ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Métodos Numéricos para Régimen Transónico

Proyecto Fin de Carrera Ingeniería Aeronáutica

2014 - 2015

Autor: Manuel Pérez Rodríguez

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor





A mi tutor y profesor,

Miguel

A mispadres y a mi hermano,

Manolo y Ana, y Alberto

A mis amigos y compañeros más cercanos de la carrera, Javi, Miguel, Eloy, Juanma y Christian

Índice General

CAPITULO 1: SOBRE EL RÉGIMEN TRANSÓNICO	
1.1 Motivación y objetivos del proyecto	5
1.2 Características generales del régimen transónico	
1.3 Ecuaciones para el régimen transónico	
1.4 Trabajos destacados	
1.4.1 Murman - Cole (1971)	
1.4.2 Jameson - Chipman (1979)	
1.5 Estado del arte	
1.5.1 Computational Fluid Dynamics (CFD)	
1.5.2 Diseño óptimo de perfiles y alas en transónico	
CAPÍTULO 2: MÉTODO DE LÍNEAS PARA IMPLEMENTACIÓN DE ECUACI DIFERENCIALES	[ONES
2.1 Introducción al Método de líneas	
2.2 Ejemplos simples de resolución de E.D.P. mediante Método de Líneas	
2.2.1 Ecuación de Troesch	
2.2.2 Ecuación de Advección	
2.2.3 Ecuación de Burgers	
2.3 Resolución de ecuaciones de Euler mediante Método de Líneas	
2.3.1 Tubo de choque (Introducción a viscosidad artificial)	
2.3.2 Tobera convergente-divergente	53
CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE RÉGIMEN TRANSÓNICO SOBRE PERFILES	
3.1 Revisión del procedimiento Jameson – Chipman	
3.2 Primera aproximación: Discretización en x	59
3.2.1 Desarrollo	59
3.2.2 Resultados	
3.3.3 Código MATLAB	
3.4 Segunda aproximación: Variación temporal de la sección del perfil	
3.4.1 Desarrollo	
3.4.2 Resultados	68
3.4.3 Código MATLAB	69
3.5 Tercera aproximación: Leve discretización en X/Y con sección constante/variable	71
3.5.1 Desarrollo	

3.5.2 Resultados: Sección constante	74
3.5.3 Resultados: Sección variable	75
3.5.4 Código MATLAB	76
3.6 Cuarta aproximación: Inclusión de viscosidad artificial	83
3.6.1 Desarrollo	83
3.6.2 Resultados: Sección constante	84
3.6.3 Resultados: Sección variable	85
3.6.4 Código MATLAB	87
3.7 Aproximación final: Discretización espacial total, ley de espesor y matriz jacobiana	88
3.7.1 Desarrollo	88
3.7.2 Resultados	90
3.7.3 Código MATLAB	92
CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES	95
4.1 Comparación MATLAB vs Jameson - Chipman	95
4.2 Conclusiones finales	99
Apéndice A	. 102
A.1 Fórmulas de segundo orden	. 102
A.2 Fórmulas de cuarto orden	. 103
A.3 Fórmula de Carver y Hinds	. 105

BIBLIOGRAFÍA107

CAPITULO 1: SOBRE EL RÉGIMEN TRANSÓNICO

1.1 Motivación y objetivos del proyecto

En el presente trabajo se estudiará el régimen que experimenta un fluido (en este caso, será el aire el objeto de análisis) cuando se desplaza alrededor de un cuerpo a una velocidad tal que el número de Mach es próximo a 1 (0.75-1.1), conocido como régimen **transónico**. Se expondrán algunos de los aspectos físicos más importantes; se ofrecerá una breve visión histórica de los avances científicos dedicados a descubrir, comprender y modelar este fenómeno; y se estudiarán algunos de los métodos más interesantes desarrollados en los últimos años por diversos investigadores, para implementar un procedimiento propio para la resolución de las ecuaciones que gobiernan el flujo transónico mediante software computacional como MATLAB.

Una de las motivaciones principales para realizar este estudio se halla en la aerodinámica aplicada al campo de la aviación. En lo que refiere a la aviación comercial, la mayoría de aviones suelen viajar a una velocidad de crucero tal que el número de Mach se halla entre 0.75 y 0.83 para volar de forma óptima, por lo que normalmente deben estar cerca del régimen transónico. Por otra parte, los aviones de caza militares operan normalmente a Mach ligeramente superior a 1, lo que también supone hallarse en dicho régimen.

En ambos casos, la razón de establecer dichos valores para la velocidad se halla en la optimización de la actuación del avión. En el campo civil, la ecuación de Breguet es un clásico en la definición de parámetros de diseño, utilizada ampliamente en la industria aeronáutica, cuyo fin es optimizar el rango, la máxima distancia que puede recorrer una aeronave cargada al máximo de su capacidad de combustible. Su expresión es la siguiente:

$$R = \frac{V}{sfc} \frac{L}{D} \log \frac{W_0 + W_f}{W_0}$$

Esta ecuación muestra claramente la interacción multidisciplinar que existe en el diseño de un avión. Mientras que el término W_0 (peso en vacío del avión) debe ser minimizado desde la vertiente estructural del proyecto y el consumo específico *sfc* es optimizado por los fabricantes de motores, los ingenieros de aerodinámica deben maximizar el término L/D, lo que supone aumentar la velocidad V hasta donde la eficiencia aerodinámica alcance su máximo. En la siguiente figura se representa gráficamente la relación entre los efectos aerodinámicos y el número de Mach correspondiente:



Figura 1: L/D frente a Mach para aviones comerciales. Ref. [25]



Figura 2: L/D frente a Mach para cazas. Ref. [25]

Se observa claramente que para alcanzar la máxima relación L/D es necesario alcanzar velocidades de la zona transónica, lo que conllevaría cruzar el llamado Mach de divergencia (ya en régimen transónico), en el que la resistencia aerodinámica aumentaría de forma desproporcionada y el centro de presiones podría verse modificado, alterando gravemente la estabilidad del avión (efectos que se describirán más adelante).

En el aspecto militar, el problema es más severo pues la velocidad de operación es generalmente supersónica por lo que es necesario atravesar la región de transónico, pero además el avión debe ser capaz de poseer alta maniobrabilidad en un amplio rango de velocidades donde casi todas implican la aparición de complejos patrones de flujo transónico separado.



Figura 3: Onda de choque durante régimen transónico. Ref. [20]

Es por ello que tanto en la investigación en la aviación comercial como en la militar se requiere conocer en profundidad cuál es el comportamiento de la corriente en esta situación, de forma que ese conocimiento pueda repercutir positivamente en el diseño de perfiles y alas para que los efectos negativos sean minimizados y puedan alcanzarse las velocidades deseadas.

La materia sobre la que versa este trabajo se ha visto durante años prácticamente desterrada de las aulas de universidad por la que complejidad que implica. Como se irá describiendo en este capítulo y en posteriores, el régimen transónico es uno de los últimos retos que queda en la enseñanza de la aerodinámica, puesto que sus bases matemáticas no son inmediatamente asequibles desde un punto de vista numérico, y analíticamente las hipótesis y simplificaciones necesarias presentan un modelo muy alejado de la realidad.

Esto genera una desmotivación general, tanto en el profesorado como en el alumnado a la hora de intentar abordar este fenómeno. En el primer caso, ante la falta de métodos simples y la obligación de tener que desarrollar largas deducciones matemáticas, a veces con suposiciones poco firmes, donde es muy fácil perderse. En el segundo caso, ante la falta de visión del problema real y la necesidad de entender sin apenas perder la atención a todo un laberíntico desarrollo matemático en pizarra.

Obtener una implementación numérica en ordenadores actuales puede ser una de las claves para resolver esta dificultad. Por un lado, la creación de un código simple que permita comprobar el comportamiento real de este régimen ahorra tiempo de trabajo y escritura en clase para el docente, que puede emplearlo en comentar los conceptos físicos más importantes e intentar que los alumnos comprendan de manera más directa y visual por qué ocurre este fenómeno. Por otra parte, el alumno que dispone de un código así puede manipular los parámetros a su antojo pudiendo comprobar numerosas facetas de este régimen, llegando a entender intuitivamente lo que ocurre, lo que puede ser llevado a cabo con computadores usuales. Todo esto revela una motivación acuciante que incita a desarrollar este proyecto.

De esta manera, para abordar el problema del régimen transónico resulta necesario conocer sus principios físicos y fundamentos matemáticos para poder comprender su naturaleza, lo que representará el objetivo de este capítulo.

<u>1.2 Características generales del régimen transónico</u></u>

A modo de anécdota curiosa, fue Theodore von Karman quien decidió que la denominación más adecuada para este singular fenómeno era la de flujo "**transónico**" debido a que supone un estado **tran**sitorio entre los regímenes sub**sónico** y super**sónico**. (Ref. [1])

Si se indaga en la literatura referente a este régimen, se hallarán diversas definiciones sobre el transónico, pero en la gran mayoría de referencias, la misma idea predomina: la coexistencia en una región local de flujo subsónico y supersónico. Este es un hecho inherente a la aparición de este fenómeno en todos los casos posibles donde se produce, lo que conlleva la existencia de una discontinuidad física u onda de choque para establecer el paso entre regímenes.

Esta situación provoca que las aproximaciones tanto teóricas como empíricas hayan encontrado numerosos obstáculos para poder definir la naturaleza interna de este régimen. En el primer caso, los magníficos avances en el estudio de la aerodinámica subsónica y supersónica desembocaron en el uso de una teoría linealizada que modelaba de forma muy aproximada cualquier flujo, estableciendo la hipótesis de pequeñas perturbaciones (bajos ángulos de ataque sin desprendimiento de la capa límite). Sin embargo, esta teoría resulta casi inútil para representar el régimen transónico. Como se observa en la siguiente imagen, para pequeños α , ya tiene lugar la onda de choque característica:



Figura 4: Formación de ondas de choque en función de α . Ref. [20]

Una de las pruebas matemáticas que confirman esta fatalidad es la analogía de Prandtl-Glauert, la cual establecía los efectos compresibles del aire de la siguiente forma:

$$C_p = \frac{C_{p_{inc}}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}}$$

Siendo M_{∞} el número de Mach del fluido no perturbado. Es evidente que esta teoría no es válida para un valor de Mach igual a 1 (el denominador se hace 0) y para valores muy cercanos a 1, el coeficiente de presiones se eleva de forma monótona. También se puede llegar a la conclusión de que este régimen es muy sensible a ligeras variaciones cuando se halla muy próximo a 1, por lo que la hipótesis de pequeñas perturbaciones deja de ser aceptable.

Por lo tanto, es obvio que el régimen transónico **no se puede captar** de forma correcta mediante la teoría lineal, siendo necesario desarrollar un modelo más complejo.

Sin embargo, la linealización no es del todo desechable puesto que puede seguir haciéndose uso de ella, aunque a nivel muy local.

En lo referente a los métodos experimentales, las investigaciones realizadas en túneles de viento están lastradas por la influencia causada por las paredes del mismo, lo que provoca que los datos obtenidos no sean fiables. Dicha influencia, cuando es provocada por un obstáculo que enfrenta una corriente de Mach igual a 1, se puede analizar mediante la ecuación linealizada de pequeñas perturbaciones en 2D:

$$(1-M_{\infty}^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0$$

Donde u' y v' son las velocidades de perturbación. Mediante esta expresión, se demuestra que para $M_{\infty} = 1, \frac{\partial y'}{\partial x}$ es igual a 0, lo que significa que v' solo depende de la dirección x. La perturbación provocada por el cuerpo que se transmite lateralmente lo hace prácticamente sin perder intensidad hasta regiones muy lejanas, por lo que se deduce que, teóricamente, podrían darse diferencias infinitas de presiones entre la superficie del cuerpo y un punto separado a una gran distancia.

Obviamente, esta situación no puede darse en la realidad, pero sí que puede evidenciar los problemas que surgen en los ensayos de túnel de viento. Este resultado también pone de manifiesto de nuevo, que la teoría de pequeñas perturbaciones no es válida para la región de M_{∞} muy próxima a 1.

Esta fue la problemática que surgió a mediados del siglo XX entre los ingenieros que desarrollaban aviones que llegaban hasta los límites tecnológicos conocidos, donde el vacío de datos aerodinámicos, tanto teóricos como experimentales, impedía un estudio exhaustivo de flujos transónicos.

Sin embargo, con el paso de los años los investigadores pudieron crear túneles de viento más capaces de recrear condiciones reales (paredes porosas o ranuradas) para simular una condición de contorno de presión constante. Los resultados que se obtuvieron mediante esta nueva técnica fueron bastante reveladores. Se pudo observar que en todos los casos, ondas de choque (generalmente varias ondas de expansión dominadas por una onda de choque normal) así como zonas de régimen supersónico y de separación del flujo aparecían en el extradós del perfil.



Figura 5: Mach en perfil en función de M_{∞} . Ref. [20]

La posición final de la región supersónica en el extradós puede variar entre el 35% de la cuerda y el borde de salida, dependiendo del número de Mach. Esta variabilidad puede verse en la figura 5, donde se comprueba el desplazamiento de la zona supersónica. Dicha región tiene numerosas ondas de expansión que acaban en una onda de choque normal. A medida que el espesor aumenta, la situación en el extradós se vuelve más convulsa, ya que la región supersónica aumenta y a continuación de la onda de choque, el desprendimiento de la corriente cada vez es más fuerte y casi total en el flujo. También se comprueba un aumento súbito de la presión a través de la onda de choque, lo que caracteriza la discontinuidad física que se genera en ese punto.

Estos sucesos son muy significativos dado que se corrobora el hecho de que el flujo de aire en su estado no perturbado se halla en régimen subsónico y cuando se encuentra con el perfil, el flujo pasa a ser supersónico tras transcurrir por el borde de ataque. Pasada la onda de choque (la posición de ésta en el extradós depende del espesor del perfil y del número de Mach), la corriente vuelve a régimen subsónico. La explicación física de este fenómeno tiene su base en el denominado **número de Mach** crítico, M_{cr} .

Es bien conocida la distribución de presiones de un flujo de aire en el extradós de un perfil común, donde el fluido sufre una bajada de presión hasta un valor mínimo, aumentando su velocidad. Llevando este hecho al límite, es obvio que para un cierto valor de la velocidad de la corriente, algún punto de la zona de baja presión del perfil alcanzará un número de Mach igual a 1. El valor del Mach del flujo de aire no perturbado para el que se obtiene esta situación es el número de Mach crítico. Este valor depende, para ángulos de ataque pequeños, de las características de cada perfil y

es fundamental para el estudio del régimen transónico, pues define el comienzo de éste. El método comúnmente utilizado para calcularlo es aquel en el que se relacionan los valores del coeficiente de presiones donde M = 1 y donde $M = M_{cr}$, aunque no se explicará en esta memoria (explicado en ref. [21])

Al comprobar que en una región definida de un perfil puede darse una zona de flujo supersónica aislada entre zonas subsónicas, se hace patente que la aparición de ondas de choque es inevitable. Este hecho añade mayor complejidad matemática a la hora de definir la discontinuidad de los valores a través de las ondas de choque, ya que es necesario recurrir a las relaciones de Rankine – Hugoniot para poder cuantificar dicho salto. Sin embargo, el problema físico y aerodinámico adquiere una proporción mayor debido la separación del flujo, producto de la interacción entre la capa límite del fluido y la onda de choque, efecto que no se valorará durante el desarrollo del método a implementar.

El mecanismo físico responsable es el gradiente adverso de presión (ésta aumenta en la dirección del movimiento) que se genera por la onda de choque normal en una zona muy estrecha. Debido a que esta discontinuidad no alcanza al perfil (por la capa límite, donde la velocidad debe ser muy similar a la del cuerpo y por lo tanto subsónica en este caso) dicho gradiente se difunde aguas arriba a través de la capa límite y ésta aumenta su tamaño llegando a desplazar la corriente exterior, apareciendo una onda oblicua delante de la normal. Dicho proceso (detallado en ref. [21]) se repite generándose nuevas ondas de este tipo cada vez más débiles.

La principal consecuencia es el aumento repentino de la resistencia aerodinámica. El número de Mach a partir del cual se produce este fenómeno es conocido como **Mach de divergencia** (este efecto fue el responsable del fracaso inicial al intentar lograr el vuelo supersónico, motivo por el que se empezó a hablar de la mítica "barrera del sonido", fenómeno que generaba vibraciones inesperadas en el avión y en los mandos).Este hecho puede comprobarse en la siguiente figura, donde se observa la región aproximada en la que suelen posicionarse tanto el número de Mach crítico como el Mach de divergencia, y la relación entre ambos y Mach igual a 1 (Mach crítico siempre es menor que el de divergencia puesto que este último es consecuencia de los efectos que se producen a raíz de alcanzar el primero)



Figura 6: Mach crítico y Mach de divergencia. Ref. [1]

El crecimiento de la resistencia suele estar relacionado con la coincidencia de la posición de la onda de choque con el punto del perfil donde la tangente de la superficie coincide con la dirección de la corriente incidente (este punto depende del ángulo de ataque). Una vez que la onda sobrepasa este punto, su intensidad aumenta y por tanto, la resistencia. El desprendimiento y re-adherencia de la capa límite depende tanto del espesor del perfil como del número de Reynolds. Para estimar el valor del Mach de divergencia, la ref. [21] comenta un método basado en el coeficiente de presión en la cresta del perfil y aguas debajo de la onda, aunque, al igual que se comentó anteriormente con el método del Mach crítico, no se detallará en este trabajo.

El fenómeno de la divergencia de resistencia es, sin lugar a dudas, uno de los aspectos más relevantes (quizás el mayor) que convierten al régimen transónico en un estado problemático en lo que refiere al ámbito ingenieril, donde la investigación y el desarrollo se centran en evitarlo acercando todo lo posible el Mach crítico a 1 (y a su vez el Mach de divergencia) para reducir el rango de velocidades donde la resistencia se dispara.

<u>1.3 Ecuaciones para el régimen transónico</u>

Definido el problema, queda claro que no es posible analizar el régimen transónico con la teoría de la aerodinámica linealizada desarrollada. Para poder hallar una solución, hace faltar acudir hasta sus bases matemáticas para encontrar otro procedimiento matemático más preciso que permita desvelar los mecanismos internos del transónico y acceder a unos resultados que lo modelen correctamente. Dichas bases están constituidas por las *ecuaciones de Navier-Stokes*, que definen perfectamente las

características y la naturaleza de un fluido en movimiento. Sin embargo, se puede obtener una correcta visión del problema si se asume la simplificación de considerar efectos viscosos. De esta forma, el sistema de Navier-Stokes se convierte en las *ecuaciones de Euler*.

Para el caso que atañe a este proyecto, se tomaran como ciertas la hipótesis de fluido casi incompresible para valores de Mach en torno a 0.3-0.4, la hipótesis de pequeñas perturbaciones en el flujo debido a bajos ángulos de ataque (teniendo en cuenta que el desprendimiento de la corriente se puede producir para valores de ángulo entre 15-25°, esta teoría es de gran utilidad para un rango práctico y realista) y se supondrá esbeltez de los perfiles aerodinámicos. También es importante destacar que en todo caso, se establece que la capa límite turbulenta que se genera tras la onda de choque no se desprende en ningún momento, sino que se mantiene adherida (un ejemplo de ello se puede observar en la figura 7).



Figura 7: Capa límite adherida tras onda de choque. Ref. [23]

Se asumen las hipótesis de fluido no viscoso y adiabático sin fuerzas másicas presentes, siendo aplicable para flujos tanto rotacionales como irrotacionales. Para régimen transónico, la existencia de ondas de choque producen variaciones de entropía, lo que según el teorema de Crocco (expuesto en ref. [1]) es indicativo de que los flujos en este estado son rotacionales. Las soluciones numéricas de las ecuaciones de Euler ofrecen resultados con bajo margen de error para fluidos de baja viscosidad.

