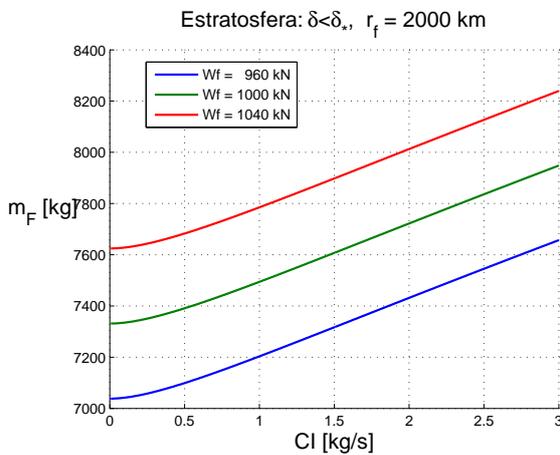


Figura 4.19: $m_F(CI)$ para varios W_f

Figura 4.20: $m_F(CI)$ para varios r_f

En las figuras 4.19, 4.21 y 4.23 se observa que:

- m_F aumenta al aumentar CI , r_f y/o W_f .
- t_f aumenta al aumentar r_f y/o W_f (con este último de forma muy suave), mientras que disminuye al aumentar CI .
- DOC aumenta al aumentar CI , r_f y/o W_f .

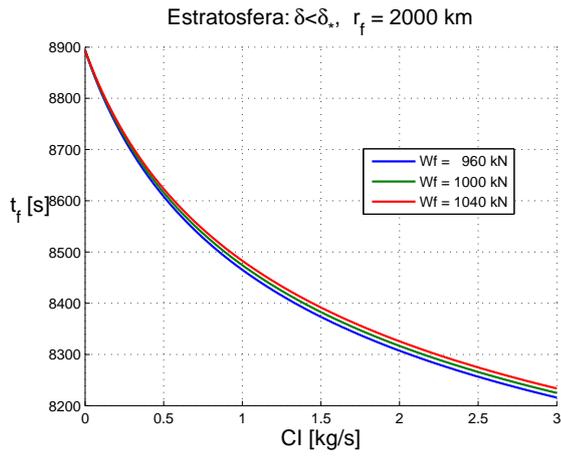


Figura 4.21: $t_f(CI)$ para varios W_f

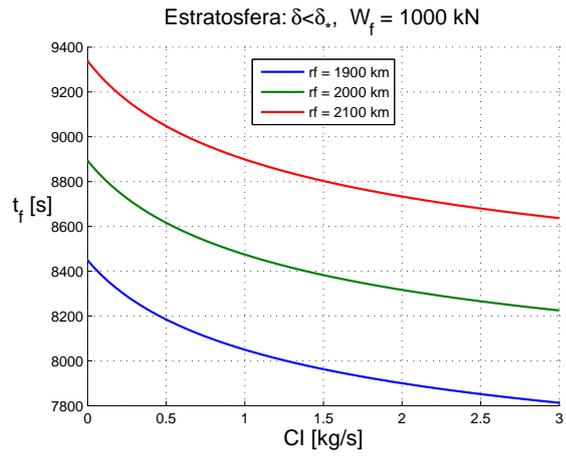


Figura 4.22: $t_f(CI)$ para varios r_f

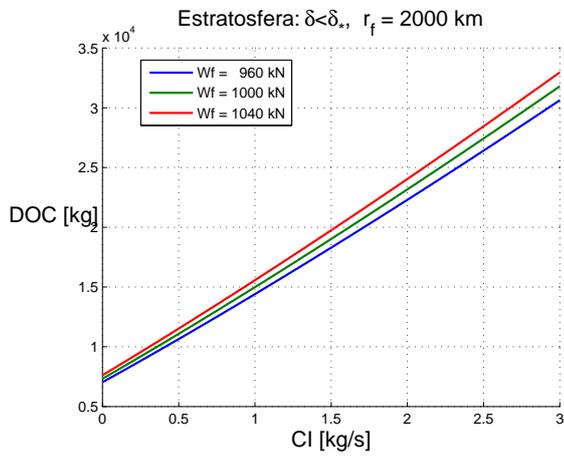


Figura 4.23: $DOC(CI)$ para varios W_f

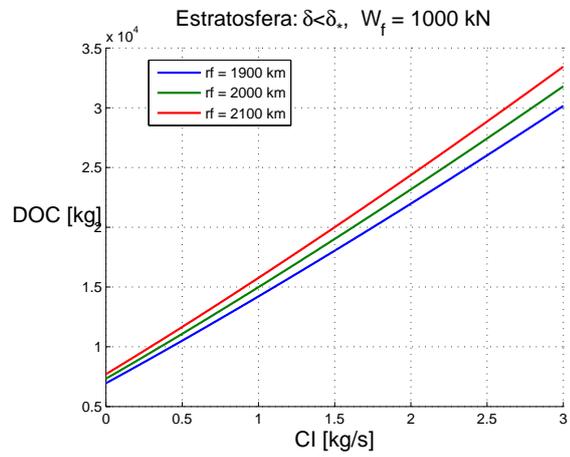


Figura 4.24: $DOC(CI)$ para varios r_f

4.3. Resultados locales en la troposfera

En este apartado se muestran los resultados obtenidos en la resolución numérica del problema con $k > 0$, planteado en el apartado 3.5 para el modelo de aeronave descrito en el apéndice A. Se muestran únicamente los resultados locales (los que dependen de la variable independiente r) mientras que los resultados globales se reservan al apartado 4.4.

4.3.1. Resultados locales para varios CI

En las figuras 4.25 a 4.30 se representan $W(r)$, $\lambda(r)$, $M(r)$, $C_L(r)$, $\delta(r)$ y $h(r)$ para varios valores representativos de CI , fijando los otros dos parámetros: $r_f = 4000 \text{ km}$ y $W_f = 1200 \text{ kN}$.

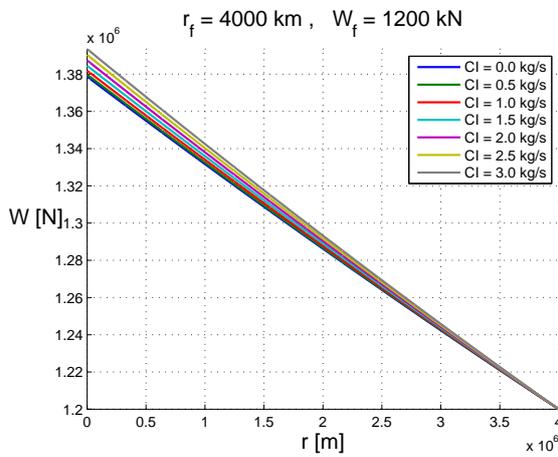


Figura 4.25: $W(r)$ para varios CI

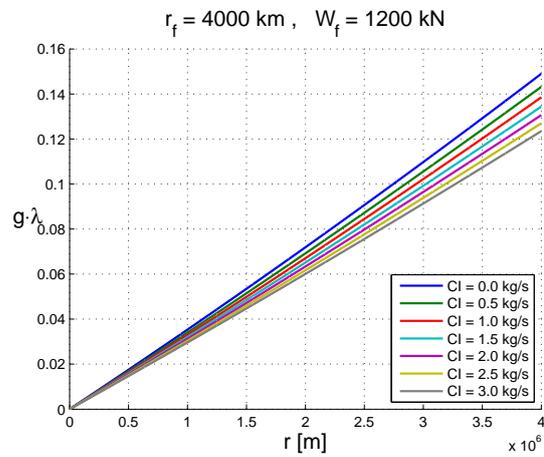


Figura 4.26: $g \cdot \lambda(r)$ para varios CI

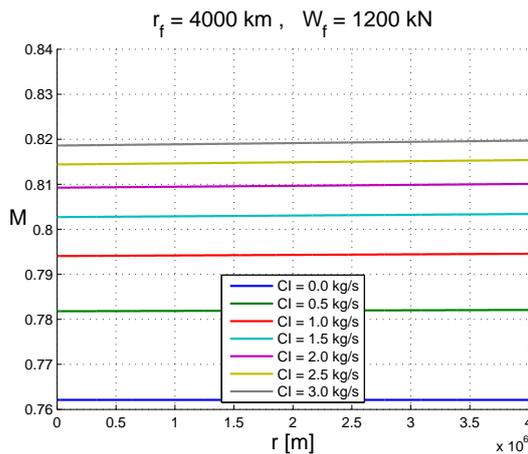


Figura 4.27: $M(r)$ para varios CI

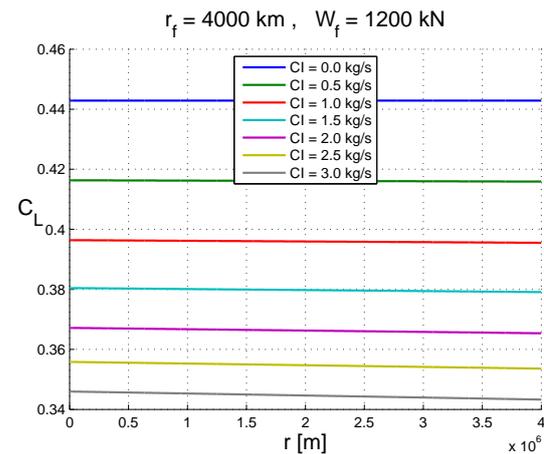


Figura 4.28: $C_L(r)$ para varios CI

Respecto a las tendencias de las curvas con r , En la figura 4.25 se observa que la evolución del peso a lo largo del vuelo sigue una tendencia muy parecida a la que ocurriría en el caso $CI = 0$, exponencial negativa semejante a una recta. Evidentemente, cuanto mayor sea el CI mayor será el peso necesario, por lo que la pendiente de la recta es mayor.

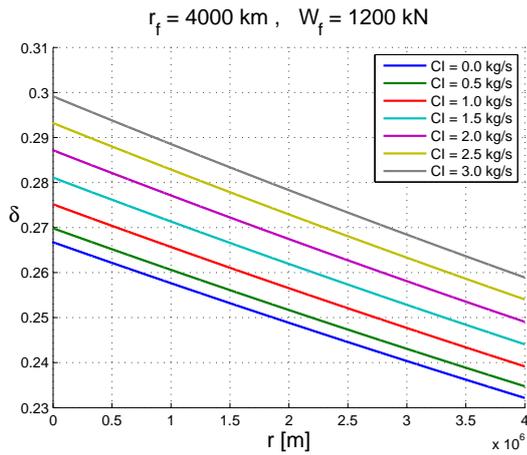


Figura 4.29: $\delta(r)$ para varios CI

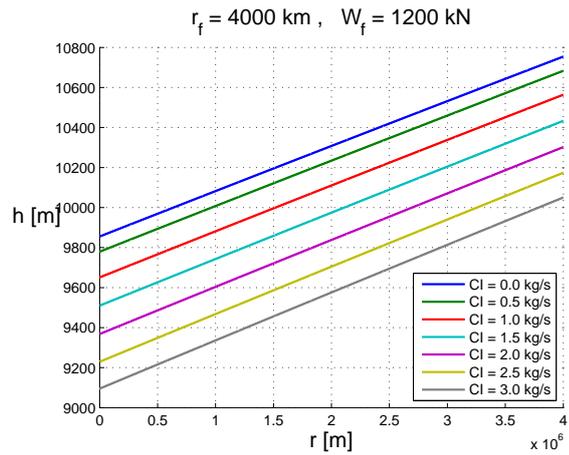


Figura 4.30: $h(r)$ para varios CI

En la figura 4.26 se observa que la tendencia de $\lambda(r)$ es opuesta a la de $W(r)$, aunque en este caso no se cumple que $(1 + g\lambda)W = W_f$. Lo que sí se cumple es que la magnitud $(1 + g\lambda)W$ es siempre mayor que W_f para $r = 0$ y va decreciendo hasta llegar a W_f para $r = r_f$.

En las figuras 4.29 y 4.30 se comprueba que el vuelo óptimo sigue siendo un *cruise climb*, la altitud crece conforme avanza el vuelo. Se observa una fuerte dependencia de la altitud con el CI en la troposfera: cuanto mayor sea éste, menor es la altitud durante todo el crucero. Esto se debe a que si se vuela a una altitud inferior a la óptima para $CI = 0$, está claro que se gasta más combustible al no ser la altitud a la que se minimiza el consumo de combustible. Pero, teniendo en cuenta que $V = aM$, el tiempo total de vuelo disminuye (la velocidad de vuelo es mayor) al ser la velocidad del sonido decreciente con la altitud. Por tanto, cuanto mayor sea el CI más rentable es volar a una altitud menor que la óptima con $CI = 0$.

La gran novedad de este apartado respecto a la estratosfera y al caso $CI = 0$ son las figuras 4.27 y 4.28, en las que se deduce que las variables $M(r)$ y $C_L(r)$ ya no son constantes a lo largo del crucero. En concreto, $C_L(r)$ disminuye y $M(r)$ aumenta conforme aumenta r , aunque la evolución de ambas variables es muy suave, inferior al 1% en ambos casos. Se observa también que $M(r)$ y $C_L(r)$ dependen fuertemente de CI : si éste crece, también lo hace $M(r)$ mientras que $C_L(r)$ decrece.

4.3.2. Resultados locales para varios r_f

En las figuras 4.31, 4.33, 4.35, 4.37, 4.39 y 4.41 se representan $W(r)$, $\lambda(r)$, $M(r)$, $C_L(r)$, $\delta(r)$ y $h(r)$ para varios valores representativos de r_f , fijando los otros dos parámetros: $CI = 1,5 \text{ kg/s}$ y $W_f = 1200 \text{ kN}$.

Algunas magnitudes se comparan mejor si se representan en función de la distancia sumándole a ésta un valor tal que el punto final coincida siempre y no el inicial. Por ejemplo, si se representan r_f que van desde 1000 km hasta 8000 km, a la curva de $r_f = 1000 \text{ km}$ se le suma 7000 km, a la curva de $r_f = 2000 \text{ km}$ se le suma 6000 km, y así sucesivamente. En definitiva, se representan las variables en función de $\bar{r} = r + \text{máx}(r_f) - r_f$. Esto se hace en las figuras 4.32, 4.34, 4.36, 4.38, 4.40 y 4.42.