Si se sigue profundizando, es posible entender hasta qué punto es rotacional un flujo transónico, para saber si las ondas de choque son lo suficientemente débiles como para que la hipótesis de irrotacionalidad sea aceptable. Para ello, es necesario recurrir a la expresión que define el salto de entropía a través de una onda de choque (ref. [21]):

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right] \right\} - R \ln\left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right]$$

En el flujo transónico, se puede asumir que $M_1^2 \approx 1$ y $M_1^2 - 1 \ll 1$ por lo que, en primera aproximación la expresión anterior proporciona:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{2\gamma}{3(\gamma + 1)^2} (M_1^2 - 1)^3$$

El resultado afirma que el salto de entropía es proporcional al cubo del término $M_1^2 - 1$ que a su vez es mucho menor que 1. Por ello, es razonable asumir que dicha variación durante el régimen transónico es muy pequeña por lo que el flujo puede ser considerado como isentrópico y por lo tanto, irrotacional. No hay que olvidar que este desarrollo es una aproximación, por lo que tomando valores que se alejen del rango transónico (como $M_1 = 1.2$) esta suposición deja de ser cierta. Con las hipótesis anteriores, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a las ecuaciones de Euler:

Ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

• Ecuación de conservación de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla p = 0$$

• Ecuación de conservación de energía:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0$$

Estas expresiones, que son las que gobernarán el problema del régimen transónico, son ecuaciones diferenciales parciales que alternan entre expresiones elípticas e hiperbólicas dependiendo de la zona subsónica o supersónica, lo que requiere conocer previamente qué regiones están dominadas por cada régimen. Por esta razón, la naturaleza de dichas ecuaciones es inherentemente no lineal

Tomadas las anteriores hipótesis como ciertas, es posible definir la velocidad como la derivada de un potencial de la forma:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \Phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ W \end{pmatrix}$$

La irrotacionalidad del fluido implica que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Con estas condiciones, las ecuaciones de Euler pueden ser redefinidas y condensadas en una sola ecuación, considerando régimen estacionario. En la expresión

de la cantidad de movimiento, el término de la presión puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{S} \nabla \rho = a^2 \, \nabla \rho$$

En el caso estacionario, dicha ecuación pasa a ser:

$$\rho V \cdot \nabla V + \nabla p = 0$$

Multiplicando la ecuación por V:

$$V \cdot V \cdot \nabla V = -V \cdot \frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{a^2}{\rho} V \cdot \nabla \rho$$

Por la ecuación estacionaria de conservación de la masa:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot V$$

Lo que significa que:

$$\nabla \cdot V = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla \rho$$

Sustituyendo en la ecuación de cantidad de movimiento:

$$V \cdot V \cdot \nabla V = a^2 \nabla \cdot V$$

Desarrollando por sus términos esta expresión, el resultado sería el siguiente:

$$(u^{2} - a^{2})\frac{\partial u}{\partial x} + (v^{2} - a^{2})\frac{\partial v}{\partial y} + (w^{2} - a^{2})\frac{\partial w}{\partial z} + uv\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + uw\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + vw\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

Esta ecuación define de forma perfecta fluidos idealmente isentrópicos e irrotacionales y es válida para obtener el comportamiento de un flujo sobre cualquier tipo de objeto a cualquier ángulo de ataque. Si se quisiera restringir el estudio a cuerpos fuselados y esbeltos con bajos ángulos de ataque, se puede realizar la suposición de pequeñas perturbaciones, la cual se define estableciendo una variable denominada **velocidad de perturbación**:

$$\Phi = V_{\infty}x + \phi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U_{\infty} + u'$$

Introduciendo esta igualdad en la anterior ecuación, se obtiene una nueva expresión válida para los regímenes subsónico y supersónico:

$$a^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

= $(U_{\infty} + u)^{2}\frac{\partial u}{\partial x} + v^{2}\frac{\partial v}{\partial y} + w^{2}\frac{\partial w}{\partial z} + (U_{\infty} + u)v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + vw\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$
+ $(U_{\infty} + u)w\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

Dividiendo esta ecuación entre a^2 y despreciando los términos relativos a cuadrados de velocidades de perturbación, se obtiene la siguiente expresión:

$$(1 - M_{\infty}^{2})\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

= $M_{\infty}^{2}(\gamma + 1)\frac{u}{U_{\infty}}\frac{\partial u}{\partial x} + M_{\infty}^{2}(\gamma - 1)\frac{u}{U_{\infty}}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + M_{\infty}^{2}\frac{v}{U_{\infty}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$
+ $+M_{\infty}^{2}\frac{w}{U_{\infty}}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$

Cabe decir que en este desarrollo, aparecen términos como $\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$ que son dominantes frente a otras derivadas respecto a las variables *z* e *y* al hallarse estas últimas multiplicadas por valores de orden similar al de las perturbaciones. Para Mach inferiores a 0.8 y superiores a 1.2, el término $\frac{\partial u}{\partial x}$ también sería dominante, pero para el rango que se trata en este trabajo dicha suposición no es posible.

Por lo tanto, en la ecuación aparece un término $M_{\infty}^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u}{U_{\infty}} \right] \frac{\partial u}{\partial x}$, resultando la expresión:

$$(1 - M_{\infty}^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = M_{\infty}^2 \left[(\gamma + 1)\frac{u}{U_{\infty}} \right] \frac{\partial u}{\partial x}$$

En términos de potencial:

$$(1 - M_{\infty}^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = M_{\infty}^2 \left[(\gamma + 1) \frac{\phi_x}{U_{\infty}} \right] \phi_{xx}$$

Esta es la ecuación de pequeñas perturbaciones para el transónico.

<u>1.4 Trabajos destacados</u>

1.4.1 Murman - Cole (1971)

En 1971 surge el método de Murman y Cole, considerado como la piedra angular del estudio numérico del régimen transónico, basado en las ecuaciones de pequeñas perturbaciones para el transónico.

Primeramente es necesario establecer el espacio en el que se trabajará. Sea el sistema de coordenadas cartesianas (x, y) que mediante discretización se convierte en un sistema de puntos (\bar{x}, \bar{y}) mediante la transformación (aunque la notación para x, y se mantendrá invariable):



Figura8: Discretización Murman - Cole. Ref. [1]

En este espacio, la superficie de un perfil simétrico sin ángulo de ataque se representa por la línea situada en y = 0 y $x \in [0,1]$, estando la condición de contorno de tangencia sobre éste aplicada en la línea y = 0. Dicha condición se definiría en el espacio de coordenadas originales como:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = V_{\infty} \frac{dz}{dx}$$

Siendo v la componente vertical de la velocidad de perturbación. En el espacio transformado, esta variable se define. Al trabajar en un espacio discreto, las derivadas pasan a ser diferencias finitas. De este modo, una forma simple de expresar una derivada podría ser:

$$(\phi_x)_{i,j} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

Estas expresiones son consideradas como derivadas centrales. Sin embargo, no dejan de ser una aproximación a la forma real por lo que es posible expresar las derivadas numéricamente con fórmulas alternativas. En el caso de la condición de contorno en el perfil, sería apropiado expresarla de la siguiente forma:

$$\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-3\phi_{i,1} + 4\phi_{i,2} - \phi_{i,3}}{2\Delta y}$$

Por lo que la condición quedaría:

$$V_{\infty} \frac{dz}{dx} = \frac{-3\phi_{i,1} + 4\phi_{i,2} - \phi_{i,3}}{2\Delta y}$$

Definido el sistema, la clave que caracteriza el método de Murman y Cole es la siguiente. Anteriormente se ha definido la diferencia finita central como una función en la que el valor de dicha expresión en un punto (i, j) depende del término que está inmediatamente delante suya y del que está de la misma manera detrás suya. Esta definición es válida para variables que se hallan en régimen subsónico puesto que la información que llega a ese punto (i, j) proviene tanto de aguas arriba del flujo como aguas abajo, debido a que dicha información se transmite a la velocidad del sonido que es más rápida que el movimiento del fluido.

En el caso del régimen transónico, como ya se ha explicado en anteriores párrafos, subsónico y supersónico conviven por lo que la definición de diferencia finita central no será válida en toda la región. En la zona supersónica, al ser más rápido el flujo que la velocidad del sonido, la información de aguas abajo no puede llegar al punto (i, j) por lo que solo podrá conocer lo que ocurra aguas arriba. Esta situación se expresa matemáticamente por la definición de las diferencias finitas aguas arriba:

$$(\phi_x)_{i,j} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}$$
$$(\phi_{xx})_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}}{(\Delta x)^2}$$

Se puede apreciar que en estas expresiones desaparecen los términos de puntos que están detrás del (i, j). La idea de Murman y Cole consistió en la implementación de dichas diferencias finitas en función de la región del perfil que se evaluase, diferencias centrales o aguas arriba dependiendo del valor del Mach local. De esta forma, se generan dos tipos de ecuaciones de pequeñas perturbaciones, una para la zona subsónica y otra para la supersónica:

• Ecuación subsónica:

$$\left[K - M_{\infty}^{2} \frac{\gamma + 1}{U_{\infty}} \left(\frac{\bar{\phi}_{i+1,j} - \bar{\phi}_{i-1,j}}{2\Delta\bar{x}}\right)\right] \left(\frac{\bar{\phi}_{i+1,j} - 2\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i-1,j}}{(\Delta\bar{x})^{2}}\right) + \frac{\bar{\phi}_{i,j+1} - 2\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i,j-1}}{(\Delta\bar{y})^{2}} = 0$$

• Ecuación supersónica:

$$\left[K - \frac{M_{\infty}^2(\gamma+1)}{U_{\infty}} \frac{\overline{\phi}_{i,j} - \overline{\phi}_{i-2,j}}{2\Delta \overline{x}}\right] \left(\frac{\overline{\phi}_{i,j} - 2\overline{\phi}_{i-1,j} + \overline{\phi}_{i-2,j}}{(\Delta \overline{x})^2}\right) + \frac{\overline{\phi}_{i,j+1} - 2\overline{\phi}_{i,j} + \overline{\phi}_{i,j-1}}{(\Delta \overline{y})^2} = 0$$

Siendo $K = 1 - M_{\infty}^2$ denominado parámetro de similaridad

La segunda aportación del método de Murman y Cole fue mostrar un procedimiento iterativo correcto para resolver estas ecuaciones, denominado inicialmente *método de relajación simple de variables*. De esta forma, se supondrían valores para ϕ en todos los puntos (*i*, *j*) y se analizarían todos ellos, comprobando si se hallan en régimen subsónico o supersónico y dependiendo del resultado, se establecería la ecuación correspondiente al régimen que afecta a cada punto. Una vez obtenidos se procede a realizar el mismo paso anterior de forma iterativa hasta que se alcance la convergencia.

Sin embargo, computacionalmente este proceso tiene un coste operacional bastante alto. La alternativa al mismo fue el conocido *método de relajación de líneas*. El procedimiento es similar pero en este caso, la incógnita es un vector de valores de ϕ correspondientes a todos los puntos sobre la columna *j*.

Los resultados obtenidos por Murman y Cole comparados con datos experimentales para un perfil circular sin ángulo de ataque cuyos parámetros son los adecuados para que aparezca el régimen transónico:



Figura 9: C_p según Murman - Cole. Ref. [1]

Se puede comprobar el súbito aumento de presión en torno al 80% de la cuerda, lo que sugiere la posición de la onda de choque. También se observa que los datos obtenidos por Murman y Cole muestran un pico en la onda muy escarpado mientras que los datos experimentales sufren un cambio más suave. Esto se debe al hecho de no haber tenido en cuenta efectos viscosos, lo que puede significar variaciones significativas en zonas donde la interacción entre la capa límite y la onda de choque genere desprendimiento de la corriente, donde dichos efectos son del orden suficiente como para que sea necesario tenerlos en cuenta.

Vistos estos resultados se comprueba que este método es bastante adecuado para obtener datos concluyentes. Sin embargo, es interesante hacer una pequeña reflexión sobre cómo se ha llegado hasta ellos. Murman y Cole se basan en la ecuación de pequeñas perturbaciones que a su vez está basada en la ecuación potencial, la cual supone que el fluido es isentrópico. Si se piensa lógicamente, parece fascinante que una hipótesis de este tipo permita una teoría en la que se definan claramente los efectos de una onda de choque.

A pesar de esta incongruencia, existe una evidencia que resuelve el enigma y se halla en la resolución numérica de las ecuaciones. El hecho de que exista un cierto orden de error al resolverlas crea sistemáticamente lo que se describe en la referencia [1] como viscosidad artificial, la cual provoca que exista una disipación "numérica" que actúa de la misma forma que lo hiciere la fricción o la disipación térmica, recreando las condiciones que modelan la aparición de una onda de choque.

Esta afortunada situación provoca que una ecuación, tal como la potencial o la de pequeñas perturbaciones, permita representar el comportamiento de todos los fluidos considerados no viscosos en régimen transónico, obteniendo los efectos producidos por una onda de choque. Este descubrimiento supuso un impulso muy importante para el CFD ya que representaba la posibilidad de obtener soluciones estacionarias para el transónico con un coste económico aceptable.

1.4.2 Jameson - Chipman (1979)

El método desarrollado por los investigadores Jameson y Chipman (ref. [7]) es uno de los ejemplos más destacados de la resolución de flujos potenciales no estacionarios. Como explican los autores, el objetivo del trabajo es obtener un sistema de primer orden discretizado en diferencias finitas, haciendo uso de un sistema de coordenadas dependiente del tiempo que se ajusta a la superficie del perfil para una aplicación cómoda de las condiciones de contorno. El uso de esquemas explícitos e implícitos de elementos finitos es otra de las cualidades que define este sistema. Según la teoría diseñada, las ecuaciones (fluido bidimensional no viscoso, isentrópico e irrotacional) de las que se parte son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \nabla \cdot (\bar{\rho}V) = 0\\ \bar{\rho} \frac{DV}{Dt} = -\nabla \bar{p} \end{bmatrix}$$

Desarrollando dicho sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0\\ \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\\ \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \end{aligned}$$

Suponiendo flujo isentrópico, se obtienen las siguientes igualdades:

$$0 = d\bar{h} - \frac{1}{\bar{\rho}}dp \quad \rightarrow \quad d\bar{h} = \frac{1}{\bar{\rho}}dp$$
$$\overline{h_0} = \bar{h} + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} = C_pT + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2}$$

Conociendo las relaciones $C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$, $\bar{p} = \rho RT$, se puede definir la siguiente expresión:

$$\overline{h_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\overline{p}}{\overline{p}} + \frac{\overline{u}^2 + \overline{v}^2}{2}$$

Para un flujo irrotacional como el que se está estudiando, también se cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad ; \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

Por lo que las ecuaciones iniciales se transforman:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} = 0$$
$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$$
$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

Pasando los términos al lado izquierdo:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$
$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\frac{\bar{u}^2}{2})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\frac{\bar{v}^2}{2})}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0$$
$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\frac{\bar{u}^2}{2})}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial (\frac{\bar{v}^2}{2})}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0$$

Uniendo los términos de derivadas en x e y:

Manuel Pérez Rodríguez

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2}\right) + \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \bar{x}} = 0$$
$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2}\right) + \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \bar{y}} = 0$$

Finalmente, juntando los dos últimos términos de las ecuaciones de cantidad de movimiento, las expresiones que se alcanzan son las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \begin{pmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{h}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \begin{pmatrix} \bar{\rho}\bar{v} \\ 0 \\ \bar{h}_0 \end{pmatrix} = 0$$

Una de las aportaciones más importantes que realiza el método desarrollado por Jameson y Chipman es la definición de un sistema de coordenadas que se ajuste a la superficie del perfil, de forma que se facilite en gran medida la resolución de las ecuaciones. Mediante el cambio de sistema de coordenadas:

$$X = \bar{x}, \qquad Y = \bar{y} - \bar{S}(x, t), \qquad T = \bar{t}$$



Figura 10: Discretización Jameson - Chipman. Ref. [7]

Las derivadas respecto a las nuevas variables pueden expresarse siguiendo el siguiente ejemplo de una variable arbitraria φ :

$$\Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=\varphi(X,Y,T)$$

Derivando φ respecto a las nuevas variables:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}\Big|_{\bar{y},\bar{t}} = \frac{\partial \varphi}{\partial X}\Big|_{Y,T}\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}\Big| + \frac{\partial \varphi}{\partial Y}\Big|_{X,T}\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}}\Big|$$

Donde $\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}\Big| = 1 \text{ y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}}\Big| = -\bar{S}_{\bar{x}},$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}\Big|_{\bar{x},\bar{t}} = \frac{\partial \varphi}{\partial Y}\Big|_{X,T}\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}}\Big|$$

Siendo
$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}} = 1$$
,
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{t}} \Big|_{\bar{x},\bar{y}} = \frac{\partial \varphi}{\partial T} \Big|_{Y,T} \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \Big|_{X,Y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{t}} \Big|$$

Siendo $\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} = 1 \text{ y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{t}} = -\bar{S}_T$. De esta forma las ecuaciones serían reescritas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial X} \begin{pmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ \overline{h_0} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial Y} \begin{pmatrix} \bar{\rho}(\bar{v} - \bar{S}_x\bar{u} - \bar{S}_t) \\ -\bar{S}_x\bar{h_0} - \bar{S}_t\bar{u} \\ \overline{h_0} - \bar{S}_t\bar{v} \end{pmatrix} = 0$$

Con el fin de simplificar aún más estas expresiones, se puede recurrir a la siguiente manipulación algebraica. Como se definió anteriormente, en flujo isentrópico se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

Expresada en las nuevas variables:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \bar{S}_X$$

Multiplicando por \bar{S}_T :

$$\frac{\partial \bar{S}_T \bar{u}}{\partial Y} = \bar{S}_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \bar{S}_X \bar{S}_T$$

Atendiendo a la última ecuación del sistema presentado, se cumple que:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial T} + \frac{\partial \overline{h_0}}{\partial Y} = \bar{S}_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y}$$

Multiplicando por \bar{S}_X :

$$\bar{S}_X \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial Y} = \bar{S}_X \bar{S}_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} - \bar{S}_X \frac{\partial \bar{v}}{\partial T}$$

Aunando expresiones:

$$\frac{\partial \bar{S}_T \bar{u}}{\partial Y} = \bar{S}_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} - \bar{S}_X \frac{\partial \bar{v}}{\partial T} - \bar{S}_X \frac{\partial h_0}{\partial Y}$$

Sustituyendo en la 2º ecuación del sistema:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial T} + \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial X} - \bar{S}_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + \bar{S}_X \frac{\partial \bar{v}}{\partial T} + \bar{S}_X \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial Y} - \bar{S}_X \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial Y} = 0$$

Los términos $\bar{S}_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \ge \bar{S}_X \frac{\partial \bar{v}}{\partial T}$ pueden desarrollarse de la siguiente forma:

$$\bar{S}_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} = \frac{\partial \bar{S}_T v}{\partial X} - v \frac{\partial \bar{S}_T}{\partial X}$$
$$\bar{S}_X \frac{\partial \bar{v}}{\partial T} = \frac{\partial \bar{S}_X v}{\partial T} - v \frac{\partial \bar{S}_X}{\partial T}$$

Introduciendo estos desarrollos en la anterior expresión:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial T} + \frac{\partial \bar{S}_X \bar{v}}{\partial T} + \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial X} - \frac{\partial \bar{S}_T \bar{v}}{\partial X} + \bar{v} \frac{\partial \bar{S}_T}{\partial X} - \bar{v} \frac{\partial \bar{S}_X}{\partial T} = 0$$

Mediante la afirmación de que $\frac{\partial s_t}{\partial x} = \frac{\partial s_x}{\partial T}$, se alcanza la expresión final:

$$\frac{\partial}{\partial T}(\bar{u}+\bar{S}_X\bar{v})+\frac{\partial}{\partial X}(\overline{h_0}-\bar{S}_T\bar{v})=0$$

De esta forma, el sistema final que deberá resolverse es el siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{u} + \bar{S}_X \bar{v} \\ \bar{v} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial X} \begin{pmatrix} \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{h}_0 - \bar{S}_T \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial Y} \begin{pmatrix} \bar{\rho} (\bar{v} - \bar{S}_X \bar{u} - \bar{S}_T) \\ 0 \\ \bar{h}_0 - \bar{S}_T \bar{v} \end{pmatrix} = 0$$

Y la condición de contorno tangencial al cuerpo era:

$$\bar{v} - \bar{S}_X \bar{u} - \bar{S}_T = 0 \quad \rightarrow \quad Y = 0 \; para \; X \in [0, c]$$

Éste será el sistema que se habrá de resolver para obtener las propiedades del fluido alrededor del perfil. Sin embargo, es conveniente realizar una adimensionalización de estas ecuaciones con el fin de optimizar la eficiencia computacional del método. Por lo tanto, se procede definiendo las siguientes variables:

$$x = \frac{X}{c}, \qquad t = \frac{T}{T_0}, \qquad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho_{\infty}}, \qquad p = \frac{\bar{p}}{p_{\infty}}, \qquad u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}, \qquad v = \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}, \qquad S = \frac{\bar{S}}{c}$$

Donde *c* es la cuerda del perfil, ρ_{∞} es la densidad de la corriente incidente, U_{∞} es la velocidad de la corriente y T_0 se define como:

$$T_0 = \frac{c}{U_{\infty}}$$

Con esta adimensionalización, la expresión de la entalpía de remanso sería la siguiente:

$$\overline{h_0} = \frac{\gamma \rho_{\infty}}{(\gamma - 1)p_{\infty}} \frac{p}{\rho} + U_{\infty}^2 \frac{u^2 + v^2}{2}$$

Siendo $\frac{\gamma \rho_{\infty}}{p_{\infty}} = a_{\infty}^2$ y $p = \rho^{\gamma}$

$$h_0 = \frac{\overline{h_0}}{U_{\infty}^2} = \frac{\rho^{\gamma - 1}}{(\gamma - 1)M_{\infty}^2} + \frac{u^2 + v^2}{2}$$

El sistema de ecuaciones a resolver puede ser alterado, presentando finalmente la siguiente forma:

$$\frac{U_{\infty}}{c}\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho_{\infty}\rho \\ U_{\infty}u + U_{\infty}S_{x}v \\ vU_{\infty} \end{pmatrix} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial c} \begin{pmatrix} \rho_{\infty}U_{\infty}\rho u \\ U_{\infty}h_{0} - U_{\infty}^{2}S_{t}v \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial Y} \begin{pmatrix} \rho_{\infty}U_{\infty}\rho(v - S_{x}u - S_{t}) \\ 0 \\ U_{\infty}^{2}h_{0} - U_{\infty}^{2}S_{t}v \end{pmatrix} = 0$$

Simplificando términos, las ecuaciones finales son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x \nu \\ \nu \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ h_0 - S_t \nu \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho (\nu - S_x u - S_t) \\ 0 \\ h_0 - S_t \nu \end{pmatrix} = 0$$

La condición de contorno tangencial al cuerpo se expresaría:

$$v - S_x u - S_t = 0 \quad \rightarrow \quad Y = 0 \text{ para } x \in [0, c]$$

Los autores reseñan dos consideraciones a tener en cuenta como son incluir un mallado fino con un paso espacial aproximadamente de 0.02 y establecer las fronteras del espacio analizado lo suficientemente lejanas como para evitar perturbaciones del fluido. Para expresar las ecuaciones de forma compacta a fin de mejorar el manejo durante la aplicación del método numérico, se crean las siguientes variables:

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x v \\ v \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ h - S_t v \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \rho (v - S_x u - S_t) \\ 0 \\ h - S_t v \end{pmatrix}$$

Jameson y Chipman proponen inicialmente un método predictor-corrector basado en un esquema de diferencias finitas. Con este modelo, cada valor de W^{n+1} en cada intervalo de tiempo se obtiene mediante un paso que predice el valor sumado a varias iteraciones de un paso corrector (el desarrollo matemático es altamente complejo y no se expondrá en este trabajo).

Basta añadir que para modelar el efecto no estacionario, este método emplea una técnica nueva que consiste en aumentar progresivamente el espesor del perfil. De esta manera, la dependencia temporal de las derivadas espaciales y respecto al tiempo las hace variar hasta alcanzar un régimen estacionario en el que el espesor se mantiene constante.

Para un perfil cuyo espesork se rige por la siguiente ley temporal:

$$\kappa = 0.1 \left[10 - 15 \left(\frac{t}{15} \right) + 6 \left(\frac{t}{15} \right)^2 \right] \left(\frac{t}{15} \right)^3 \quad si \ 0 \le t \le 15$$

$$\kappa = 0.1 \left[10 - 15 \left(\frac{30 - t}{15} \right) + 6 \left(\frac{30 - t}{15} \right)^2 \right] \left(\frac{30 - t}{15} \right)^3 \quad si \ 15 \le t \le 30$$
$$\kappa = 0 \ si \ t \ge 30$$

Los resultados aportados por los autores en [7] se observan en la siguiente imagen:



Figura11: Resultados Jameson - Chipman. Ref. [7]

1.5 Estado del arte

1.5.1 Computational Fluid Dynamics (CFD)

Como ya se ha argumentado, la dificultad de la resolución de las ecuaciones del régimen transónico reside en su no linealidad, lo que las hace prácticamente irresolubles analíticamente (esta es la razón de lo que se consideraba como fallo en la teoría aerodinámica). La única forma de resolverlas es numéricamente, lo que constituye el objetivo primordial del CFD, cuyos métodos siempre han supuesto la vanguardia de la ciencia de la aerodinámica, aumentando progresivamente la precisión de las representaciones físicas obtenidas y aplicándose en geometrías de un nivel cada vez más complejo. Aunque no siempre se ha partido de las ecuaciones de Navier – Stokes, el rango de modelos matemáticos abordados se extiende desde las ecuaciones potenciales de pequeñas perturbaciones hasta la simulación numérica directa (DNS) de turbulencias.

La resolución de este sistema fue el foco de atención de la década de 1980 de los investigadores del CFD. Los avances en materia de computadores hacían posible la aparición de software para resolver estas ecuaciones en un tiempo lo suficientemente razonable como para ser considerado apropiado para el uso industrial. A pesar de estos

buenos augurios, los primeros métodos propuestos encontraban dificultades en las zonas cercanas a la onda de choque, en ambos lados de la misma, mostrando extrañas oscilaciones.

Durante esta época de investigación se había alcanzado la convicción entre muchos expertos de que los mallados numéricos que podían tener un potencial mayor eran aquellos que eran capaces de distinguir al fluido en varias zonas dependiendo de las velocidades, lo que motivaba el desarrollo de esquemas que se definían en función de las distintas características del flujo. El primer método que cumplía esta especificación fue el denominado *flux-vector splitting*, desarrollado por Steger y Warming.

Más tarde Harten desarrolló el concepto de esquemas *Total Variation Diminishing* (TVD) que ofreció una noción sobre el control de las oscilaciones en la onda de choque. Causó impacto la introducción de Roe del concepto de linealización local de las ecuaciones mediante jacobianos lo que aportó una visión interna de la naturaleza de las ondas de choque.

Uno de los trabajos a destacar en el avance del CFD es el método desarrollado por los investigadores Jameson, Schmidt y Turkel (Ref. [4]). Éstos desarrollaron un método para la resolución de las ecuaciones de Euler mediante el esquema de elementos finitos diseñado por MacCormack, combinado con una discretización del tiempo mediante el método de Runge-Kutta y con diferencias de segundo orden y en algunos casos de cuarto orden. Sin embargo, la clave de este trabajo era la introducción de un término disipativo que se definía en función de las propiedades locales del fluido y del gradiente de presiones.

A partir de 1985, algoritmos capaces de simular las condiciones de una onda de choque con gran precisión fueron rápidamente desarrollados por los investigadores hasta la base matemática pura de la dinámica de fluidos: las ecuaciones de Navier-Stokes (también conocidas en inglés como Reynolds-averaged Navier-Stokes, RANS).

Las dos últimas décadas han contemplado el surgimiento de complejo software de cálculo de mallado, simulación de flujos, recreación de configuraciones geométricas, resolución numérica y post-procesado de datos. Desde el punto de vista comercial, se han desarrollado códigos que simulan con bastante eficiencia y precisión complejos flujos tridimensionales. Programas como Fluent, Fastran, CFX, CFD++ han sido usados ampliamente con fines industriales.

1.5.2 Diseño óptimo de perfiles y alas en transónico

La teoría de control ha sido una de las herramientas fundamentales en la optimización de formas aerodinámicas, obteniendo resultados para problemas inversos y problemas directos minimizando la resistencia aerodinámica. El diseño de perfiles

transónicos es una ciencia que necesita de resultados muy precisos, ya que es muy sensible a modificaciones en la geometría, estando limitadas al espesor de desplazamiento de la capa límite. Los efectos viscosos también deben ser incorporados al análisis. Actualmente, este tipo de cálculos se realizan con el número de Mach como parámetro, optimizando el valor del coeficiente de resistencia en función del coeficiente de sustentación. En la siguiente imagen, se puede observar el proceso partiendo de perfiles ineficientes donde aparecen ondas de choque y tras la optimización, la nueva configuración evita la aparición de las discontinuidades:



Figura12: Optimización de perfiles para transónico. Ref. [2]

CAPÍTULO 2: MÉTODO DE LÍNEAS PARA IMPLEMENTACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

2.1 Introducción al Método de líneas

Tal como se ha explicado en la introducción, el objetivo de este proyecto es implementar las ecuaciones de Euler mediante métodos asequibles de fácil implementación que puedan ser utilizados en ordenadores comunes. Esto será posible en parte gracias al avance tecnológico de los computadores actuales así como al desarrollo de software computacional como MATLAB, que puede ser usado con fines académicos. El propósito de este apartado será el de desarrollar las posibles opciones para generar dicho cálculo.

Uno de los métodos más utilizados por los investigadores que buscan resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales ha sido el denominado Método de Líneas, explicado y desarrollado ampliamente en las referencias [15] y [16]. Concretamente, Schiesser en [16] hace una introducción breve pero muy clara sobre las bases de este procedimiento.

El objetivo del método de líneas no es otro que el de transformar un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, donde pueden hallarse varias variables independientes, en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde solo hay una variable independiente. En el caso que trata a este proyecto, habrá dos tipos de variables independientes fundamentales: espaciales (x, y) y temporales (t).

Para conseguirlo, y poniendo como ejemplo las variables que intervienen en el problema del régimen transónico, es necesario aproximar las derivadas espaciales por expresiones algebraicas que simulen estos operadores. Para ello, es imprescindible una discretización del espacio en una malla 2D donde las variables continuas x, ypasan a ser variables discretas x_i , y_j .

La derivada espacial de cualquier variable que defina una propiedad del fluido en estudio podrá ser aproximada en un punto concreto por una función que dependerá de los valores de dicha variable en otros puntos contiguos o cercanos al objetivo. Sin embargo, en el método de líneas empleado aquí la variable temporal no se verá discretizada, por lo que se obtendrá como resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias respecto al tiempo.

Dichas ecuaciones pueden resolverse por los métodos basados en los procedimientos desarrollados por Runge y Kutta, que son de una validez tal que se han podido implementar con gran éxito en software computacionales tales como Matlab obteniéndose funciones destinadas a dicho uso como las populares ODE45, ODE23 o ODE15s (estos dos últimos fueron diseñados con el propósito de tratar problemas "rígidos").

Schiesser describe en [16] varias aproximaciones posibles para las derivadas espaciales, fundamentales como ya se ha comprobado para la aplicación del método de líneas. En concreto, este autor explica en su libro dos fórmulas para derivadas primeras, como son los métodos de segundo orden y cuarto orden, y de la misma manera para derivadas segundas, afirmando que la eficiencia del método de líneas y de la fórmula escogida dependerá de la precisión de la discretización espacial. Los procedimientos para tal tarea se expondrán a continuación por medio de ejemplos prácticos donde se resolverán distintas ecuaciones diferenciales en cuya resolución se mostrarán las fórmulas a utilizar.

2.2 Ejemplos simples de resolución de E.D.P. mediante Método de <u>Líneas</u>

Este apartado tiene como propósito mostrar varios tipos de ecuaciones diferenciales parciales, propuestos en las referencias [15] y [16], en cuya resolución puede ser de utilidad el método de líneas para realizar una primera toma de contacto con el mismo y corroborar que es una opción viable para abordar las ecuaciones que definen el régimen transónico, así como para comprobar la viabilidad y la eficiencia de los distintos tipos de discretización que pueden establecerse.

2.2.1Ecuación de Troesch

El primer ejemplo que se mostrará será el de la ecuación diferencial de Troesch con condiciones de contorno en dos puntos, que forma parte del conjunto de ecuaciones diferenciales parciales conocidas como de tipo parabólico. Su expresión inicial es:

$$u_t = u_{xx} - n \sinh(nu)$$
, $0 < x < 1$

Y las condiciones de contorno:

$$u(x, 0) = x$$

 $u(0, t) = 0$; $u(1, t) = 1;$

Esta expresión es típica para probar métodos de resolución de ecuaciones con dos condiciones de contorno debido a las dificultades halladas para obtener una solución estable cerca de x = 1. De esta forma, será el primer ejemplo de este proyecto en el que se mostrará el potencial del método de líneas.

Para implementar dicho procedimiento, es necesario realizar un mallado de puntos a lo largo de la coordenada x. Para cada nodo, se establecerá una ecuación diferencial ordinaria respecto al tiempo (la misma presentada al principio del apartado) con las derivadas espaciales que aparecían originalmente transformadas en aproximaciones por diferencias finitas. Existen varias alternativas para recrear el valor correspondiente a la derivada en un punto. El más simple es el denominado de 2º orden con diferencias centradas. Con esta fórmula, la ecuación podría aproximarse por la siguiente expresión para $x \in (0,1)$:

$$u_t = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} - n \sinh(nu(x_i))$$

En el punto x = 0:

$$u_t(x_1) = \frac{u(x_1) - 2u(x_2) + u(x_3)}{\Delta x^2} - n \sinh(nu(x_1))$$

En el punto x = 1:

$$u_t(x_N) = \frac{u(x_{N-2}) - 2u(x_{N-1}) + u(x_N)}{\Delta x^2} - n \sinh(nu(x_N))$$

Si se codifica este método para un software computacional como Matlab, las representaciones gráficas obtenidas son las siguientes:



Figura 13: Troesch: Matlab (Método de Líneas) frente a Hyman. Ref. [15]

Se observa en la figura que la similitud entre los resultados obtenidos por discretización de 2° orden con diferencias centradas y usando ode15s apenas difieren de los obtenidos en [15] mediante otros métodos de discretización temporal. Esto supone un impulso para proseguir con la implementación del método de líneas para la resolución de ecuaciones diferenciales.

• Código MATLAB


```
Function [y0 yex]=Troesch
Clear all; close all; clc;
xi0=0; xiL=1; N=50; xiv=linspace(xi0,xiL,N); dxi=(xiL-xi0)/(N-1);
tinic=0; tend=0.05; Nt=10; dt=(tend-tinic)/(Nt-1);
y0(1:N,1)=xiv';
for i=1:(Nt-1),
t0=tinic+(i-1)*dt; tf=tinic+i*dt;
options=odeset('Jpattern',jpattern(N));
[tsol ysol]=ode15s(@troeschdif,[t0 tf], y0,options, N, dxi, xiv);
Nsol=length(tsol);
plot (xiv(1:N), ysol(Nsol,1:N),'r')
y0=ysol(Nsol,:)';
clear tsol ysol;
```

function ydot = troeschdif(t, y, N, dxi, xiv)
yxx(2:(N-1),1)=(y(1:(N-2),1)-2*y(2:(N-1),1)+y(3:N,1))/dxi^2;
yxx(1,1)=yxx(2,1);
yxx(N,1)=yxx(N-1,1);
n=10;
ydot(1,1)=0;
ydot(1,1)=0;
ydot(N,1)=0;
ydot(2:(N-1),1)=yxx(2:(N-1),1)-10*sinh(10*y(2:(N-1),1));

2.2.2 Ecuación de Advección

Dentro del conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, existe un tipo en concreto conocido como ecuaciones hiperbólicas, cuya resolución requiere una discretización espacial diferente para garantizar la convergencia del método numérico usado para su resolución.

Por ejemplo, considérese la ecuación que describe la convección de temperatura en un flujo unidireccional con velocidad uniforme v:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nu \frac{\partial T}{\partial x}$$

Que puede ser reescrita como:

$$T_t + vT_x = 0$$

Esta es la llamada ecuación de advección. Sus condiciones de contorno son:

$$T(0,t) = f(t)$$
; $T(x,0) = g(x)$

Para el caso que va a tratarse (claramente detallado en Schiesser, ref. [16]), se van a establecer las funciones f y g de la siguiente forma:

$$g(x) = 0$$
$$f(t) = 1, t > 0$$

Siendo los rangos de ambas variables:

$$x \in (0,1)$$
$$t \in (0,2)$$

Así pues, la solución exacta de este sistema implicaría que T(1,t) = 0 para t < 1 y T(1,t) = 1 para t > 1.

Esta ecuación podría resolverse numéricamente usando el método de líneas, aproximando el término T_x por diferenciación finita de 2º orden centrada:

$$T_t|_i = -\nu \frac{T(x_{i+1}, t) - T(x_{i-1}, t)}{2\Delta x_i}$$

Si se implementase en Matlab un código que resolviese la ecuación de advección sustituyendo los términos de derivadas espaciales por la aproximación descrita, siendo los parámetros del problema:

$$v = 1$$
$$N_x = 100$$
$$N_t = 50$$

El resultado obtenido sería el siguiente:



Figura 14: T (x_1 =1) con diferencias centradas de 2º orden

Otra posible opción para aproximar el término T_x es hacer uso de diferenciación de 4° orden, en cuyo caso la expresión a implementar sería la siguiente:

$$T_t|_i = -v \frac{2T(x_{i-2}, t) - 16T(x_{i-1}, t) + 16T(x_{i+1}, t) - 2T(x_{i+2}, t)}{24\Delta x_i}$$

Introduciendo esta aproximación en el código Matlab anteriormente citado, la resolución gráfica sería la que se muestra a continuación:



Figura 15: T (x_1 =1) con diferencias centradas de 4º orden

Se observan, tanto en la formulación de 2° orden como de 4° orden, oscilaciones numéricas cuando se produce la discontinuidad en la condición de contorno establecida en T(0, t). Por esta razón, es obvio que la formulación desarrollada se puede mejorar, y la mejor forma de hacer es razonando físicamente los resultados.

Se podría comprobar mediante la ecuación que los valores T(x, t) que se hallan a la izquierda del punto donde se estima la derivada por la aproximación son más influyentes que los que se encuentran a su derecha. Por esta razón, se rescata una idea que ya fue presentada anteriormente en este mismo proyecto cuando se hacía referencia al método propuesto por Murman y Cole para reflejar el régimen transónico. Aquella idea pionera fue la definición de las diferencias finitas *upwind* (aguas arriba), por la que las derivadas espaciales se aproximaban en función de la región en la que se hallase cada punto con el fin de establecer las zonas que podían surtir de información del fluido a dicho punto.

Este tipo de método puede ser muy útil para la resolución de ecuaciones diferenciales de tipo hiperbólico. El uso de diferencias finitas *upwind* tenía su base en la recepción en un punto de información proveniente tan solo de aguas arriba al hallarse el fluido en régimen supersónico. Esta misma herramienta se utiliza para resolver las ecuaciones de tipo hiperbólica, redefiniendo la diferencia finita de 2º orden mediante la aproximación *upwind* de dos puntos de primer orden

$$T_t|_i = -\nu \frac{T(x_i, t) - T(x_{i-1}, t)}{2\Delta x_i}$$

De esta forma, al implementar la diferencia *upwind* en el método de líneas para la resolución de la ecuación de advección, la solución obtenida adquiere una mayor aproximación a la resolución exacta:


Figura 16: T (x_1 =1) con diferencias upwind de 2º orden

Un hecho importante a tener en cuenta es uno de los efectos colaterales que derivan del uso de las diferencias *upwind*. Hacer uso de esta fórmula implica cometer un error en la aproximación de las derivadas espaciales mayor que el generado por las diferencias centradas. El aumento progresivo de este término se traduce en una disipación matemática por lo que el efecto producido es muy parecido al que se conseguiría usando la denominada viscosidad artificial, que ya se citó en el capítulo introductorio y que se detallará más adelante.

Otro aspecto a tener en cuenta sería el sentido que adquiere el flujo en la resolución del problema, definido por el signo de v. En el caso de que sea negativo, sería necesario redefinir las aproximaciones por fórmulas *downstream*, aunque ese efecto no será relevante para este ejemplo.

Por lo tanto, se tienen dos posibles efectos negativos al resolver numéricamente la advección: oscilación numérica y la disipación numérica. De esta manera, sería interesante hallar un método que combinase diferencias centradas y finitas de forma que se estableciese un equilibrio entre ambos errores donde cada uno fuera el mínimo posible. Es aquí donde interviene la fórmula desarrollada por Carver y Hinds, que aplicada a esta ecuación:

$$T_t|_i = -\nu \frac{-T(x_{i-3}, t) + 6T(x_{i-2}, t) - 18T(x_{i-1}, t) + 10T(x_i, t) + 3T(x_{i+1}, t)}{12\Delta x_i}$$

El resultado en este caso sería:



Figura 17: T (x_1 =1) con diferencias Carver y Hinds

Como puede comprobarse, los datos obtenidos se ajustan mucho mejor que ninguna de las otras fórmulas. Sin embargo, este efecto es inherentemente costoso a nivel de cálculo computacional, por lo que reduce la eficiencia del código a implementar. Será responsabilidad de este capítulo definir si es necesario hacer uso de este tipo de diferencias finitas o si es posible obtener resultados fiables mediante diferencias centradas.

• Código MATLAB

```
function Adveccion
clear all; close all; clc;
xi0=0; xiL=1; N=100; dxi=(xiL-xi0)/(N-1);
tinic=0; tend=2; Nt=50; dt=(tend-tinic)/(Nt-1);
t=linspace(tinic,tend,Nt-1);
y0(1:N,1)=0;
for i=1:(Nt-1),
 t0=tinic+(i-1)*dt; tf=tinic+i*dt;
[tsol ysol]=ode45(@advdif,[t0 tf], y0,[], N, dxi);
 Nsol=length(tsol);
 y0=ysol(Nsol,:)';
y0(1)=1;
T1t(i) = y0(N);
Clear tsol ysol;
end
```

```
function ydot = advdif(t, y, N, dxi)
v=1;
sp(1:N,1)=1;
sm(1:N,1)=0;
%% Formulacion 2° orden
yxp(1,1) = (-3*y(1,1)+4*y(2,1)-y(3,1))/2/dxi;
yxp(2:(N-1), 1) = (y(3:N, 1) - y(1:N-2, 1))/2/dxi;
yxp(N, 1) = (y(N, 1) - y(N-1, 1)) / 2/dxi;
yxm(1,1) = (y(2,1) - y(1,1)) / dxi;
yxm(2:N, 1) = (y(2:N, 1) - y(1:N-1, 1))/dxi;
%% Formulacion 4° orden
yxp(1,1) = (-50^{*}y(1,1) + 96^{*}y(2,1) - 72^{*}y(3,1) + 32^{*}y(4,1) - 6^{*}y(5,1)) / 24/dxi;
yxp(2,1) = (-6*y(1,1)-20*y(2,1)+36*y(3,1)-12*y(4,1)+2*y(5,1))/24/dxi;
yxp(3:(N-2),1) = (2*y(1:(N-4),1)-16*y(2:(N-3),1)-0*y(3:(N-4)))
2),1)+16*y(4:(N-1),1)-2*y(5:N,1))/24/dxi;
yxp(N-1, 1) = (-2*y(N-4, 1)+12*y(N-3, 1)-36*y(N-2, 1)+20*y(N-2))
1,1)+6*y(N,1))/24/dxi;
yxp(N, 1) = (6*y(N-4, 1) - 32*y(N-3, 1) + 72*y(N-2, 1) - 96*y(N-4, 1) - 96*y(N-
1,1)+50*y(N,1))/24/dxi;
yxm(1:N, 1) = 0;
%% Formulacion 4° orden - Carver y Hinds
yxp(1,1) = (-25*y(1,1)+48*y(2,1)-36*y(3,1)+16*y(4,1)-3*y(5,1))/12/dxi;
yxp(2,1) = (-3*y(1,1)-10*y(2,1)+18*y(3,1)-6*y(4,1)+1*y(5,1))/12/dxi;
yxp(3,1) = (y(1,1) - 8 + y(2,1) + 8 + y(4,1) - 1 + y(5,1)) / 12 / dxi;
yxp(4:(N-1),1) = (-y(1:(N-4),1)+6*y(2:(N-3),1)-18*y(3:(N-4)))
2), 1) + 10 * y (4: (N-1), 1) + 3 * y (5:N, 1)) / 12/dxi;
yxp(N, 1) = (3*y(N-4, 1) - 16*y(N-3, 1) + 36*y(N-2, 1) - 48*y(N-4)
1,1)+25*y(N,1))/12/dxi;
yxm(1:N, 1) = 0;
yx(1:N,1)=yxp.*sp+yxm.*sm;
ydot(1, 1) = 0;
ydot(2:N, 1) = -v * yx(2:N, 1);
```

2.2.3 Ecuación de Burgers

La ecuación de Burgers es otro ejemplo clásico de E.D.P. (tipo parabólico en este caso) de convección-difusión, cuya forma se asemeja o recuerda en cierta medida a las ecuaciones de Navier-Stokes (desprecia el término relativo a la presión) presentando comportamientos típicos de la Mecánica de Fluidos. Un aspecto importante a tener en cuenta de esta ecuación es su comportamiento frente a las posibles condiciones de contorno, siendo su solución muy sensible a estas. En el caso que trata a este proyecto, es interesante presentar unos términos que generen internamente una discontinuidad que simulen una situación similar a la aparición de una onda de choque.