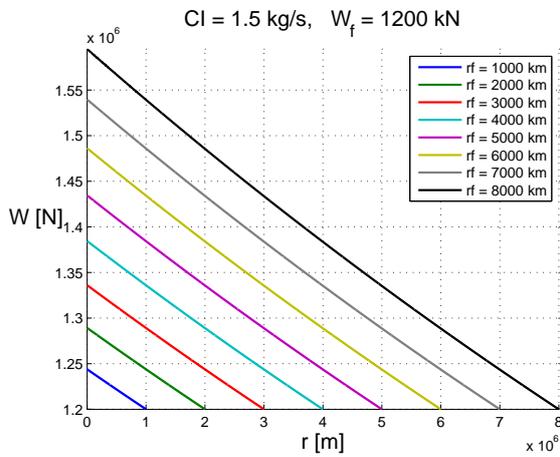


Figura 4.31: $W(r)$ para varios r_f

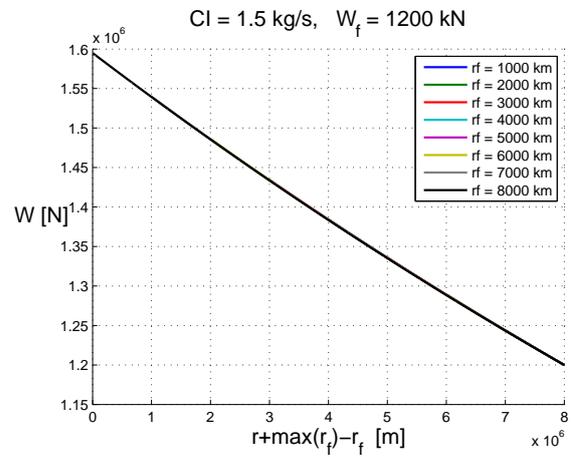


Figura 4.32: $W(\bar{r})$ para varios r_f

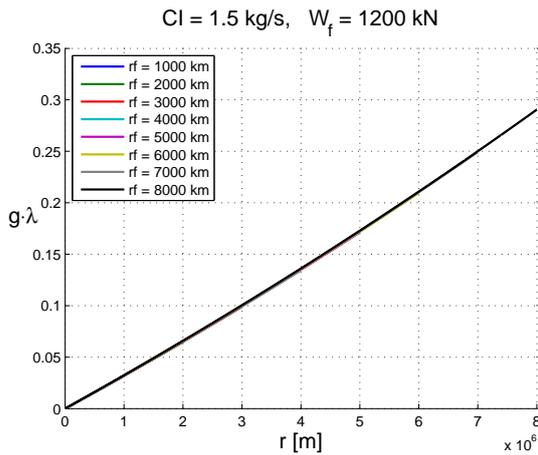


Figura 4.33: $g \cdot \lambda(r)$ para varios r_f

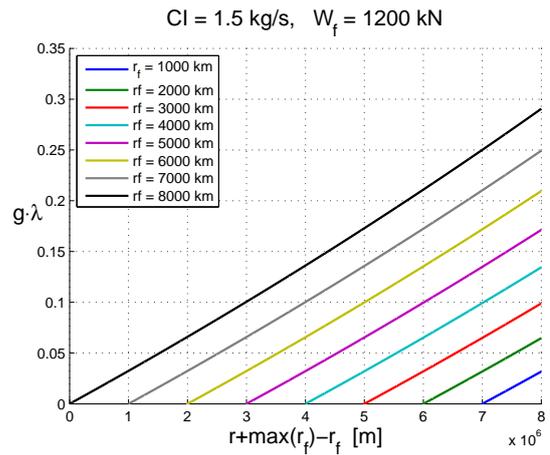


Figura 4.34: $g \cdot \lambda(\bar{r})$ para varios r_f

Respecto a las tendencias de las curvas con r_f , en la figura 4.32 se observa que todas las curvas prácticamente se superponen. Esto implica que la evolución del peso es la misma para un crucero de un r_f dado, que para un crucero de mayor distancia total pero que le reste dicha distancia para terminar. Algo análogo ocurre con $\lambda(r)$ (figura 4.33).

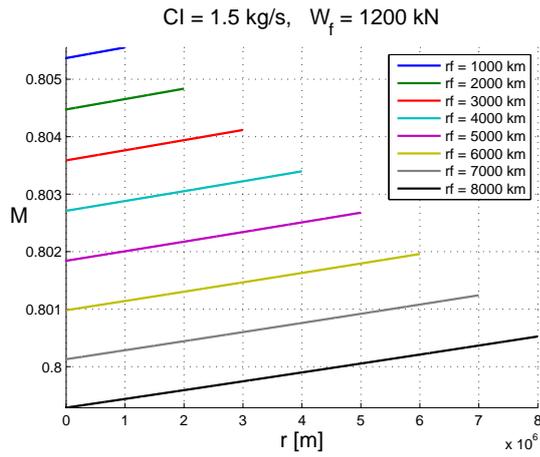


Figura 4.35: $M(r)$ para varios r_f

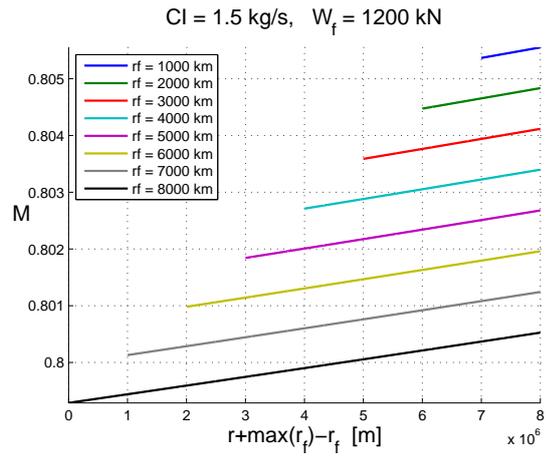


Figura 4.36: $M(\bar{r})$ para varios r_f

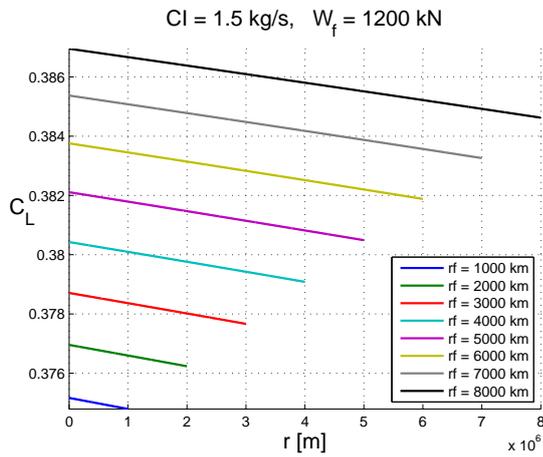


Figura 4.37: $C_L(r)$ para varios r_f

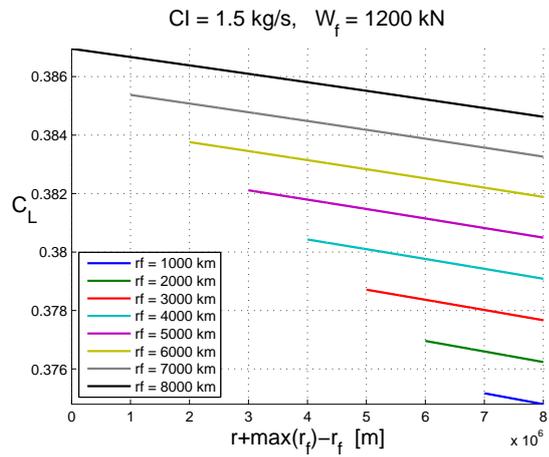


Figura 4.38: $C_L(\bar{r})$ para varios r_f

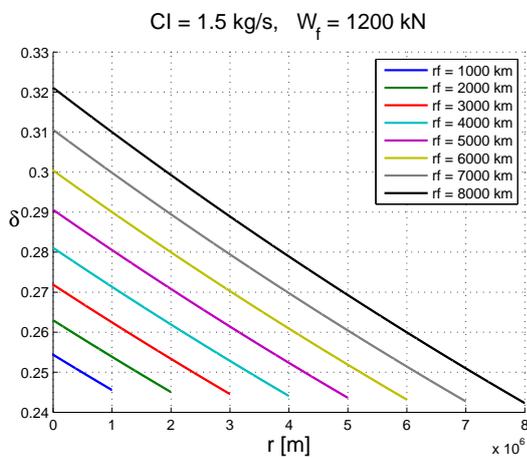


Figura 4.39: $\delta(r)$ para varios r_f

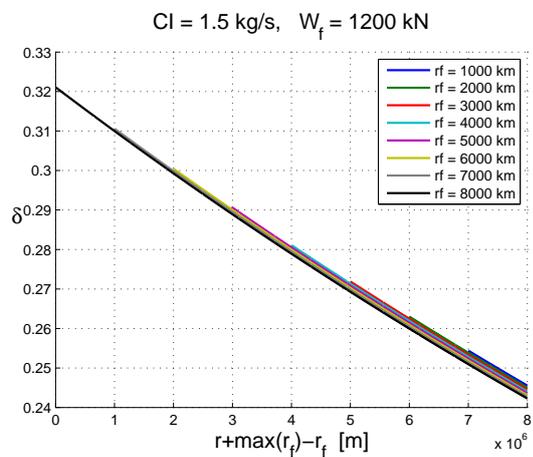


Figura 4.40: $\delta(\bar{r})$ para varios r_f

4.3. Resultados locales en la troposfera

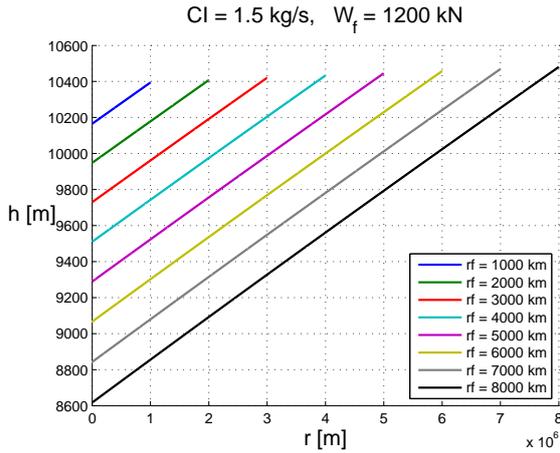


Figura 4.41: $h(r)$ para varios r_f

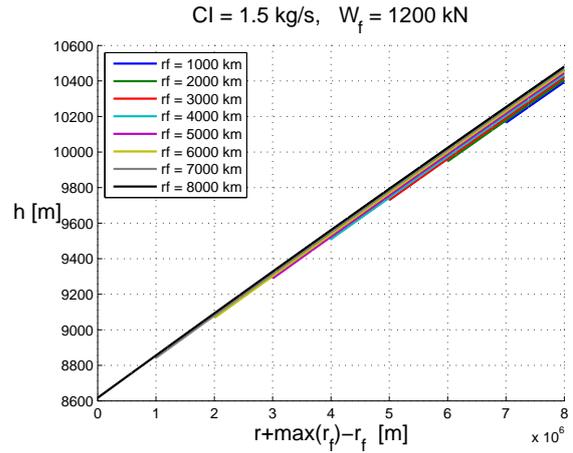


Figura 4.42: $h(\bar{r})$ para varios r_f

$M(r)$ decrece con r_f (figuras 4.35 y 4.36), mientras que $C_L(r)$ crece (figuras 4.37 y 4.38), aunque ambas magnitudes lo hacen levemente. La evolución de $h(r)$ depende de si se considera h_i o h_f : en la figura 4.41 se observa que h_i decrece fuertemente con r_f , mientras que en la figura 4.42 se observa que h_f crece levemente con r_f . Este comportamiento se analizará en más detalle posteriormente en el apartado 4.4, donde se analiza la evolución de h_i y h_f con los parámetros del problema.

4.3.3. Resultados locales para varios W_f

En las figuras 4.43 a 4.48 se representan $W(r)$, $\lambda(r)$, $M(r)$, $C_L(r)$, $\delta(r)$ y $h(r)$ para varios valores representativos de W_f , fijando los otros dos parámetros: $r_f = 4000$ km y $CI = 1,5$ kg/s.

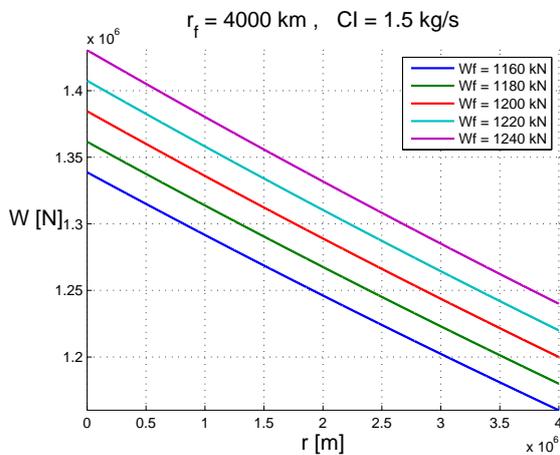


Figura 4.43: $W(r)$ para varios W_f

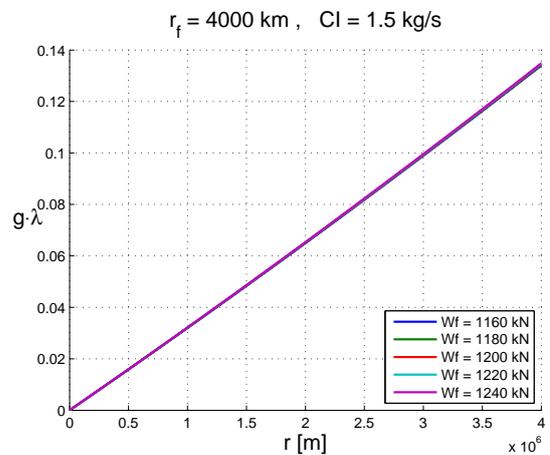


Figura 4.44: $g \cdot \lambda(r)$ para varios W_f

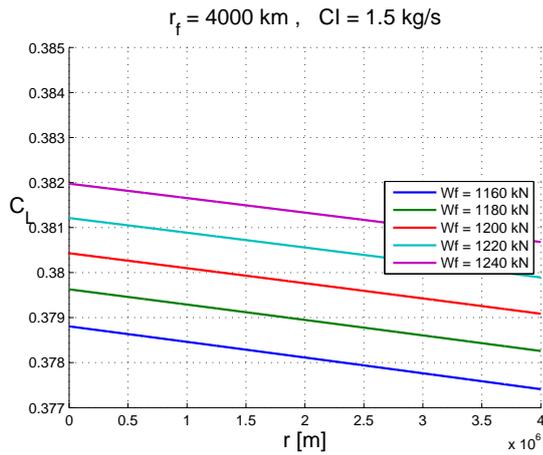


Figura 4.45: $C_L(r)$ para varios W_f

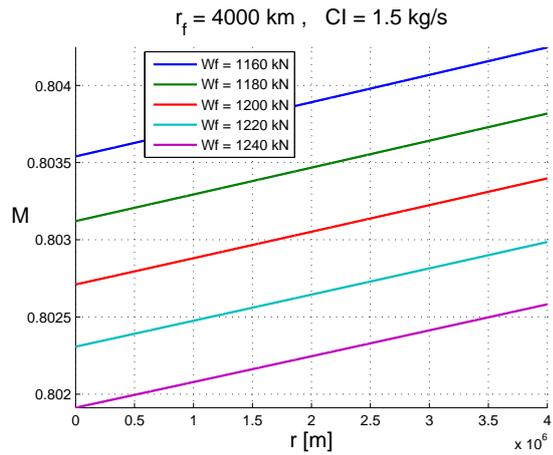


Figura 4.46: $M(r)$ para varios W_f

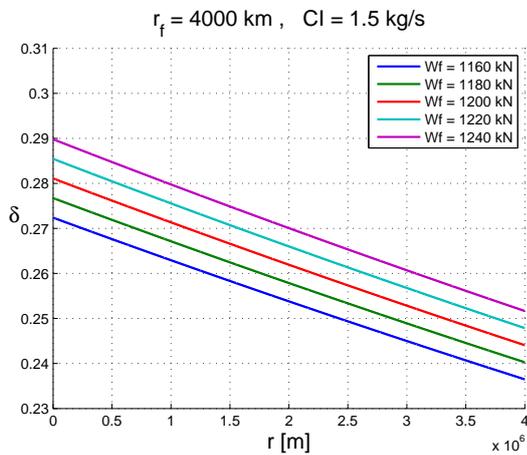


Figura 4.47: $\delta(r)$ para varios W_f

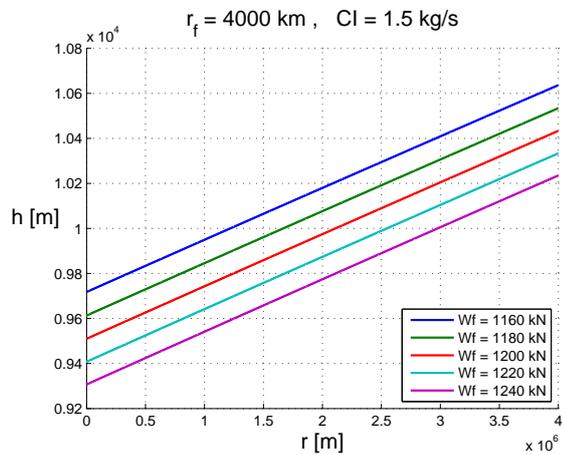


Figura 4.48: $h(r)$ para varios W_f

Respecto a las tendencias de las curvas con W_f , en la figura 4.43 se observa que conforme éste aumenta, también aumenta $W(r)$, mientras que $\lambda(r)$ prácticamente permanece constante (figura 4.44). $M(r)$ y $C_L(r)$ varían con W_f de una forma muy similar a como lo hacen con r_f : conforme W_f aumenta, $M(r)$ decrece con r_f (figura 4.46), mientras que $C_L(r)$ crece (figura 4.45), aunque ambas magnitudes lo hacen muy levemente. $h(r)$ decrece apreciablemente conforme crece W_f , debido a la relación $\delta(r) = \frac{W(r)}{q_0 C_L(r) M^2(r)}$ y a que $M(r)$ y $C_L(r)$ varían muy poco con W_f .