La expresión de Burgers es la que se muestra a continuación:

$$u_t = -\frac{1}{2}(u^2)_x + vu_{xx}$$
, $v = 0.001$, $0 \le x \le 1$

Las condiciones de contorno que se impondrán para conseguir el efecto citado serán las siguientes:

$$y(x,0) = \frac{1}{1 + e^{x/2v}}$$
$$y(0,t) = \frac{1}{4ve^{-\frac{t}{4v}} \left(1 + e^{-\frac{t}{4v}}\right)^2} \quad ; \quad y(1,t) = \frac{1}{4ve^{\left(\frac{1-t}{2-4}\right)} \left(1 + e^{\left(\frac{1-t}{2-4}\right)}\right)^2}$$

Impuestas estas condiciones, la solución obtenida para la ecuación de Burgers sería la siguiente:

$$y(x,t) = \frac{1}{1 + e^{\frac{x-t}{2-4}}}$$

Para poder implementar el método de líneas en la resolución numérica de esta expresión, se hace uso de nuevo de la discretización espacial, tal como se ha visto en los anteriores ejemplos. En este caso, las opciones son varias:

· Discretización de 2º orden con diferencias centradas:

$$u_t = -u_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + v \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

· Discretización de 2º orden con diferencias upwind:

$$u_{t} = -u_{i} \frac{u_{i} - u_{i-1}}{2\Delta x} + v \frac{u_{i} - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^{2}}$$

• <u>Discretización de 4º orden con diferencias centradas (segunda derivada de</u> <u>2º orden):</u>

$$u_t = -u(x_i)\frac{2u(x_{i-2}) - 16u(x_{i-1}) + 16u(x_{i+1}) - 2u(x_{i+2})}{24\Delta x} + v\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

· <u>Discretización de 4º orden de Carver y Hinds (segunda derivada de 2º</u> <u>orden):</u>

$$u_t = -u(x_i)\frac{-3u(x_{i-1}) - 10u(x_i) + 18u(x_{i+1}) - 6u(x_{i+2}) + u(x_{i+3})}{12\Delta x} + v\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Como se comprueba, existen muchas posibilidades para aplicar el método de líneas. Sin embargo, es interesante analizar cuál es la alternativa que, siendo más simple y asequible, permite la mejor fiabilidad de los resultados. Por tanto, se procede a implementar dichas ecuaciones en Matlab para obtener una representación gráfica de la solución numérica, comparando las 4 fórmulas de discretización. Los resultados son los siguientes:



Figura 18: Burgers mediante diferencias centradas de 2º orden. v = 0.001





Figura 19: Burgers mediante diferencias upwind de 2º orden. v = 0.001





Figura 20: Burgers mediante diferencias centradas de 4º orden. v=0.001



Figura 21: Burgers medianteCarver y Hinds. v = 0.001

Como se ve, las diferencias entre las alternativas son prácticamente nulas. Esto evidencia que en una ecuación de tipo hiperbólica con una discontinuidad presente en su solución, es posible hacer uso de una discretización tan simple como una diferencia finita centrada de 2º orden.

Desde el punto de vista del coste computacional, esto supone una gran noticia, pues se reduce el tiempo necesario para el cálculo de la resolución sin perder calidad, aumentando la eficiencia. Este hecho definirá en gran medida la forma de diferenciación a adoptar al implementar el método de líneas para la resolución de las ecuaciones de la dinámica de fluidos.

• Código MATLAB

```
function Burgers
```

clear all; close all; clc;

global vis

vis=0.001;

xi0=0; xiL=1; N=1000; xiv=linspace(xi0,xiL,N); dxi=(xiL-xi0)/(N-1);

```
tinic=0; tend=1; Nt=100; dt=(tend-tinic)/(Nt-1);
```

y0(1:N,1)=1./(1+exp(xiv'/2/vis));

```
for i=1:(Nt-1),
t0=tinic+(i-1)*dt; tf=tinic+i*dt;
```

```
[tsol ysol]=ode15s(@Burgersdif,[t0 tf],y0,options, N, dxi);
Nsol=length(tsol);
yex(1:N)=1./(1+exp((xiv/2-tf/4)/vis));
```

```
y0=ysol(Nsol,:)';
clear tsol ysol;
```

end

```
function ydot = Burgersdif(t, y, N, dxi)
global vis
%
sp(1:N,1)=(1+sign(y(1:N,1)))/2;
sm(1:N,1)=(1-sign(y(1:N,1)))/2;
```

```
%% Derivadas segundas - Diferencias de 2° orden
yxx(2:(N-1), 1) = (y(1:(N-2), 1) - 2*y(2:(N-1), 1) + y(3:N, 1)) / dxi^2;
yxx(1,1) = yxx(2,1);
yxx(N, 1) = yxx(N-1, 1);
%% Diferencias 2° orden- Diferencias centradas
yxp(1,1) = (-3*y(1,1)+4*y(2,1)-y(3,1))/2/dxi;
yxp(2:(N-1), 1) = (y(3:N, 1) - y(1:N-2, 1))/2/dxi;
yxp(N, 1) = (y(N, 1) - y(N-1, 1)) / 2 / dxi;
%% Diferencias 2° orden- Diferencias upwind
yxm(1,1) = (-3*y(1,1)+4*y(2,1)-y(3,1))/2/dxi;
yxm(2,1) = (y(2,1) - y(1,1))/2/dxi;
yxm(2:N,1)=(y(2:N,1)-y(1:N-1,1))/dxi;
%% Diferencias 4° orden - Diferencias centradas
yxp(1,1) = (-50*y(1,1)+96*y(2,1)-72*y(3,1)+32*y(4,1)-6*y(5,1))/24/dxi;
yxp(2,1) = (-6*y(1,1)-20*y(2,1)+36*y(3,1)-12*y(4,1)+2*y(5,1))/24/dxi;
yxp(3:(N-2),1) = (2*y(1:(N-4),1)-16*y(2:(N-3),1)-0*y(3:(N-4),1)) = (2*y(1:(N-4),1)-16*y(2:(N-3),1)) = (2*y(1:(N-4),1)) = (2*y
2),1)+16*y(4:(N-1),1)-2*y(5:N,1))/24/dxi;
yxp(N-1, 1) = (-2*y(N-4, 1)+12*y(N-3, 1)-36*y(N-2, 1)+20*y(N-1))
1,1)+6*y(N,1))/24/dxi;
yxp(N, 1) = (6*y(N-4, 1) - 32*y(N-3, 1) + 72*y(N-2, 1) - 96*y(N-2)
1,1)+50*y(N,1))/24/dxi;
%% Diferencias 4° orden (Carver y Hinds) - Diferencias upwind
yxm(1,1) = (-25*y(1,1)+48*y(2,1)-36*y(3,1)+16*y(4,1)-3*y(5,1))/12/dxi;
yxm(2:(N-3), 1) = (-3*y(1:(N-4), 1) - 10*y(2:(N-3), 1) + 18*y(3:(N-2), 1) - 10*y(2:(N-3), 1) + 18*y(3:(N-2), 1) - 10*y(2:(N-3), 1) + 18*y(3:(N-2), 1) - 10*y(1:(N-4), 1) + 10*y(1:(N-4
6*y(4:(N-1),1)+y(5:N,1))/12/dxi;
yxm(N-2,1) = (y(N-4,1)-8*y(N-3,1)+0*y(N-2,1)-8*y(N-1,1)-y(N,1))/12/dxi;
yxm(N-1, 1) = (-1*y(N-4, 1)+6*y(N-3, 1)-18*y(N-2, 1)+10*y(N-2, 1))
1,1)+3*y(N,1))/12/dxi;
yxm(N, 1) = (3*y(N-4, 1) - 16*y(N-3, 1) + 36*y(N-2, 1) - 48*y(N-4))
1,1)+25*y(N,1))/12/dxi;
yx(1:N,1)=yxp.*sp+yxm.*sm;
% Ecuaciones
ydot(1,1)=1/4/vis*exp(-t/4/vis)/(1+exp(-t/4/vis))^2;
ydot(N,1)=1/4/vis*exp((1/2-t/4)/vis)/(1+exp((1/2-t/4)/vis))^2;
ydot(2:(N-1),1) = -y(2:(N-1),1) \cdot yx(2:(N-1),1) + vis * yxx(2:(N-1),1);
```

2.3 Resolución de ecuaciones de Euler mediante Método de Líneas

Presentados los ejemplos simples anteriores, sería interesante realizar una primera aproximación de las expresiones que definirían un posible estado de régimen transónico. De esta forma, se propone como objetivo resolver las ecuaciones de Euler para demostrar el potencial real del citado método a la hora de manejar expresiones con rasgos típicamente hiperbólicos (en lo que refiere a su definición como ecuación diferencial).

2.3.1 Tubo de choque (Introducción a viscosidad artificial)

El primero de los ejemplos que se presentarán en los que está involucrado el sistema de ecuaciones de Euler es el relativo a un tubo de choque, una cámara con dos zonas claramente separadas por una membrana impermeable, cada una conteniendo gas. En cada región, el gas posee unas características distintas, por lo que cuando se retira la membrana existe una evolución natural de los dos gases cuyas propiedades interactúan hasta alcanzar una situación estable. Tal evolución será la que se estudie a continuación, haciendo uso del método de líneas.

Una de las características más interesante de este problema (bien detallado en Hyman [15]) es el establecimiento de unas condiciones de contorno que se traducen que una discontinuidad de valores inicial a estudiar, lo cual supone un obstáculo a superar por la resolución numérica. De esta manera, si el método de líneas es viable para superar dicho reto se habrá dado un paso importante para poder abarcar en siguientes apartados las ecuaciones de Euler con condiciones iniciales más próximas a la realidad y sobre un perfil aerodinámico.

Hyman plantea las expresiones marcando como variables a obtener la densidad local ρ , la cantidad de movimiento $m(\rho u)$ y la presión de remanso E. Para obtener una notación más limpia de dichas ecuaciones, el autor de [15] aúna las variables a resolver en el vector W de forma que la expresión final queda:

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix} \rightarrow F(W) = uW + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{pmatrix}$$
$$W_t + F(W)_x = 0$$

Donde u es la velocidad local y p es la presión local que viene definida por la ecuación de estado:

$$p=(\gamma-1)(E-\frac{1}{2}\rho u^2)$$

En este punto, es importante destacar el uso de uno de los elementos que resultarán fundamentales para obtener los resultados deseados para el estudio del régimen transónico, como es la **viscosidad artificial**.

En anteriores apartados, se ha hecho referencia a este elemento cuyo propósito de la estabilización, es decir, suavizar las soluciones obtenidas por ecuaciones diferenciales que presenten oscilaciones demasiado fuertes o distorsiones que impidan observar la tendencia. Este elemento fue creado originalmente por Von Neumann y Richtmeyr (Ref. [24]) y también ha sido utilizado por otros investigadores importantes como MacCormack y Jameson.

En numerosos casos de EDP, el error numérico que se genera por usar métodos matemáticos de integración provoca este tipo de perturbaciones, por lo que la idea sobre la que se basa la viscosidad artificial es la de crear, por medio de un término disipativo artificial, un error en la solución que contrarreste las posibles oscilaciones que se produzcan en las inmediaciones de una discontinuidad física.

Este efecto ya ha aparecido en otros métodos presentados en esta memoria anteriormente, como el de Murman y Cole que con el uso de diferencias *upwind* incluye un error de truncado en la resolución numérica que al resolver las ecuaciones del régimen transónico, provoca que la solución pueda representar el comportamiento de una onda de choque.

Con este ejemplo, puede entenderse realmente la funcionalidad de la viscosidad artificial, siendo un concepto basado puramente en la adición de un error que simule espontáneamente lo que en la realidad sucede por la propia naturaleza de los fluidos. Por lo tanto, esta viscosidad puede ser definida mediante cualquier definición que se ajuste correcta a este propósito.

Una de las formas que puede adquirir este término es la mostrada por la ref. [15], incluyendo la disipación mediante la segunda derivada espacial de la variable a obtener:

Viscosidad artificial =
$$\mu_{art} = v \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

Donde φ representa a la variable en cuya ecuación diferencial ordinaria respecto al tiempo va a añadirse la viscosidad (en el caso del tubo de choque que se está tratando, serían ρ , m, E) y v es un parámetro que aporta mayor o menor en la resolución a este término.

Los valores del término v son fijados en función de las características del problema. Dado que es un término ficticio, dicho valor debe ser suficiente para que se consiga amortiguar las inestabilidades en la solución pero sin alterarla significativamente, evitando que se produzca la discontinuidad.

Como ya se ha comentado, en la literatura existente diversos autores han hecho uso de este parámetro. [15] define su valor típicamente entre 0.005 y 0.01 para conseguir buenos resultados. Por otro lado, referencias como Jameson [7] establecen su valor en 0.25, aunque esto se debe a que la definición de la viscosidad artificial en sí misma en distinta a la presentada en esta misma página. La definición basada en la segunda derivada tiene la particularidad de que se hace especialmente relevante en las zonas cercanas a la onda de choque, donde se hace necesaria su función. En regiones donde la solución no varía tan bruscamente y donde no hay presencia de oscilaciones, este término pierde valor y no afecta a la resolución.

Por otra parte, computacionalmente esta definición es muy positiva puesto que podría ofrecer resultados de alta fiabilidad sin lastrar el coste de tiempo necesario para obtener los cálculos. De esta manera, se convierte en una seria opción para ser incluida en el método de resolución del régimen transónico, posibilidad que será estudiada mediante el caso del tubo de choque.

Así pues, explicada la función de la viscosidad artificial, se puede proseguir con el desarrollo propuesto por Hyman. Partiendo de la última expresión escrita, este término se incluye en la ecuación de la siguiente forma:

$$W_t + F(W)_x = \nu W_{xx}$$

Por otra parte, en lo que concierne a las condiciones iniciales para t = 0, Hyman propone introducir al principio una discontinuidad física de la siguiente forma:

Para *x* < 0.75:

$$\rho(x.0) = 1$$

 $m(x,0) = 0$
 $E(x,0) = 1.5$

Para x > 0.75:

$$\rho(x.0) = 0.125$$
$$m(x,0) = 0$$
$$E(x,0) = 0.15$$

Así pues, la representación gráfica partiendo de esta configuración inicial es la siguiente:



Figura 22: Condiciones iniciales en tubo de choque. Ref. [15]

Para poder abordar este sistema, Hyman hace uso de una discretización espacial con derivadas de 4° orden y emplea el método de Adams – Moulton para la integración en el tiempo. Sin embargo, en este proyecto se hará uso del método Runge-Kutta implementado en Matlab (ode45 y ode15s en concreto) para la resolución temporal y se recurrirá a fórmulas de 2° orden y 4° orden con diferencias centradas (se busca comprobar que no es necesario incluir diferencias *upwind*, puesto que estas representan mayor coste desde el punto de vista de tiempo de cálculo, debido al error que incluyen en la resolución, que por otra parte ya ha sido introducido mediante la viscosidad artificial)

Así pues, la ecuación discretizada según la fórmula de 2º orden con diferencias finitas centradas del método de líneas presentaría la siguiente forma:

$$W_t = v \frac{W(x_{i+1}) - 2W(x_i) + W(x_{i-1})}{\Delta x^2} - \frac{F(W(x_{i+1})) - F(W(x_{i-1}))}{2\Delta x}$$

Con una diferenciación finita de 4° orden según la fórmula de Carver y Hinds con diferencias centradas (siendo las derivadas segundas de 2° orden por mayor simplicidad), la expresión sería (se obviarán las expresiones para i = 1,2,3,N. expresadas en Apéndice A, Apartado A.3):

$$W_{t})_{i} = v \frac{W(x_{i+1}) - 2W(x_{i}) + W(x_{i-1})}{\Delta x^{2}} - \frac{-F(W(x_{i-3})) + 6F(W(x_{i-2})) - 18F(W(x_{i-1})) + 10F(W(x_{i})) + 3F(W(x_{i+1}))}{12\Delta x}$$

Cabe reseñar los valores que se le han dado a algunos parámetros básicos en la implementación numérica como son el paso de discretización espacial y la viscosidad. Este último es de suma importancia, pues aporta un elemento estabilizador clave para obtener unos resultados que posean cierta continuidad.

También es importante definir correctamente la distancia entre los puntos que definen la dirección en x, pues un número bajo dará una vaga aproximación mientras que un valor alto provocará una inestabilidad y menor eficiencia de la resolución temporal. Los resultados que se obtienen mediante esta aproximación son los siguientes:



Figura 23: Tubo de choque: Matlab frente a Hyman. t=0.3. Ref. [15]



Figura 24: Tubo de choque: Matlab frente a Hyman. t=0.6. Ref. [15]

A continuación se muestra la diferenciación finita de 4º orden. Sin embargo, para este caso es necesario añadir mayor viscosidad artificial para poder mantener la estabilidad de la resolución, por lo que añade una distorsión demasiado grande (suaviza demasiado la solución) como para poder considerar la solución con una exactitud aceptable, además de aumentar el coste operacional del procesamiento del código



Figura 25: Tubo de choque: Matlab frente a Hyman – Dif. 4º orden. t=0.3. Ref. [15]

Hechos estos comentarios, las conclusiones de este apartado definen las ventajas de usar las diferencias finitas centradas de segundo orden por su relación entre la calidad de los resultados y el coste operacional; la viscosidad artificial para la estabilización de la resolución; y la adimensionalización de las variables.

• Código MATLAB


```
function Euler
clear all; close all; clc;
global vis
global gamma
vis=0.009;
gamma=1.4;
xi0=0; xiL=2; N=50; xiv=linspace(xi0,xiL,N); dxi=(xiL-xi0)/(N-1);
tinic=0; tend=2; Nt=50; dt=(tend-tinic)/(Nt-1);
y0=zeros(3*N,1);
for i=1:N
if xiv(i)<0.75
y0(i,1)=1;
else
v0(i, 1) = 0.125;
end
end
for i = (N+1) : (2*N)
y0(i, 1) = 0;
```

```
end
for i=(2*N+1):3*N
if xiv(i-2*N)<0.75
y0(i, 1) = 1.5;
else
y0(i, 1) = 0.15;
end
end
for i=1:(Nt-1),
t0=tinic+(i-1)*dt; tf=tinic+i*dt;
options=odeset('Jpattern',jpattern(N));
[tsol ysol]=ode45(@Eulerdif,[t0 tf],y0,options,N,dxi,xiv);
Nsol=length(tsol);
u=ysol(Nsol,(N+1):2*N)./ysol(Nsol,1:N);
v0=ysol(Nsol,:)';
clear tsol ysol;
end
function ydot = Eulerdif(t, y, N, dxi, xiv)
global vis
global gamma
m1=N+1; mf=2*N;
E1=2*N+1; Ef=3*N;
u(1:N,1)=y(m1:mf,1)./y(1:N,1);
p(1:N,1)=(gamma-1)*(y(E1:Ef,1)-0.5*y(m1:mf,1).*u(1:N,1));
F(1:N,1) = y(m1:mf,1);
F(m1:mf,1)=u(1:N,1).*y(m1:mf,1)+p(1:N,1);
F(E1:Ef,1)=u(1:N,1).*y(E1:Ef,1)+p(1:N,1).*u(1:N,1);
%% Diferencias segundas
yxx(2:(N-1), 1) = (y(1:(N-2), 1) - 2*y(2:(N-1), 1) + y(3:N, 1)) / (dxi^2);
yxx(1, 1) = yxx(2, 1);
yxx(N, 1) = yxx(N-1, 1);
yxx((N+2):(2*N-1),1) = (y(N+1:(2*N-2),1)-2*y(N+2:(2*N-2)))
1), 1) + y(N+3:2*N, 1)) / (dxi^2);
yxx(N+1, 1) = yxx(N+2, 1);
yxx(2*N,1) = yxx(2*N-1,1);
yxx(2*N+2:(3*N-1), 1) = (y(2*N+1:(3*N-2), 1) - 2*y(2*N+2:(3*N-1)) - 2*y(2*N+2)) + 2*y(2*N+2) +
1), 1) +y (2*N+3:3*N, 1)) / (dxi^2);
yxx(2*N+1,1) = yxx(2*N+2,1);
yxx(3*N,1) = yxx(3*N-1,1);
Fxp=zeros(3*N,1); Fxm=zeros(3*N,1);
```

```
for j=1:3
if j==1
        ind1=1; indf=N;
else if j==2
ind1=m1; indf=mf;
else if j==3
ind1=E1; indf=Ef;
end
end
end
Fxp(ind1,1)=(-3*F(ind1,1)+4*F(ind1+1,1)-F(ind1+2,1))/2/dxi;
Fxp((ind1+1):(indf-1),1)=(F(ind1+2:(indf),1)-F(ind1:indf-2,1))/2/dxi;
Fxp(indf, 1) = (F(indf, 1) - F(indf-1, 1)) / 2/dxi;
Fxp(ind1,1)=(-3*F(ind1,1)+4*F(ind1+1,1)-F(ind1+2,1))/2/dxi;
Fxm(ind1+1,1) = (F(ind1+1,1) - F(ind1,1))/2/dxi;
Fxm(ind1+2:(indf),1)=(F(ind1+2:(indf),1)-F(ind1:indf-2,1))/2/dxi;
end
Fx(1:3*N,1)=Fxp.*sp+Fxm.*sm;
ydot=zeros(3*N,1);
for j=1:3
if j==1
        ind1=1; indf=N;
else if j==2
ind1=m1; indf=mf;
else if j==3
ind1=E1; indf=Ef;
end
end
end
ydot(ind1,1)=vis*yxx(ind1,1)-Fx(ind1,1);
ydot(indf,1)=vis*yxx(indf,1)-Fx(indf,1);
ydot(ind1+1:(indf-1),1)=vis*yxx(ind1+1:(indf-1),1)-Fx(ind1+1:(indf-
1),1);
```

```
End
```

2.3.2 Tobera convergente-divergente

Antes de proceder a analizar perfiles en régimen transónico, sería de utilidad completar el desarrollo realizado en el apartado anterior con las ecuaciones de Euler planteando un problema muy conocido en la dinámica de fluidos como es la situación que se genera en una tobera convergente – divergente. En este caso, la forma de la

sección del conducto por el que se desplaza el fluido provoca la aparición natural de una onda de choque, sin necesidad de forzar la discontinuidad como ocurría en el ejemplo de Hyman [15].

Este hecho puede suponer la prueba que demuestre que tanto el método de líneas como los procedimientos *ode* implementados en Matlab son válidos para captar una onda de choque de forma precisa y que, por lo tanto, se podrán emplear para analizar el régimen transónico sobre un perfil. Según Anderson (ref. [1]), las ecuaciones que definen el fluido que transcurre por la tobera citada son las siguientes:

• Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x} - \rho V \frac{\partial (\ln A)}{\partial x} - V \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

• Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

• Ecuación de energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -V \frac{\partial T}{\partial x} - (\gamma - 1)T \left(\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial (\ln A)}{\partial x}\right)$$

Aplicando el método de líneas, las expresiones se pueden transformar numéricamente mediante diferencias finitas centradas de la siguiente forma:

• Ecuación de continuidad:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{i}^{t} = -\rho_{i}^{t} \frac{V_{i+1}^{t} - V_{i-1}^{t}}{\Delta x} - \rho_{i}^{t} V_{i}^{t} \frac{\ln A_{i+1} - \ln A_{i-1}}{\Delta x} - V_{i}^{t} \frac{\rho_{i+1}^{t} - \rho_{i-1}^{t}}{\Delta x}$$

• Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{i}^{t} = -V_{i}^{t} \frac{V_{i+1}^{t} - V_{i-1}^{t}}{\Delta x} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_{i+1}^{t} - T_{i-1}^{t}}{\Delta x} + \frac{T_{i}^{t}}{\rho_{i}^{t}} \frac{\rho_{i+1}^{t} - \rho_{i-1}^{t}}{\Delta x}\right)$$

• Ecuación de energía:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i}^{t} = -V_{i}^{t} \frac{T_{i+1}^{t} - T_{i-1}^{t}}{\Delta x} - (\gamma - 1)T_{i}^{t} \left(\frac{V_{i+1}^{t} - V_{i-1}^{t}}{\Delta x} + V_{i}^{t} \frac{\ln A_{i+1} - \ln A_{i-1}}{\Delta x}\right)$$

Como se puede observar, el método de líneas simplifica enormemente la implementación numérica de este sistema. Los resultados conseguidos comparados por los aportados por Anderson se visualizan en la siguiente gráfica (teniendo en cuenta que las condiciones de contorno fijadas en la implementación en Matlab son distintas a las utilizadas por [1]):



Figura 26: Tobera convergente divergente: Matlab frente Anderson. Ref. [1]

Se comprueba que la tendencia en ambos casos es similar, evidenciando un salto en las propiedades del fluido tras pasar por el área crítica. De esta manera, se muestra finalmente que el método de líneas es viable para la resolución de ecuaciones que supongan una discontinuidad física, habiendo sido posible previamente la implementación de este método en múltiples ejemplos.

• Código MATLAB

```
function Nozzle
%
clear all; close all; clc;
%
global gamma
gamma=1.4;
%
xi0=0; xiL=3; N=100; xiv=linspace(xi0,xiL,N); dxi=(xiL-xi0)/(N-1);
%
tinic=0; tend=2; Nt=100; dt=(tend-tinic)/(Nt-1);
%
A=1+2.2*(xiv-1.5).^2;
xiv_N=xiL+dxi;
A(N+1)=1+2.2*(xiv_N-1.5)^2;
rho0=1-0.3146*xiv;
T0=1-0.2314*xiv;
V0=(0.1+1.09*xiv).*T0.^(0.5);
```

```
a0=sqrt(1.4*282*T0);
y0(1:N)=rho0;
y0((N+1):(2*N))=V0;
y0((2*N+1):(3*N))=T0;
for i=1:(Nt-1),
t0=tinic+(i-1)*dt; tf=tinic+i*dt;
tsol ysol]=ode15s(@Nozzledif,[t0 tf],y0,[],N,dxi,xiv,A);
Nsol=length(tsol);
M=1/(sqrt(1.4*286.9))*(V./sqrt(T));
y0=ysol(Nsol,:)';
clear tsol ysol;
end
function ydot = Nozzledif(t, y, N, dxi, xiv, A)
global gamma
V1=N+1; Vf=2*N;
T1=2*N+1; Tf=3*N;
rho(1:N,1)=y(1:N,1);
V(1:N,1)=y(V1:Vf,1);
T(1:N,1)=y(T1:Tf,1);
%Mlocal=1/(sqrt(1.4*282))*(V./sqrt(T));
%% Diferencias finitas centradas
rho x(1,1)=(-3*rho(1,1)+4*rho(2,1)-rho(3,1))/2/dxi;
rho x(2:N-1,1)=(rho(3:N,1)-rho(1:N-2,1))/2/dxi;
rho x(N, 1) = (3*rho(N-2, 1) - 4*rho(N-1, 1) + rho(N, 1))/2/dxi;
V \times (1,1) = (-3*V(1,1)+4*V(2,1)-V(3,1))/2/dxi;
V \times (2:N-1,1) = (V(3:N,1) - V(1:N-2,1))/2/dxi;
V \times (N, 1) = (3*V(N-2, 1) - 4*V(N-1, 1) + V(N, 1)) / 2/dxi;
T \times (1, 1) = (-3 T (1, 1) + 4 T (2, 1) - T (3, 1)) / 2 / dxi;
T \times (2:N-1,1) = (T(3:N,1) - T(1:N-2,1))/2/dxi;
T \times (N, 1) = (3 T (N-2, 1) - 4 T (N-1, 1) + T (N, 1)) / 2 / dxi;
rhodot(1, 1) = 0;
Vdot(1, 1) = 2 * Vdot(2, 1) - Vdot(3, 1);
Tdot(1, 1) = 0;
for i=2:(N-1)
dlnA=(log(A(i+1))-log(A(i-1)))/2/dxi;
rhodot(i,1)=-rho(i,1)*Vx(i,1)-rho(i,1)*V(i,1)*dlnA-V(i,1)*rhox(i,1);
```

```
Vdot(i,1)=-V(i,1)*Vx(i,1)-
(1/gamma)*(Tx(i,1)+rhox(i,1)*T(i,1)/rho(i,1));
Tdot(i,1)=-V(i,1)*Tx(i,1)-(gamma-1)*T(i,1)*(Vx(i,1)+V(i,1)*dlnA);
end
rhodot(N,1)=2*rhodot(N-1,1)-rhodot(N-2,1);
Vdot(N,1)=2*Vdot(N-1,1)-Vdot(N-2,1);
Tdot(N,1)=2*Tdot(N-1,1)-Tdot(N-2,1);
ydot(1:N,1)=rhodot;
ydot(V1:Vf,1)=Vdot;
ydot(V1:Vf,1)=Tdot;
end
```

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE RÉGIMEN TRANSÓNICO SOBRE PERFILES

3.1 Revisión del procedimiento Jameson – Chipman

Tras los resultados obtenidos en el apartado anterior, se comprueba que tanto el método de líneas como los procedimientos de Runge-Kutta tipo *ode45* o *ode15s* implementados en Matlab pueden ser útiles para intentar resolver las ecuaciones de dinámica de fluidos con el fin de hallar la discontinuidad típica que se genera entre las zonas supersónica y subsónica.

Llegado este punto, el siguiente paso lógico es empezar a tratar las ecuaciones en una situación real: estableciendo un perfil (cuya forma definirá la condición de contorno de la velocidad vertical local)y unas condiciones iniciales realistas.

Para llegar a este objetivo, se puede hacer uso de los distintos y variados planteamientos que los investigadores han ido desarrollando con el paso de los años, como bien se pudo comprobar en el capítulo de introducción histórica del régimen transónico. Sin embargo, el artículo más interesante en lo que refiere a este cálculo para el objetivo de este proyecto, la referencia [7] escrita por Jameson y Chipman.

La razón de esta elección se debe al potencial que este desarrollo ofrece puesto que permite realizar un cambio de sistema de coordenadas en el que se define una coordenada tangente a la superficie del perfil, lo que simplifica la aplicación de las condiciones de contorno.

A pesar de esto, no se procederá a utilizar el método predictor-corrector que se propone en [7] puesto que se considera demasiado complejo y farragoso para la finalidad a la que se destina este proyecto, siendo menos eficiente que otros métodos más recientes. Como se vio en el apartado 1.4.2, se establece el sistema de a resolver a partir de las ecuaciones de Euler de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x v \\ v \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ h - S_t v \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho (v - S_x u - S_t) \\ 0 \\ h - S_t v \end{pmatrix} = 0$$
$$v = S_x u + S_t \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ para } x \in [0,1]$$

3.2 Primera aproximación: Discretización en x

3.2.1 Desarrollo

Para poder abordar las ecuaciones planteadas mediante una resolución numérica resulta interesante comenzar por un caso simple con el que empezar a corroborar la viabilidad del método que se implementará. Una vez que se obtengan unos resultados que sin ser exactos, muestren un comportamiento cualitativo fiable se procederá a aumentar gradualmente la dificultad del caso a resolver hasta alcanzar el sistema de ecuaciones presentado.

La primera y más inmediata simplificación supone despreciar los términos correspondientes a las derivadas en la dirección y considerando una sola línea en dicha dimensión que corresponderá con la superficie del perfil. Así pues, se resolverá un problema unidimensional.

Esto tiene una consecuencia importante en lo que refiere a las variables involucradas en el problema: la velocidad vertical local pasa a ser conocida mediante la velocidad horizontal local y la definición de la condición de contorno tangente. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones se reduce a dos expresiones con dos incógnitas: $\rho y u$.

Por otro lado, también se simplifica la sección del perfil suponiéndola constante respecto al tiempo, por lo que los términos S_t de las expresiones se suponen igual a 0. Con todo lo expuesto, el sistema a resolver queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x \nu \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ h \end{pmatrix} = 0$$

Siendo la condición de contorno (que definirá la variable v) en este caso:

$$v = S_x u \rightarrow y = 0 para x \in [0, c]$$

Sustituyendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u(1+S_x^2) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ h \end{pmatrix} = 0$$

Las ecuaciones quedarían finalmente:

Manuel Pérez Rodríguez

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho u}{\partial x} \\ \frac{1}{1 + S_x^2} \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Expresadas de forma discretizada con la fórmula de 2º orden y diferencias finitas centradas, presentarían la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = -\left(\frac{\frac{(\rho u)_{i+1} - (\rho u)_{i-1}}{2\Delta x}}{\frac{1}{1 + S_x^2} \frac{(h)_{i+1} - (h)_{i-1}}{2\Delta x}} \right)$$

El mallado que se utilizará en este caso será una línea:



Figura 27: Mallado 1º aproximación

Por otra parte, la superficie sobre la que se desplazará el fluido será de tipo parabólica y vendrá dada por la expresión:

$$S(x) = 2\kappa(x - x^2)$$

Donde κ representa el espesor de la sección. Su pendiente en cada punto viene dada por:

$$S_x(x) = 2\kappa(1-2x)$$

Para obtener los valores de la presión y el Mach local se ha procedido mediante las siguientes expresiones:

$$p = \rho^{\gamma}$$

$$M_{local} = \frac{u_{adim}}{a_{adim}} = \frac{u}{\bar{a}/U_{\infty}} = \frac{u}{\frac{1}{U_{\infty}}\sqrt{\frac{\gamma p p_{\infty}}{\rho \rho_{\infty}}}} = \frac{u}{\frac{a_{\infty}}{U_{\infty}}\sqrt{\frac{p}{\rho}}} = \frac{u}{\frac{1}{M_{\infty}}\sqrt{\frac{p}{\rho}}}$$

El código implementado en Matlab llamado *Jameson_firstaproach.m* (se muestra al final del apartado) para representar esta aproximación será la base sobre la que se trabajará para aumentar progresivamente la complejidad. En el mismo, se definirán los parámetros que caracterizan el problema (mallado, espesor de perfil, Mach, etc.) así como las condiciones iniciales que se incluirán mediante un vector columnay₀:

$$\rho(x \in [0,1], 0) = 1$$

$$u(x \in [0,1], 0) = 1$$

$$M_{\infty} = 0.85$$

La condición establece las propiedades correspondientes a la corriente imperturbada como valores iniciales.

Para establecer las ecuaciones relativas a la línea $x_1 = 0$, se emplea una diferencia finita entre el valor correspondiente a la línea x_2 y el valor de las propiedades de la corriente incidente. Para realizar esta operación, se establece un punto imaginario a una distancia $\frac{x}{c} = \Delta x$ por delante del perfil, donde se asignan los parámetros de la corriente. Por lo tanto, la aproximación para las ecuaciones de x_1 se realizaría de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = -\left(\begin{array}{c} \frac{(\rho u)_2 - (\rho u)_\infty}{(2\Delta x)} \\ \frac{1}{(1+S_x^2)} \frac{(h)_2 - (h)_\infty}{(2\Delta x)} \end{array} \right)$$
1, $u_o = 1$, $h_o = \frac{1}{(\gamma - 1)M_\infty^2} + \frac{1}{2}$

El programa *Jamesondif* implementa las ecuaciones a resolver en un vector columna denominado *ydot*. Los resultados más relevantes a mostrar son el número de Mach local así como el coeficiente de presiones en cada punto, modelado en este código de acuerdo a la siguiente expresión:

$$C_p = \frac{p}{p_{\infty}}$$

Estos datos, representados gráficamente y obtenidos mediante el código Matlab, son los siguientes:

Siendo $\rho =$

3.2.2 Resultados



Figura 28: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.3



Figura 29: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.4



Figura 30: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.43

Se puede observar en las figuras 28,29 y 30 una clara discontinuidad de presiones y velocidades que bien pueden ser interpretadas como una onda de choque en la zona del borde de ataque ($x \sim 0.25 - 0.5$), donde el Mach local asciende por encima de 1 y desciende súbitamente hasta valores subsónicos, todo ello en el interior de la región que marca el perfil, lo cual coincide con la definición de régimen transónico.

A medida que el espesor aumenta, como es lógico, la onda de choque es más intensa provocando una discontinuidad mayor en todas las propiedades del fluido. Esto también se traduce, sin la presencia de viscosidad artificial, en un aumento de las inestabilidades en el cálculo numérico. Sin embargo, en los casos estudiados, dicho fenómeno solo se aprecia para un espesor $\bar{\kappa} = 0.4$, (siendo este un valor bastante razonable) y aun así los resultados son igualmente positivos puesto que reflejan un carácter apropiado tanto cualitativa como cuantitativamente.

3.3.3 Código MATLAB

```
Function Jameson firstaproach
clear all; close all; clc;
global vis
global gamma
gamma=1.4;
%% Mallado
xi0=0; xiL=1; N=100; xiv=linspace(xi0,xiL,N); dxi=(xiL-xi0)/(N-1);
tinic=0; tend=1; Nt=50; dt=(tend-tinic)/(Nt-1);
%% Perfil
t=0.4;
           % Espesor del perfil
S x=2*t*(1-2*xiv); % Función que define la pendiente en cada punto de
la superficie
%% Valores iniciales adimensionales
Uoo=1; % Valor de la velocidad incidente adimensional
ro0=1; % Valor inicial de la densidad adimensionalizada con la
densidad de la corriente incidente
%% Condición inicial y0 que incluye densidad inicial en cada punto y
Mach local
y0(1:2*N,1)=0;
for i=1:N
```

```
y0(i,1)=ro0;
end
2
for i = (N+1) : (2*N)
y0(i,1)=Uoo;
end
for i=1:(Nt-1),
t0=tinic+(i-1)*dt; tf=tinic+i*dt;
[tsol ysol]=ode15s(@Jamesondif,[t0 tf],y0,[],N,dxi,xiv,S x, M0);
Nsol=length(tsol);
ro=ysol(Nsol,1:N);
u=ysol(Nsol,(N+1):2*N);
Moo=0.85;
p=(ro.^(gamma)); %presion adimensional
usol=u*Moo./sqrt(p./ro);
plot(xiv(1:N),u,'g','Linewidth',2)
title('Mach')
xlabel('x/c','Fontsize',13)
ylabel('Mach local', 'Fontsize',13)
grid on
hold off
y0=ysol(Nsol,:)';
clear tsol ysol;
end
function ydot = Jamesondif(t, y, N, dxi, xiv, S_x, M0)
global gamma
ro1=1; rof=N;
u1=N+1; uf=2*N;
ro=y(ro1:rof, 1);
u=y(u1:uf,1);
rou(1:N,1)=ro.*u;
h(1:N,1)=0;
for j=1:N
h(j,1)=0.5*(1+S x(j)^2).*u(j)^2+(ro(j)^(gamma-1))/((gamma-1)*(Moo^2));
% Entalpia
h(j,1)=0.5*(1+S x(j)^2).*Uoo^2+1/((gamma-1)*(Moo^2));
end
%% Derivada primera
roux(1,1)=(rou(2,1)-1)/(2*dxi);%Diferencia respecto a valor incidente
```

```
roux(2:(N-1),1)=(rou(3:N,1)-rou(1:N-2,1))/2/dxi;
roux(N,1)=(rou(N,1)-rou(N-1,1))/2/dxi;
hx(1,1)=(h(2,1)-h0)/(2*dxi);
hx(2:(N-1),1)=(h(3:N,1)-h(1:N-2,1))/2/dxi;
hx(N,1)=(h(N,1)-h(N-1,1))/2/dxi;
%% Ecuaciones
rodot(1,1)=0;% Condición impuesta para estabilizar resolución
rodot(N,1)=-roux(N,1);
rodot(2:(N-1),1)=-roux(2:(N-1),1);
for k=1:N
udot(k,1)=-hx(k,1)/(1+S_x(k)^2);
end
ydot(ro1:rof,1)=rodot;
ydot(u1:uf,1)=udot;
```

3.4 Segunda aproximación: Variación temporal de la sección del perfil

3.4.1 Desarrollo

Definida la primera aproximación al planteamiento de [7], el siguiente paso será considerar los aspectos relativos a la sección del perfil. En su artículo, Jameson y Chipman describen un proceso no estacionario en el que simulan un perfil con espesor variante en el tiempo, partiendo de un valor nulo, alcanzando un máximo y volviendo a ser nulo (aumentando y disminuyendo el espesor).

De esta forma, el término S_t no es nulo. En este proyecto se realizará un proceso parecido siendo la forma del perfil parabólico variante, a pesar de que [7] utiliza una función bicircular (más compleja y con menos interés). Sin embargo, la ley que define el espesor en el tiempo impuesta por Jameson y Chipman será de utilidad para poder obtener ciertos resultados no estacionarios, aunque se redefinirá de acuerdo al valor adimensional $\tau = t/30$.