4.4. Resultados globales en la troposfera

En este apartado se muestran los resultados globales (que no dependen de r) obtenidos en la troposfera. Estos son: M_i , M_f , C_{Li} , C_{Lf} , h_i , h_f , m_F , t_f y DOC . Los seis primeros se obtienen particularizando variables locales al inicio y al final del crucero, mientras que los tres últimos se obtienen mediante integración de variables locales, en concreto con la ecuaciones (3.38), (3.39) y (3.40).

Se analiza la dependencia de estas magnitudes con los tres parámetros del problema: CI , r_f y W_f . Para ello, se representan cuatro gráficas para cada magnitud: en función de CI para varios r_f (con $W_f = 1200 \text{ kN}$), en función de r_f para varios CI (con $W_f = 1200 \text{ kN}$), en función de CI para varios W_f (con $r_f = 4000 \text{ km}$) y en función de W_f para varios CI (con $r_f = 4000 \text{ km}$).

4.4.1. M_i y M_f en función de r_f , W_f y CI

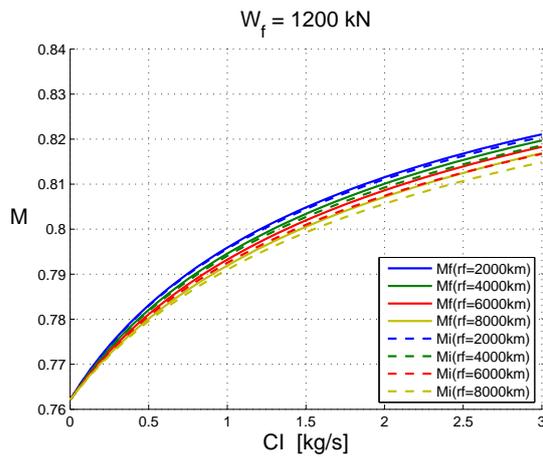


Figura 4.49: $M(CI)$ para varios r_f

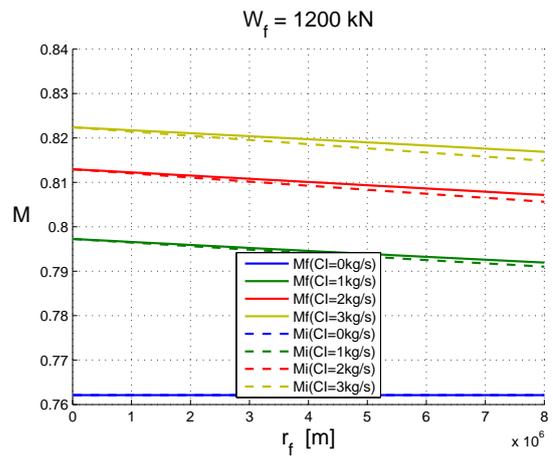


Figura 4.50: $M(r_f)$ para varios CI

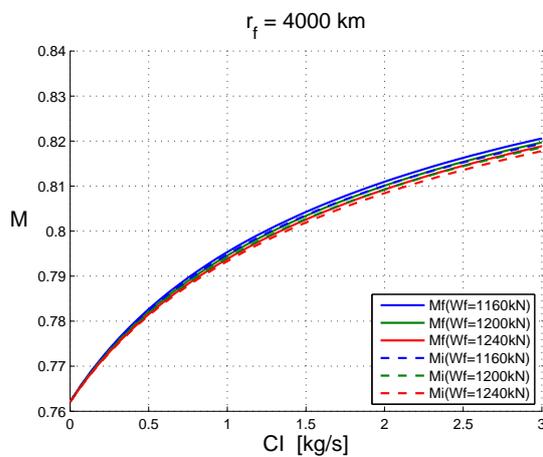


Figura 4.51: $M(CI)$ para varios W_f

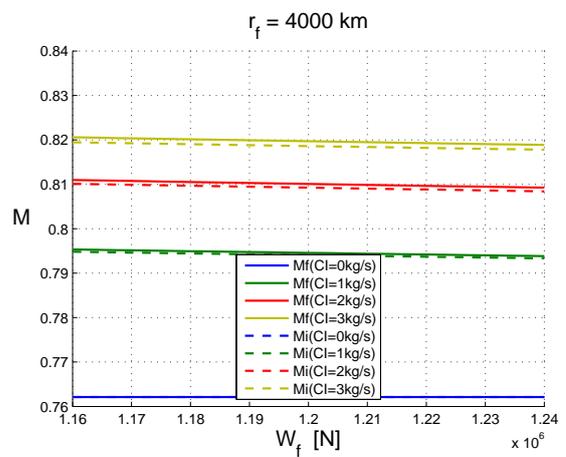


Figura 4.52: $M(W_f)$ para varios CI

En las figuras 4.49 a 4.52 se observa que:

- Al aumentar CI , tanto M_i como M_f aumentan considerablemente. También aumenta $\Delta M = M_f - M_i$, que es nulo con $CI = 0$.
- Al aumentar r_f , tanto M_i como M_f disminuyen levemente, tanto más cuanto mayor sea CI . En cambio, aumenta ΔM , que tiene a cero para r_f pequeño.
- Al aumentar W_f , tanto M_i como M_f disminuyen levemente, tanto más cuanto mayor sea CI . ΔM no se ve afectado prácticamente.

4.4.2. C_{Li} y C_{Lf} en función de r_f , W_f y CI

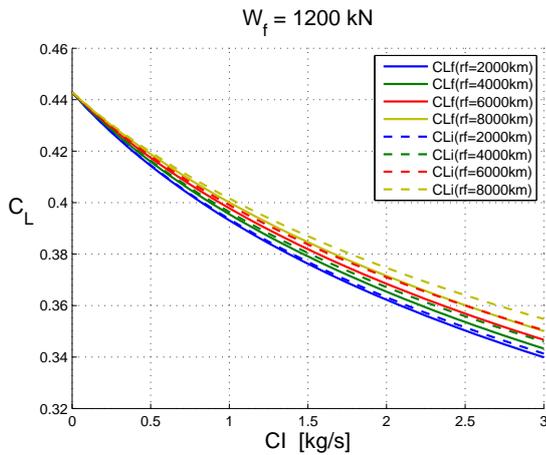


Figura 4.53: $C_L(CI)$ para varios r_f

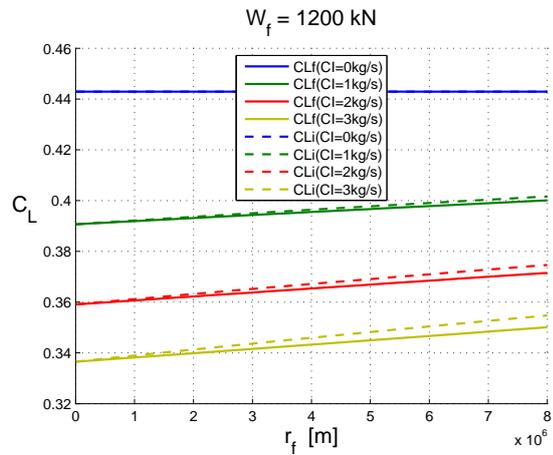


Figura 4.54: $C_L(r_f)$ para varios CI

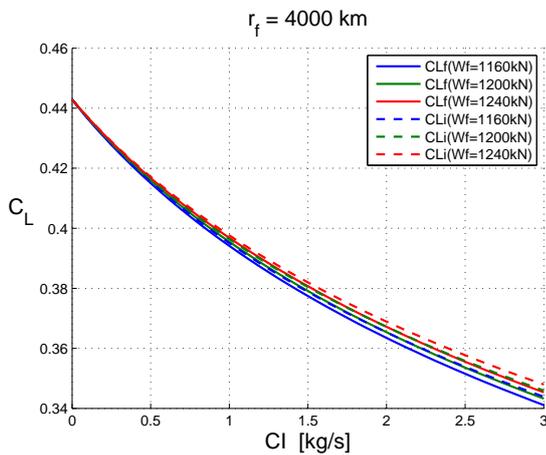


Figura 4.55: $C_L(CI)$ para varios W_f

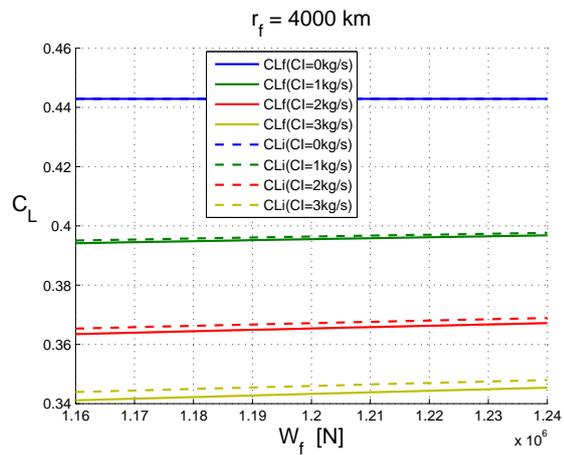


Figura 4.56: $C_L(W_f)$ para varios CI

En las figuras 4.53 a 4.56 se observa que:

- Al aumentar CI , tanto C_{Li} como C_{Lf} disminuyen considerablemente. En cambio, aumenta $-\Delta C_L = C_{Li} - C_{Lf}$, que es nulo con $CI = 0$.
- Al aumentar r_f , tanto C_{Li} como C_{Lf} aumentan levemente. También aumenta $-\Delta C_L$, que tiende a cero para r_f pequeño.

4.4. Resultados globales en la troposfera

- Al aumentar W_f , tanto C_{Li} como C_{Lf} aumentan levemente. $-\Delta C_L$ no se ve afectado prácticamente.

En general, se comprueba que las tendencias de C_L y de M son contrarias, es decir, cuando una aumenta la otra disminuye.

4.4.3. h_i y h_f en función de r_f , W_f y CI

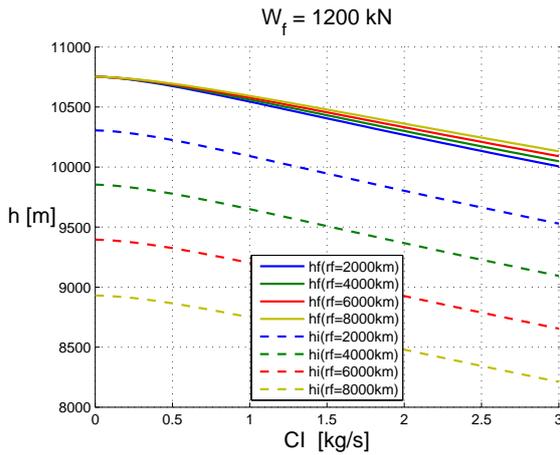


Figura 4.57: $h(CI)$ para varios r_f

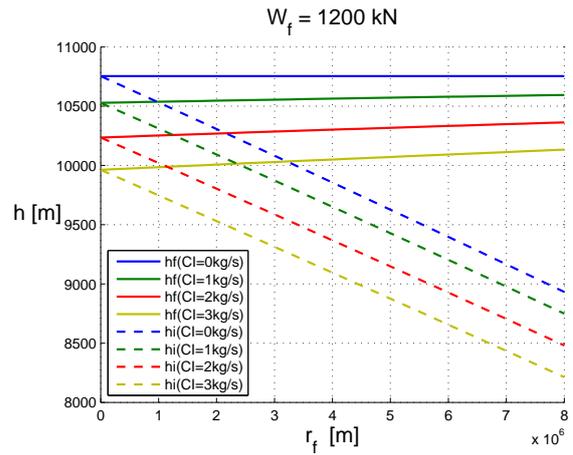


Figura 4.58: $h(r_f)$ para varios CI

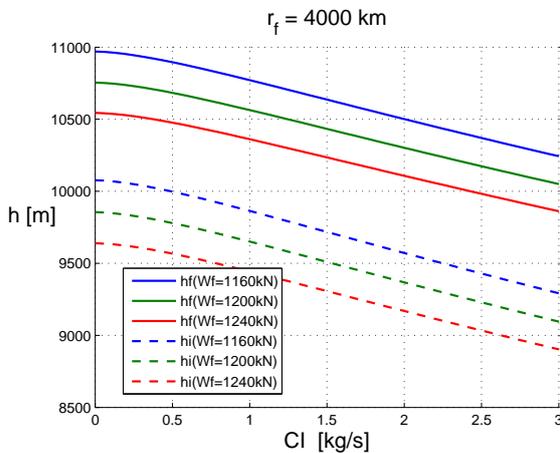


Figura 4.59: $h(CI)$ para varios W_f

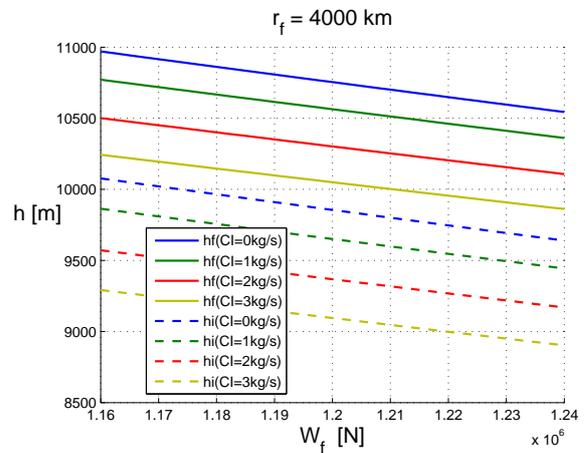


Figura 4.60: $h(W_f)$ para varios CI

En las figuras 4.57 a 4.60 se observa que:

- Al aumentar CI , tanto h_i como h_f disminuyen considerablemente. Δh aumenta levemente.
- Al aumentar r_f , h_i disminuye considerablemente, mientras que h_f crece levemente.
- Al aumentar W_f , tanto h_i como h_f disminuyen de forma considerable. Δh prácticamente no se ve afectado.