Figura 31: Ley de espesor Jameson-Chipman. Ref. [7]

Dicha ley será la que se muestra a continuación:

 $Si \ 0 < \tau < 0.5: \kappa = 80TH_{max}\tau^3 - 240TH_{max}\tau^4 + 192TH_{max}\tau^5$ Si 0. 5 < \tau < 1: \kappa = 80TH_{max} (1 - \tau)^3 - 240TH_{max} (1 - \tau)^4 + 192TH_{max} (1 - \tau)^5 Si \tau > 1: \kappa = 0

De esta forma, el término S_t se caracterizará por la derivada de la ley del espesor:

$$\begin{aligned} Si \ \mathbf{0} < \tau < 0.5: \ \kappa &= 240 T H_{max} \tau^2 - 960 T H_{max} \tau^3 + 960 T H_{max} \tau^4 \\ Si \ \mathbf{0}. \ \mathbf{5} < \tau < 1: \ \kappa &= -240 T H_{max} \ (1 - \tau)^2 + 960 T H_{max} \ (1 - \tau)^3 - 960 T H_{max} \ (1 - \tau)^4 \\ Si \ \mathbf{\tau} > 1: \ \kappa &= 0 \end{aligned}$$

Siendo S_t :

$$S_t = 2\kappa_t (x - x^2)$$

Partiendo de las ecuaciones adimensionalizadas del apartado anterior, si se incluyen los términos relativos a S_t , las nuevas expresiones son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x v \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ h + v S_t \end{pmatrix}$$

Siendo en este caso la condición de contorno:

$$v = S_x u + S_t \rightarrow y = 0 \ para \ x \in [0,1]$$

Manipulando las expresiones:

Manuel Pérez Rodríguez

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x(S_x u + S_t) \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ h + \nu S_t \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x^2 u + S_x S_t \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ h + v S_t \end{pmatrix}$$

La expresión $\frac{\partial}{\partial t}(u + S_x^2 u + S_x S_t)$ deberá desarrollarse:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+S_x^2u+S_xS_t) = \frac{\partial}{\partial t}(u(1+S_x^2)+S_xS_t) = \frac{\partial}{\partial t}(u(1+S_x^2)) + \frac{\partial}{\partial t}(S_xS_t)$$

El término $\frac{\partial}{\partial t} (u(1 + S_x^2))$ es igual a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u(1+S_x^2) \right) = (1+S_x^2) \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial S_x^2}{\partial t}$$

Donde:

$$\frac{\partial S_x^2}{\partial t} = \kappa_t \cdot 8 \cdot \kappa (1 - 2x)^2$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_x S_t) = S_t \frac{\partial S_x}{\partial t} + S_x \frac{\partial S_t}{\partial t}$$

Donde:

$$\frac{\partial S_x}{\partial t} = 2\kappa_t (1 - 2x)$$
$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = 2\kappa_{tt} (x - x^2)$$

Así pues, la ecuación diferencial de la velocidad local adimensional queda finalmente como:

$$(1+S_x^2)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v S_t}{\partial x} - u\frac{\partial S_x^2}{\partial t} - S_t\frac{\partial S_x}{\partial t} - S_x\frac{\partial S_t}{\partial t}$$

Las ecuaciones a resolver en forma discreta, y como ya se ha explicado anteriormente, según la fórmula de 2º orden con diferencias finitas discretas son las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = -\left(\frac{\frac{(\rho u)_{i+1} - (\rho u)_{i-1}}{2\Delta x}}{1 + S_x^2} \left(\frac{(h)_{i+1} - (vS_t)_{i+1} - (h)_{i-1} + (vS_t)_{i-1}}{2\Delta x} + u_i \frac{\partial S_x^2}{\partial t} \Big|_i + S_t \frac{\partial S_t}{\partial t} \Big|_i + S_x \frac{\partial S_t}{\partial t} \Big|_i \right) \right)$$

Las expresiones correspondientes a los puntos en x = 0 serían las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = -\left(\frac{\frac{(\rho u)_2 - (\rho u)_\infty}{2\Delta x}}{\frac{1}{1 + S_x^2} \left(\frac{(h)_2 - (vS_t)_2 - (h)_\infty + (vS_t)_\infty}{2\Delta x} + u_1 \frac{\partial S_x^2}{\partial t} \Big|_1 + S_1 \frac{\partial S_x}{\partial t} \Big|_1 + S_1 \frac{\partial S_t}{\partial t} \Big|_1 \right) \right)$$

De esta forma, para implementar este nuevo desarrollo en Matlab, solo sería necesario modificar el apartado que define las ecuaciones en el código presentado en el apartado anterior y añadir las funciones de las derivadas de la sección presentadas hasta ahora.

3.4.2 Resultados



Figura 32: $Mach/C_p$ para espesor Th/c = 0.3



Figura 33: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.4



Figura 34: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.43

Se comprueba la diferencia en la tendencia tanto de la distribución de presión y el número de Mach entre el caso de sección variable y el de sección constante. Cabe reseñar que las gráficas presentadas corresponden al tiempo final de la resolución. De nuevo, se observa una clara discontinuidad de los valores aproximadamente a la misma distancia que se daba en el anterior apartado. También se destaca la importancia del espesor del perfil en la naturaleza de la onda de choque (su intensidad aumenta con la sección). En posteriores apartados se realizará una breve comparación entre los resultados obtenidos

3.4.3 Código MATLAB

```
%%%%%%%% Jameson_secondaproach.m %%%%%%%%
%% Ecuaciones
rodot(1,1)=0;
rodot(2:(N-1),1)=-roux(2:(N-1),1);
udot(1:N,1)=0;
for k=2:N
[s_x]=sx(xiv(j),t,Th);
[s_t]=st(xiv(j),t,Th);
[s_xt]=sxt(xiv(j),t,Th);
[s_tt]=stt(xiv(j),t,Th);
[s_x2t]=sx2t(xiv(j),t,Th);
[udot(k,1)=(-hx(k,1)+St_vx(k,1)-u(k,1)*s_x2t-s_t*s_xt-s_x*s_tt)/(1+s_x^2);
end
```

```
ydot(rol:rof,1)=rodot;
ydot(u1:uf,1)=udot;
function [s x]=sx(x,t,Th)
if t<=0.5
    TH=80*Th*t^3-240*Th*t^4+192*Th*t^5;
elseif t>0.5 && t<1
        TH=80*Th*(1-t)^3-240*Th*(1-t)^4+192*Th*(1-t)^5;
else
        TH=0;
end
end
s x=2*TH*(1-2*x);
function [s t]=st(x,t,Th)
if t<=0.5
    TH t=240*Th*t^2-960*Th*t^3+960*Th*t^4;
elseif t>0.5 && t<1
        TH t=-240*Th*(1-t)^{2}+960*Th*(1-t)^{3}-960*Th*(1-t)^{4};
else
        TH t=0;
end
end
s t=2*TH t*(x-x^2);
function [s tt]=stt(x,t,Th)
if t<=0.5
   TH tt=480*Th*t-2880*Th*t^2+3840*Th*t^3;
elseif t>0.5 && t<1
       TH tt=480*Th*(1-t)-2880*Th*(1-t)^2+3840*Th*(1-t)^3;
else
        TH tt=0;
end
end
s tt=2*TH tt*(x-x^2);
function [s xt]=sxt(x,t,Th)
if t<=0.5
    TH t=240*Th*t^2-960*Th*t^3+960*Th*t^4;
Elseif t>0.5 && t<1
    TH t=-240*Th*(1-t)^2+960*Th*(1-t)^3-960*Th*(1-t)^4;
else
        TH t=0;
end
end
s xt=2*TH t*(1-2*x);
```

```
function [s_x2t]=sx2t(x,t,Th)

if t<=0.5
    TH=80*Th*t^3-240*Th*t^4+192*Th*t^5;
    TH_t=240*Th*t^2-960*Th*t^3+960*Th*t^4;
elseif t>0.5 && t<1
        TH=80*Th*(1-t)^3-240*Th*(1-t)^4+192*Th*(1-t)^5;
        TH_t=-240*Th*(1-t)^2+960*Th*(1-t)^3-960*Th*(1-t)^4;
else
        TH=0;
        TH=0;
    end
end
s_x2t=8*TH*TH_t*(1-2*x)^2;
end</pre>
```

<u>3.5 Tercera aproximación: Leve discretización en X/Y con sección</u> <u>constante/variable</u>

3.5.1 Desarrollo

Tras alcanzar la situación deseada para el régimen transónico sobre una línea básica de la superficie del perfil, es el momento de dar el siguiente paso lógico que consiste en la discretización del espacio en dos dimensiones, en las coordenadas $x \in y$.

Para ello, es conveniente cambiar el planteamiento de las ecuaciones como se realizó anteriormente, resolviendo el problema en las variables $W_1 = \rho$, $W_2 = u + S_x v$ y $W_3 = v$. De esta forma, las incógnitas a obtener son los valores $W_1, W_2 y W_3$ correspondientes a cada punto que conforma el mallado. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la velocidad vertical correspondiente a la línea que coincide con la superficie del perfil ya viene definida por la condición de contorno tangencial.

Por esta razón, el sistema a resolver estará compuesto por $N_x \cdot N_y$ ecuaciones diferenciales (número de puntos en x por número de puntos en y) menos las N_x ecuaciones diferenciales de v de la línea tangente a la superficie.

El mallado que se utilizará en este caso será:



Figura 35: Mallado 3º aproximación

Las expresiones del sistema a resolver discretizadas, según las fórmulas de 2° orden serían las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x v \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{(\rho u)_{i+1} - (\rho u)_{i-1}}{2\Delta x} \\ \frac{(h - S_t v)_{i+1} - (h - S_t v)_{i-1}}{2\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{(\rho (v - S_x u - S_t))_{j+1} - (\rho (v - S_x u - S_t))_{j-1}}{2\Delta y} \\ 0 \\ \frac{(h - S_t v)_{j+1} - (h - S_t v)_{j-1}}{2\Delta y} \end{pmatrix}$$

Para simplificar la resolución de este sistema, se utiliza la siguiente notación, tomada de [7]:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x \nu \\ \nu \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ h - S_t \nu \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(\nu - S_x u - S_t) \\ 0 \\ h - S_t \nu \end{pmatrix}$$

De esta forma, el sistema a resolverse puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{(F_1)_{i+1} - (F_1)_{i-1}}{2\Delta x} \\ \frac{(F_2)_{i+1} - (F_2)_{i-1}}{2\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{(G_1)_{j+1} - (G_1)_{j-1}}{2\Delta y} \\ 0 \\ \frac{(G_3)_{j+1} - (G_3)_{j-1}}{2\Delta y} \end{pmatrix}$$

Esta forma permitirá manejar con mayor facilidad estas ecuaciones y ahorrará coste de cálculo. Sobre el código a implementar en Matlab cabe destacar varios aspectos. En primer lugar, se puede observar que la discretización en la dirección y para este caso es breve aunque dado que esto es solo una aproximación, será un primer paso para seguir aumentando el mallado a lo largo de esta coordenada en posteriores apartados.

Tal como ocurría en anteriores códigos, la condición inicial y_0 debe ser introducida en forma de columna por lo que es necesario definir los límites de los valores pertenecientes a cada una de las tres variables. Se puede comprobar cómo se calcula la velocidad vertical v para la línea correspondiente a y = 0 y cómo definen estos valores a la variable W_2 en la misma zona, aunque es necesario recordar que los datos de W_3 en dicha región no se añadirán a y_0 puesto que no se consideran incógnitas
a resolver en el sistema de ecuaciones diferenciales (se obtendrán a partir de la condición de contorno de impenetrabilidad).

En las líneas de la función *jamesondif* se han incluido dos funciones que responden a los nombres de *matriz_col* y *col_matriz*. Éstas tienen la propiedad de transformar vectores columna en una matriz y viceversa. Esta finalidad está relacionada directamente con la forma de implementar las diferencias finitas en las direcciones x e y, pudiendo realizarse de forma más sencilla y visual cuando los valores de los puntos del mallado están distribuidos de forma matricial (la configuración real). Obtener las diferencias en y cuando los valores se hallan en forma de columna puede resultar menos intuitivo.

Otro aspecto relacionado con la definición de matrices que alberguen los datos de los puntos del mallado es la obtención de la correspondiente a la velocidad vertical. Puesto que la fila y = 0 no se considera como ecuación diferencial, dicha matriz tiene originalmente una fila menos que las relativas a los valores W_1 y W_2 . Sin embargo, para poder realizar los cálculos de las diferencias finitas correctamente, se añade un vector con los valores v_0 calculados al principio del código, términos que solo se usarán para este fin.

Una vez definidas las diferencias finitas en ambas direcciones, se definen las ecuaciones diferenciales, estableciendo la variable W_2 constante en el borde de ataque para garantizar la estabilidad de la solución (aunque no esto no será necesario en el programa final). En el caso de las expresiones correspondientes a W_3 solo se obtienen a partir de la segunda fila (la inmediatamente superior a y = 0). Una vez establecida la matriz del sistema, se transforma en vector columna para poder ser "entregada" al método *ode15s* que se encargará de resolver y obtener los valores finales.

Resuelto el problema y conseguida la solución para W_1 , W_2 y W_3 , se procede a calcular los valores correspondientes de u en todo el mallado (u también se ve afectada por v puesto que precisa de W_2 para ser hallada) y de v en y = 0 mediante los valores de u en esa línea.





Figura 36: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.25



Figura 37: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.3



Figura 38: Mach/ C_p con espesor Th/c = 0.4

3.5.3 Resultados: Sección variable



Figura 39: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.25



Figura 40: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.3



Figura 41: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.4

Desechada la aproximación para una sola línea, se comprueba que con una discretización en y, la posición de la onda de choque se retrasa hasta alcanzar $x \sim 0.6 - 0.8$. Esta situación es lógica puesto que en un perfil parabólico, la máxima sección (zona teórica donde el flujo se "estrecha" más, por lo que la velocidad debería ser

máxima y la presión mínima) se halla en el centro, por lo que en teoría se postula como región propensa a generar una zona supersónica y a continuación, provocar una discontinuidad. Sin embargo, los resultados que ofrece este mallado generan una peor estimación para los valores de espesores estudiados, por lo que solo es posible recoger conclusiones de forma cualitativa. Más adelante se detallará la mejora obtenida mediante el uso de la viscosidad artificial.

Esto puede deberse a que en el primer caso, los términos relativos a las diferencias en y son obviados, por lo que la variable de velocidad vertical se supone definida por la superficie del perfil, lo que significa una variación importante aunque interesante del planteamiento del problema. En el segundo caso, dichos términos no son despreciados y se añaden a la resolución.

Sin embargo, de momento se ha procedido con una discretización ligera en y (3-5 líneas), por lo que los resultados, aunque parecen peores que los conseguidos en la primera aproximación, son más cercanos a la situación final. Lo único que se necesita es aumentar el mallado e incluir términos estabilizadores como la viscosidad artificial (en el siguiente apartado se analizará el efecto de dicho elemento en la resolución).

3.5.4 Código MATLAB

```
function Jameson thirdaproach
Clearall; close all; clc;
global gamma
gamma=1.4;
%% Valores iniciales
Uoo=1;
%% Mallado
xi0=0; xiL=1; N=50; xiv=linspace(xi0,xiL,N); dxi=(xiL-xi0)/(N-1);
yi0=0; yiL=0.2; Ny=3; dyi=(yiL-yi0)/(Ny-1);
00
Nx=N;
tinic=0; tend=1; Nt=30; dt=(tend-tinic)/(Nt-1);
%% Perfil
Th=0.35;
%% Condición inicial v0
Nro=N*Ny; Nu1=Nro+1; Nuf=Nro+Ny*N;
```

```
if Ny>1
Nv1=Nuf+1; Nvf=Nuf+Ny*N-N;
else
Nv1=Nuf; Nvf=Nv1;
end
y0=zeros(Nvf,1);
y0(1:Nro, 1)=ones(Nro, 1); y0(Nu1:Nuf, 1)=Uoo;
if Ny>1
y0(Nv1:Nvf,1)=zeros(Nro-N,1);
else
end
v0=zeros(1,N);
w2=zeros(N,1);
for i=1:Nx
    x=xiv(i);
    [s x]=sx(x,tinic,Th);
    [s_t]=st(x,tinic,Th);
v0(1,i)=Uoo*s x+s t;
w2(i,1)=Uoo+s x*v0(i);
end
y0(Nu1:Nu1+Nx-1,1)=w2;
%% Resolucion ecuaciones
for i=1:(Nt-1),
t0=tinic+(i-1)*dt; tf=tinic+i*dt;
[tsol ysol]=ode15s(@Jamesondif,[t0
tf],y0,[],dxi,dyi,xiv,M0,Nx,Ny,Nro,Nu1,Nuf,Nv1,Nvf,Th,v0);
Nsol=length(tsol);
Tsol=tsol(Nsol);
rho sol=ysol(Nsol,1:Nro);
w 2 sol=ysol(Nsol, Nu1:Nuf);
[rosol]=col matriz(rho sol,Nro,Nx,Ny);
[w2sol]=col matriz(w 2 sol, Nro, Nx, Ny);
if Ny>1
  vv sol=ysol(Nsol,Nv1:Nvf);
  [vsol]=col_matriz(vv_sol,Nro-N,Nx,Ny-1);
vsol(2:Ny,:)=vsol;
else
vsol=zeros(1,Nx);
end
usol=zeros(Ny,Nx);
```

```
for k=1:Ny
for j=1:Nx
x=xiv(j);
    [s x]=sx(x,Tsol,Th); % Derivada respecto a x de la sección
    [s t]=st(x,Tsol,Th); % Derivada respecto a t de la sección
if k==1
usol(k,j) = (w2sol(k,j) - s_t * s_x) / (1 + s_x^2);
vsol(k,j)=s x*usol(k,j)+s t;
else
usol(k,j)=w2sol(k,j)-s x*vsol(k,j);
end
end
end
v0=vsol(1,:);
Moo=0.85;
psol=(rosol.^(gamma));
usol=usol*Moo./sqrt(psol./rosol);
%% Graficas
subplot(2,1,1)
for k=1:Ny
if k==1
plot (xiv(1:N), usol(k,:),'c','Linewidth',2)
else
plot (xiv(1:N), usol(k,:), 'r', 'Linewidth',2)
end
holdon
title('Mach local', 'Fontsize',13)
xlabel('x/c','Fontsize',13)
ylabel('Mach', 'Fontsize',13)
end
gridon
holdoff
subplot(2,1,2)
for k=1:Ny
if k==1
plot (xiv(1:N), -(psol(k,:)-1),'c','Linewidth',2)
else
plot (xiv(1:N), -(psol(k,:)-1), 'r', 'Linewidth',2)
end
holdon
title('C_p','Fontsize',13)
xlabel('x/c','Fontsize',13)
ylabel('Cp','Fontsize',13)
end
gridon
holdoff
```

```
pause(le-11)
y0=ysol(Nsol,:)';
cleartsolysol;
end
function ydot =
Jamesondif(t,y,dxi,dyi,xiv,M0,Nx,Ny,Nro,Nu1,Nuf,Nv1,Nvf,Th,v0)
global gamma
rho=y(1:Nro,1);
w 2=y(Nu1:Nuf,1);
[ro]=col matriz(rho, Nro, Nx, Ny);
[w2]=col matriz(w 2, Nro, Nx, Ny);
if Ny>1
vv=y(Nv1:Nvf,1);
  [v]=col matriz(vv,Nro-Nx,Nx,Ny-1);
v(2:Ny,:)=v;
v(1,:)=v0;
else
   v=v0;
end
u=zeros(Ny,Nx);
for i=1:Ny
for j=1:Nx
   x=xiv(j);
   [s x] = sx(x, t, Th);
u(i,j)=w2(i,j)-s x*v(i,j);
end
end
F1=zeros(Ny,Nx); F2=zeros(Ny,Nx);
G1=zeros(Ny,Nx); G3=zeros(Ny,Nx);
h=zeros(Ny,Nx);
Moo=0.85;
for i=1:Ny
for j=1:Nx
x=xiv(j);
[s x]=sx(x,t,Th);
[s t]=st(x,t,Th);
h(i,j)=0.5*(u(i,j)^2+v(i,j)^2)+(ro(i,j)^(gamma-1))/((gamma-
1)*(Moo^2));
```

```
h0=0.5*Uoo^2+1/((gamma-1)*(Moo^2));
F1(i,j)=ro(i,j)*u(i,j);F10=Uoo;%F10 corresponde a F1 en corriente
F2(i,j)=h(i,j)-s t*v(i,j);F20=h0;% F20 corresponde a F2 en corriente
G1(i,j) = ro(i,j) * (v(i,j) - s x * u(i,j) - s t); G1N=0;
G3(i,j) = F2(i,j); G3N = F20;
%G1N y G3N corresponden a G1 y G3en corrienteimperturbada
end
end
F1x=zeros(Ny,Nx);
F2x=zeros(Ny,Nx);
Gly=zeros(Ny,Nx);
G3y=zeros(Ny,Nx);
for j=1:Ny
F1x(j,1) = (F1(2,1) - F10) / (2*dxi); *Diferencia respecto corriente
F1x(j, 2:Nx-1) = (F1(j, 3:Nx) - F1(j, 1:(Nx-2)))/2/dxi;
F1x(j, Nx) = (F1(j, Nx) - F1(j, Nx-1))/2/dxi;
F2x(j,1)=(F2(2,1)-F20)/(2*dxi);%Diferencia respecto corriente
F2x(j,2:Nx-1) = (F2(j,3:Nx)-F2(j,1:(Nx-2)))/2/dxi;
F2x(j,Nx) = (F2(j,Nx) - F2(j,Nx-1))/2/dxi;
end
for i=1:Nx
if Ny>1
     G_{1y}(1,i) = (-3*G_{1}(1,i)+4*G_{1}(2,i)-G_{1}(3,i))/2/dy_{i};
     G1y(2:Ny-1,i)=(G1(3:Ny,i)-G1(1:(Ny-2),i))/2/dyi;
     Gly(Ny,i)=(GlN-Gl(Ny-1,i))/2/dyi;%Diferencia respecto corriente
     G_{3y}(2:Ny-1,i) = (G_{3}(3:Ny,i) - G_{3}(1:(Ny-2),i))/2/dyi;
     G_{3y}(Ny,i) = (G_{3}(Ny,i) - G_{3}(Ny-1,i)) / 2 / dyi;
     G3y(Ny,i)=(G3N-G3(Ny-1,i))/2/dyi;%Diferencia respecto corriente
Else
G1y(1, i) = 0;
G3y(1,i)=0;
end
end
rodot=zeros(Ny,Nx);
```

```
w2dot=zeros(Ny,Nx);
for i=1:Ny
     for j=1:Nx
           if j==1
           rodot(i,j) = -F1x(i,1) - G1y(i,1);
           w2dot(i, j)=0;
           else
           rodot(i,j) = -F1x(i,j) - G1y(i,j);
           w2dot(i,j) = -F2x(i,j);
           end
     end
end
if Ny>1
     vdot=zeros(Ny-1,Nx);
     for i=2:Ny
           for j=1:Nx
           vdot(i-1,j) = -G3y(i,j);
           end
     end
[vvdot]=matriz_col(vdot,Nx,Ny-1);
ydot(Nv1:Nvf,1)=vvdot;
else
end
[rhodot]=matriz col(rodot, Nx, Ny);
[w 2dot]=matriz col(w2dot,Nx,Ny);
ydot(1:Nro,1)=rhodot;
ydot(Nul:Nuf,1)=w_2dot;
function [s_x]=sx(x,t,Th)
if t<=0.5
   TH=80*Th*t^3-240*Th*t^4+192*Th*t^5;
Elseif t>0.5 && t<1
       TH=80*Th*(1-t)^3-240*Th*(1-t)^4+192*Th*(1-t)^5;
else
       TH=0;
end
end
s x=2*TH*(1-2*x);
s x=2*Th*(1-2*x); % Sección constante
function [s t]=st(x,t,Th)
if t<=0.5
   TH t=240*Th*t^2-960*Th*t^3+960*Th*t^4;
Elseif t>0.5 && t<1
       TH t=-240*Th*(1-t)^2+960*Th*(1-t)^3-960*Th*(1-t)^4;
else
```

```
TH_t=0;
end
end
s_t=2*TH_t*(x-x^2);
s_t=0; % Sección constante
function [matriz]=col_matriz(columna,Nmat,Nx,Ny)
fil=1;
col=1;
matriz=zeros(Ny,Nx);
for I=1:Nmat
    matriz(fil, col)=columna(I);
    col=col+1;
    if col>Nx
    col=1;
    fil=fil+1;
    else
    end
end
function [columna]=matriz col(matriz,Nx,Ny)
I=1;
columna=zeros(Nx*Ny,1);
for i=1:Ny
for j=1:Nx
columna(I)=matriz(i,j);
I=I+1;
end
end
```

3.6 Cuarta aproximación: Inclusión de viscosidad artificial

3.6.1 Desarrollo

Como se ha podido comprobar, los resultados obtenidos hasta ahora, a pesar de mostrar un comportamiento que modela de forma bastante aproximada la aparición de una onda de choque, también poseen un carácter inestable en ciertos puntos provocando oscilaciones (en algunos casos, de gran envergadura) en los valores, ralentizando el proceso de cálculo, provocando la aparición de posibles singularidades (matrices singulares, números complejos, tolerancias inalcanzables, etc.) y deformando la representación gráfica.

Este suceso es una de las razones por las que surge la necesidad de incluir un elemento estabilizador en las ecuaciones, elemento que ya fue citado en el capítulo introductorio sobre el régimen transónico y que ha sido denominado viscosidad artificial.

Dicho término puede aparecer naturalmente al resolver sistemas de ecuaciones como Navier-Stokes al cometer un error numérico inevitable mediante los métodos matemáticos empleados, lo cual acaba generando de forma espontánea una discontinuidad para el caso de valores de Mach cercanos a 1.

En otras situaciones, la viscosidad artificial puede ser incluida en forma de un término que se añade a cada EDP. En el artículo de Jameson y Chipman, dicho elemento tiene la siguiente forma:

$$\mu_{art} = \varepsilon \Delta(coordenada) D^+D^-$$

Donde ε es un parámetro, $\Delta(coordenada)$ define el paso en la dirección que se esté tratando y D^+D^- son operadores de diferencias *upwind* y *downwind* o *downstream* (aguas abajo). Sin embargo, aunque que esta definición de la viscosidad artificial pueda ser efectiva, resulta compleja e ineficiente además de poseer una notación confusa.

Como ya se vio en el apartado del tubo de choque, una expresión muy utilizada para representar el efecto disipativo deseado viene dado por la siguiente fórmula:

$$\mu_{art} = v \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

Donde v representaría un parámetro de proporcionalidad entre la viscosidad artificial y la derivada de cada función, e φ representa cada variable a resolver.De esta forma, las ecuaciones a resolver deben ser modificadas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x v \\ v \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ h_0 - S_t v \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho (v - S_x u - S_t) \\ 0 \\ h_0 - S_t v \end{pmatrix} + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} \rho \\ u + S_x v \\ v \end{pmatrix}$$

Simplificando la notación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} G_1 \\ 0 \\ G_3 \end{pmatrix} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}$$

En la forma discretizada, según la fórmula de 2º orden con diferencias centradas, tanto para derivadas primeras o como derivadas segundas:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{(F_1)_{i+1} - (F_1)_{i-1}}{2\Delta x} \\ \frac{(F_2)_{i+1} - (F_2)_{i-1}}{2\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{(G_1)_{j+1} - (G_1)_{j-1}}{2\Delta y} \\ 0 \\ \frac{(G_3)_{j+1} - (G_3)_{j-1}}{2\Delta y} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \frac{(W_1)_{i+1} - 2(W_1)_i + (W_1)_{i-1}}{\Delta x^2} \\ \frac{(W_2)_{i+1} - 2(W_2)_i + (W_2)_{i-1}}{\Delta x^2} \\ \frac{(W_3)_{i+1} - 2(W_3)_i + (W_3)_{i-1}}{\Delta x^2} \end{pmatrix}$$

Establecida la forma, únicamente sería necesario incluir en el código Matlab el valor escogido para v y la fórmula para la aproximación de la segunda derivada.



3.6.2 Resultados: Sección constante

Figura 42: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.25



Figura 43: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.3



Figura 44: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.4

3.6.3 Resultados: Sección variable



Figura 45: Mach/C_p con espesor t/c=0.25



Figura 46: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.3



Figura 47: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.4

A pesar de que la discontinuidad supone un cambio brusco, la viscosidad no afecta a la reproducción de la misma y es capaz de afinar la tendencia propia del fenómeno. En este sentido, se podría afirmar que posee un efecto de homogeneización sobre la función en general.

Este aspecto debe ser reforzado también por el valor numérico que se otorga a v. Dar un valor pequeño aportará unos datos más sensibles a cambios y más propensos a oscilar mientras que un valor grande estabilizará demasiado la representación y el resultado sería muy distinto al deseado. Es por ello que la fiabilidad del proceso se ve influenciada directamente por este parámetro.

De este punto se denota que es necesario ajustar el valor v para cada problema, alcanzando una solución de compromiso positiva entre la fiabilidad del método y la estabilidad del resultado. Esta solución también se verá intervenida por los parámetros físicos tales como el espesor de la sección o la discretización, por lo que es necesario realizar un estudio (que no se detallará en esta memoria por ser demasiado extenso y que no es estrictamente necesario para poder comprender el procedimiento que se expone) para obtener la viscosidad que permita cumplir con todos los requisitos.

En lo relativo al coste computacional, la expresión utilizada de la segunda derivada ha resultado muy efectiva puesto que el tiempo que se incrementa en la resolución no es relevante frente a la duración propia del cálculo numérico de la ejecución del programa *ode15s*.

Por otro lado, intentos realizados con la definición que utilizan Jameson y Chipman en su artículo [7] denotan la necesidad de mayor tiempo, no solo en el procesamiento en sí, sino también en la duración de la depuración de código necesaria para que sea correcta la implementación. Este es uno de los puntos clave a destacar del método utilizado, pues un programa complejo llevaría a una serie de modificaciones que lastrarían todo el proceso.

3.6.4 Código MATLAB

```
%% Solo se mostrarán las líneas que difieran de anteriores programas.
El resto del código es idéntico %%
function ydot =
Jamesondif(t,y,dxi,dyi,xiv,M0,Nx,Ny,Nro,Nu1,Nuf,Nv1,Nvf,Th,v0)
roxx=zeros(Ny,Nx);
w2xx=zeros(Ny,Nx);
vxx=zeros(Ny,Nx);
for j=1:Ny
roxx(j,2:(Nx-1)) = (ro(j,1:(Nx-2)) - 2*ro(j,2:(Nx-1)) + ro(j,3:Nx)) / (dxi^2);
roxx(j,1) = (1-2*ro(j,1)+ro(j,2)) / (dxi^2);
roxx(j,Nx) = roxx(j,Nx-1);
w2xx(j,2:(Nx-1)) = (w2(j,1:(Nx-2)) - 2*w2(j,2:(Nx-1)) + w2(j,3:Nx)) / (dxi^2);
w2xx(j,1) = (M0-2*w2(j,1)+w2(j,2))/(dxi^2);
w2xx(j,Nx) = w2xx(j,Nx-1);
vxx(j, 2: (Nx-1)) = (v(j, 1: (Nx-2)) - 2*v(j, 2: (Nx-1)) + v(j, 3:Nx)) / (dxi^2);
vxx(j,1) = (-2*v(j,1)+v(j,2)) / (dxi^2);
vxx(j, Nx) = vxx(j, Nx-1);
end
rodot=zeros(Ny,Nx);
w2dot=zeros(Ny,Nx);
for i=1:Ny
     for j=1:Nx
           if j == 1
           rodot(i,j)=-F1x(i,1)-G1y(i,1)+vis*roxx(i,1);
     w2dot(i, j)=0;
     else
                 rodot(i,j) = -F1x(i,j) - G1y(i,j) + vis * roxx(i,j);
     w2dot(i,j) = -F2x(i,j) + vis*w2xx(i,j);
     end
     end
end
if Ny>1
     vdot=zeros(Ny-1,Nx);
     for i=2:Ny
           for j=1:Nx
           vdot(i-1,j)=-G3y(i,j)+vis*vxx(i,j);
           end
     end
[vvdot]=matriz col(vdot,Nx,Ny-1);
ydot(Nv1:Nvf,1)=vvdot;
else
end
```

3.7 Aproximación final: Discretización espacial total, ley de espesor y matriz jacobiana

3.7.1 Desarrollo

Finalmente, obtenidas y presentadas las aproximaciones, ya es posible realizar el planteamiento para abordar el problema con una discretización completa y extensa, así como para incluir la viscosidad artificial por la que se obtengan unos resultados con una tendencia estable.

Por otro lado, hasta este apartado la no estacionariedad del proceso se ha venido caracterizando por la ley temporal del espesor definida en el artículo [7] descrito por Jameson y Chipman. Sin embargo, la búsqueda de la simplicidad y la eficiencia así como del directo entendimiento visual que caracteriza este proyecto lleva a pensar una manera alternativa para desarrollar el proceso de formación temporal de la onda de choque, ya que la función establecida en [7] posee cierta complejidad.

Por esta razón, es interesante realizar un análisis con una ley que varíe progresivamente y que se mantenga en el tiempo, con el fin de captar correctamente el salto de presiones y velocidades. Así pues, se ha decidido que en este apartado, el espesor del perfil venga dado por una expresión que represente un crecimiento rápido pero controlado y que se mantenga en el máximo una vez alcanzado éste.

La función que encaja mejor con esta definición es la tangente hiperbólica:

$$TH = TH_{max} \cdot \tanh\left(\tau \cdot t'\right)$$

Donde $t' = \frac{t}{\tau}$



Figura 48: Ley de espesor con tangente hiperbólica

El sistema a resolver es similar al planteado en el apartado anterior, donde se incluye el término relativo a la viscosidad artificial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} G_1 \\ 0 \\ G_3 \end{pmatrix} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}$$

En forma discretizada, estas ecuaciones pasan a ser:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{(F_1)_{i+1} - (F_1)_{i-1}}{2\Delta x} \\ \frac{(F_2)_{i+1} - (F_2)_{i-1}}{2\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{(G_1)_{j+1} - (G_1)_{j-1}}{2\Delta y} \\ 0 \\ \frac{(G_3)_{j+1} - (G_3)_{j-1}}{2\Delta y} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \frac{(W_1)_{i+1} - 2(W_1)_i + (W_1)_{i-1}}{\Delta x^2} \\ \frac{(W_2)_{i+1} - 2(W_2)_i + (W_2)_{i-1}}{\Delta x^2} \\ \frac{(W_3)_{i+1} - 2(W_3)_i + (W_3)_{i-1}}{\Delta x^2} \end{pmatrix}$$

El mallado que se utilizará en este caso será mucho más extenso que el utilizado en anteriores apartados. En esta ocasión, el número de líneas en las que se discretiza la dirección y será mayor (11 líneas) y el valor más alto de y será igual a 0.5:



Figura 49: Mallado aproximación final

En lo relativo al uso de *ode15s*, esta función permite incluir la opción de aportar el jacobiano del sistema de EDP como argumento para establecer las relaciones entre las distintas variables. Esta posibilidad se realiza mediante la opción del ode15s denominada JPattern. Haciendo uso de esta herramienta y de la función *Sparse* de Matlab para generar matrices dispersas, se puede simplificar el jacobiano que deberá utilizar el programa *ode* para la resolución del sistema.

La matriz jacobiana, teniendo tantas filas y columnas como variables a resolver tenga dicho sistema, define para cada fila las incógnitas del problema que se hallan en la ecuación diferencial correspondiente a la variable situada en dicha fila. Por ejemplo, la fila 1 del jacobiano en este caso establecerá qué elementos intervienen en la EDP de la densidad que caracteriza el punto que se halla justamente en el borde de ataque. La fila 2 será similar pero responde al valor de la densidad en el siguiente punto en la dirección x.

Las variables que intervienen o no en cada ecuación se indican mediante un 0 (si no está presente) o un 1 (si está presente) en la columna correspondiente. Al introducir

la matriz jacobiana de forma dispersa, Matlab elimina los términos nulos y se queda con los valores unidad, de manera que puede trabajar directamente con los elementos que interesan en cada momento sin tener que perder tiempo con aquellos que no están involucrados.

Para implementar estos cambios en el código Matlab, solo será necesario cambiar las líneas relativas a la discretización en y, además de modificar las funciones S_x y S_t e incluir la función que genera la matriz jacobiana dispersa:

3.7.2 Resultados

Para poder observar correctamente la resolución de los datos obtenidos, se mostrará una relación de gráficas referentes a distintos espesores. Por lo general, el problema se resolverá para una viscosidad artificial igual a 0.005:



Figura 50: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.3



Figura 51: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.4



Figura 52: Mach/ C_p con espesor Th/c =0.5



Figura 53: Mach/ C_p con espesor Th/c=0.65

En estas gráficas ya se corrobora una distribución de presiones acorde a la descripción que se tenía inicialmente sobre el régimen transónico. Inicialmente, la presión disminuye de forma monótona así como aumenta el Mach local hasta la mitad del perfil. Pasado el máximo espesor, se observa el salto de presiones hacia un valor mayor. El número de Mach local, que hasta ese punto se hallaba en valores supersónicos, baja de forma brusca hasta hallarse por debajo de 1, formándose de nuevo otra zona subsónica. Los resultados obtenidos tienen una lógica física sólida y apoyan la alta fiabilidad del programa desarrollado (se analizarán con más detalle en el capítulo 4)

3.7.3 Código MATLAB

%% Solo se mostrarán las líneas que difieran de anteriores programas. El resto del código es idéntico %% yi0=0; yiL=0.5; dyi=0.05; Ny=1+(yiL-yi0)/dyi; % options=odeset('Jpattern',jpattern(Ny,Nx,Nro)); [tsol ysol]=ode15s(@Jamesondif,[t0 tf],y0,options,dxi,dyi,xiv,M0,Nx,Ny,Nro,Nu1,Nuf,Nv1,Nvf,Th,v0); % % %

```
function [s x] = sx(x, t, Th)
tau=10;
A=Th/tanh(tau); TH=A*tanh(t*tau);
%TH=Th;
s x=2*TH*(1-2*x);
function [s t]=st(x,t,Th)
tau=10;
A=Th/tanh(tau); TH t=A*(1-(tanh(t*tau))^2);
s t=2*TH t*(x-x^2);
function [matriz]=spar(Ny,Nx)
Nro=(Nx+2)*(Ny+2);
mat=zeros(Ny+2,Nx+2);
I=1;
for k=1:(Nro)
i=ceil(k/(Nx+2));
j=k-(Nx+2)*(i-1);
   if j==1 || i==1 || j==Nx+2 || i==Ny+2;
else
mat(i+1,j,I)=1;
mat(i-1,j,I)=1;
mat(i,j-1,I)=1;
mat(i,j+1,I)=1;
   I = I + 1;
end
end
matriz=mat(2:(Ny+1),2:(Nx+1),:);
function [matriz]=sparv(Ny,Nx)
Nro=(Nx+2)*(Ny+2);
mat=zeros(Ny+2,Nx+2);
I=1;
for k=1:(Nro)
i=ceil(k/(Nx+2));
j=k-(Nx+2)*(i-1);
   if j==1 || i==1 || i==1 || j==Nx+2 || i==Ny+2;
else
mat(i+1,j,I)=1;
mat(i-1,j,I)=1;
   I = I + 1;
end
end
matriz=mat(2:(Ny+1),2:(Nx+1),:);
```

```
function [matriz]=sparx(Ny,Nx)
Nro=(Nx+2)*(Ny+2);
mat=zeros(Ny+2,Nx+2);
I=1;
for k=1:(Nro)
i=ceil(k/(Nx+2));
j=k-(Nx+2)*(i-1);
    if j==1 || i==1 || j==Nx+2 || i==Ny+2;
else
mat(i,j+1,I)=1;
mat(i,j-1,I)=1;
   I=I+1;
end
end
matriz=mat(2:(Ny+1),2:(Nx+1),:);
function [S]=jpattern(Ny,Nx,Nro)
[matriz]=spar(Ny,Nx);
[matrizx]=sparx(Ny,Nx);
[matrizy] = sparv(Ny, Nx);
S=zeros(Nro,Nro);
for i=1:Nro
    [columna]=matriz col(matriz(:,:,i),Nx,Ny);
    [columnav]=matriz col(matriz(2:Ny,:,i),Nx,Ny-1);
S(i,1:Nro)=columna';
S(i,(Nro+1):(2*Nro))=columna';
S(i, (2*Nro+1): (3*Nro-Nx))=columnav';
end
I=1;
for i=Nro+1:2*Nro
[columna]=matriz col(matrizx(:,:,I),Nx,Ny);
[columnav]=matriz col(matrizx(2:Ny,:,I),Nx,Ny-1);
S(i,1:Nro)=columna';
S(i, (Nro+1): (2*Nro))=columna';
S(i, (2*Nro+1): (3*Nro-Nx))=columnav';
    I = I + 1;
end
I = Nx + 1;
for i = (2*Nro+1): (3*Nro-Nx)
[columna]=matriz col(matrizy(:,:,I),Nx,Ny);
[columnav]=matriz col(matrizy(2:Ny,:,I),Nx,Ny-1);
S(i,1:Nro)=columna';
S(i, (Nro+1): (2*Nro)) = columna';
S(i, (2*Nro+1): (3*Nro-Nx))=columnav';
I=I+1;
end
S=sparse(S);
```

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1 Comparación MATLAB vs Jameson - Chipman

Obtenidos todos los resultados, es interesante hacer una comparación de los resultados conseguidos mediante el método ode15 que implementa Matlab y cuyo código se ha venido desarrollando en este proyecto frente a los datos aportados por el trabajo de Jameson y Chipman. En concreto, se analizarán los casos de discretización en x con sección variable en el tiempo según el espesor definido en [7] y la aproximación final recreando un problema mucho más parecido.

Cabe reseñar antes de realizar dicha comparación que son métodos que han empleado perfiles con una geometría distinta y con espesores que dependen del tiempo según leyes diferentes, por lo que no es posible hacer un análisis cuantitativo de los resultados. Sin embargo, cualitativamente sí deben guardar cierta relación por lo que será esa similitud en cuanto al comportamiento de la solución lo que se valorará en este apartado. Comenzando con el caso de la primera aproximación realizada con sección variable, la comparación es la que prosigue a continuación:



Figura 54: 1º aproximación con sección variable frente a Jameson – Chipman. Ref. [7]

En este caso, a pesar de que el resultado obtenido por Matlab es una aproximación muy suave del problema real, pues solo se discretiza una línea en y. Sin embargo, a pesar de esto, se comprueba cierta similitud en el orden de los resultados y en la tendencia que siguen (la gráfica obtenida por el método con ode15s corresponde al tiempo final). Hay que recordar que la ley de espesor utilizada en este apartado fue la misma usada en [7] por lo que es lógico que se capten comportamientos parecidos, aunque también debe destacarse que la geometría de los perfiles es distinta por lo que no se podrían dar los mismos resultados para ambos casos.

Como se explicó en anteriores apartados, se comprueba en ambas gráficas el salto de presiones que existe en mitad del perfil evidenciando la presencia de una onda de choque. Se observa que en el método por ode15s, la discontinuidad es menos brusca y la posición es menos exacta, aunque como ya se comentó, al ser una aproximación bastante burda cabe esperar que existan discrepancias. A pesar de todo, los efectos cualitativos son destacables, los cuales han permitido seguir confiando en la posibilidad de obtener resultados más cercanos mediante Matlab.

A medida que se profundiza en la discretización de la dirección y los datos para el perfil parabólico empiezan a diferir y a parecerse más a los adecuados para su forma:



Figura 55: 4º aprox. con ode15s frente a Jameson – Chipman. Th/c = 0,4. Ref. [7]

En la zona final de la gráfica representaba se puede ver como la tendencia descendente se hace más pronunciada en torno a un valor de $x \in (0.7 - 0.9)$. Es ahí donde se aprecia realmente la aparición de la onda de choque, pasada la zona de mayor sección. En comparación con los datos de [7], se observa similitud en el orden de los valores del coeficiente de presiones así como en la posición de la onda de choque.