4.4.4. m_F en función de r_f , W_f y CI

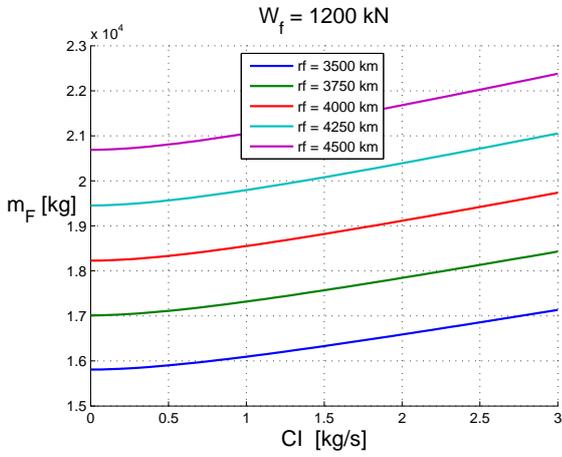


Figura 4.61: $m_F(CI)$ para varios r_f

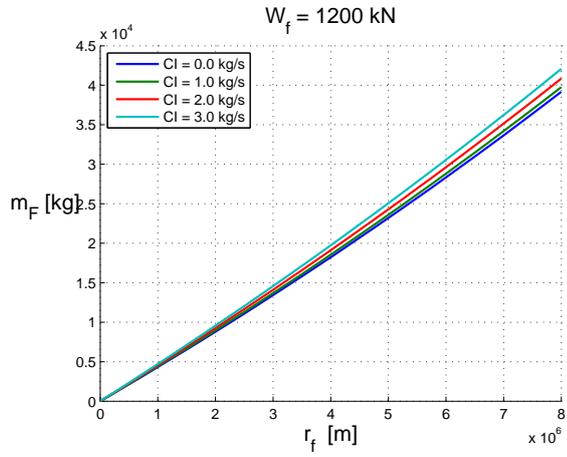


Figura 4.62: $m_F(r_f)$ para varios CI

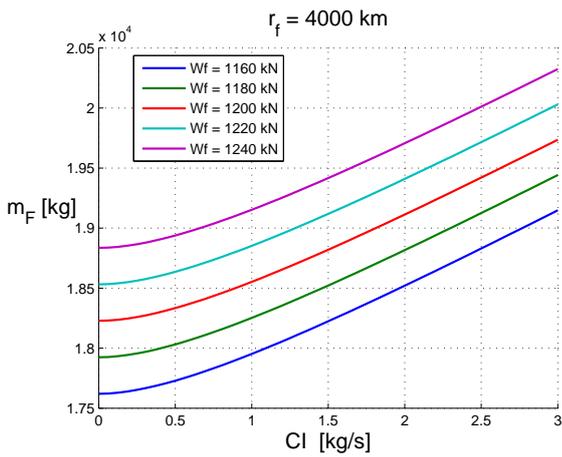


Figura 4.63: $m_F(CI)$ para varios W_f

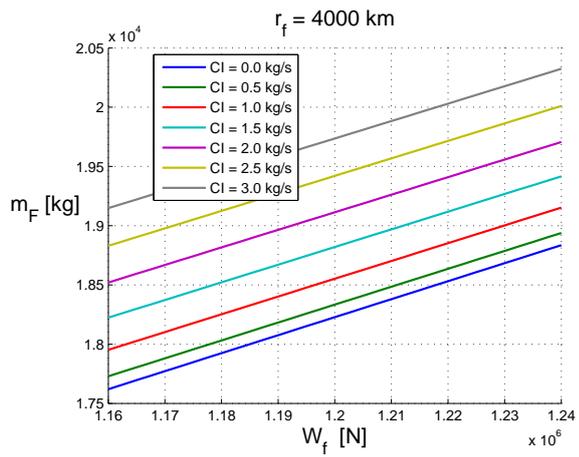


Figura 4.64: $m_F(W_f)$ para varios CI

En las figuras 4.61 a 4.64 se observa que al aumentar CI , r_f y/o W_f , m_F aumenta.

4.4.5. t_f en función de r_f , W_f y CI

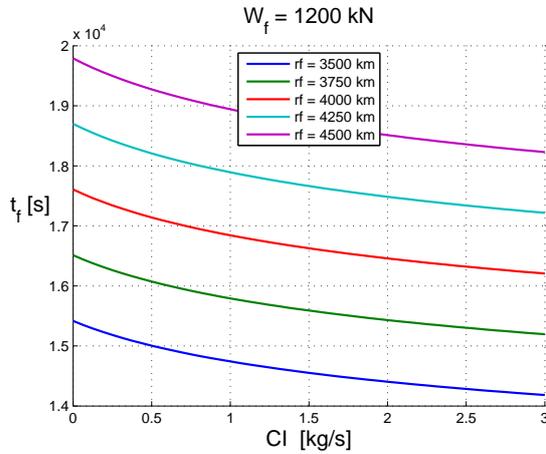


Figura 4.65: $t_f(CI)$ para varios r_f

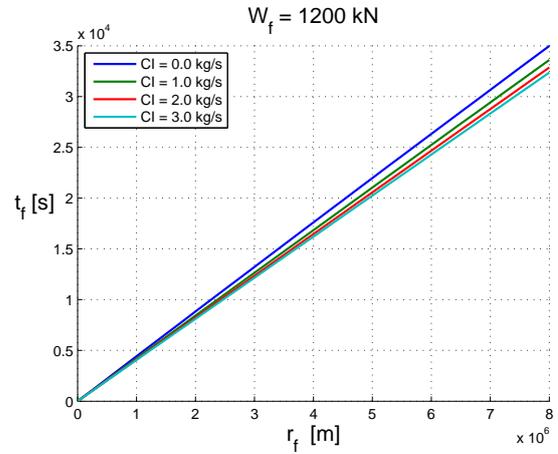


Figura 4.66: $t_f(r_f)$ para varios CI

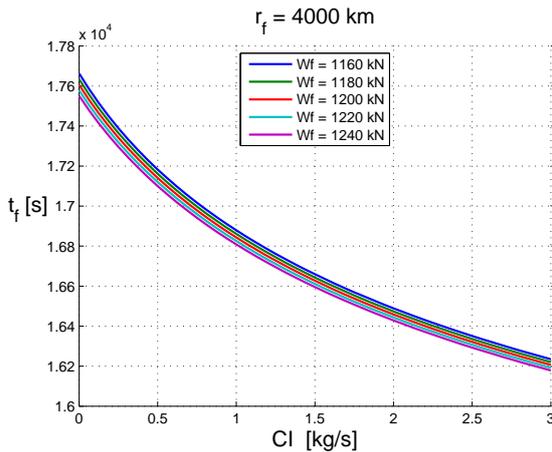


Figura 4.67: $t_f(CI)$ para varios W_f

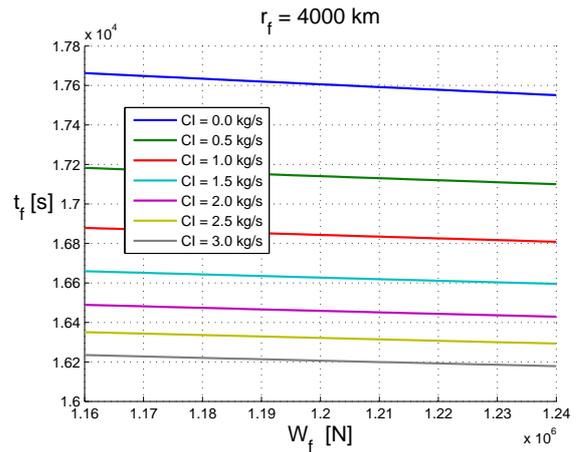


Figura 4.68: $t_f(W_f)$ para varios CI

En las figuras 4.65 a 4.68 se observa que al aumentar r_f , t_f aumenta. En cambio, al aumentar CI , t_f disminuye, debido a que la velocidad de vuelo aumenta. Al aumentar W_f , t_f disminuye levemente, al ser menores las altitudes de vuelo.

4.4.6. *DOC* en función de r_f , W_f y CI

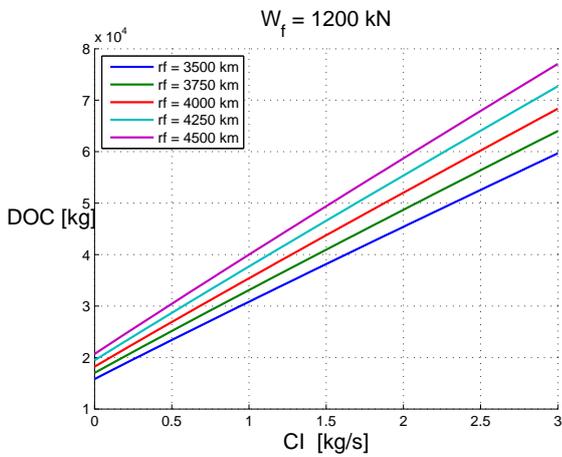


Figura 4.69: $DOC(CI)$ para varios r_f

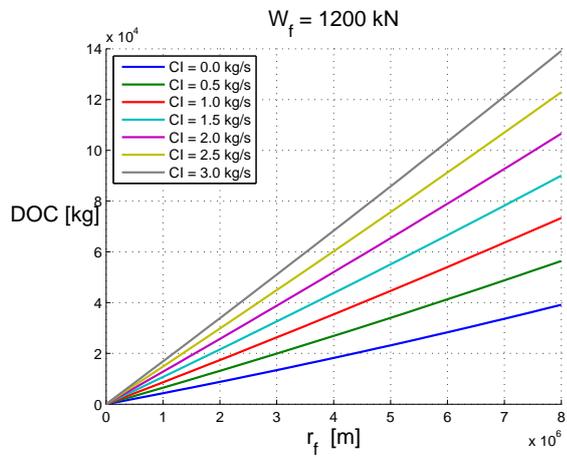


Figura 4.70: $DOC(r_f)$ para varios CI

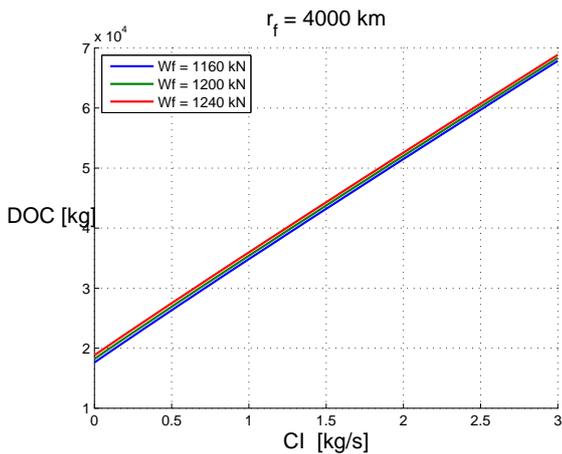


Figura 4.71: $DOC(CI)$ para varios W_f

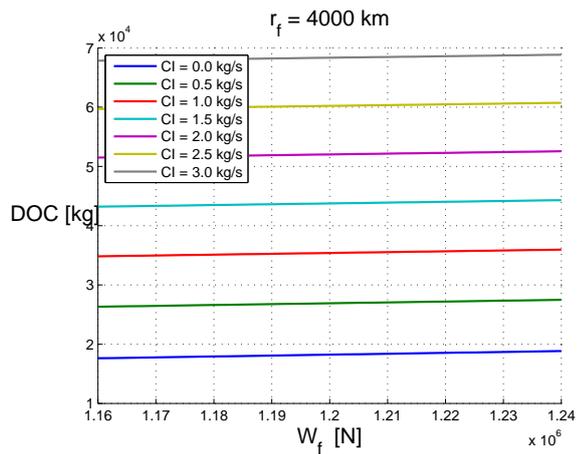


Figura 4.72: $DOC(W_f)$ para varios CI

En las figuras 4.69 a 4.72 se observa que al aumentar CI , r_f y/o W_f , DOC aumenta de forma lineal. Con los dos primeros parámetros, la dependencia es muy fuerte, mientras que con el tercero es muy débil.

Capítulo 5

Crucero con M y C_L constantes

En los capítulos 3 y 4 se ha podido observar que la variación del número de Mach y del coeficiente de sustentación es muy pequeña a lo largo del vuelo, en ocasiones del orden de una milésima en ambos casos. Estos valores se pueden considerar constantes en la práctica, pues a menudo los instrumentos que permiten medir estas magnitudes no tienen una precisión tan alta. Por lo tanto, es razonable plantearse la simplificación de imponer como ligaduras de vuelo que M y C_L son constantes, calcular qué valores serían los óptimos y comparar los resultados obtenidos, objeto del presente capítulo.

5.1. Nueva formulación del problema

En el capítulo 2 se obtuvo el siguiente problema, ecuación (2.18):

$$\begin{aligned} \text{mín } \text{DOC} &= \int_0^{r_f} F(M, \delta, W) dr, & (\text{con } r_f \text{ conocido}) \\ \text{s.a. } \frac{dW}{dr} &= f(M, \delta, W), & W(r = r_f) = W_f \text{ (conocido)} \\ F(M, \delta, W) &= \frac{c(M, \delta)D(M, \delta, W) + CI}{a(\delta)M} \\ f(M, \delta, W) &= -\frac{gc(M, \delta)D(M, \delta, W)}{a(\delta)M} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Si ahora se supone la hipótesis de que el número de Mach y el coeficiente de sustentación son constantes a lo largo del vuelo, no es necesario emplear la formulación variacional utilizada en los capítulos 3 y 4, pues el problema es integrable directamente como se muestra a continuación.

Una vez escogido el número de Mach y el coeficiente de sustentación con los que se va a volar, el problema anterior se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \text{min } \text{DOC} &= \int_0^{r_f} F(W) dr, & (\text{con } r_f \text{ conocido}) \\ \text{s.a. } \frac{dW}{dr} &= f(W), & W(r = r_f) = W_f \text{ (conocido)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por tanto, integrando la segunda ecuación se obtiene el peso de la aeronave a lo largo del vuelo, $W(r)$, y sustituyendo este en la primera ecuación puede obtenerse el coste DOC . En definitiva, dados cualquier M y C_L es posible obtener fácilmente DOC , por lo que el número de Mach óptimo M^* y el coeficiente de sustentación óptimo C_L^* serán aquellos que minimicen la función $DOC = f(M, C_L)$.

5.2. Obtención de $DOC = f(M, C_L)$

En este apartado se obtiene analíticamente la función $DOC = f(M, C_L)$ para su posterior minimización, con la hipótesis de que M y C_L son constantes a lo largo del vuelo. Esto se hace para dos casos diferentes: que el vuelo se desarrolle íntegramente en la troposfera o que lo haga en la estratosfera.

5.2.1. Estratosfera: obtención de $DOC = f(M, C_L)$

A continuación se va a obtener analíticamente la función $DOC = f(M, C_L)$ para su posterior minimización, bajo la hipótesis de que todo el vuelo se realiza en la estratosfera. Sustituyendo en la ecuación del peso el consumo específico del modelo propulsivo ($c = \frac{a}{L_H} C_C$), la resistencia del modelo aerodinámico ($D = q_0 \delta M^2 C_D$) y utilizando $\delta(W) = \frac{W}{q_0 C_L M^2}$ se obtiene:

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{gcD}{aM} = -\frac{g \left(\frac{a}{L_H} C_C \right) (q_0 \delta M^2 C_D)}{aM} = \left[\frac{g C_C}{M L_H} \frac{C_D}{C_L} \right] (-W) = -B \cdot W \quad (5.3)$$

donde se ha definido el parámetro $B = \frac{g C_C C_D}{L_H M C_L}$ con unidades de [1/m], que es constante a lo largo del crucero, al serlo también M y C_L . Por ello, la ecuación es integrable analíticamente y se obtiene:

$$W(r) = W_f \cdot e^{B(r_f - r)} \quad (5.4)$$

Una vez obtenido el peso de la aeronave a lo largo del vuelo, $W(r)$, se procede a calcular DOC como: $DOC = m_F + CI \cdot t_f$. Se calculan por separado el coste del combustible y del tiempo.

Por un lado, puesto que ya se ha obtenido el peso de la aeronave en función del peso, el consumo de combustible es inmediato:

$$m_F = \frac{W_i - W_f}{g} = \frac{W_f}{g} (e^{Br_f} - 1) \quad (5.5)$$

Por otro lado, el tiempo empleado se obtiene de la ecuación cinemática y de la definición del Mach de vuelo, $V = aM$, obteniéndose:

$$t_F = \int_0^{t_f} dt = \int_0^{r_f} \frac{dr}{V(r)} = \int_0^{r_f} \frac{dr}{aM} = \frac{r_f}{a_* M} \quad (5.6)$$

En definitiva, el coste total del crucero, dado r_f , CI y W_f y una vez escogido el M y C_L a los que se va a volar es (suponiendo que todo el vuelo se desarrolle en la estratosfera):

$$DOC = \frac{W_f}{g} (e^{Br_f} - 1) + CI \frac{r_f}{a_* M} \quad (5.7)$$

5.2.2. Troposfera: obtención de $DOC = f(M, C_L)$

Si el vuelo se desarrolla en la troposfera el consumo de combustible sigue siendo el mismo, por lo que se obtiene de la ecuación (5.5), mientras que la duración del crucero sí que cambia. Se obtiene de forma similar al caso de la estratosfera, aunque es algo más complejo, pues la velocidad del sonido no es constante, por lo que se ha de obtener su variación a lo largo del crucero. Esto se hace teniendo en cuenta lo siguiente:

1. Según la atmósfera estándar internacional, la velocidad del sonido cae de forma exponencial conforme disminuye el ratio de presiones: $a(\delta) = a_0 \cdot \delta^k$, siendo $0 < k = \frac{Rg\alpha_T}{2g} < 1$.
2. Este ratio de presiones se relaciona con el peso mediante $\delta(W) = \frac{W}{q_0 C_L M^2}$.
3. El valor de $W(r)$ viene dado por la ecuacion (5.4).

Se obtiene pues la siguiente expresión para el tiempo total que dura el crucero:

$$\begin{aligned} t_F &= \int_0^{r_f} \frac{dr}{aM} = \frac{1}{a_0 M} \int_0^{r_f} \delta^{-k} dr = \frac{(q_0 C_L M^2)^k}{a_0 M} \int_0^{r_f} [W(r)]^{-k} dr = \\ &= \frac{1}{a_0 M} \left(\frac{q_0 C_L M^2}{W_f} \right)^k \int_0^{r_f} e^{B(r_f-r)(-k)} dr = \\ &= \frac{1}{a_0 M} \left(\frac{q_0 C_L M^2}{W_f} \right)^k \frac{1}{Bk} (1 - e^{-Bkr_f}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Se puede simplificar la expresión anterior definiendo $\delta_f = \frac{W_f}{q_0 C_L M^2}$ y $a_f = a_0 \cdot \delta_f^k$:

$$t_F = \frac{1}{a_f M} \frac{1}{Bk} (1 - e^{-Bkr_f}) \quad (5.9)$$

En definitiva, el coste total del crucero, dado r_f , CI y W_f y una vez escogido el M y C_L a los que se va a volar es:

$$\begin{aligned} DOC(M, C_L) &= \frac{W_f}{g} (e^{Br_f} - 1) + \frac{CI}{k} \left(\frac{1 - e^{-kBr_f}}{a_f M B} \right) \\ B(M, C_L) &= \frac{g C_C}{M L_H} \frac{C_D}{C_L} \\ a_f(M, C_L) &= a_0 \cdot \delta_f^k = a_0 \cdot \left(\frac{W_f}{q_0 C_L M^2} \right)^k \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.3. Minimización de $DOC = f(M, C_L)$

El número de Mach óptimo M^* y el coeficiente de sustentación óptimo C_L^* serán aquellos que minimicen la función $DOC = f(M, C_L)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial DOC}{\partial C_L} &= 0 \\ \frac{\partial DOC}{\partial M} &= 0\end{aligned}\quad (5.11)$$

A continuación se va a desarrollar en detalle estas derivadas parciales, para los dos casos en los que se ha obtenido $DOC = f(M, C_L)$. En ambos, se obtiene finalmente un sistema algebraico de dos ecuaciones con dos incógnitas, M^* y C_L^* . El sistema debe resolverse numéricamente, utilizando por ejemplo la función *fsolve* de Matlab. Otra posibilidad más directa, pues no hubiese sido necesario el desarrollo de las derivadas parciales, es utilizar la función *fminsearch* de Matlab que, dada una función de varias variables, busca mínimos relativos en el intervalo deseado.

5.3.1. Estratosfera: minimización de $DOC = f(M, C_L)$

Se busca minimizar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}DOC(M, C_L) &= \frac{W_f}{g} (e^{Br_f} - 1) + CI \frac{r_f}{a_* M} \\ B(M, C_L) &= \frac{g C_C}{M L_H} \frac{C_D}{C_L}\end{aligned}\quad (5.12)$$

Igualando a cero las derivadas parciales de $DOC(M, C_L)$ se obtiene:

$$\frac{\partial DOC}{\partial C_L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial C_L} = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial DOC}{\partial M} = 0 \Rightarrow \frac{W_f}{g} r_f \cdot e^{Br_f} \frac{\partial B}{\partial M} - \frac{CI r_f}{a_* M^2} = 0 \quad (5.14)$$

En el apéndice B se desarrollan las derivadas parciales de $B(M, C_L)$ tanto respecto de C_L como de M ((B.1) y (B.2)). Sustituyéndolas en (5.13) y (5.14) se obtiene:

$$\frac{\partial DOC}{\partial C_L} = 0 \Rightarrow \frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial C_L} = 0 \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial DOC}{\partial M} = 0 \Rightarrow \frac{W_f}{g} e^{Br_f} \frac{B}{M} \left[\frac{M}{C_C} \frac{\partial C_C}{\partial M} + \frac{M}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial M} - 1 \right] - \frac{CI}{a_* M^2} = 0 \quad (5.16)$$

Si ahora en la segunda ecuación algebraica se sustituye $B(M, C_L) = \frac{g C_C}{M L_H} \frac{C_D}{C_L}$ y se simplifican términos, se obtiene el siguiente sistema algebraico:

$$\begin{aligned}0 &= C_D - C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} \\ \frac{C I L_H}{a_* W_f} &= \frac{1}{C_L} e^{Br_f} \left[M C_D \frac{\partial C_C}{\partial M} + M C_C \frac{\partial C_D}{\partial M} - C_D C_C \right]\end{aligned}\quad (5.17)$$

Nótese que este sistema algebraico es idéntico al sistema (3.24). Este resultado tenía que darse necesariamente, pues en dicho apartado se probó que el mínimo coste en la estratosfera se obtiene volando con M y C_L constantes. Por tanto, los resultados numéricos ya mostrados el apartado 4.2 son válidos también para este caso.

5.3.2. Troposfera: minimización de $DOC = f(M, C_L)$

Se busca minimizar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} DOC(M, C_L) &= \frac{W_f}{g} [e^{Br_f} - 1] + \frac{CI}{k} \left(\frac{1 - e^{-kBr_f}}{a_f MB} \right) \\ B(M, C_L) &= \frac{gC_C}{ML_H} \frac{C_D}{C_L} \\ a_f(M, C_L) &= a_0 \cdot \delta_f^k = a_0 \cdot \left(\frac{W_f}{q_0 C_L M^2} \right)^k \end{aligned} \quad (5.18)$$

Igualando a cero las derivadas parciales de $DOC(M, C_L)$ se obtiene:

$$\frac{\partial DOC}{\partial C_L} = 0 \Rightarrow \frac{W_f}{g} r_f \cdot e^{Br_f} \frac{\partial B}{\partial C_L} + \frac{CI}{k} \frac{\partial}{\partial C_L} \left(\frac{1 - e^{-kBr_f}}{a_f MB} \right) = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial DOC}{\partial M} = 0 \Rightarrow \frac{W_f}{g} r_f \cdot e^{Br_f} \frac{\partial B}{\partial M} + \frac{CI}{k} \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1 - e^{-kBr_f}}{a_f MB} \right) = 0 \quad (5.20)$$

En el apéndice B se desarrollan todas las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones (5.19) y (5.20) (ecuaciones (B.2), (B.1), (B.6) y (B.9)). Sustituyéndolas, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas cuya resolución proporciona M^* y C_L^* , los valores del número de Mach y coeficiente de sustentación a los que se ha de volar si se desea minimizar el DOC , manteniéndolos constantes:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{W_f}{g} r_f \cdot e^{Br_f} \frac{B}{C_L} \left(\frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1 \right) + \frac{CI}{k} \frac{1}{a_f B M C_L} \left\{ k [1 - e^{-kBr_f}] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1 \right) [(kr_f B + 1)e^{-kBr_f} - 1] \right\} \\ 0 &= \frac{W_f}{g} r_f \cdot e^{Br_f} \frac{B}{M} \left(\frac{M}{C_C} \frac{\partial C_C}{\partial M} + \frac{M}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial M} - 1 \right) + \frac{CI}{k} \frac{1}{a_f B M^2} \left\{ (1 - 2k) (e^{-kBr_f} - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{M}{C_C} \frac{\partial C_C}{\partial M} + \frac{M}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial M} - 1 \right) [(kr_f B + 1)e^{-kBr_f} - 1] \right\} \end{aligned} \quad (5.21)$$

En el capítulo 6 se presentan los resultados numéricos obtenidos de la resolución del sistema algebraico y se comparan con los del capítulo 4. Esta comparación justifica definitivamente que volar a número de Mach y coeficiente de sustentación constantes durante el vuelo da lugar a resultados muy próximos a los óptimos.

Capítulo 6

Crucero con M y C_L constantes: Análisis de resultados

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos en la resolución del sistema (5.21) obtenido en el capítulo anterior, particularizado para el modelo de avión definido en el apéndice A. Éste es válido siempre que la totalidad del vuelo se realice en la troposfera, que es lo habitual para la aeronave escogida, y parte de la hipótesis de que el número de Mach y el coeficiente de sustentación permanecen constantes durante el crucero. También se comparan los resultados obtenidos con los del capítulo 4, en el que el número de Mach y el coeficiente de sustentación variaban durante el crucero. En el caso de la estratosfera los resultados son los del apartado 4.2, por lo que no se analizan aquí.

6.1. Comparación de M y C_L

En este apartado se resuelve el sistema algebraico (5.21) y se comparan con los resultados obtenidos en el apartado 4.4, en el que se resolvía el problema mediante formulación variacional. En cada una de las gráficas siguientes, se comparan las siguientes magnitudes:

- M ó C_L al inicio del crucero, según la formulación variacional, denotada con el subíndice i y sin superíndice.
- M ó C_L al final del crucero, según la formulación variacional, denotada con el subíndice f y sin superíndice.
- La solución del sistema (5.21), denotada con el superíndice $*$ y sin subíndice, pues es constante a lo largo del crucero.

Siguiendo el mismo esquema que en el apartado 4.4, se analiza la dependencia de estas magnitudes con los tres parámetros del problema: CI , r_f y W_f , representándose para cada magnitud cuatro gráficas: en función de CI para varios r_f (con $W_f = 1200 \text{ kN}$), en función de r_f para varios CI (con $W_f = 1200 \text{ kN}$), en función de CI para varios W_f (con $r_f = 4000 \text{ km}$) y en función de W_f para varios CI (con $r_f = 4000 \text{ km}$).

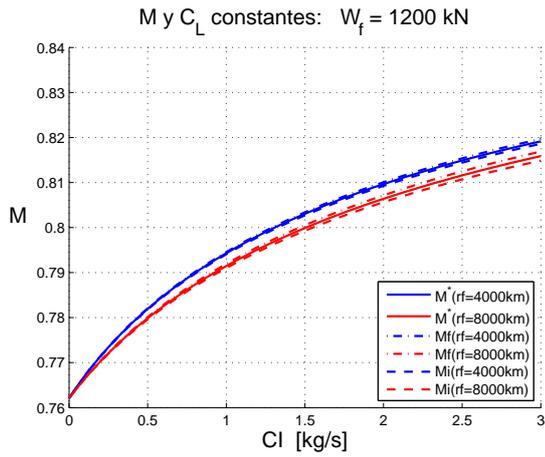


Figura 6.1: $M(CI)$ para varios r_f

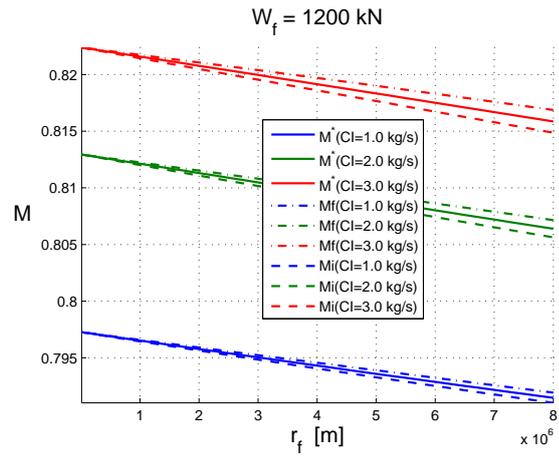


Figura 6.2: $M(r_f)$ para varios CI

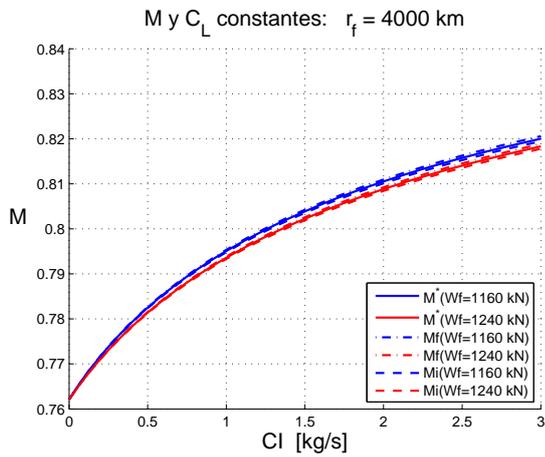


Figura 6.3: $M(CI)$ para varios W_f

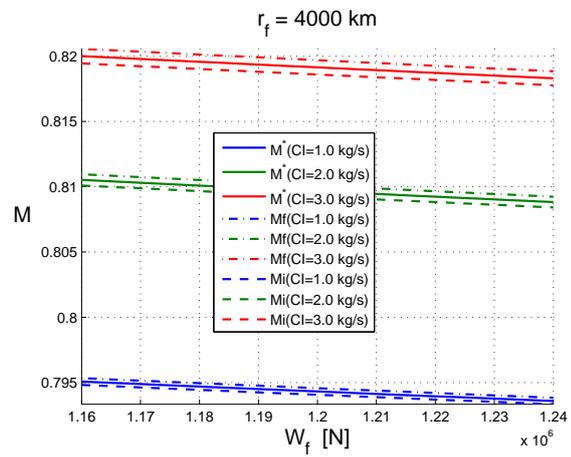


Figura 6.4: $M(W_f)$ para varios CI

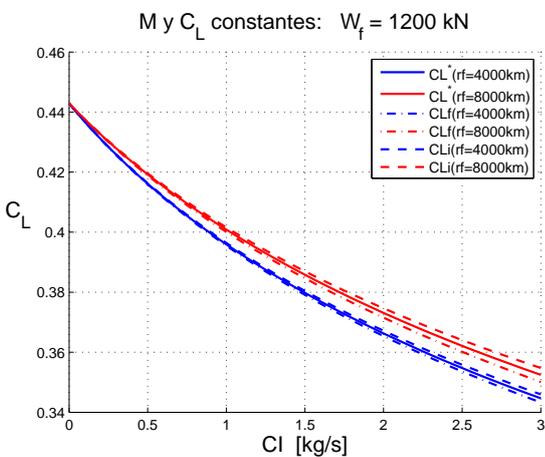


Figura 6.5: $C_L(CI)$ para varios r_f

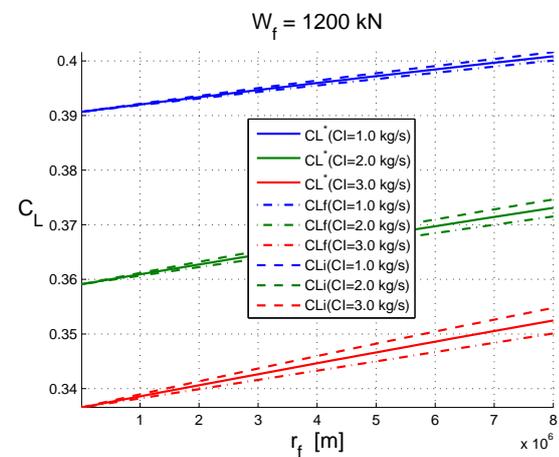


Figura 6.6: $C_L(r_f)$ para varios CI

6.2. Comparación de h

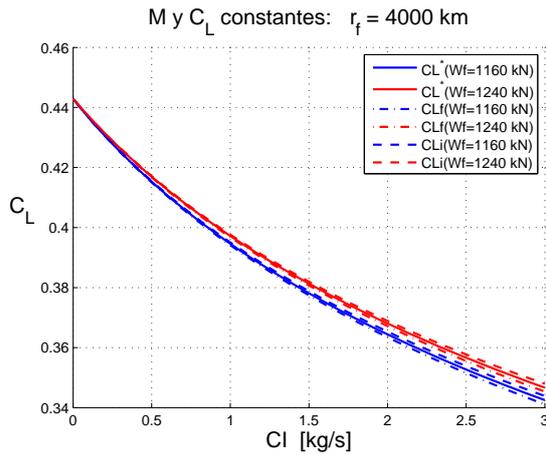


Figura 6.7: $C_L(CI)$ para varios W_f

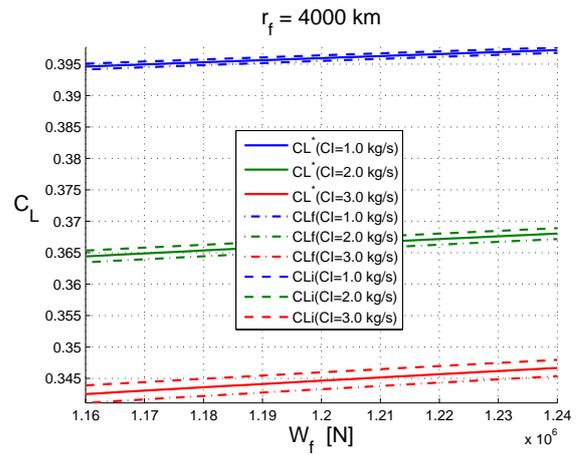


Figura 6.8: $C_L(W_f)$ para varios CI

En todas las figuras 6.1 a 6.8 se observa que, independientemente del valor de CI y r_f , la solución del sistema (5.21) es un valor intermedio entre la magnitud al comienzo y al final del crucero según la formulación variacional. Así pues, de esta forma se está volando siempre según unos valores de M y C_L cercanos al óptimo.

6.2. Comparación de h

Una vez obtenido los valores de M y C_L a los que se va a volar, es inmediato obtener la evolución de $W(r)$, $\delta(r)$ y $h(r)$. En las figuras 6.9 a 6.12 se representan y comparan las altitudes h , obtenidas mediante:

- h al inicio del crucero, según la formulación variacional, denotada con el subíndice i y sin superíndice.
- h al final del crucero, según la formulación variacional, denotada con el subíndice f y sin superíndice.
- h al inicio del crucero, según la aproximación del capítulo 5, denotada con el subíndice i y con el superíndice $*$.
- h al final del crucero, según la aproximación del capítulo 5, denotada con el subíndice f y con el superíndice $*$.

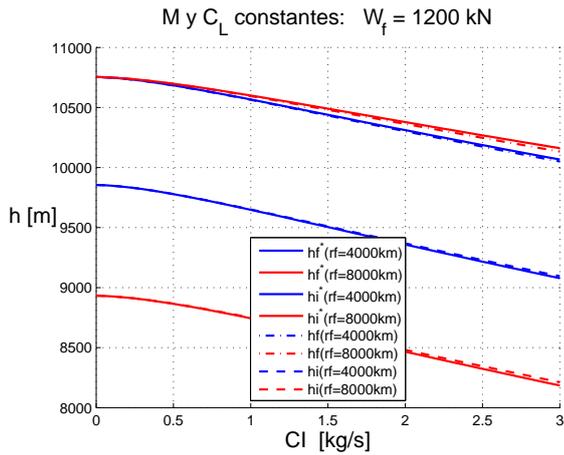


Figura 6.9: $h(CI)$ para varios r_f

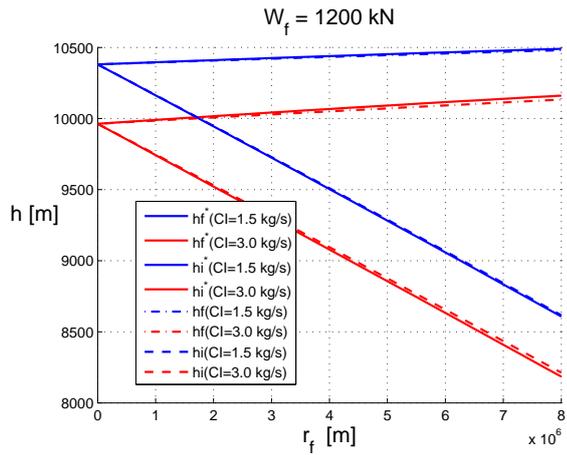


Figura 6.10: $h(r_f)$ para varios CI

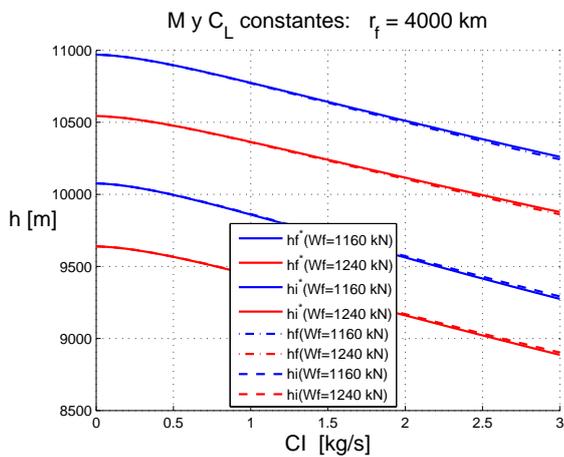


Figura 6.11: $h(CI)$ para varios W_f

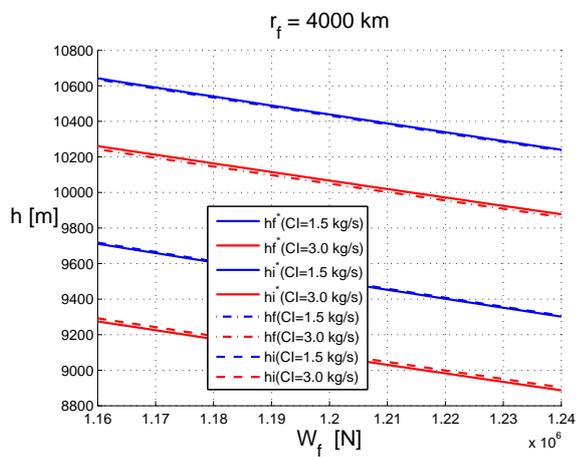


Figura 6.12: $h(W_f)$ para varios CI

En todas las figuras 6.9 a 6.12 se observa que la solución de la aproximación del capítulo 5 es muy próxima a la de la formulación variacional. La diferencia existente entre ambas es muy pequeña, aumentando ligeramente conforme lo hace CI y r_f . Esto es lógico, pues como se vio en apartado 4.3 (figuras 4.27, 4.28, 4.35 y 4.37), el incremento de estos parámetros provocaba una mayor variación de $M(r)$ y $C_L(r)$, por lo que volar con éstos constantes está más lejano del óptimo.

En general, se observa que la solución aproximada tiene un rango de variación de altitud ligeramente mayor, es decir, empieza a una altitud inferior y termina a una altitud superior, tanto más cuanto mayor sean CI y r_f .

6.3. Comparación de m_F , t_f y DOC . Justificación de la aproximación

En este apartado se comparan m_F , t_f y DOC obtenidos mediante la formulación variacional y utilizando la solución aproximada de que M y C_L son constantes. Esto se hace particularizando $W_f = 1200 \text{ kN}$ y se representan en función del CI (para varios valores de r_f) y en función de r_f (para varios valores del CI).

En las figuras 6.13 a 6.24 se representan las diferencias (denotada por Δ) entre las soluciones aproximada y variacional. Por ejemplo, en las figuras 6.13 y 6.14 se representa $\Delta m_F = m_F^{approx} - m_F^{var}$. Se ha elegido esta forma de comparación porque los valores son muy parecidos, por lo que si se representase en una misma figura m_F^{approx} y m_F^{var} , entre ambas curvas prácticamente no se observaría diferencia.

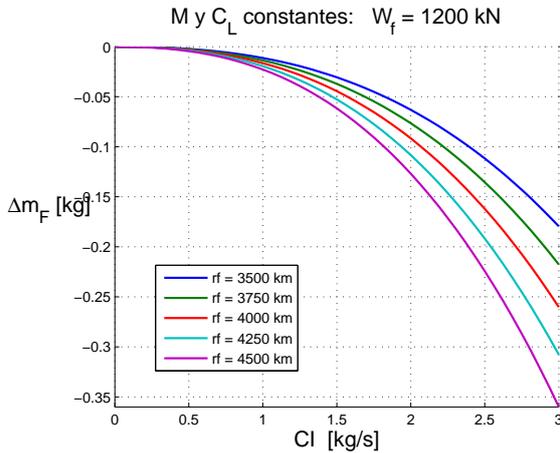


Figura 6.13: $m_F(CI)$ para varios r_f

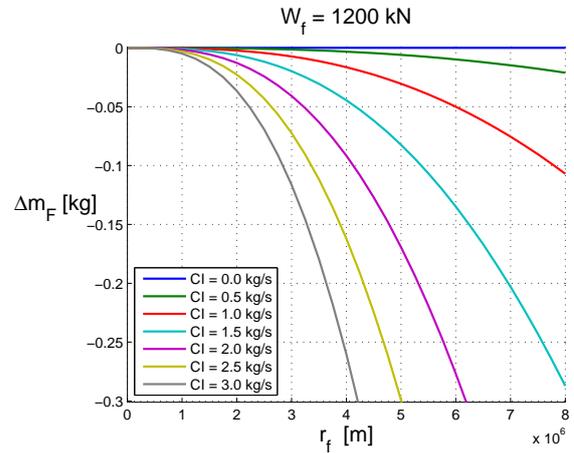


Figura 6.14: $m_F(r_f)$ para varios CI

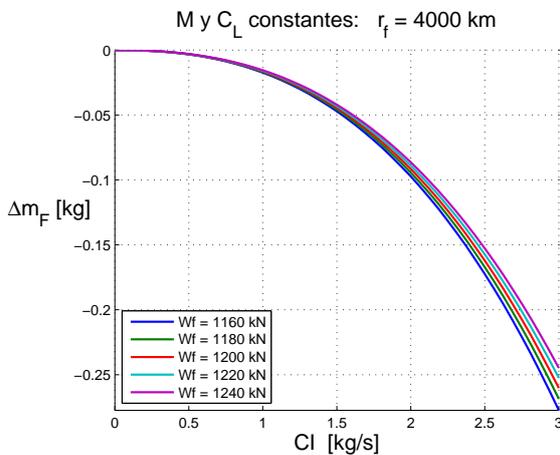


Figura 6.15: $m_F(CI)$ para varios W_f

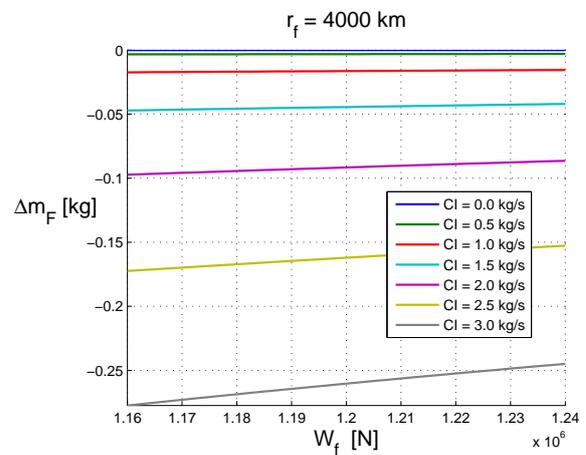


Figura 6.16: $m_F(W_f)$ para varios CI

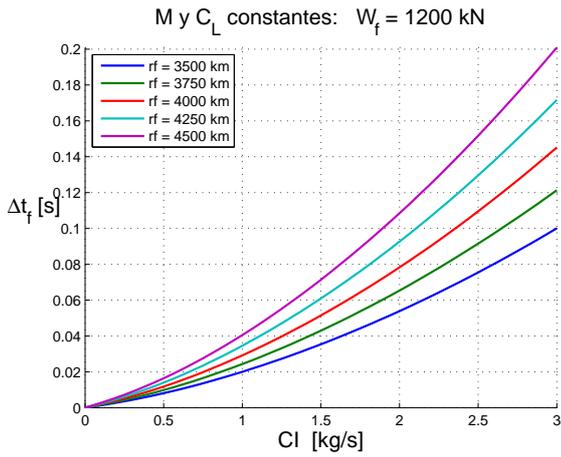


Figura 6.17: $t_f(CI)$ para varios r_f

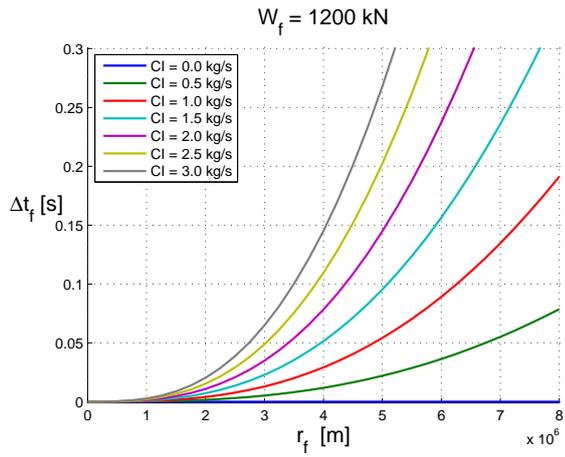


Figura 6.18: $t_f(r_f)$ para varios CI

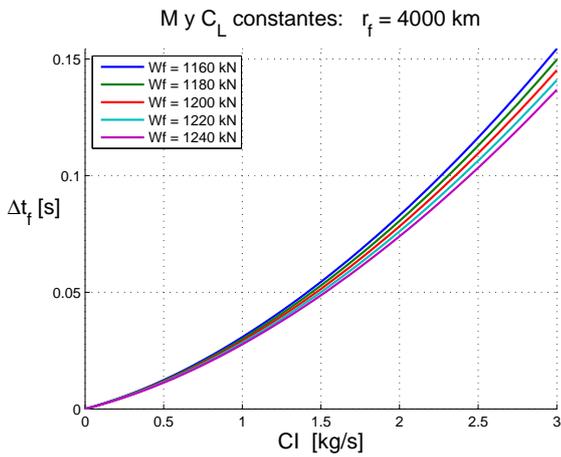


Figura 6.19: $t_f(CI)$ para varios W_f

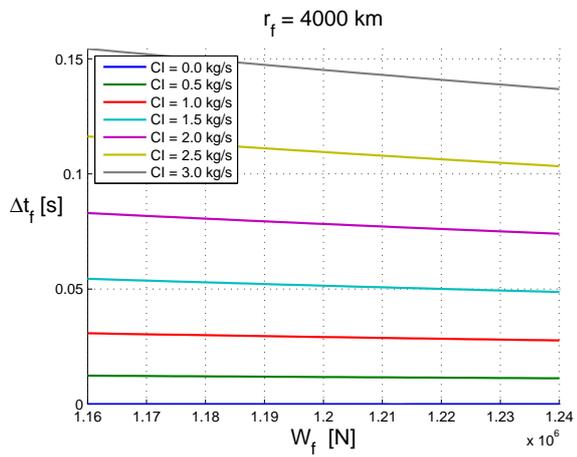


Figura 6.20: $t_f(W_f)$ para varios CI

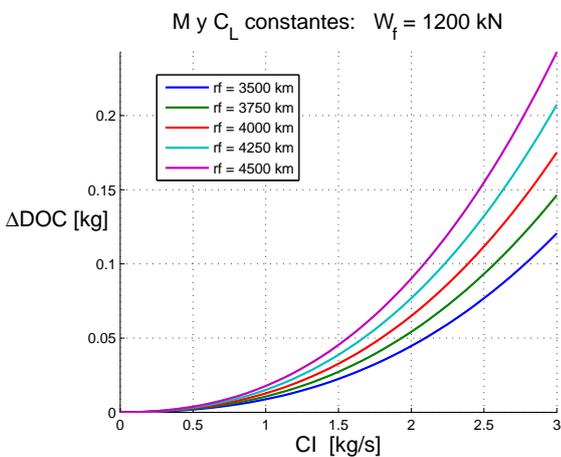


Figura 6.21: $DOC(CI)$ para varios r_f

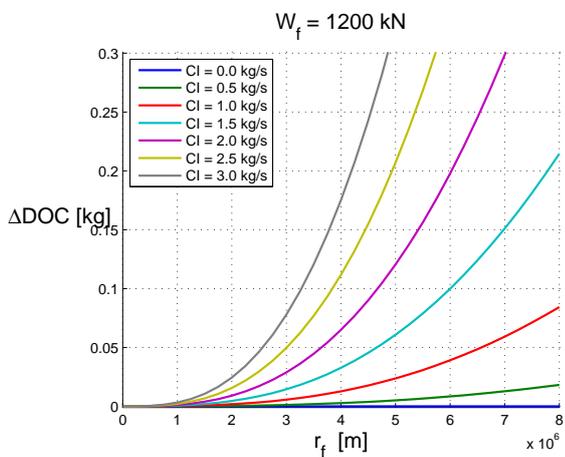


Figura 6.22: $DOC(r_f)$ para varios CI

6.3. Comparación de m_F , t_f y DOC . Justificación de la aproximación

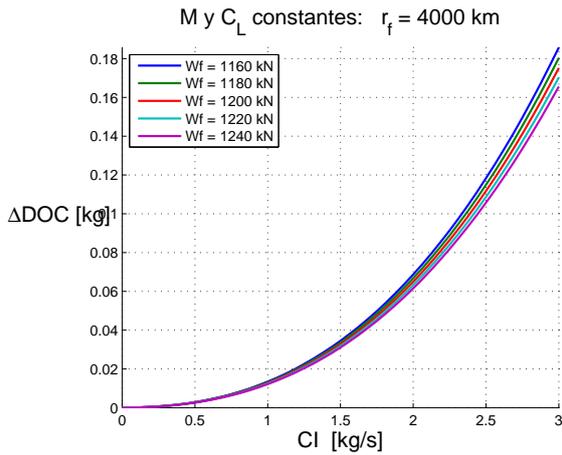


Figura 6.23: $DOC(CI)$ para varios W_f

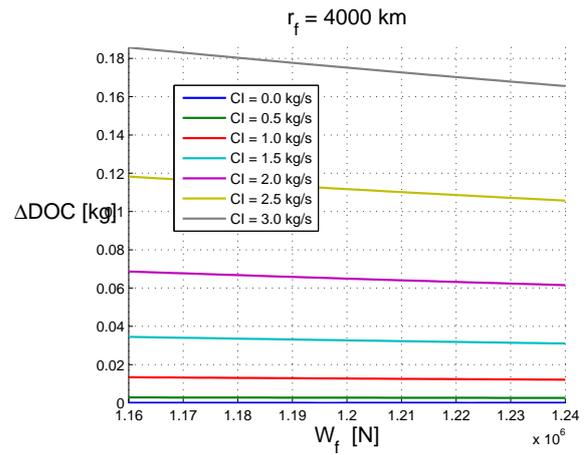


Figura 6.24: $DOC(W_f)$ para varios CI

En las figuras 6.13 a 6.24 se comprueba definitivamente que volando a M y C_L constantes se obtienen resultados prácticamente idénticos que variándolos durante el vuelo, en términos del combustible consumido, tiempo empleado y coste. Curiosamente, se consume algo menos de combustible (figuras 6.13 a 6.16), aunque durando más el vuelo (figuras 6.17 a 6.20). Siempre se cumple que $\Delta DOC = DOC^{aprox} - DOC^{var} > 0$, pues la formulación variacional obtiene siempre la solución óptima, aunque las diferencias son muy pequeñas.

La diferencia entre la solución aproximada y la variacional aumenta conforme lo hace el CI y el r_f . Esto es lógico, pues como se vio en apartado 4.3 (figuras 4.27, 4.28, 4.35 y 4.37), el incremento de estos parámetros provocaba una mayor variación de $M(r)$ y $C_L(r)$, por lo que volar con éstos constantes está más lejano del óptimo. Por el contrario, esta diferencia disminuye ligeramente conforme aumenta W_f .

Capítulo 7

Resumen y conclusiones

7.1. Resumen de resultados

En este apartado se sintetizan los resultados más relevantes obtenidos en los capítulos 4 y 6, analizándose especialmente el efecto de CI , W_f y r_f .

7.1.1. Efecto del CI

Con carácter general, es decir, independientemente de si se está en la estratosfera o en la troposfera, a mayor CI el número de Mach óptimo es mayor, es decir, $\partial M/\partial CI > 0$. Esto se debe a que al aumentar el coste del tiempo respecto al del combustible, compensa viajar a mayor velocidad pese a consumir más. Se observa que el efecto del CI es cada vez menor, es decir, $\partial^2 M/\partial CI^2 < 0$. Esto se debe a que se está volando a números de Mach cercanos al Mach de divergencia, que se caracterizan porque pequeños incrementos del número de Mach, que provocan pequeñas disminuciones en el tiempo de vuelo, producen grandes incrementos de la resistencia aerodinámica, con grandes incrementos del consumo de combustible.

Consecuencia directa de este resultado es el inverso en C_L , es decir, $\partial C_L/\partial CI < 0$ y $\partial^2 C_L/\partial CI^2 > 0$. Esto se debe a que al volarse a mayor M no es necesario un C_L tan alto, debido a la ecuación $\delta = \frac{W}{q_0 M^2 C_L}$.

Se observa una fuerte dependencia de la altitud con CI en la troposfera: cuanto mayor sea éste, menor es la altitud durante todo el crucero. Esto se debe a que si se vuela a una altitud inferior a la óptima para $CI = 0$, está claro que se consume más cantidad de combustible al no ser ésta la que minimiza el consumo de combustible. Pero, teniendo en cuenta que $V = aM$, el tiempo total de vuelo disminuye (la velocidad de vuelo es mayor) al ser la velocidad del sonido decreciente con la altitud. Por tanto, cuanto mayor sea el CI más rentable es volar a una altitud menor que la óptima con $CI = 0$. En cambio, en la estratosfera, la dependencia de la altitud con CI es mucho menor y más compleja, pues tanto h_i como h_f tienen un máximo relativo con CI .

Lógicamente, el incremento de CI implica que aumenta el consumo de combustible m_F y disminuye el tiempo de vuelo t_f .

7.1.2. Efecto de r_f y W_f

Con carácter general, el incremento de r_f y/o W_f suaviza las tendencias de M y C_L con CI . Además, a mayor r_f en la troposfera aumenta la variación de $M(r)$ y $C_L(r)$ (en la estratosfera no existe variación al ser constantes).

r_f afecta muy poco en h_f y mucho en h_i , cuanto mayor sea r_f menor es h_i . Por el contrario, cuanto mayor sea W_f menor es tanto h_i como h_f .

Lógicamente, el incremento de r_f implica que aumentan tanto m_F como t_f , mientras que el de W_f implica un aumento de m_F pero una disminución pequeña de t_f .

7.2. Conclusiones y avances futuros

La principal conclusión que se extrae a lo largo del trabajo es la gran similitud entre las soluciones correspondientes a la formulación variacional y al caso de volar con M y C_L constantes. Además, como el rango de variación de estos parámetros es muy pequeño, no es razonable intentar implementar las ligaduras de vuelo obtenidas de la formulación variacional para controlar una aeronave en la práctica, pues a menudo los instrumentos que permiten medir estas magnitudes no tienen una precisión tan alta.

La forma más razonable de controlar el vuelo debe ser imponer que el número de Mach adopte una serie de valores discretos, según la precisión de los sensores. Por ejemplo, si los sensores son capaces de medir con gran precisión hasta centésimas del número de Mach, se puede reformular el problema forzando que el número de Mach sea constante a tramos y que en cada tramo su valor sea múltiplo de 0,01. Este nuevo análisis y su comparación con los resultados del presente proyecto sería un posible trabajo futuro. Un caso parecido lo estudia Valenzuela et al. [16], aunque limita las altitudes según niveles de vuelo y el criterio de optimización es el de minimizar el consumo de combustible.

A pesar de la imposibilidad práctica (debido a la precisión finita de los instrumentos de medida y a las restricciones de Control de Tráfico Aéreo) de implementar la solución obtenida mediante formulación variacional, esta sigue siendo la referencia al ser la mejor posible y permite comparar cualquier otra solución que se emplee en la práctica para comprobar cuánto se desvía de la óptima.

Otra conclusión importante es que el modelo de atmósfera ISA no es adecuado para analizar el paso de la troposfera a la estratosfera pues existe una discontinuidad en la tropopausa. Una mejora futura consistiría en modificar el modelo actual añadiéndole un tercer tramo, que sería

una “tropopausa finita” de forma que la función $a(\delta)$ sea derivable. Es decir, se sustituiría la ecuación (2.8) por la siguiente:

$$a(\delta) = \begin{cases} a_0 \cdot \delta^{\frac{R_g \alpha_T}{2g}} & \text{si } \delta > \delta_* + \epsilon & \text{(troposfera)} \\ a(\delta)|_{tropopausa} & \text{si } \delta_* - \epsilon \leq \delta < \delta_* + \epsilon & \text{(tropopausa)} \\ a_* & \text{si } \delta \leq \delta_* - \epsilon & \text{(estratosfera)} \end{cases} \quad (7.1)$$

Donde ϵ es un parámetro conocido pequeño ($\epsilon \ll \delta_*$) que representa el semiancho de la tropopausa. Podría elegirse cualquier función $a(\delta)|_{tropopausa}$ con la condición de que $a(\delta)$ resultase continua y derivable.

De esta forma, la función $k(\delta) = \frac{\delta}{a} \frac{da}{d\delta}$ resultaría continua (en la ecuación (3.10) resultaba discontinua), por lo que con este nuevo modelo atmosférico no existiría ninguna discontinuidad y podría analizarse el crucero completo, independientemente de la altitud inicial y final. Este análisis se deja para un trabajo futuro.

Otra posible mejora es la inclusión del viento y analizar cómo varían las leyes de control óptimas y el coste del vuelo. Se consideraría un viento horizontal dependiente de la altitud de vuelo. Un caso particular sería el de viento horizontal constante, considerado en Rivas et al. [12] en el estudio del crucero de máximo alcance.

Apéndice A

Modelo de aeronave

En este apéndice se presenta el modelo de aeronave empleado a lo largo del proyecto para las aplicaciones numéricas. Representa un modelo típico de aeronave civil de pasajeros de fuselaje ancho y dos motores, que opera en régimen subsónico pero a números de Mach elevados donde son importantes los efectos de compresibilidad.

En particular se ha escogido el Boeing 767-300ER, algunas características se presentan en la tabla A.1:

Superficie alar de referencia, S [m ²]	283.3
Peso máximo al despegue, W _{TO} [N]	1832666
Peso máximo de combustible [N]	722112

Tabla A.1: Características del Boeing 767-300ER

A.1. Modelo aerodinámico

El modelo aerodinámico define la polar parabólica $C_D = C_D(C_L, M)$, que proporciona el coeficiente de resistencia aerodinámica en función del coeficiente de sustentación y del número de Mach. Tiene en cuenta, por tanto, los efectos de compresibilidad, aunque se desprecian los asociados al número de Reynolds y a la variación del centro de gravedad de la aeronave. Se considera la polar parabólica propuesta por Cavcar et al. [4]:

$$\begin{aligned} C_D(M, C_L) = & \left(C_{D_{0,i}} + \sum_{j=1}^5 k_{0j} \cdot H^j(M) \right) + \left(C_{D_{1,i}} + \sum_{j=1}^5 k_{1j} \cdot H^j(M) \right) C_L + \\ & + \left(C_{D_{2,i}} + \sum_{j=1}^5 k_{2j} \cdot H^j(M) \right) C_L^2 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde

$$H(M) = \frac{(M - 0,4)^2}{\sqrt{1 - M^2}} \quad (\text{A.2})$$

Los coeficientes de la polar parabólica incompresible valen: $C_{D_{0,i}} = 0,01322$, $C_{D_{1,i}} = -0,00610$ y $C_{D_{2,i}} = 0,06000$. Los coeficientes de la polar parabólica compresible están dados en la tabla A.2. Esta polar es válida para $M \geq 0,4$; para $M \leq 0,4$ se aplica la polar parabólica incompresible, que se obtiene haciendo $H = 0$ en la ecuación (A.1).

j	1	2	3	4	5
k_{0j}	0.0067	-0.1861	2.2420	-6.4350	6.3428
k_{1j}	0.0962	-0.7602	-1.2870	3.7925	-2.7672
k_{2j}	-0.1317	1.3427	-1.2839	5.0164	0.0000

Tabla A.2: Coeficientes de polar parabólica compresible

A.2. Modelo propulsivo

Se considera el coeficiente de consumo específico de combustible definido por Mattingly et al. [9]:

$$C_C(M) = c_0 \frac{L_H}{a_0} (1,0 + 1,2M) \quad (\text{A.3})$$

donde c_0 es el coeficiente de consumo específico de combustible al nivel del mar y para $M = 0$, cuyo valor para esta aeronave es $c_0 = 9,0 \times 10^{-6} \text{ kg}/(\text{sN})$ [1]. Para el calor latente del combustible, se toma $L_H = 43 \times 10^6 \text{ J/kg}$.

No se ha considerado la dependencia del coeficiente de consumo específico de combustible con el coeficiente de empuje, pues es muy débil según Miele [10]. Aún así Martínez-Val et al. [8], Cavcar et al. [4] y Bartel et al. [2] utilizan un modelo de coeficiente de consumo específico de combustible más complejo que tiene en cuenta dicha dependencia.

Apéndice B

Desarrollo de derivadas parciales

En este apéndice se desarrollan una serie de derivadas parciales que son necesarias en el capítulo 5. En concreto se obtienen las derivadas parciales, tanto respecto de C_L como de M , de las siguientes expresiones: $B(M, C_L) = \frac{gC_C}{ML_H} \frac{C_D}{C_L}$, $a_f(M, C_L) = a_0 \cdot \delta_f^k = a_0 \cdot \left(\frac{W_f}{q_0 C_L M^2}\right)^k$ y $\left(\frac{1-e^{-kBr_f}}{a_f MB}\right)$.

En primer lugar, se obtienen las derivadas parciales de $B(M, C_L)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial C_L} &= \frac{gC_C}{L_H M} \frac{\partial}{\partial C_L} \left(\frac{C_D}{C_L}\right) = \frac{gC_C}{L_H M} \frac{1}{C_L^2} \left[C_L \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - C_D\right] = \\ &= \frac{gC_C C_D}{L_H M C_L} \frac{1}{C_L} \left[\frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1\right] = \frac{B}{C_L} \left[\frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1\right]\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial M} &= \frac{g}{C_L L_H} \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{C_C C_D}{M}\right) = \frac{g}{C_L L_H} \left[\frac{\partial C_C}{\partial M} \frac{C_D}{M} + \frac{\partial C_D}{\partial M} \frac{C_C}{M} + \frac{-1}{M^2} C_D C_C\right] = \\ &= \frac{gC_C C_D}{C_L L_H M} \left[\frac{\partial C_C}{\partial M} \frac{1}{C_C} + \frac{\partial C_D}{\partial M} \frac{1}{C_D} - \frac{1}{M}\right] = \frac{B}{M} \left[\frac{M}{C_C} \frac{\partial C_C}{\partial M} + \frac{M}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial M} - 1\right]\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

A continuación, se obtiene las de $a_f(M, C_L)$, que son necesarias para obtener las del término $\left(\frac{1-e^{-kBr_f}}{a_f MB}\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_f}{\partial C_L} &= \frac{\partial a_f}{\partial \delta_f} \frac{\partial \delta_f}{\partial C_L} = \left(k a_0 \delta_f^{k-1}\right) \cdot \left(-\frac{W_f}{q_0 C_L^2 M^2}\right) = -\frac{k a_f}{C_L} \\ \frac{\partial a_f}{\partial M} &= \frac{\partial a_f}{\partial \delta_f} \frac{\partial \delta_f}{\partial M} = \left(k a_0 \delta_f^{k-1}\right) \cdot \left(-2 \frac{W_f}{q_0 C_L M^3}\right) = -\frac{2k a_f}{M}\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

Finalmente, se obtienen las del término $\left(\frac{1-e^{-kBr_f}}{a_f BM}\right)$. Para ello se calculan por separado las

de los términos $\frac{1}{a_f BM}$ y $\frac{e^{-kBr_f}}{a_f BM}$, para posteriormente restarse:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial C_L} \left(\frac{1}{a_f BM} \right) &= -\frac{1}{M} \frac{B \frac{\partial a_f}{\partial C_L} + a_f \frac{\partial B}{\partial C_L}}{(a_f B)^2} = -\frac{1}{a_f BM} \frac{1}{C_L} \left[\frac{C_L}{a_f} \frac{\partial a_f}{\partial C_L} + \frac{C_L}{B} \frac{\partial B}{\partial C_L} \right] = \\ &= -\frac{1}{a_f BM} \frac{1}{C_L} \left[(-k) + \left(\frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial C_L} \left(\frac{e^{-kBr_f}}{a_f BM} \right) &= \frac{1}{M} \frac{-kr_f e^{-kBr_f} \frac{\partial B}{\partial C_L} (a_f B) - e^{-kBr_f} \cdot \left(B \frac{\partial a_f}{\partial C_L} + a_f \frac{\partial B}{\partial C_L} \right)}{(a_f B)^2} = \\ &= -\frac{e^{-kBr_f}}{a_f BM C_L} \left[kr_f C_L \frac{\partial B}{\partial C_L} + \frac{C_L}{a_f} \frac{\partial a_f}{\partial C_L} + \frac{C_L}{B} \frac{\partial B}{\partial C_L} \right] = \\ &= -\frac{e^{-kBr_f}}{a_f BM C_L} \left[kr_f B \left(\frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1 \right) - k + \left(\frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1 \right) \right] = \\ &= -\frac{e^{-kBr_f}}{a_f BM C_L} \left[(kr_f B + 1) \left(\frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1 \right) - k \right] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial C_L} \left(\frac{1 - e^{-kBr_f}}{a_f BM} \right) &= \frac{1}{a_f BM C_L} \left\{ \left(\frac{C_L}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial C_L} - 1 \right) \left[(kr_f B + 1) e^{-kBr_f} - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + k \left[1 - e^{-kBr_f} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{a_f BM} \right) &= -\frac{BM \frac{\partial a_f}{\partial M} + a_f M \frac{\partial B}{\partial M} + a_f B}{(a_f B)^2} = \\ &= -\frac{1}{a_f BM^2} \left[\frac{M}{a_f} \frac{\partial a_f}{\partial M} + \frac{M}{B} \frac{\partial B}{\partial M} + 1 \right] = \\ &= -\frac{1}{a_f BM^2} \left[(-2k) + \left(\frac{M}{C_C} \frac{\partial C_C}{\partial M} + \frac{M}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial M} - 1 \right) + 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{e^{-kBr_f}}{a_f BM} \right) &= \frac{-kr_f e^{-kBr_f} \frac{\partial B}{\partial M} (a_f BM) - e^{-kBr_f} \cdot \left(BM \frac{\partial a_f}{\partial M} + a_f M \frac{\partial B}{\partial M} + a_f B \right)}{(a_f BM)^2} = \\ &= -\frac{e^{-kBr_f}}{a_f BM^2} \left[kr_f M \frac{\partial B}{\partial M} + \frac{M}{a_f} \frac{\partial a_f}{\partial M} + \frac{M}{B} \frac{\partial B}{\partial M} + 1 \right] = \\ &= -\frac{e^{-kBr_f}}{a_f BM^2} \left[(kr_f B + 1) \frac{M}{B} \frac{\partial B}{\partial M} + \frac{M}{a_f} \frac{\partial a_f}{\partial M} + 1 \right] = \\ &= -\frac{e^{-kBr_f}}{a_f BM^2} \left[(kr_f B + 1) \left(\frac{M}{C_C} \frac{\partial C_C}{\partial M} + \frac{M}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial M} - 1 \right) + (-2k) + 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1 - e^{-kBr_f}}{a_f MB} \right) &= \frac{1}{a_f BM^2} \left\{ \left(\frac{M}{C_C} \frac{\partial C_C}{\partial M} + \frac{M}{C_D} \frac{\partial C_D}{\partial M} - 1 \right) \left[(kr_f B + 1) e^{-kBr_f} - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2k) \left[e^{-kBr_f} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Notación matemática

Símbolo	Unidad	Nombre
a	m/s	Velocidad del sonido
A	1/m	$\frac{gC_C}{L_H M} \frac{\partial C_D}{\partial C_L}$
B	1/m	$\frac{gC_C C_D}{L_H M C_L}$
c	kg/(sN)	Consumo específico de combustible
c_0	kg/(sN)	Consumo específico de combustible a nivel del mar con $M = 0$
c_f	u.m./kg	Coste del combustible
c_t	u.m./s	Coste del tiempo
C_C	—	Coefficiente de consumo específico de combustible
C_D	—	Coefficiente de resistencia aerodinámica
C_L	—	Coefficiente de sustentación
CI	kg/s	Índice de Coste
D	N	Resistencia aerodinámica
DOC	kg	Coste Operativo Directo
E	—	Eficiencia aerodinámica
g	m/s ²	Gravedad terrestre
h	m	Altitud de vuelo
k	—	$\frac{\delta}{a} \frac{da}{d\delta}$ (vale 0 en la estratosfera, $\frac{R_g \alpha t}{2g}$ en la troposfera)
L	N	Sustentación
L_H	J/kg	Calor latente del combustible
m_F	kg	Masa de fuel total consumida
M	—	Número de Mach
p	Pa	Presión atmosférica
q_0	N	$\frac{1}{2} \kappa p_0 S$
r	m	Distancia horizontal recorrida
r_f	m	Distancia horizontal total recorrida
R_g	J/(kgK)	Constante de los gases (aire)
S	m ²	Superficie alar de referencia
t	s	Tiempo
t_f	s	Tiempo total
T	N	Empuje
V	m/s	Velocidad de la aeronave
W	N	Peso de la aeronave

W_f	N	Peso final de la aeronave
α_T	K/m	Gradiente térmico atmosférico
δ	—	Ratio de presiones $\delta = \frac{p}{p_0}$
Δ	—	Incremento (final menos inicial)
Θ	K	Temperatura atmosférica
κ	—	Ratio de calores específicos del aire
λ	s^2/m	Multiplicador de Lagrange
ρ	kg/m^3	Densidad atmosférica

Subíndices

Símbolo	Significado
f	Final del crucero ($r = r_f$)
i	Inicio del crucero ($r = 0$)
0	A nivel del mar ($\delta = 1$ ó $h = 0$)
*	En la tropopausa ($h = 11000 m$)
n	CI actual, utilizado en el método de continuación

Superíndices

Símbolo	Significado
*	Valor cuando el crucero es óptimo
.	Derivada respecto a r
i	Iteración actual, utilizado en el método del disparo

Bibliografía

- [1] *Jane's All the World's Aircraft 2009-2010*. Jane's Information Group, Coulsdon, England, U.K., 2009.
- [2] Bartel, M. y T.M. Young: *Simplified thrust and fuel consumption models for modern two-shaft turbofan engines*. *Journal of Aircraft*, 45(4):1450–1456, 2008.
- [3] Bryson, A. E.: *Dynamic Optimization*. Pearson Education, 1999.
- [4] Cavcar, A. y M. Cavcar: *Approximate solutions of range for constant altitude – constant high subsonic speed flight of transport aircraft*. *Aerospace Science and Technology*, 8:557–567, 2004.
- [5] Franco, A. y D. Rivas: *Minimum-Cost Cruise at Constant Altitude of Commercial Aircraft Including Wind Effects*. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(4):1253–1260, 2011.
- [6] Franco, A., D. Rivas y A. Valenzuela: *Minimum-Fuel Cruise at Constant Altitude with Fixed Arrival Time*. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33(1):280–285, 2010.
- [7] Hull, D. G.: *Optimal Control Theory fo Applications*. Springer-Verlag, New York Inc., 2003.
- [8] Martinez-Val, R. y E. Perez: *Optimum cruise lift coefficient in initial design of jet aircraft*. *Journal of Aircraft*, 29(4):712–714, 1992.
- [9] Mattingly, J. D., W.H. Heiser y D.T. Pratt: *Aircraft Engine Design*. AIAA Education Series, 2ª edición, 2002.
- [10] Miele, A.: *Flight Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1962.
- [11] Pargett, D. M. y M. D. Ardema: *Flight Path Optimization at Constant Altitude*. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(4):1197–1201, 2007.
- [12] Rivas, D., O. López-García, S. Esteban y E. Gallo: *An Analysis of Maximum Range Cruise Including Wind Effects*. *Aerospace Science and Technology*, 14:38–48, 2010.
- [13] Rivas, D. y A. Valenzuela: *Compressibility effects on maximum range cruise at constant altitude*. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 32(5):1654–1658, 2009.

- [14] Roberson, B.: *Fuel Conservation Strategies: Cost Index Explained*. Aero Magazine, 2:26–28, 2007.
- [15] Torenbeek, E.: *Cruise performance and range prediction reconsidered*. Progress in Aerospace Sciences, 33:285–321, 1997.
- [16] Valenzuela, A., D. Rivas y A. Franco: *Cruise Optimization Using Trajectory Patterns*. En *10th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations (ATIO) Conference*, Fort Worth, Texas, 13 - 15 Septiembre 2010.