Una vez descrita esta comparación, se puede pasar a analizar los resultados finales obtenidos en este proyecto:



Figura 56: Aprox. Final con ode15s frente a Jameson – Chipman. Th/c=0.5. Ref. [7]



Figura 57: Aprox. Final con ode15s frente a Jameson – Chipman. Th /c=0.65. Ref. [7]

De esta comparación cabe destacar que para ambos espesores, en lo que respecta al rango de valores, se da un orden parecido tanto en Jameson-Chipman como en el método por ode15s, comprobándose una vez más que los resultados son lógicos y fiables. La discontinuidad es manifiesta en todas las gráficas, representando la posición de la onda de choque.

Por otra parte, existe cierta tendencia de las presiones similar entre ambos métodos, observándose una pequeña protuberancia de las presiones pasada la onda de choque. Si se comprueba también los valores de Mach, se puede ver que existe una caída brusca desde el valor máximo hasta hallarse por debajo de 1, lo que de nuevo corrobora la presencia de la onda. La posición que toma la discontinuidad dentro del perfil es similar para ambos métodos, cuya explicación se dio en el apartado relativo a la última aproximación.

En lo que respecta a la profundidad del mallado, se concluye que los resultados para ambos casos poseen discrepancias aunque el comportamiento es similar. Se concluye de este estudio, que para un valor de 11 líneas en y la fiabilidad de los datos obtenidos es buena. La eficiencia computacional es aceptable para el propósito de este

proyecto, siendo muy inferior para más líneas, debido al aumento del tiempo necesario para completar la resolución (se han realizado cálculos incluyendo 21 líneas obteniéndose resultados en un tiempo mucho mayor (alrededor de 20 minutos) con una tendencia claramente no estable donde la onda de choque se suaviza demasiado).

Para acabar de corroborar finalmente que el resultado conseguido es fiable, se puede realizar un sencillo cálculo de la resistencia generada por la distribución de presiones mostradas. Para obtener dicho valor, es necesario resolver la siguiente expresión:

$$D = 2 \int_0^c (\bar{p}(x) - p_\infty) n_x d\bar{x}$$

Siendo $n_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}}$

Adimensionalizando la anterior expresión:

$$D = 2p_{\infty}c \int_{0}^{1} (p(x) - 1)n_{x}dx \quad \rightarrow \quad C_{d} = \frac{D}{p_{\infty}c} = 2\int_{0}^{1} (p(x) - 1)n_{x}dx$$

Para implementar en Matlab esta fórmula solo es necesario incluir dos líneas:

Para una distribución de presiones estacionaria como la presentada para el caso del perfil con espesor $\frac{Th}{c} = 0.5$, el coeficiente de resistencia es igual a **0.1222**.

Aunque la forma del perfil es una variable a tener en cuenta para realizar comparaciones, resulta cuanto menos curioso comprobar la similitud entre el valor obtenido por este método respecto a los mostrados en las figura58, que se presenta a continuación:



Figura 58: Aumento de resistencia frente a Mach. Ref. [21]

De esta forma, todos los datos conseguidos apoyan la idea original que se concebía al principio de esta memoria de representar el comportamiento del régimen transónico mediante un código MATLAB de dificultad media aunque asequible para el nivel universitario, y sobre todo, de captar la onda de choque que se genera sobre la superficie del perfil.

4.2 Conclusiones finales

Como punto y final a este proyecto, es interesante hacer una recopilación de los objetivos planteados y las soluciones alcanzadas para poseer una visión general del trabajo, así como para poder entender lo que representa esta investigación para los conocimientos del campo de la dinámica de fluidos.

Inicialmente, se estableció una meta prioritaria: conseguir un método numérico que permitiese, de forma simple y clara, mostrar una aproximación fiable del comportamiento del régimen transónico en ordenadores accesibles para la mayoría de docentes y estudiantes, así como de otros investigadores, basándose en los procedimientos obtenidos anteriormente por los expertos en esta materia, como el inglés Anthony Jameson.

La motivación que se hallaba tras la propuesta de conseguir definir de alguna forma este régimen no era otra sino la de dar a conocer el régimen transónico para aquellos que no dominen la materia así como para estudiantes, para los que entender este fenómeno, aunque sea de forma cualitativa, puede resultar de gran interés y utilidad, por las razones que se explicaron al comienzo de esta memoria.

La recopilación de información sobre este campo, que a día de hoy se ve dispersa y esquiva entre no demasiados libros (muchos son los que pasan ligeramente por encima, sin llegar a profundizar) y artículos (algunos de ellos demasiado farragosos,

con excesiva complejidad matemática) permite tener una visión mucho más amplia del régimen transónico de lo que se ha tenido hasta ahora.

El estudio y análisis de la línea de investigación histórica que se ha seguido sobre este fenómeno, presentado ampliamente en el capítulo 1, ha permitido al autor de este trabajo acceder a conceptos y herramientas matemáticas, así como planteamientos que se ven reflejados en el método final alcanzado (discretización, método de líneas, viscosidad artificial, condiciones de contorno, etc.). Estos elementos también han ayudado a conocer y comprender cuáles debían ser los pasos a seguir y los resultados a obtener para poder dar por válido el procedimiento descrito, sin los cuales este trabajo no habría sido posible.

El hecho de completar esta compilación en español también supone una ventaja, puesto que la literatura española relativa es muy escasa (por no decir, casi inexistente) y tener una materia de cierta complejidad expresada en una lengua extranjera (la jerga, aunque inglesa, puede resultar en algunos momentos incomprensible siendo necesaria la ayuda de un diccionario técnico) puede disuadir a aquellos que se interesen por este campo de profundizar en él.

En lo relativo a la resolución del problema, investigar y utilizar el método de líneas ha sido crucial, pues ha permitido cumplir con todos los requisitos que debía adquirir el proyecto, que a su vez representaba un gran reto pues la dificultad que implicaba era bastante alta (como se ha podido ver en el empeño que ha sido necesario para hallar los métodos empleados históricamente, así como en el procedimiento que se ha seguido en este desarrollo).

La viabilidad del método de líneas ha venido sujeta a tres cualidades: simplicidad, eficiencia y versatilidad. Poseer una herramienta que encaje en estos tres aspectos supone una importante potencia computacional, como se ha podido comprobar en los resultados, y éste ha sido uno de los aspectos que ha permitido concluir satisfactoriamente este trabajo.

Otro de los elementos fundamentales sobre los que se ha cimentado ha sido el uso del software Matlab, reconocido y usado por la amplia mayoría de personas que se manejan en el mundo de la ingeniería, tanto profesionales como estudiantes, al ser una herramienta altamente versátil que posee una biblioteca de funciones muy potente.

En concreto, han sido los programas que implementan los métodos Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales tipo *ode* (45, 15s, 23s, etc.) los que han hecho posible la resolución del sistema de ecuaciones de dinámica de fluidos potenciales. La versión que mejor encaja y funciona para el objetivo de este proyecto es *ode15s*, particularmente diseñada para resolver sistemas EDP de carácter rígido. Otros métodos, como por ejemplo Adams-Moulton, han demostrado ser menos eficientes y ha sido, de nuevo, la simplicidad de la aplicación de la función *ode* y la fiabilidad y precisión de sus resultados la que le permite formar parte de este estudio.

Por otro lado, la definición y el uso del término de la viscosidad artificial ha sido otro pilar fundamental. Las múltiples referencias a este elemento así como su expresión lo convertían en un componente clave para resolver este problema. Su uso ya fue propuesto en varias referencias de la bibliografía manejada y la efectividad de su

empleo mediante una función tan sencilla como una derivada segunda (la fórmula presentada en la referencia [7] requiere un entendimiento complejo de los términos que intervienen y un cálculo costoso y farragoso, hechos que no cuadran con los valores en los que se basa este proyecto) recalca la simplicidad y la capacidad de visualización del método en general. Sin embargo, ha sido necesario estudiar los valores para el término v que apoyan la solución sin distorsionarla demasiado, de forma que los resultados conserven el comportamiento brusco de la onda de choque.

Finalmente, en lo relativo a resultados, se ha comprobado la factibilidad de obtener una representación gráfica que muestre claramente el comportamiento del régimen transónico. La visualización de los datos conseguidos muestra la presencia de un área supersónica justo antes de la caída de valores, hasta que el Mach se halla por debajo de 1. El hecho de conseguir captar dicha discontinuidad tiene un gran valor para dar validez a este proyecto, puesto que era el objetivo clave para comprobar que realmente el método planteado podía modelar un estado de esas características.

También cabe destacar la consecución de datos para un régimen no estacionario, cuyas propiedades cualitativas han sido comparadas con los resultados por artículos de prestigio y peso como [7], lo que corrobora aún más la fiabilidad y la versatilidad del procedimiento creado.

Solo queda añadir que este proyecto supone un hito tanto a nivel personal del alumno que escribe como a nivel académico, en lo que refiere al conocimiento del régimen transónico.

Apéndice A

A.1 Fórmulas de segundo orden

Para obtener una aproximación de la expresión $\frac{du(x_i)}{dx} = u_x(x_i)$, se hace uso de los valores de la variable *u* para x_i, x_{i+1}, x_{i-1} mediante series de Taylor centradas en x_i . De esta forma, $u(x_{i+1}) \ge u(x_{i-1})$ se pueden expresar como:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx}(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u(x_i)}{dx^2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \cdots$$
$$u(x_{i-1}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx}(x_{i-1} - x_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u(x_i)}{dx^2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \cdots$$

Restando estas expresiones:

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2\Delta x \frac{du(x_i)}{dx} + \cdots$$

Con lo que, siendo $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

$$\frac{du(x_i)}{dx} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

De esta forma se obtiene la diferencia finita centrada de segundo orden. Nótese que para la utilización de este proceso es necesario tener como mínimo 3 puntos. Sin embargo, para los puntos x_1 y x_N se obtienen singularidades puesto que es necesario conocer los valores referentes a las posiciones x_0 y x_{N+1} que no están definidas. Por tanto, para estos puntos se define la fórmula de segundo orden de forma distinta:

$$u(x_2) = u(x_1) + \frac{du(x_1)}{dx}(\Delta x) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u(x_1)}{dx^2}(\Delta x)^2 + \cdots$$
$$u(x_3) = u(x_1) + \frac{du(x_1)}{dx}(2\Delta x) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u(x_1)}{dx^2}(2\Delta x)^2 + \cdots$$

Multiplicando la primera ecuación por 4 y restando la segunda:

$$4u(x_2) - 3u(x_1) - u(x_3) = (2\Delta x)\frac{du(x_1)}{dx} - \cdots$$
$$\frac{du(x_1)}{dx} = \frac{-3u(x_1) + 4u(x_2) - u(x_3)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

De forma análoga para x_N :

$$\frac{du(x_N)}{dx} = \frac{3u(x_N) - 4u(x_{N-1}) + u(x_{N-2})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Manuel Pérez Rodríguez

Para obtener la aproximación de las derivadas segundas, el procedimiento es similar al de las derivadas primeras, sumando las ecuaciones que aparecían al principio de este subapartado:

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + \frac{d^2 u(x_i)}{dx^2} (\Delta x)^2 + \cdots$$
$$\frac{d^2 u(x_i)}{dx^2} = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Para los puntos extremos, se realizan pasos semejantes para la derivada primera pero se multiplica la primera ecuación por 2 y se resta la segunda ecuación:

$$2u(x_2) - u(x_1) - u(x_3) = -\frac{d^2 u(x_1)}{dx^2} (\Delta x)^2 + \cdots$$
$$\frac{d^2 u(x_1)}{dx^2} = \frac{u(x_1) - 2u(x_2) + u(x_3)}{(\Delta x)^2}$$

Para x_N :

$$\frac{d^2 u(x_N)}{dx^2} = \frac{-u(x_1) + 2u(x_2) - u(x_3)}{(\Delta x)^2}$$

A.2 Fórmulas de cuarto orden

Para aumentar el grado de precisión de las fórmulas, es posible usar procedimientos que involucren 5 puntos $(x_i, x_{i+1}, x_{i-1}, x_{i+2}, x_{i-2})$ en vez de 3 para aproximar las derivadas, obteniendo métodos de cuarto orden. Los pasos a seguir son similares a los de las fórmulas de segundo orden:

$$u(x_{i-2}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx}(x_{i-2} - x_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u(x_i)}{dx^2}(x_{i-2} - x_i)^2 + \cdots$$
$$u(x_{i-1}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx}(x_{i-1} - x_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u(x_i)}{dx^2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \cdots$$
$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx}(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u(x_i)}{dx^2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \cdots$$
$$u(x_{i-2}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx}(x_{i+2} - x_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u(x_i)}{dx^2}(x_{i+2} - x_i)^2 + \cdots$$

Al igual que anteriormente, se procede a realizar una combinación lineal de estas ecuaciones de forma que se pueda hallar una expresión de $\frac{du(x_i)}{dx}$. Dicho procedimiento

Manuel Pérez Rodríguez

es largo y farragoso, aunque sí que es posible explicar que es necesario multiplicar cada ecuación por un coeficiente a, b, c, d y estableciendo relaciones algebraicas se alcanza el siguiente sistema:

$$-2a - b + c + 2d = 1$$

$$4a + b + c + 4d = 0$$

$$-8a - b + c + 8d = 0$$

$$16a + b + c + 16d = 0$$

El resultado de este sistema es:

$$a = \frac{2}{4!}$$
; $b = \frac{-16}{4!}$; $c = \frac{16}{4!}$; $d = \frac{-2}{4!}$

Por lo tanto, la expresión de la aproximación de cuarto orden de la derivada primera es:

$$\frac{du(x_i)}{dx} = \frac{2u(x_{i-2}) - 16u(x_{i-1}) + 16u(x_{i+1}) - 2u(x_{i+2})}{12\Delta x}$$

Para los puntos $x_1, x_2, x_{N-1}, x_{N+1}$, esta expresión sería:

$$\frac{du(x_1)}{dx} = \frac{-50u(x_1) + 96u(x_2) - 72u(x_3) + 32u(x_4) - 6u(x_5)}{12\Delta x}$$
$$\frac{du(x_2)}{dx} = \frac{-6u(x_1) - 20u(x_2) + 36u(x_3) - 12u(x_4) + 2u(x_5)}{12\Delta x}$$
$$\frac{du(x_{N-1})}{dx} = \frac{-2u(x_{N-4}) + 12u(x_{N-3}) - 36u(x_{N-2}) + 20u(x_{N-1}) + 6u(x_N)}{12\Delta x}$$
$$\frac{du(x_N)}{dx} = \frac{6u(x_{N-4}) - 32u(x_{N-3}) + 72u(x_{N-2}) - 96u(x_{N-1}) + 50u(x_N)}{12\Delta x}$$

Para derivadas segundas, este procedimiento puede ser aplicado de la misma manera, obteniéndose las siguientes aproximaciones:

$$\frac{d^2u(x_i)}{dx^2} = \frac{-2u(x_{i-2}) + 32u(x_{i-1}) - 60u(x_i) + 32u(x_{i+1}) - 2u(x_{i+2})}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4)$$

$$\frac{d^2u(x_1)}{dx^2} \approx \frac{90u(x_1) - 308u(x_2) + 428u(x_3) - 312u(x_4) + 122u(x_5) - 20u(x_6)}{12\Delta x^2}$$
$$\frac{d^2u(x_2)}{dx^2} \approx \frac{20u(x_1) - 30u(x_2) - 8u(x_3) + 28u(x_4) - 12u(x_5) + 2u(x_6)}{12\Delta x^2}$$
$$\frac{d^2u(x_{N-1})}{dx^2} \approx \frac{20u(x_N) - 30u(x_{N-1}) - 8u(x_{N-2}) + 28u(x_{N-3}) - 12u(x_{N-4}) + 2u(x_{N-5})}{12\Delta x^2}$$

Manuel Pérez Rodríguez

$$\frac{d^2u(x_N)}{dx^2} \approx \frac{90u(x_N) - 308u(x_{N-1}) + 428u(x_{N-2}) - 312u(x_{N-3}) + 122u(x_{N-4}) - 20u(x_{N-5})}{12\Delta x^2}$$

Esta aproximación es muy precisa para la mayoría de sistemas de ecuaciones diferenciales, por lo que se puede considerar un método de gran robustez, y además tiene la ventaja de que permite aplicar los tres tipos de condiciones de contorno existentes (Dirichlet, Neumann y el tercer tipo) de forma exacta.

A.3 Fórmula de Carver y Hinds

Aparte de la ya demostrada fórmula de cuarto orden, existe otro método de aproximación de igual orden desarrollado por los investigadores Carver y Hinds que ofrece dos caras: diferencias finitas centradas y diferencias finitas *upwind* o *downstream*.

Estas expresiones para las diferencias *upwind* son las que se describen a continuación:

Para x_i , i = 4, ..., N - 1

$$\frac{du(x_i)}{dx}\bigg|_c = \frac{-u(x_{i-3}) + 6u(x_{i-2}) - 18u(x_{i-1}) + 10u(x_i) + 3u(x_{i+1})}{12\Delta x}$$

Para x_1, x_2, x_3, x_N

$$\frac{du(x_1)}{dx}\Big|_c = \frac{-25u(x_1) + 48u(x_2) - 36u(x_3) + 16u(x_4) - 3u(x_5)}{12\Delta x}$$
$$\frac{du(x_2)}{dx}\Big|_c = \frac{-3u(x_1) - 10u(x_2) + 18u(x_3) - 6u(x_4) + u(x_5)}{12\Delta x}$$
$$\frac{du(x_3)}{dx}\Big|_c = \frac{u(x_1) - 8u(x_2) + 8u(x_4) - u(x_5)}{12\Delta x}$$
$$\frac{du(x_N)}{dx}\Big|_c = \frac{3u(x_{N-4}) - 16u(x_{N-3}) + 36u(x_{N-2}) - 48u(x_{N-1}) + 25u(x_N)}{12\Delta x}$$

Para las diferencias finitas downstream, las expresiones pasan a ser:

Para x_i , i = 2, ..., N - 3

$$\frac{du(x_i)}{dx}\bigg|_c = \frac{-3u(x_{i-1}) - 10u(x_i) + 18u(x_{i+1}) - 6u(x_{i+2}) + u(x_{i+3})}{12\Delta x}$$

Para x_1, x_2, x_3, x_N

$$\frac{du(x_1)}{dx}\Big|_c = \frac{-25u(x_1) + 48u(x_2) - 36u(x_3) + 16u(x_4) - 3u(x_5)}{12\Delta x}$$
$$\frac{du(x_{N-2})}{dx}\Big|_c = \frac{u(x_{N-4}) - 8u(x_{N-3}) - 8u(x_{N-1}) - u(x_N)}{12\Delta x}$$
$$\frac{du(x_{N-1})}{dx}\Big|_c = \frac{-u(x_{N-4}) + 6u(x_{N-3}) - 18u(x_{N-2}) + 10u(x_{N-1}) + 3u(x_N)}{12\Delta x}$$
$$\frac{du(x_N)}{dx}\Big|_c = \frac{3u(x_{N-4}) - 16u(x_{N-3}) + 36u(x_{N-2}) - 48u(x_{N-1}) + 25u(x_N)}{12\Delta x}$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Anderson, J. D. - Modern Compressible Flow. Third Edition (2003)

[2] Jameson, A. – 50 years of Transonic Aircraft Design, Progress in Aerospace Sciences Paper (2011)

[3] Jameson, A. – Aerodynamics

[4] Jameson, A.; Schmidt, W.; Turkel, E. - Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes

[5] Bendiksen,O. – *Review of unsteady transonic aerodynamics: Theory and applications*, Progress in Aerospace Sciences Paper (2010)

[6] Pereira, R.M.S.; Gajjar, J.S.B. – *Transonic inviscid flows past thin airfoils: A new numerical method and global stability analysis using Matlab*(2010)

[7] Jameson, A.; Chipman R. – Fully Conservative Numerical Solutions for Unsteady Irrotational Transonic Flow about Airfoil, AAIA 12th Fluid and Plasma Dynamics Conference (1979)

[8] Swanson, R.C.; Turkel, E. – A Multistage Time-Stepping Scheme for the Navier-Stokes Equations(1985)

[9] Subramanian, S.V.; Bozzola, R. – *Aplication of Runge-Kutta Time Marching Scheme for the Computation of Transonic Flows in Turbomachines* (1985)

[10] Anderson, J. D. – Introduction to Flight. Third Edition (1989)

[11] Jameson, A.; Caughey, D.A. – *Numerical Computation of the Transonic Flow past a Swept Wing* (1977)

[12] Jameson, A. – Numerical Computation of Transonic Flow with Shock Waves

[13] Jameson, A. – Transonic Potential Flow Calculations Using Conservation Form

[14] Drela, M. – Flight Vehicle Aerodynamics

[15] Hyman, J. – The Method of Lines Solution of Partial Differential Equations(1976)

[16] Schiesser, W.E. – The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations

[17] Schiesser, W.E. - Computational Mathematics in Engineering and Applied Science

[18] Tannehill, J.C.; Anderson. D.A.; Pletcher, R.H. – *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*

[19] Anderson, J.D. - Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications

[20] Engineering Sciences Data Unit (ESDU) – Introduction to Transonic Aerodynamics of Airfoils and Wings

[21] Barrero Ripoll, A.; Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, Miguel – Aerodinámica de altas velocidades

[22] Leipmann, H.W.; Roshko, A. - Elements of Gasdynamics

[23] Shapiro, A.H. - Compressible Fluid Flow

[24] Ricthmeyr, R.D.; Morton, K. W. - Difference Methods for Initial-Value Problems

[25] Esteban Roncero, S. – *Tema 6: Actuaciones Preliminares*. Diapositivas de Cálculo de Aeronaves

[26] Barther, G.E. – Shock Capturing with PDE-Based Artificial Viscosity for an Adaptive, Higher-Order Discontinuous Galerkin Finite Element Method

[27] Jameson, A. – Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings