

Proyecto Fin de Carrera Ingeniería Aeronáutica

Análisis y optimización de la maniobra de rendezvous de vehículos espaciales utilizando elementos orbitales relativos

Autor: Gino Daniel Jiménez Segura

Tutor: Rafael Vázquez Valenzuela

**Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2015



Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Aeronáutica

Análisis y optimización de la maniobra de rendezvous de vehículos espaciales utilizando elementos orbitales relativos

Autor:

Gino Daniel Jiménez Segura

Tutor:

Rafael Vázquez Valenzuela

Profesor titular

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015

Proyecto Fin de Carrera: Análisis y optimización de la maniobra de rendezvous de vehículos espaciales
utilizando elementos orbitales relativos

Autor: Gino Daniel Jiménez Segura

Tutor: Rafael Vázquez Valenzuela

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2015

El Secretario del Tribunal

A mi familia
A mis amigos

Agradecimientos

El camino recorrido hasta llegar a este punto no ha sido fácil en ningún momento. El presente Proyecto es sólo el último paso a dar para conseguir lo que llevo persiguiendo tanto tiempo. En ese camino, he realizado un gran sacrificio y trabajo durante seis intensos años en los que he crecido formándome como ingeniero pero, sobre todo, como persona. Sin duda alguna, ese largo camino se habría tornado irrealizable si no hubiese contado con el apoyo de muchas personas, personas sin las que esto habría sido imposible, personas que han compartido mis frustraciones, alegrías y desánimos, personas a las que quiero dedicar este Proyecto y a las que siempre estaré agradecido por todo el apoyo prestado.

En primer lugar me gustaría nombrar a mi familia. Mis padres, por el esfuerzo realizado a lo largo de este tiempo, por estar ahí en todo momento, por comprenderme, por enseñarme a creer en mí mismo. Mis abuelas, por todo el cariño y ánimo dado. Y, en general, toda la familia.

Por otro lado, quiero mostrar mi agradecimiento a mis amigos y compañeros de fatigas, que siempre han prestado ayuda y que han sido un pilar fundamental para mí todo este tiempo. María José, Jaime, Ana,...

Por último, doy las gracias a mi tutor, Rafael Vázquez, por darme este Proyecto y por haber apostado por mí para sacarlo adelante.

A todos, gracias.

Las maniobras de rendezvous, en las que se persigue el acoplamiento entre dos estructuras espaciales, son una de las más peliagudas y críticas que se pueden dar en el espacio; a pesar de todo, el desarrollo de las estaciones espaciales modulares, entre otras estructuras, durante las últimas décadas, ha hecho que dichas maniobras proliferen. El control que requiere este tipo de movimiento relativo debe ser extremadamente preciso y cuidadoso pues la integridad de dos sistemas, que pueden estar habitados, está en juego.

En el presente proyecto se plantea un problema genérico de rendezvous, que se abordará siguiendo una metodología basada en elementos orbitales relativos. Para comprobar la veracidad de este método se establecerá, a lo largo del documento, una comparación con el tradicional basado en coordenadas cartesianas. Una vez verificado, se efectuará un desarrollo teórico que dará lugar a un algoritmo que permitirá tener un modelo de control predictivo del rendezvous en cuestión. Este algoritmo permitirá realizar un diseño óptimo de las maniobras de un vehículo respecto de otro de manera que se minimice el consumo y se consiga el rendezvous.

A pesar de las simplificaciones asumidas, se considera la existencia de la perturbación más importante que se da a estas altitudes, la perturbación del J_2 . Finalmente, y tras las conclusiones derivadas de la resolución del problema planteado, se expondrán diversas ideas para trabajos y extensiones futuras del proyecto.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Índice	xiii
Índice de Tablas	xv
Índice de Figuras	xvii
1 Introducción	1
1.1. Alcance y contexto del Proyecto	1
1.2. Estructura del Proyecto	2
2 Modelado del movimiento relativo	3
2.1. El concepto de rendezvous	3
2.2. Hipótesis de partida y características de la misión	4
2.2.1. Seguridad	4
2.2.2. Problema de la actitud	5
2.2.3. Minimización del consumo	5
2.2.4. Órbita del blanco	5
2.3. Métodos para calcular la órbita relativa	5
2.3.1. Sistemas de referencia	6
2.3.2. Elementos orbitales	7
2.3.3. Método basado en coordenadas cartesianas	8
2.3.4. Método de los elementos orbitales relativos	12
2.3.5. Correspondencia entre los métodos	15
3 Verificación del método de los elementos orbitales relativos	19
3.1. Veracidad del método de los ROE: movimiento relativo libre	19
3.1.1. Variables de entrada	21
3.1.2. Variables de salida	23
3.1.3. Resultados	23
3.2. Veracidad del método de los ROE: movimiento relativo forzado	29
4 Procedimientos para el cálculo y optimización del rendezvous	33
4.1. Maniobra de dos impulsos	33
4.2. Problema del control	35
4.2.1. Formulación en el espacio de estados	35
4.2.2. Restricciones	36
4.3. Modelo de Control Predictivo	36
4.3.1. Predicción del estado	36
4.3.2. Función objetivo	37
4.3.3. Expresión de restricciones	37
4.3.4. Cálculo de la señal de control	38
4.4. Perturbaciones	39
5 Análisis de resultados	41
5.1. Datos de partida	41
5.2. Problema de los dos impulsos	42

5.3. <i>Problema de rendezvous mediante control predictivo</i>	45
5.3.1. Modelo perturbado y no perturbado	45
5.3.2. Variación de los resultados con las condiciones iniciales	50
5.3.3. Variación de los resultados con los elementos orbitales del blanco	66
5.3.4. Desajustes en el cálculo de la órbita relativa	70
5.3.5. Desalineación de las toberas	78
5.3.6. Sobre el software utilizado	80
5.4. <i>Conclusiones</i>	82
6 Planteamiento de la restricción de no colisión	87
7 Trabajo futuro y conclusiones del proyecto	93
7.1. <i>Conclusiones</i>	93
7.2. <i>Tendencias futuras</i>	93
7.2.1. Problema de actitud	94
7.2.2. Cono de visión	94
7.2.3. Estudios de seguridad	95
7.2.4. Inclusión de más perturbaciones	95
Referencias	97

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Elementos Orbitales del Blanco	23
Tabla 2. Condiciones iniciales del movimiento relativo, en cartesianas	41
Tabla 3. Condiciones iniciales del movimiento relativo, en <i>ROE</i>	42
Tabla 4. Parámetros que intervienen en el problema	42
Tabla 5. Impulsos efectuados en las maniobras de los dos impulsos	44
Tabla 6. Comparación gastos modelo perturbado y no perturbado	47
Tabla 7. Comparación casos perturbado y no perturbado para varias <i>e</i>	48
Tabla 8. Condiciones iniciales para variaciones de x_0	50
Tabla 9. Gastos en función de x_0	53
Tabla 10. Condiciones iniciales para y_0 variable	54
Tabla 11. Gastos en función de y_0	55
Tabla 12. Condiciones iniciales para z_0 variable	56
Tabla 13. Variación del gasto para varios valores de z_0	58
Tabla 14. Condiciones iniciales cuando x_{p0} es variable	60
Tabla 15. Evolución del gasto con x_{p0}	61
Tabla 16. Condiciones iniciales con y_{p0} variable	62
Tabla 17. Gasto para varios valores de y_{p0}	63
Tabla 18. Evolución del gasto con v_{z0}	65
Tabla 19. Comparación de gastos para varios valores de ω	67
Tabla 20. Evolución del gasto con la inclinación de la órbita del blanco	68
Tabla 21. Evolución del gasto con a	70
Tabla 22. Gastos según desajuste de $\delta\theta$	71
Tabla 23. Gastos según desajuste de δq_1	73
Tabla 24. Gastos según desajuste de δq_2	74
Tabla 25. Gastos según desajuste de δa	75
Tabla 26. Gasto según desajustes en δi	76
Tabla 27. Gasto según desajustes en $\delta\Omega$	77
Tabla 28. Comparación gastos para diferentes desviaciones en las toberas	80
Tabla 29. Comparación de tiempos empleados según el programa empleado	81
Tabla 30. Comparación gastos según condiciones iniciales	82
Tabla 31. Comparación de gastos para desajustes por debajo del óptimo	83
Tabla 32. Comparación de gastos para desajustes por encima del óptimo	84

ÍNDICE DE FIGURAS

Ilustración 1. Sistema de referencia de Hill	6
Ilustración 2. Sistema de referencia perifocal	7
Ilustración 3. Elementos orbitales	8
Ilustración 4. Órbita relativa según método cartesiano	9
Ilustración 5. Comparación métodos rendezvous libre	24
Ilustración 6. Detalle comparación métodos rendezvous libre	25
Ilustración 7. Comparación métodos rendezvous libre. Blanco a 10 km	25
Ilustración 8. Errores absolutos al usar <i>ROE</i>	26
Ilustración 9. Errores relativos al usar <i>ROE</i>	26
Ilustración 10. Vista <i>x-y</i> de órbitas según <i>ROE</i> para rendezvous libre y varios valores de <i>e</i>	27
Ilustración 11. Vista <i>x-z</i> de órbitas según <i>ROE</i> para rendezvous libre y varios valores de <i>e</i>	27
Ilustración 12. Vista <i>y-z</i> de órbitas según <i>ROE</i> para rendezvous libre y varios valores de <i>e</i>	28
Ilustración 13. Vista <i>3D</i> de órbitas según <i>ROE</i> para rendezvous libre y varios valores de <i>e</i>	28
Ilustración 14. Comparación métodos con aplicación de v_x	30
Ilustración 15. Comparación métodos con aplicación de v_y	30
Ilustración 16. Comparación métodos con aplicación de v_z	31
Ilustración 17. Maniobra de los 2 impulsos. Vista <i>x-z</i> para varios valores de <i>e</i>	43
Ilustración 18. Maniobra de los 2 impulsos. Vista <i>y-z</i> para varios valores de <i>e</i>	43
Ilustración 19. Maniobra de los dos impulsos. Vista <i>x-y</i> para varios valores de <i>e</i>	44
Ilustración 20. Tendencia del gasto con la excentricidad en la maniobra de los dos impulsos	45
Ilustración 21. Comparación entre modelo perturbado y no perturbado. Vista <i>x-y</i> .	46
Ilustración 22. Comparación entre modelo perturbado y no perturbado. Vista <i>y-z</i> .	46
Ilustración 23. Comparación entre modelo perturbado y no perturbado. Vista en <i>3D</i>	47
Ilustración 24. Comparación modelo perturbado y no perturbado para varios valores de <i>e</i>	48
Ilustración 25. Planificación vs Control predictivo para $e = 0.2$.	49
Ilustración 26. Planificación vs Control predictivo para $e = 0.5$.	50
Ilustración 27. Rendezvous perturbado para x_0 variable. Vista <i>x-y</i>	51
Ilustración 28. Rendezvous perturbado para x_0 variable. Vista <i>y-z</i>	51
Ilustración 29. Rendezvous perturbado para x_0 variable. Vista <i>3D</i>	52
Ilustración 30. Rendezvous no perturbado para varios valores de x_0 . Vista <i>x-y</i>	52
Ilustración 31. Comparación de la evolución del gasto modelo perturbado y no perturbado según x_0	53
Ilustración 32. Rendezvous del caso perturbado para y_0 (km) variable. Vista <i>x-y</i>	54
Ilustración 33. Rendezvous del caso perturbado para y_0 (km) variable. Vista <i>x-z</i>	55
Ilustración 34. Rendezvous del caso no perturbado para y_0 variable	56

Ilustración 35. Rendezvous del caso perturbado para varios valores de z_0 . Vista x-y	57
Ilustración 36. Rendezvous del caso perturbado para varios valores de z_0 . Vista y-z	57
Ilustración 37. Rendezvous del caso perturbado para varios valores de z_0 . Vista 3D	58
Ilustración 38. Rendezvous no perturbado para varios valores de z_0	59
Ilustración 39. Comparación de la evolución del gasto con z_0 entre modelo perturbado y no perturbado	59
Ilustración 40. Rendezvous para varios valores de v_{x0} . Vista x-y	60
Ilustración 41. Rendezvous para varios valores de v_{x0} . Vista y-z	60
Ilustración 42. Rendezvous para varios valores de x_{p0} . Vista 3D	61
Ilustración 43. Rendezvous para varios valores de y_{p0} . Vista x-y	62
Ilustración 44. Rendezvous para varios valores de y_{p0} . Vista y-z	62
Ilustración 45. Rendezvous para varios valores de y_{p0} . Vista 3D	63
Ilustración 46. Evolución del gasto con y_{p0} en el caso perturbado	64
Ilustración 47. Rendezvous para varios valores de z_{p0} . Vista x-y	64
Ilustración 48. Rendezvous para varios valores de z_{p0} . Vista 3D	65
Ilustración 49. Evolución del gasto con v_{z0} en el caso perturbado	66
Ilustración 50. Órbitas relativas según valores de ω	67
Ilustración 51. Evolución del gasto con ω	67
Ilustración 52. Evolución de la órbita relativa con el elemento orbital i	68
Ilustración 53. Evolución del gasto con el valor de i	69
Ilustración 54. Evolución de la órbita relativa según a (km)	69
Ilustración 55. Evolución del gasto con a	70
Ilustración 56. Desajustes en $\delta\theta$. Vista x-y	71
Ilustración 57. Desajustes en $\delta\theta$. Vista x-z	71
Ilustración 58. Desajustes en δq_1 . Vista x-y	72
Ilustración 59. Desajustes en δq_1 . Vista x-z	72
Ilustración 60. Desajustes en δq_2 . Vista x-y	73
Ilustración 61. Desajustes en δq_2 . Vista x-z	74
Ilustración 62. Desajustes en δa . Vista x-y	74
Ilustración 63. Desajustes en δa . Vista y-z	75
Ilustración 64. Desajustes en δi . Vista x-y	76
Ilustración 65. Desajustes en δi . Vista x-z	76
Ilustración 66. Desajustes en $\delta\Omega$. Vista x-y	77
Ilustración 67. Desajustes en $\delta\Omega$. Vista y-z	77
Ilustración 68. Rendezvous con toberas desalineadas al 95%	78
Ilustración 69. Rendezvous con toberas desalineadas al 90%	79
Ilustración 70. Rendezvous con toberas desalineadas al 90% y $e = 0.5$	79
Ilustración 71. Comparación gráfica de los diferentes métodos	81
Ilustración 72. Comparación gráfica de tiempos de cómputo según métodos	82
Ilustración 73. Comparación gastos para los casos óptimo y el problema de los dos impulsos	85

1 INTRODUCCIÓN

A lo largo de la segunda mitad del siglo XX ha existido una tendencia creciente en el desarrollo de estructuras espaciales para misiones de observación terrestre, entre otras. Los primeros diseños lanzados al espacio eran de carácter unimodular, modelos constituidos por una pieza única puestos en órbita mediante un único lanzamiento desde su base en la Tierra. Con el tiempo, la evolución en las características de ciertas misiones, el aumento del tamaño de las estructuras (con el consiguiente cambio a diseños modulares) y la necesidad de conseguir acceso al interior de las mismas para realizar labores de mantenimiento crearon la necesidad de diseñar maniobras de aproximación entre dos estructuras con el fin de realizar un posterior acoplamiento entre ellas (*docking*). Este concepto, conocido como rendezvous, tiene su origen en este contexto de necesidad.

El ejemplo más representativo es la Estación Espacial Internacional, diseño modular que pone de manifiesto que las maniobras de rendezvous son esenciales en la actualidad. Esta mecánica requiere de gran precisión y control y son de vital importancia por numerosas razones. Es por ello por lo que se desarrolla el presente Proyecto.

1.1. Alcance y contexto del Proyecto

El objetivo que se persigue es analizar y optimizar el problema genérico de rendezvous de vehículos espaciales mediante el método de los elementos orbitales relativos. El método de los elementos orbitales relativos resulta ser un método poco empleado hasta la fecha que fue desarrollado en el Laboratorio de Investigación de la Fuerza Aérea y en el AFIT (Instituto tecnológico del Ejército del Aire) de los Estados Unidos. Constituyó una gran novedad en el campo de la mecánica orbital, proporcionando una visión de la geometría del problema mucho más clara que la que proporcionaba el tradicional método basado en coordenadas cartesianas.

La maniobra de rendezvous no es una única, como se explica en el capítulo 2, sino que está compuesta de varios tramos de maniobras que se consideran o no en función del tipo de problema que se tenga. El cálculo de la órbita relativa, la que aparentemente describe el vehículo perseguidor alrededor del blanco, se predice gracias al método basado en *ROE*, el cual data de 2004. Sus desarrolladores, Lovell, Tragesser y Tollefson, lo crearon para estudiar las órbitas relativas de manera más intuitiva. Además, formularon la relación de transformación entre este método y el cartesiano y obtuvieron la solución de las ecuaciones de Hill-Clohessy-Wiltshire en términos de estos elementos orbitales relativos. El autor Press también contribuyó, poco después, a un mayor desarrollo y aprovechamiento de este procedimiento [7].

A pesar de la juventud del procedimiento, ya ha sido usado por organismos espaciales tan importantes como la DLR alemana o la NASA estadounidense. En el primer caso, se ha recurrido al método de los elementos orbitales relativos para formular de manera sencilla el sistema adecuado para evitar colisiones entre los módulos TerraSAR-X y TanDEM-X [17]. En el caso de la asociación norteamericana, se han realizado numerosas aplicaciones como las definidas en [18].

Tras el cálculo de la órbita relativa y la comprobación de la fiabilidad y validez de la misma, lo interesante es

conseguir el rendezvous respetando una serie de restricciones y minimizando la variable de decisión que, en este caso, será el gasto de combustible. La optimización se llevará a cabo mediante un algoritmo de control predictivo, estándose en disposición, posteriormente, de verter las pertinentes conclusiones sobre los diferentes resultados obtenidos.

1.2. Estructura del Proyecto

En el presente capítulo se ha llevado a cabo una definición del objeto y motivación del Proyecto desarrollado, aludiendo al recorrido histórico que ha experimentado el método de los elementos orbitales relativos, a la finalidad con la que éste es empleado en el cálculo de la órbita relativa necesaria para la consecución del rendezvous y al uso actual que éste tiene en los distintos organismos espaciales del mundo (NASA, ESA, DLR,...). Se establece el objetivo del proyecto, el cual no es otro que construir un algoritmo que optimice las maniobras de rendezvous de vehículos espaciales, minimizando el consumo de combustible.

En el capítulo 2 se define, por un lado, la teoría del problema de rendezvous, nombrando las diferentes hipótesis de partida del problema, además de comentar ciertos rasgos que caracterizan a las maniobras de rendezvous. Por otro lado, se explica con detalle la formulación del método de los elementos orbitales relativos, previa definición de la teoría que en ella interviene (elementos orbitales, sistemas de referencia usados en mecánica orbital). Por último, se describe el tradicional método cartesiano y la correspondencia entre éste y el de los *ROE* con el objetivo de llevar a cabo una verificación del buen funcionamiento de este último de cara a su uso en la optimización.

La verificación nombrada en el párrafo anterior constituye, de por sí, la totalidad del capítulo 3, habiéndose comprobado el correcto funcionamiento en el movimiento relativo libre y en el movimiento relativo forzado.

El capítulo 4 incluye toda la formulación relativa a los diferentes procedimientos que se han usado para el cálculo del rendezvous y su optimización. Se define el problema de los dos impulsos como caso simple y se detalla, posteriormente, el verdadero problema de control, que viene dado por la construcción de un modelo de control predictivo que calculará los impulsos de velocidad necesarios para alcanzar el rendezvous, satisfaciendo las restricciones impuestas y minimizando el gasto de combustible. Por último, se introduce un último apartado en el que queda recogido el desarrollo teórico matemático para incluir las perturbaciones más importantes que afectarán al sistema en la evolución de su estado.

El capítulo 5 recoge todos los resultados gráficos y numéricos resultantes de implementar toda la formulación desarrollada en el capítulo 4. Se muestran tanto los resultados que arroja el modelo del problema de los dos impulsos como los predichos por el modelo de control predictivo perturbado y no perturbado. Asimismo, se realizan análisis sobre la influencia en los resultados de las condiciones iniciales del movimiento relativo y de los elementos orbitales del blanco. Igualmente, se hace un pequeño estudio acerca de los efectos que sobre el gasto de combustible tiene el hecho de que el bloque de control se realimente con datos de elementos orbitales relativos erróneos y el hecho de que las toberas propulsivas presenten una cierta desalineación respecto de su eje de referencia. Estas desviaciones consideradas han sido pequeñas (del orden del 5%-10% del valor máximo del dato verdadero correspondiente). Por último, se establece una comparación muy sucinta sobre los tiempos de computación de los tres métodos de programación empleados.

Una de las hipótesis simplificativas más importantes que se han acatado a la hora de desarrollar teóricamente el método de control es la de obviar la restricción de no colisión. En el capítulo 6 se formula un desarrollo detallado de la misma a pesar de no haberse implementado.

Por último, el capítulo 7 recoge las conclusiones generales que se han obtenido de la construcción del presente Proyecto así como pequeñas pinceladas sobre el trabajo futuro que podrá desarrollarse a partir de todo el trabajo aquí explicado.

2 MODELADO DEL MOVIMIENTO RELATIVO

A lo largo del capítulo actual se desarrollará todo lo concerniente al modelado de la órbita relativa entre el vehículo blanco y el perseguidor, de manera que resulte una formulación simple de implementar y se defina por completo el problema del movimiento relativo, como se ha dicho. Para ello, se definirá el problema del rendezvous desde sus inicios, explicando las fases de que consta, las características de cada una de ellas, etc. Asimismo, se listarán las diferentes hipótesis simplificadoras tenidas en cuenta.

En el último apartado se detalla el desarrollo matemático de los dos métodos que se compararán posteriormente, siendo uno el comprobante del correcto funcionamiento y de la validez del otro. Previamente se definen ciertos conceptos necesarios para el entendimiento y formulación de dichos métodos.

2.1. El concepto de rendezvous

Las maniobras de rendezvous tienen como objetivo conseguir el acoplamiento de dos vehículos espaciales que se encuentran orbitando en el espacio. En este Proyecto se considerará que un vehículo, denominado indistintamente blanco, objetivo o *chief*, se mueve en una órbita geocéntrica determinada mientras que otro, llamado perseguidor, *deputy* o *chaser*, también orbitando alrededor de la Tierra, es el encargado de efectuar todas las maniobras pertinentes para conseguir el acoplamiento al primero. La acepción de vehículo espacial es ambigua, pudiendo tratarse de sondas, satélites o de cualquier otra estructura espacial.

A priori, se desconoce cuán lejos se encuentra el vehículo perseguidor del blanco. El interceptor puede encontrarse en la superficie terrestre o en otra órbita, por lo que el rendezvous, desde que comienza hasta el acoplamiento final, puede dividirse en diferentes fases o etapas [1]:

- Fase orbital: en esta etapa se lleva el vehículo perseguidor a una órbita de aparcamiento adecuada, en caso de estar inicialmente en tierra. Previsiblemente, esta órbita no será la misma que recorre el vehículo objetivo. Lo más conveniente es conseguir las condiciones necesarias en posición y velocidad para efectuar la etapa siguiente, de aproximación.
- Fase de acercamiento inicial: en esta etapa se persigue realizar una aproximación del interceptor al blanco, reduciendo la distancia entre ellos desde un rango de 10 – 100 km hasta 10 – 1000 m.
- Fase de acercamiento final: se efectúan maniobras para acercar el vehículo interceptor al blanco a muy poca distancia (menos de 1 m). El control en velocidad en esta etapa ha de ser muy cuidadoso y estricto pues se pone en juego la integridad de ambas estructuras espaciales. La velocidad relativa deberá reducirse hasta hacerse prácticamente nula. El control en posición, obviamente, juega un papel fundamental por la forma de ambas estructuras y la cercanía entre ellas, además de por la necesidad de orientar el vehículo perseguidor para conseguir el éxito en la última fase.
- Acoplamiento o *docking*: la fase final es el contacto entre las dos estructuras, que deberá ser lo más suave posible para impedir que se produzcan daños en alguna de ellas, y el posterior acoplamiento que fijará definitivamente ambos vehículos. Si no existe ese acoplamiento tras el contacto, entonces la operación se denominaría *berthing*.

Como se puede deducir de lo anterior, cada una de las fases de que consta un rendezvous completo supone un problema en sí. Las condiciones a considerar evolucionan a lo largo de las diferentes etapas. En la primera fase, la orbital, los efectos que produce la resistencia aerodinámica son muy considerables si el vehículo parte desde tierra mientras que en las siguientes no. Igualmente, las primeras fases constituyen un problema de alcance en tanto que las últimas podrían definirse como un problema de control, en donde la precisión en el diseño se torna extremadamente importante y crítica. Este proyecto se centrará exclusivamente en la tercera etapa de las cuatro descritas: el acercamiento final. Para estudiarla y analizarla habrá que tener en cuenta una serie de consideraciones relativas a la misión, que serán detalladas posteriormente.

2.2. Hipótesis de partida y características de la misión

El conjunto de maniobras que el vehículo perseguidor realizará para dar caza al objetivo conformará el perfil de la misión. La descripción matemática de dicha misión se deja para el capítulo siguiente. Para el caso que se estudia, se deberán atender a los siguientes puntos.

2.2.1. Seguridad

Hay que hacer hincapié en que, a pesar de tratar los aspectos relativos a la seguridad de la misión como parte integrante del Proyecto, la formulación matemática en que desemboca no ha sido considerada en los resultados del capítulo 5. No obstante, en el capítulo 6, se presenta dicha formulación de manera detallada, quedando su implementación como trabajo futuro del presente Proyecto.

Las características de la etapa del rendezvous que se va a estudiar obligan a realizar un diseño muy cuidadoso y estricto de la maniobra por cuestiones de seguridad, como ya se ha comentado. En ese sentido, se antoja primordial evitar a toda costa cualquier colisión entre blanco y perseguidor. Para lograr este objetivo se deben cumplir una serie de requisitos [2], listados a continuación:

- El vehículo perseguidor estará forzado a permanecer, en todo momento, en el interior de un determinado área que deberá ser detectable por el vehículo objetivo.
- Si por cualquier circunstancia o motivo se produjera un fallo de motor no catastrófico que permite, a pesar de todo, realizar maniobras, deberá cumplirse la misión de forma segura o, en su defecto, se deberá poder efectuar una maniobra evasiva para garantizar la integridad estructural de ambos vehículos espaciales.
- En el hipotético caso en que se produjese un fallo total de la planta motora no podrá existir, bajo ningún concepto, un punto de intersección (en cualquier instante posterior a aquel en el que se produce el fallo) entre las trayectorias de ambos vehículos, evitando así cualquier choque eventual que se pudiera producir entre las mismas.

El primer punto limitaría enormemente el abanico de posibles resultados a obtener, tornándose en una restricción del problema. Sin embargo, y con vistas a no extralimitarse de los objetivos planteados inicialmente, este punto se supondrá hipótesis de partida del problema a estudiar.

La segunda restricción alude directamente a la fisonomía del vehículo perseguidor. Es habitual que un vehículo de estas características tenga la capacidad de efectuar un impulso en tres direcciones independientes del espacio para realizar cualquier tipo de maniobra posible. El hecho de que el vehículo no sea una masa puntual implicará la presencia de tres pares de propulsores. De esta manera, la pérdida de la posibilidad de impulso en una dirección cualquiera durante la misión se catalogará como fallo crítico, en tanto que la pérdida total del sistema de propulsión del vehículo quedará encuadrada dentro de fallos catastróficos. Por otro lado, el fallo de un propulsor puede considerarse fallo simple. Como requisito de seguridad en el diseño se establece que:

- Ningún fallo simple debe tener consecuencias críticas.

- Ninguna combinación de dos fallos simples debe tener consecuencias catastróficas.

El tercero y último de los requerimientos permite garantizar la integridad tanto del vehículo objetivo como del perseguidor en caso de fallo total de la planta motora. Para tener esto en cuenta debería realizarse un estudio pormenorizado del caso de trayectorias libres, en las que ambos vehículos se encuentran sometidos únicamente a la fuerza de atracción gravitatoria.

Particularizado a este proyecto, se considerará un vehículo que dispone de tres pares de propulsores de manera que, independientemente de la actitud del mismo, será capaz de efectuar cualquier maniobra. Esto representa una ventaja si se compara este caso con el de un vehículo que solo posea un par de propulsores. En este último ejemplo se debería estudiar adicionalmente la actitud del vehículo respecto de unos ejes de referencia para conocer, en todo momento, qué orientación deben tener los propulsores para efectuar la maniobra requerida. Esta selección del modelo de vehículo verificará las reglas enunciadas anteriormente y cuenta con la ventaja adicional de ser un modelo realista. La demostración de que se cumple lo especificado en los puntos anteriores se dejará para trabajos futuros.

2.2.2. Problema de la actitud

Un rendezvous completo está compuesto por maniobras de corte meramente propulsivo, por un lado, y de maniobras de control de actitud por otro. Estas últimas requieren una precisión y control excepcionales para que el acoplamiento final tenga éxito. Su importancia es mayor en la última etapa del rendezvous por lo que, para este caso en el que el análisis de la tercera fase será el objetivo, se obviarán.

Así, el no considerar el problema de la actitud en el modelado del problema obligará a adoptar como cierta la hipótesis de que la posición del *chaser* según un sistema de ejes cuerpo centrado en su centro de gravedad respecto de otros ejes cuerpo con origen en el centro de gravedad del blanco será la apropiada para conseguir el rendezvous final.

2.2.3. Minimización del consumo

Un objetivo claro de la misión y del proyecto es la viabilidad económica. Los proyectos de investigación científica o de diseño siempre persiguen que sean realizables desde el punto de vista económico. Esta variante se reflejará en el consumo de combustible, cuya minimización será buscada. Para conseguir dicho objetivo, se modelará un problema de optimización que será resuelto numéricamente.

2.2.4. Órbita del blanco

Entre los datos de partida del problema que se estudia, la órbita que recorre el *chief* es uno de los más importantes. Su conocimiento puede venir dado en forma de elementos orbitales, como se detallará en el próximo apartado. Las órbitas del blanco que se supondrán serán siempre cerradas y podrán ser circulares, que será el caso más simple, o excéntricas. Este último caso será el más realista pues las órbitas circulares son ejemplos muy simplificados que nunca se dan aunque se aproximen. Las órbitas elípticas, por el contrario, son las predominantes tanto en movimientos naturales de astros como en órbitas diseñadas por el hombre.

2.3. Métodos para calcular la órbita relativa

En este apartado del capítulo se desarrolla el método matemático que servirá de base para la realización de apartados posteriores: el método de los elementos orbitales relativos, conocido más comúnmente por sus siglas

en inglés, *ROE (relative orbit elements)*. Se comprobará, en el capítulo siguiente, la veracidad del mismo estableciendo una comparación entre los resultados que arroja dicho método y los que predice el tradicional que hace uso de coordenadas cartesianas. Para poder llevar a cabo este objetivo se definen unos determinados sistemas de coordenadas y las matrices de transformación entre ellos pues, en el momento de realizar la comparación, ambos grupos de resultados deberán expresarse, evidentemente, según los mismos ejes coordenados.

2.3.1. Sistemas de referencia

Los sistemas de coordenadas que resultarán útiles a la hora de llevar a cabo el estudio del problema del rendezvous serán los definidos a continuación.

- **Sistema de referencia inercial.**

Se considerará un sistema de referencia anclado a la Tierra e inercial. El eje x apuntará en dirección al primer punto de Aries y el plano OXY coincidirá con el plano de la eclíptica. Será necesario para montar el modelo que prediga la evolución de la órbita relativa del vehículo perseguidor respecto del objetivo.

- **Sistema de referencia de Hill.**

Este sistema de referencia, también denominado *LVLH (Local Vertical Local Horizontal)*, es el utilizado por excelencia en la descripción del problema de rendezvous de vehículos espaciales. Se define con su origen en el sistema respecto del que se va a describir el movimiento de otros cuerpos, en este caso el vehículo objetivo (*target*) y su orientación viene dada según la terna de vectores que se observa en la Ilustración 1, definida como:

$$\{\vec{o}_r, \vec{o}_\theta, \vec{o}_z\}$$

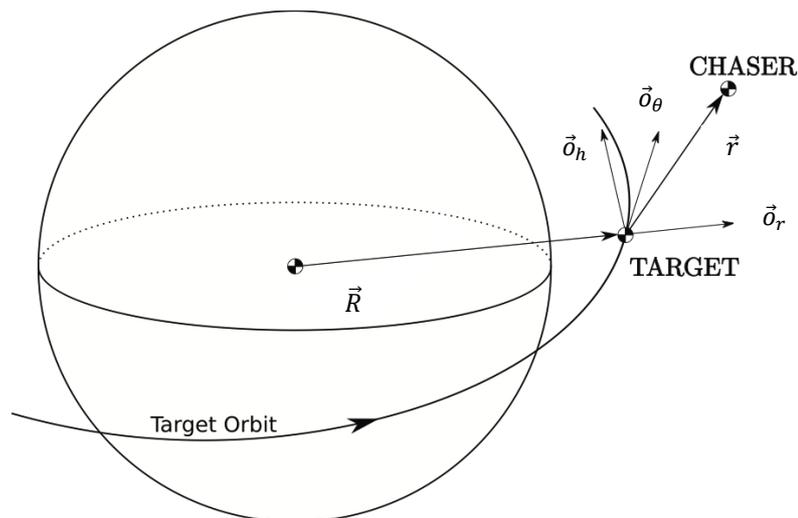


Ilustración 1. Sistema de referencia de Hill

El vector \vec{o}_r está definido según la dirección del radio que une el sistema con la Tierra mientras que \vec{o}_h es paralelo al vector \vec{h} , que representa el momento cinético del movimiento. Por último, \vec{o}_θ completa el triedro a derechas.

$$\vec{o}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1)$$

$$\vec{o}_h = \frac{\vec{h}}{h} \quad (2.2)$$

$$\vec{o}_\theta = \vec{o}_h \times \vec{o}_r \quad (2.3)$$

En este sistema de coordenadas se construirá el modelo de rendezvous basado en coordenadas cartesianas, dando lugar a una serie de ecuaciones sin solución analítica conocida, pero resolubles numéricamente. Este estudio se detallará en el apartado 2.3.3.

- **Sistema de referencia perifocal.**

Este sistema de referencia inercial es el más apropiado para describir la mecánica espacial. Tiene su origen en el foco de la elipse que describe, en este caso, el satélite alrededor de la Tierra. La dirección x^F de este sistema de coordenadas es la de la línea de ápsides, que es la línea imaginaria que une los puntos más cercano (periapsis) y más lejano (apoapsis) de la órbita al origen. El sentido es hacia periapsis. La dirección z^F es perpendicular al plano orbital, paralela al vector momento cinético (hacia “arriba”) y la dirección y^F completa el triedro a derechas (véase la Ilustración 2).

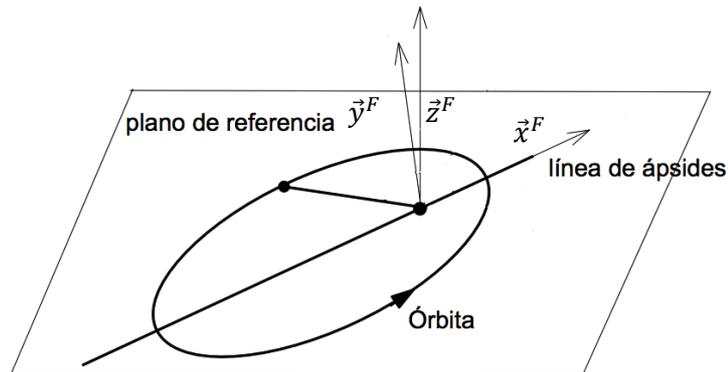


Ilustración 2. Sistema de referencia perifocal

2.3.2. Elementos orbitales

Los elementos orbitales son el conjunto mínimo de datos que, junto a la época (instante inicial t_0), permiten determinar la posición de un cuerpo en una órbita en cualquier instante de tiempo. Este conjunto de datos se puede recoger en un vector que será denominado \vec{e}_s , con el subíndice pudiendo pertenecer tanto al vehículo objetivo (“c”) como al perseguidor (“d”). Un ejemplo frecuente es el uso del siguiente grupo de parámetros:

$$\vec{e}_s = (a, e, i, \Omega, \omega, f)^T \quad (2.4)$$

donde el superíndice T denota la trasposición de una matriz. Observando el vector (2.4), a representa el semieje mayor de la órbita (en caso de ser ésta elíptica), i la inclinación del plano orbital respecto del de referencia y Ω la ascensión recta del nodo ascendente. Cabe decir que esta es una de las múltiples combinaciones que se pueden escoger para el estudio del problema.

Para aclarar la definición de los elementos orbitales más comunes se muestra una explicación gráfica en la

Ilustración 3. El corte de los planos de referencia (en el caso que compete es el plano ecuatorial de la Tierra al ser las órbitas sometidas a estudio geocéntricas) y orbital define la línea de nodos y un vector normal, \vec{n} (que apunta al nodo ascendente), que define, a su vez, el sentido del ángulo de inclinación de la órbita según la regla de la mano derecha. Se pueden observar los nodos ascendente y descendente y la formación de diversos ángulos además de la ya nombrada inclinación. Los nodos ascendente y descendente son los puntos resultado de la intersección de la órbita con la línea de nodos por los cuales el vehículo orbita en sentido ascendente y descendente, respectivamente. Como línea de referencia convenida para la definición de ángulos se toma la dirección hacia el primer punto de Aries (Υ). Conociendo esto, se define la ascensión recta del nodo ascendente (Ω) como el ángulo formado entre la dirección que apunta al primer punto de Aries y la línea del nodo ascendente. Asimismo, el ángulo resultante entre la línea de nodos y la línea de ápsides, en el sentido en el que se recorre la órbita, ω , se denomina argumento de periapsis (perigeo en el caso de órbitas geocéntricas). Por último, queda por definir la anomalía verdadera, f , ángulo entre periapsis y la posición del vehículo, en el sentido de recorrido. El elemento orbital que queda por definir y que no está representado en la Ilustración 3 es la excentricidad, e , que define, junto con a , el tamaño y tipo de órbita. La nombrada excentricidad establece cuán lejos la forma orbital, que viene dada por la ecuación de una cónica según la primera ley de Kepler [3], se encuentra de una forma circular.

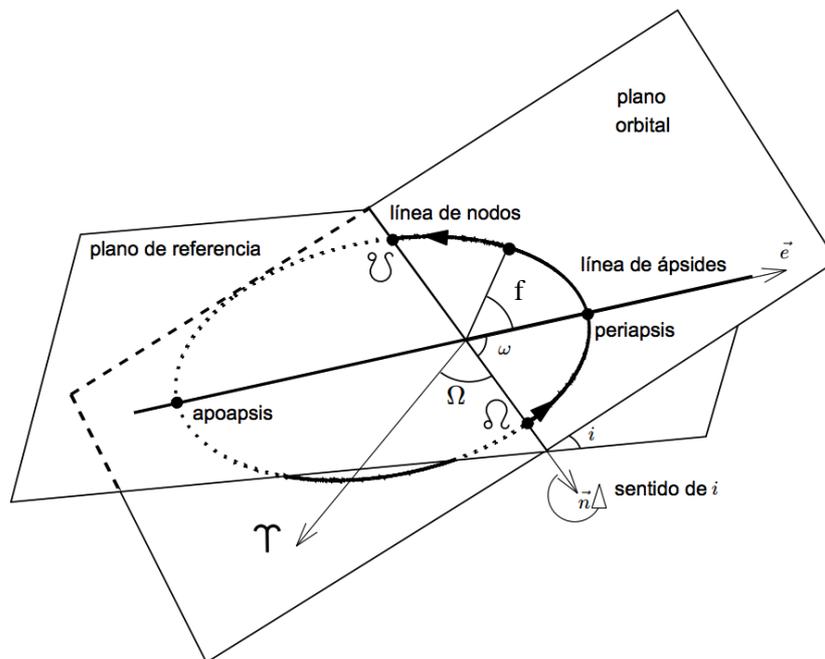


Ilustración 3. Elementos orbitales

Los elementos i y Ω definen todo el movimiento fuera del plano en tanto que ω y f definen el movimiento en él. Para más información relativa a los elementos orbitales consultar [3], [4].

2.3.3. Método basado en coordenadas cartesianas

En este apartado se desarrollan las ecuaciones del movimiento de la órbita relativa que describe el satélite perseguidor, que pretende dar caza al blanco, alrededor de éste en ausencia de perturbaciones. La posición del blanco se expresará mediante el vector $\vec{r}_c(t)$, en tanto que la del perseguidor quedará definida por $\vec{r}_d(t)$.

Para referenciar las diferentes variables relativas en el espacio se recurre al sistema de Hill centrado en el blanco, definido en 2.3.1. En el caso que nos compete se llega a:

$$\vec{\partial}_r = \frac{\vec{r}_c}{r_c} \quad (2.5)$$

$$\vec{\partial}_h = \frac{\vec{h}}{h} \quad (2.6)$$

$$\vec{\partial}_\theta = \vec{\partial}_h \times \vec{\partial}_r \quad (2.7)$$

donde $\vec{h} = \vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c$. Obsérvese que si la órbita del satélite a interceptar es circular, entonces el vector $\vec{\partial}_\theta$ será paralelo al vector velocidad.

La geometría del problema se refleja en la Ilustración 4, en la que se puede observar el vector $\vec{\rho} = (x, y, z)^T$, que representa cuán lejos se encuentra el perseguidor de su objetivo. La descripción físico-matemática de dicho problema se realizará en términos de este vector.

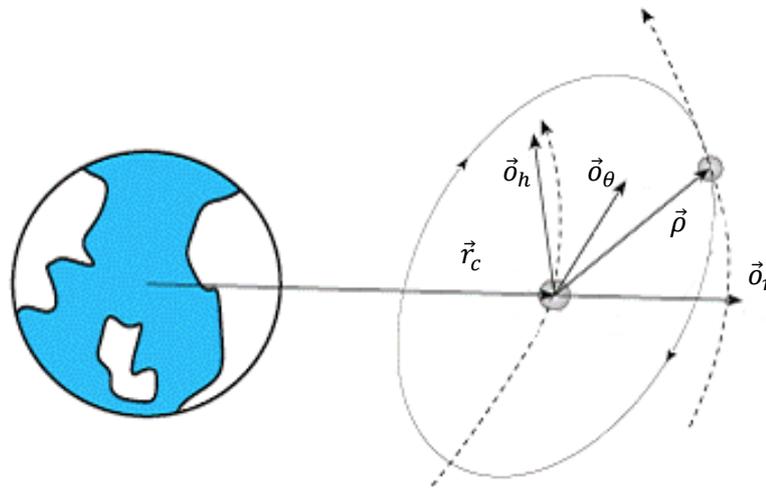


Ilustración 4. Órbita relativa según método cartesiano

El desarrollo del problema en este sistema de ejes proporciona la ventaja de que las dimensiones físicas de la órbita relativa se perciben claramente. Las coordenadas (x, y) representan el movimiento en el plano orbital del blanco; asimismo la coordenada z define cualquier movimiento fuera de él.

Para formular el problema en función de $\vec{\rho}$ se expresará la posición del interceptor, \vec{r}_d , en el sistema de referencia escogido:

$$\vec{r}_d = \vec{r}_c + \vec{\rho} = (r_c + x)\vec{\partial}_r + y\vec{\partial}_\theta + z\vec{\partial}_h \quad (2.8)$$

Denominando a dicho sistema de ejes como “ O ” y teniendo en cuenta que éste rota alrededor de otro sistema inercial, “ N ”, con origen en el centro de masas de la Tierra, la velocidad angular con la que el primero rota alrededor del segundo puede escribirse como:

$$\vec{\omega}_{O/N} = \dot{f}\vec{\partial}_h \quad (2.9)$$

La velocidad \dot{f} determina cómo varía la anomalía verdadera, f , con el paso del tiempo. En este punto se pueden empezar a atisbar ciertos problemas de indefinición de variables pues, si la órbita fuese circular, todos los puntos de la misma serían perigeo (y apogeo) y f quedaría indeterminada.

Derivando dos veces y respecto del tiempo la ecuación (2.8) y, considerando la ecuación de Coriolis para tener en cuenta los efectos inerciales, la aceleración del interceptor se expresa como sigue:

$$\ddot{\vec{r}}_d = \left(\ddot{r}_c + \ddot{x} - 2\dot{y}\dot{f} - \dot{f}y - \dot{f}^2(r_c + x) \right) \vec{o}_r + \left(\ddot{y} + 2\dot{f}(\dot{r}_c + \dot{x}) + \dot{f}(r_c + x) - \dot{f}^2y \right) \vec{o}_\theta + \ddot{z}\vec{o}_h \quad (2.10)$$

Esta fórmula puede verse simplificada haciendo uso de las sucesivas identidades. El módulo del momento cinético, h , supone una constante del movimiento en órbitas keplerianas [5], lo cual supone, considerando la igualdad (2.11), que:

$$h = r_c \dot{r}_c = r_c^2 \dot{f} \quad (2.11)$$

$$\dot{h} = 0 = 2r_c \dot{r}_c \dot{f} + r_c^2 \ddot{f} \quad (2.12)$$

En donde se ha tenido en cuenta la correspondencia entre velocidades lineales y angulares,

$$\dot{r}_c = r_c \dot{f} \quad (2.13)$$

La aceleración de la anomalía verdadera queda determinada por (2.12) y podría ser sustituida en (2.10).

$$\ddot{f} = -2 \frac{\dot{r}_c}{r_c} \dot{f} \quad (2.14)$$

Además, en virtud de la definición del problema de los dos cuerpos [3] y sabiendo que, en el sistema de referencia escogido, se cumple que $\vec{r}_c = r_c \vec{o}_r$, la ecuación del problema de los dos cuerpos (2.15) para el blanco junto con la segunda derivada de definición de \vec{r}_c arrojan lo que se refleja en (2.16)

$$\ddot{\vec{r}}_c = -\frac{\mu}{r_c^3} \vec{r}_c \quad (2.15)$$

$$\ddot{\vec{r}}_c = -\frac{\mu}{r_c^3} \vec{r}_c = -\frac{\mu}{r_c^2} \vec{o}_r = (\ddot{r}_c - r_c \dot{f}^2) \vec{o}_r \quad (2.16)$$

de donde se puede deducir, definiendo $p = h^2/\mu$ y recordando la definición de h , que:

$$\ddot{r}_c = r_c \dot{f}^2 - \frac{\mu}{r_c^2} = r_c \dot{f}^2 \left(1 - \frac{r_c}{p} \right) \quad (2.17)$$

Llevando a cabo la sustitución de (2.14) y (2.17) en (2.10) se obtiene una expresión más reducida del vector aceleración del vehículo perseguidor:

$$\ddot{\vec{r}}_d = \left(\ddot{x} - 2\dot{f} \left(\dot{y} - y \frac{\dot{r}_c}{r_c} \right) - x \dot{f}^2 - \frac{\mu}{r_c^2} \right) \vec{o}_r + \left(\ddot{y} + 2\dot{f} \left(\dot{x} - x \frac{\dot{r}_c}{r_c} \right) - \dot{f}^2 y \right) \vec{o}_\theta + \ddot{z}\vec{o}_h \quad (2.18)$$

El siguiente paso será el empleo de la ecuación del problema de los dos cuerpos (2.15) para desarrollar, por componentes, el vector $\ddot{\vec{r}}_d$. En el sistema de Hill centrado en el blanco, dado por la terna (2.5) – (2.7), se tiene que:

$$\ddot{\vec{r}}_d = -\frac{\mu}{r_d^3} \vec{r}_d = -\frac{\mu}{r_d^3} \begin{pmatrix} r_c + x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

El módulo del radio-vector del satélite interceptor queda definido, en función del correspondiente al blanco y de las componentes de $\vec{\rho}$, como sigue:

$$r_d = \sqrt{(r_c + x)^2 + y^2 + z^2} \quad (2.20)$$

Tras estos últimos cambios, las ecuaciones quedan tal como se reseñan a continuación:

$$\ddot{x} - 2\dot{f}\left(\dot{y} - y\frac{\dot{r}_c}{r_c}\right) - x\dot{f}^2 - \frac{\mu}{r_c^2} = -\frac{\mu}{r_d^3}(r_c + x) \quad (2.21)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{f}\left(\dot{x} - x\frac{\dot{r}_c}{r_c}\right) - y\dot{f}^2 = -\frac{\mu}{r_d^3}y \quad (2.22)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r_d^3}z \quad (2.23)$$

El sistema de tres ecuaciones (2.21) – (2.23) junto con (2.20) constituyen una formulación exacta y no lineal del problema que se pretende describir. Llegados a este punto, la única suposición que se ha hecho es considerar la ausencia total de perturbaciones sobre los satélites sometidos a estudio. Por esta razón, se puede expresar fácilmente el vector \vec{r}_d en función de \vec{r}_c y de las coordenadas x , y y z . Asimismo, la descripción matemática que se ha desarrollado es válida para cualquier tipo de órbita que recorra el blanco para una excentricidad entre 0 y 1 (órbita elíptica). Las incógnitas de (2.21) – (2.23) son (x, y, z) , siendo \dot{f} , \dot{r}_c , r_c y μ parámetros cuya evolución es conocida a lo largo del tiempo.

Como se ha comentado previamente, el hecho de que, en el segundo miembro del sistema (2.21) – (2.23), aparezca el término r_d^3 , dota de no linealidad al modelo. Por ello, y con vistas a simplificar definitivamente el mismo, se procederá a linealizar dicho término. Para poder efectuar dicha linealización es necesario que:

$$x, y, z \ll r_c, r_d \quad (2.24)$$

Así, teniendo en cuenta que $(1 + \varepsilon)^{\pm n} \approx 1 \pm n\varepsilon$ para $\varepsilon \ll 1$, el radio orbital del perseguidor queda simplificado:

$$r_d = r_c \sqrt{1 + 2\frac{x}{r_c} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r_c^2}} \approx r_c \sqrt{1 + 2\frac{x}{r_c}} \quad (2.25)$$

lo cual permite escribir que:

$$\frac{\mu}{r_d^3} \approx \frac{\mu}{r_c^3} \left(1 - 3\frac{x}{r_c}\right) \quad (2.26)$$

$$-\frac{\mu}{r_d^3} \begin{pmatrix} r_c + x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx -\frac{\mu}{r_c^3} \left(1 - 3\frac{x}{r_c}\right) \begin{pmatrix} r_c + x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx -\frac{\mu}{r_c^3} \begin{pmatrix} r_c - 2x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{r_c}{p} \dot{f}^2 \begin{pmatrix} r_c - 2x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Permaneciendo siempre en el sistema de referencia *LVLH* se llegan a las ecuaciones linealizadas del movimiento de la órbita relativa [5]:

$$\ddot{x} - x\left(\dot{\theta}^2 + 2\frac{\mu}{r_c^3}\right) - y\ddot{\theta} - 2y\dot{\theta} = 0 \quad (2.28)$$

$$\ddot{y} + x\ddot{\theta} + 2x\dot{\theta} - y\left(\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r_c^3}\right) = 0 \quad (2.29)$$

$$\ddot{z} + \frac{\mu}{r_c^3}z = 0 \quad (2.30)$$

$\theta = \omega + f$ representa la latitud verdadera del blanco, suma de sus argumento del perigeo (ω) y anomalía verdadera (f). El uso de este elemento orbital permite considerar órbitas de cualquier excentricidad, incluidas las circulares, de excentricidad nula ($e = 0$), eliminando el problema de indefinición comentado en párrafos anteriores. Considerando que $\omega = cte$ a lo largo del movimiento, se cumple que $\dot{\theta} = \dot{f}$ y $\ddot{\theta} = \ddot{f}$. Se puede

observar cómo la resolución del sistema (2.28) – (2.30) determina la órbita relativa (x, y, z) para cada instante de tiempo toda vez que se conoce la evolución del movimiento del blanco en su órbita alrededor de la Tierra $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, r_c)$. Este conjunto de parámetros deberá estar determinado en cada instante. Nótese que las condiciones que se han de cumplir para que el sistema de ecuaciones anterior sea aplicable es que no existan perturbaciones sobre el sistema y que las magnitudes x, y y z sean muy pequeñas comparadas con los radios orbitales de blanco y perseguidor (2.24).

En el apartado 2.3.2 se definieron los llamados elementos orbitales, que definen de forma rápida y eficaz cualquier tipo de órbita elíptica, que serán las consideradas en este proyecto. Simplemente el hecho de conocer los elementos orbitales de la órbita del *chief* es suficiente para definir el problema de rendezvous. El radio orbital del vehículo objetivo se expresa fácilmente a partir de ellos mediante la ecuación de la cónica:

$$r_c = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (2.31)$$

A partir de la definición (2.31) [3], pueden obtenerse los dos parámetros restantes que aún no se han definido.

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}{r_c^2} \quad (2.32)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2\mu e \sin f}{r_c^3} \quad (2.33)$$

Un caso particular es aquel en el que la órbita es circular ($e = 0$) y, por tanto, la velocidad de rotación del blanco es constante ($\dot{\theta} = n$), por lo que la aceleración angular es nula y r_c constante como se desprende al anular e en (2.31), constituyéndose las conocidas ecuaciones de Hill – Clohessy – Wiltshire [6].

2.3.4. Método de los elementos orbitales relativos

Este novedoso método será el escogido para describir el problema de rendezvous de vehículos espaciales. Una de las grandes ventajas que presenta, en comparación con el que hace uso de coordenadas cartesianas, descrito en 2.3.3, es que este obliga a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales, mientras que el procedimiento mediante *ROE (Relative Orbit Elements)* permite expresar el problema, en el caso de movimiento libre (sin propulsión ni control), a través de un conjunto de ecuaciones algebraicas, ahorrando su integración numérica y no reportando errores por esto [5]. Además, el tiempo computacional necesario será ostensiblemente menor que en el caso alternativo.

El empleo de esta metodología obliga a realizar una descripción del movimiento del blanco según sus elementos orbitales. Una sucinta definición de los elementos orbitales se ha plasmado en 2.3.2. A modo de recordatorio, los elementos orbitales definidos entonces son los recogidos en la ecuación (2.4).

$$\vec{e}_c = (a, e, i, \Omega, \omega, f)^T$$

En ausencia de perturbaciones, y a no ser que se aplique algún tipo de control mediante, por ejemplo, toberas propulsivas, los elementos orbitales definidos en \vec{e}_c permanecerán constantes con la única excepción de la anomalía verdadera, f , que variará a lo largo del movimiento.

Esta manera de proceder para llevar a cabo la resolución del problema propone definir la órbita relativa en términos del vector de elementos orbitales relativos, $\delta\vec{e}$. Los elementos orbitales relativos son un conjunto de parámetros que describen cómo es la órbita del perseguidor respecto de la del blanco mediante diferencias de sus elementos orbitales principales [5], [7]. Para evitar problemas con órbitas casi circulares o circulares se puede hacer uso de las siguientes variables:

$$\delta\vec{e} = \vec{e}_a - \vec{e}_c = (\delta a, \delta\theta, \delta i, \delta q_1, \delta q_2, \delta\Omega)^T \quad (2.34)$$

Los vectores \vec{e}_d y \vec{e}_c representan los elementos orbitales que describen las órbitas del perseguidor (*deputy*) y blanco (*chief*), respectivamente. Siendo x cualquier elemento orbital, δx representa la diferencia entre el elemento orbital x del perseguidor y el del blanco. A modo de ejemplo, $\delta a = a_d - a_c$. q_1 y q_2 son las componentes del vector excentricidad y se definen como:

$$q_1 = e \cos \omega \quad (2.35)$$

$$q_2 = e \sin \omega \quad (2.36)$$

De nuevo huelga decir que el set de parámetros escogidos es una de las múltiples alternativas posibles a elegir. Cualquier conjunto puede resultar apropiado para describir el rendezvous. Dados $\delta \vec{e}$ y \vec{e}_c puede determinarse el vector \vec{e}_d , quedando resuelta la posición del satélite perseguidor para todo instante de tiempo mediante sus propios elementos orbitales (ecuación (2.37)).

$$\vec{e}_d = \delta \vec{e} + \vec{e}_c \quad (2.37)$$

Se puede constatar que la única hipótesis que se ha tenido en cuenta para desarrollar este método de cálculo es la de no considerar el efecto de perturbaciones. El método es válido independientemente de la relación entre el tamaño de la órbita relativa y el de la del blanco, lo que supone otra ventaja respecto del método 2.3.3. Además, esta definición del problema proporciona una visión mucho más clara de la geometría de la órbita relativa.

Se ha realizado una descripción genérica del método a usar y de sus ventajas respecto de otros que pueden encontrarse en la literatura, pero aún no se ha procedido a explicar la formulación acerca de la propagación de los vectores $\delta \vec{e}$ y \vec{e}_c a lo largo del tiempo. Ambos vectores se verán modificados en cada instante pues así lo hacen las variables $\delta \theta$ y θ o equivalentes. Llegados a este punto conviene fijar, definitivamente, el conjunto de variables por el que se va a optar para llevar a cabo la definición del problema. Será el definido por las ecuaciones (2.34) y (2.38):

$$\vec{e}_c = (a, \theta, i, q_1, q_2, \Omega)^T \quad (2.38)$$

El objetivo que surge ahora es deducir la matriz de transición que relaciona $\delta \vec{e}$ en un determinado instante con ese mismo vector en el instante inicial. Dicha matriz se denominará $\Phi_{\delta e}(t, t_0)$ y se cumplirá que $\delta \vec{e}(t) \approx \Phi_{\delta e}(t, t_0) \delta \vec{e}(t_0)$. Tiene una estructura cuadrada (6 x 6) y, para el caso en el que nos encontramos, se escribe como se indica a continuación [5]:

$$\Phi_{\delta e}(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & 0 & C & D & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

La matriz es diagonal con sus elementos diagonales iguales a 1 pues ninguna diferencia de elementos orbitales evoluciona en el tiempo, a excepción de la ya anunciada evolución de $\delta \theta$, cuya dependencia con el resto de elementos orbitales relativos se desarrollará en las siguientes líneas. Cabe decir que toda la formulación que a continuación se desarrolla está basada en la ausencia de perturbaciones de ningún tipo, lo que permite expresar la aproximación anterior. Por otro lado, $\Phi_{\delta e}(t_k, t_j)$ puede relacionar cualquier par de vectores $\delta \vec{e}$, independientemente del instante en el que estos estén calculados. Por simplicidad en la notación se ha tomado, a modo de ejemplo, el instante inicial y otro instante genérico.

Se parte de la única evolución no trivial que ocurre durante el movimiento, la de $\delta \theta$. Debido al hecho de que el argumento del perigeo diferencial ($\delta \omega$) se mantiene constante y no cambia con el tiempo, se puede desarrollar $\delta \theta$ a partir de δf , pues $\delta \theta = \delta \omega + \delta f$. Definiendo la anomalía media, M , como el ángulo que se recorre cuando la velocidad de rotación considerada es la media, n , se obtiene que:

$$M(t) = M_0 + n(t - t_0) \quad (2.40)$$

El instante inicial (t_0) es arbitrariamente elegido, como se ha comentado, mientras que M_0 es la anomalía media en dicho instante. En lo sucesivo, cualquier magnitud en el instante inicial será denotada con el subíndice "0". El no usar subíndice significará que el estado se ha tomado para un instante genérico, t . La velocidad orbital media depende, a la luz de la tercera Ley de Kepler [3], según $n = \sqrt{\mu/a^3}$. Sustituyendo esto en (2.40), diferenciando la ecuación resultante y teniéndola en cuenta de nuevo, se llega a que:

$$\delta M = \delta M_0 - \frac{3}{2} \frac{\delta a}{a} (M - M_0) \quad (2.41)$$

Para llegar a una expresión de la diferencia de anomalías verdaderas hay que resolver la ecuación de Kepler (2.42) para calcular la anomalía excéntrica, E , y, a partir de ella, determinar δf . La demostración geométrica de cómo se llega a la ecuación de Kepler puede encontrarse en [8].

$$M = E - e \operatorname{sen} E \quad (2.42)$$

Diferenciando la ecuación (2.42) para obtenerla como función de elementos orbitales relativos:

$$\delta M = \frac{\partial M}{\partial E} \delta E + \frac{\partial M}{\partial e} \delta e = (1 - e \cos E) \delta E - \operatorname{sen} E \delta e \quad (2.43)$$

Recurriendo a la relación que existe entre E y f (ecuación (2.44)), diferenciando la ecuación y expresándola en función de δf y δe , se llega a lo que a continuación se desarrolla:

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{f}{2}\right) \delta f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{E}{2}\right) \delta E + \tan \frac{E}{2} \frac{\sqrt{1-e}}{2\sqrt{1+e}} \frac{2}{(1-e)^2} \delta e \quad (2.45)$$

Desarrollando la tangente del ángulo mitad en función del coseno del ángulo (2.46) y sustituyendo los términos en (2.45), se llega, tras operar varias veces, a (2.47).

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos f}{1 + \cos f}} \quad (2.46)$$

$$\delta E = \frac{\eta}{1 + e \cos f} \delta f - \frac{\operatorname{sen} f}{1 + e \cos f} \frac{\delta e}{\eta} \quad (2.47)$$

donde $\eta = \sqrt{1 - e^2}$. Sustituyendo estos desarrollos en la ecuación 2.43 junto con la definición de δM (2.41) y aislando el término δf se obtiene que:

$$\delta f = -\frac{3 a \eta}{2 r^2} (M - M_0) \delta a + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \delta f_0 + \left(\operatorname{sen} f (2 + e \cos f) - \operatorname{sen} f_0 (2 + e \cos f_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right) \frac{1}{\eta^2} \delta e \quad (2.48)$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$\cos E = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \quad (2.49)$$

$$\operatorname{sen} E = \frac{\operatorname{sen} f \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos f} \quad (2.50)$$

De manera compacta se puede escribir:

$$\delta f = A\delta a + B\delta f_0 + F\delta e \quad (2.51)$$

Reproduciendo la relación anterior en términos de los elementos orbitales relativos definidos en 2.34 [5]:

$$\delta f = A\delta a + B\delta\theta_0 + C\delta q_1 + D\delta q_2 \quad (2.52)$$

$$A = -\frac{3a\eta}{2r^2}(M - M_0) \quad (2.53)$$

$$B = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \quad (2.54)$$

$$C = G \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - (1 - B) \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \quad (2.55)$$

$$D = G \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + (1 - B) \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \quad (2.56)$$

$$G = \frac{1}{\eta^2 \sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \left((\text{sen}\theta q_1 - \text{cos}\theta q_2)(2 + q_1 \text{cos}\theta + q_2 \text{sen}\theta) - (\text{sen}\theta_0 q_1 - \text{cos}\theta_0 q_2)(2 + q_1 \text{cos}\theta_0 + q_2 \text{sen}\theta_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \right) \quad (2.57)$$

De esta manera queda definida la matriz de transición de estados, cuya dependencia con los elementos orbitales que definen la órbita del blanco queda patente en el conjunto de ecuaciones (2.52) – (2.57). Nótese que los elementos A , B , C , D y G varían a lo largo del tiempo, de manera que esta matriz de transición será diferente en cada t .

Las matrices de transición como la definida en (2.39) tienen una importante propiedad. Y es que cumplen lo prescrito en (2.58).

$$\phi_{\delta e}(t_k, t_j) = \phi_{\delta e}(t_k, t_l) \phi_{\delta e}(t_l, t_j) \quad (2.58)$$

Esta propiedad será de gran utilidad a la hora de desarrollar el método de control que se detalla en apartados posteriores. Para más información acerca del método de los *ROE*, consultar [5], [9].

2.3.5. Correspondencia entre los métodos

En este apartado se presenta la formulación que permite cambiar, por un lado, del método *ROE* al tradicional basado en coordenadas cartesianas y, por otro, de este último al formulado según *ROE*. Ambas formulaciones son una la inversa de la otra, por lo que aquí se detallará el primero de los casos comentados.

Se desarrolla, en lo sucesivo, la matriz que relaciona la definición de la órbita relativa mediante elementos orbitales relativos con la análoga en coordenadas cartesianas, medidas según el sistema de referencia de Hill centrado en el blanco (2.3.1), es decir:

$$\vec{x} = A_1(\vec{e}_c) \delta \vec{e} \quad (2.59)$$

Dicha matriz, a la que se ha denominado $A_1(\vec{e}_c)$, depende, internamente, de los elementos orbitales que definen la órbita del blanco de manera que, en previsión del cambio que experimentarán dichos elementos, esta matriz variará, igualmente, con el paso del tiempo. A continuación se muestran las expresiones que

definen cada uno de sus elementos no nulos [5]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{111} & A_{112} & A_{113} & A_{114} & A_{115} & A_{116} \\ A_{121} & A_{122} & A_{123} & A_{124} & A_{125} & A_{126} \\ A_{131} & A_{132} & A_{133} & A_{134} & A_{135} & A_{136} \\ A_{141} & A_{142} & A_{143} & A_{144} & A_{145} & A_{146} \\ A_{151} & A_{152} & A_{153} & A_{154} & A_{155} & A_{156} \\ A_{161} & A_{162} & A_{163} & A_{164} & A_{165} & A_{166} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$A_{111} = r/a \quad (2.61)$$

$$A_{112} = (V_r/V_t)r \quad (2.62)$$

$$A_{114} = -r/p(2aq_1 + r\cos\theta) \quad (2.63)$$

$$A_{115} = -r/p(2aq_2 + r\sen\theta) \quad (2.64)$$

$$A_{122} = r \quad (2.65)$$

$$A_{126} = r\cos i \quad (2.66)$$

$$A_{133} = r\sen\theta \quad (2.67)$$

$$A_{136} = -r\cos\theta\sen i \quad (2.68)$$

$$A_{141} = -V_r/2a \quad (2.69)$$

$$A_{142} = h(1/r - 1/p) \quad (2.70)$$

$$A_{144} = 1/p(V_r a q_1 + h\sen\theta) \quad (2.71)$$

$$A_{145} = 1/p(V_r a q_2 - h\cos\theta) \quad (2.72)$$

$$A_{151} = -3V_t/2a \quad (2.73)$$

$$A_{152} = -V_r \quad (2.74)$$

$$A_{154} = 1/p(3V_t a q_1 + 2h\cos\theta) \quad (2.75)$$

$$A_{155} = 1/p(3V_t a q_2 + 2h\sen\theta) \quad (2.76)$$

$$A_{156} = V_r\cos i \quad (2.77)$$

$$A_{163} = V_t\cos\theta + V_r\sen\theta \quad (2.78)$$

$$A_{166} = \sen i(V_t\sen\theta - V_r\cos\theta) \quad (2.79)$$

Las diferentes magnitudes que intervienen en las expresiones anteriores ((2.61) – (2.79)) se definen como sigue:

$$r = \frac{a(1 - q_1^2 - q_2^2)}{1 + q_1\cos\theta + q_2\sen\theta} \quad (2.80)$$

$$V_r = h/p(q_1 \text{sen}\theta - q_2 \text{cos}\theta) \quad (2.81)$$

$$V_t = h/p(1 + q_1 \text{cos}\theta + q_2 \text{sen}\theta) \quad (2.82)$$

La ecuación (2.80) expresa la ecuación de una cónica (la órbita relativa) en términos de los elementos orbitales seleccionados, en tanto que (2.81) y (2.82) definen la velocidad radial y tangencial, respectivamente, del movimiento aparente del perseguidor alrededor del blanco. En el caso en que sea necesario realizar la transformación recíproca, es decir, expresar unos resultados dados en coordenadas cartesianas en elementos orbitales relativos según el sistema de referencia *LVLH*, no hay más que invertir la matriz A , (2.84).

$$\delta \vec{e} = B_1(\vec{e}_c)\vec{x} \quad (2.83)$$

$$B_1 = A_1^{-1} \quad (2.84)$$

Se observa, por mera inspección, que únicamente el hecho de conocer la órbita del vehículo objetivo (mediante elementos orbitales) permite calcular la órbita relativa (partiendo de unas condiciones iniciales de la misma determinadas), necesaria para calcular las maniobras de rendezvous como se estudiará en el siguiente capítulo, así como transformar el resultado en variables cartesianas, las cuales hacen que la representación gráfica sea más vistosa y comprensible.

3 VERIFICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS ORBITALES RELATIVOS

En los capítulos 1 y 2 se han detallado multitud de definiciones y consideraciones que serán tenidas en cuenta a la hora de diseñar matemáticamente las maniobras de las que constará el rendezvous a construir. Se han establecido dos métodos a seguir que en este capítulo serán comparados. Sin embargo, el método al que se recurrirá constantemente será el de los elementos orbitales relativos o *ROE*. Como se comentó con anterioridad, el método tradicional basado en coordenadas cartesianas se presenta como comprobante del que se usará, teniendo que ser desarrollado para tal fin. Esto se hizo resumidamente en 2.3. En esa misma sección, y ante la necesidad de estudiar el significado de los elementos orbitales para entender esta pareja de metodologías, se presentó una definición de los mismos.

En este capítulo se efectuará una verificación del método de los *ROE* comparándolo con su homólogo cartesiano y se verá la bondad del primero, que será válido para describir la órbita relativa que recorrerá el *chaser* antes de dar caza al blanco.

3.1. Veracidad del método de los *ROE*: movimiento relativo libre

En este apartado se comprobará que el método de los *ROE* es totalmente válido para estudiar el problema de rendezvous, como se demostrará sometiéndolo a una comparación con el método cartesiano. Se demostrará la validez tanto en el caso de movimiento relativo libre (sin aplicación de impulsos) como forzado.

Para establecer una comparación entre los dos métodos descritos se partirá de las mismas condiciones iniciales en ambos casos. Se considerarán los siguientes valores:

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T \quad (3.1)$$

$$\vec{x}_0 = (0.1, 0.1, 0.1, 0, 0, 0)^T \quad (3.2)$$

Cabe decir que las unidades del método descrito en 2.3.3 están en el sistema internacional exceptuando las longitudes, que se expresan en km (de esta manera, las velocidades estarán en km/s, por ejemplo). Por tanto, inspeccionando la ecuación (3.2), el satélite perseguidor se situará a una distancia inicial del blanco de 100 m según cada eje coordenado. Se supondrán velocidades iniciales nulas. En un principio se considerará que la velocidad en la dirección y es nula si bien, posteriormente, una vez hecha la comparación, se establecerá un determinado valor función de la coordenada x en el instante inicial. Se procederá de esta manera porque, en caso de que la velocidad inicial según el eje \vec{o}_θ no dependiese de la coordenada x y fuese libre, el movimiento del “*deputy*” evolucionaría de modo divergente, alejándose cada vez más del “*chief*” con el paso del tiempo. Esto es así por un término dependiente linealmente con el tiempo en la ecuación del movimiento correspondiente. Para impedir esto y asegurar que la órbita relativa se repite tras cada órbita completa del blanco, se establece que ambos semiejes mayores (tanto del blanco como del perseguidor) sean iguales, implicación derivada de establecer la igualdad de periodos orbitales (3.3):

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \Rightarrow \delta a = 0 \quad (3.3)$$

P representa el periodo orbital y μ es el parámetro gravitatorio, el cual tiene un valor de $398600.4 \text{ km}^3/\text{s}^2$ para el sistema Tierra – Vehículo. A pesar de la facilidad para expresar la condición en términos de elementos orbitales relativos, en el caso cartesiano no resulta ser tan trivial. Para dicho caso (en el sistema de Hill centrado en el blanco) se puede recurrir al empleo del cambio de variables detallado en el apartado 2.3.5. Según éste y atendiendo al inverso del cambio descrito en esas páginas:

$$\begin{aligned} \delta a = 0 = & 2\alpha(2 + 3k_1 + 2k_2)x(t) + 2\alpha v(1 - 2k_1 + k_2)y(t) + \frac{2\alpha^2 v p}{V_t} \dot{x}(t) \\ & + \frac{2a}{V_t}(1 + 2k_1 + k_2)\dot{y}(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los parámetros descritos en la ecuación (3.4) obedecen a las siguientes expresiones:

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad (3.5)$$

$$v = \frac{V_r}{V_t} \quad (3.6)$$

$$\rho = \frac{r}{p} \quad (3.7)$$

$$k_1 = \alpha \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) \quad (3.8)$$

$$k_2 = \frac{\alpha v^2}{\rho} \quad (3.9)$$

Se puede percibir que, para que se cumpla la condición de la ecuación (3.3), la condición equivalente para el método desarrollado en coordenadas cartesianas se deberá cumplir en todo instante de tiempo. La expresión 3.4 queda simplificada para el instante inicial; considerando que, en dicho instante, el satélite se encuentra en el perigeo de su órbita, según (2.31) y (2.81):

$$r(t_0) = r_p = a(1 - e) \quad (3.10)$$

$$V_r = \dot{r}(t_0) = \frac{h}{p}(q_1 \text{sen}\omega - q_2 \text{cos}\omega) = 0 \quad (3.11)$$

Usando, además, las transformaciones descritas en el apartado 2.3.5 junto con las definiciones (3.6) y (3.9), se obtiene que:

$$v = 0 \quad (3.12)$$

$$k_2 = 0 \quad (3.13)$$

En el instante inicial, la ecuación que hace que el perseguidor no se separe constantemente del blanco queda, pues, como sigue:

$$0 = 2 \frac{a}{r_p} \left(2 + 3 \frac{a}{r_p} \left(\frac{p}{r_p} - 1 \right) \right) x_0 + 2 \frac{a}{V_t(t_0)} \left(1 + 2 \frac{a}{r_p} \left(\frac{p}{r_p} - 1 \right) \right) \dot{y}_0 \quad (3.14)$$

Por otro lado, la velocidad tangencial, V_t , en el instante inicial se puede expresar según (3.15), donde el subíndice p indica que la magnitud está medida en el perigeo de la órbita:

$$V_t(t_0) = r_p \dot{\theta}_p \quad (3.15)$$

Considerando la expresión del radio orbital en el perigeo y la ecuación de definición de $\dot{\theta}_p$, se llega a la expresión, en coordenadas cartesianas, que se quería transformar.

$$\dot{\theta}_p = \frac{h}{r_p^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{a^2 (1-e)^2} = n \sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}} \quad (3.16)$$

$$\frac{\dot{y}_0}{x_0} = \frac{-n(2+e)}{\sqrt{(1+e)(1-e)^3}} \quad (3.17)$$

Para pequeñas excentricidades la expresión anterior puede ser linealizada, quedando más sencilla y compacta:

$$\dot{y}_0 + (2+3e)n x_0 = 0 \quad (3.18)$$

Como la condición expresada en (3.4) se ha de cumplir para todo instante de tiempo, ésta tendrá que ser recalculada para cada variación de x e y con t .

Llegados a este punto y después de multitud de definiciones y desarrollos, se dispone de:

- Modelo no lineal del problema, descrito mediante el método basado en coordenadas cartesianas.
- Modelo lineal del problema, descrito mediante el método basado en coordenadas cartesianas.
- Modelo del problema empleando elementos orbitales relativos (*ROE*).

Para el cálculo de la órbita relativa se han utilizado, como se acaba de nombrar, tres métodos diferentes. Cada uno de ellos requiere las mismas variables de entrada y con la inclusión, en el caso de los *ROE*, de un cambio de variables, todos ellos proporcionan la misma salida.

3.1.1. Variables de entrada

En realidad, se parte de dos métodos diferenciados en vez de tres, pues los modelos lineal y no lineal del método tradicional cartesiano constituyen, en esencia, lo mismo. Dicho esto, tanto la metodología basada en *ROE* como la que hace uso de coordenadas cartesianas requieren, de inicio, entre otras variables, los elementos orbitales del vehículo categorizado como blanco. Atendiendo al set de elementos orbitales con los que se ha desarrollado toda la teoría del apartado 2.3.4, se parte de $(a, \theta, i, q_1, q_2, \Omega)$.

Pero el punto de partida viene dado por fijar el argumento de perigeo (ω), la inclinación de la órbita (i), la ascensión recta del nodo ascendente (Ω), el semieje mayor (a) y la excentricidad (e). Luego habrá que efectuar diversos cálculos para llegar a lo que se necesita. Conociendo a se puede calcular fácilmente el periodo orbital, aplicando (3.19).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (3.19)$$

Sabiendo el valor de la excentricidad y de ω podemos obtener los elementos orbitales con los que se realizará el estudio: q_1 y q_2 , quedando únicamente pendiente de cálculo θ . Se considera como el único elemento orbital que variará con el paso del tiempo. Se conoce, por inspección de (3.20), que calcular la evolución de θ con t es idéntico a hallar la evolución de la anomalía verdadera, f , sumándole posteriormente un escalar, que será de nuevo el argumento del perigeo, invariable durante el recorrido.

$$\theta = \omega + f \quad (3.20)$$

Calcular la anomalía verdadera en cada instante de tiempo dado no es trivial, siendo la gran culpable de ello la excentricidad. Si esta fuese nula, lo cual significaría que la órbita que describe el blanco es completamente circular, hallar f en cada t sería tan sencillo como resolver (3.21), ecuación que demuestra la distribución lineal de la anomalía verdadera con el tiempo.

$$f = \frac{2\pi}{T} t \quad (3.21)$$

No obstante, el caso circular es un caso simplificado y particular que pocas veces se dará, por lo que hay que recurrir al estudio de una ley horaria que nos permita conocer en cada momento el valor de f y, por tanto, el de θ [3]. Para llegar a esto, hay que calcular previamente la anomalía media, M , y la anomalía excéntrica, E . Se puede considerar globalmente que el vehículo objetivo recorre la órbita a una velocidad media, n , dada por (3.22). La posición angular, en cada t , al considerar esta velocidad media, es la anomalía media (ecuación (3.23)).

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.22)$$

$$M - M_0 = n(t - t_0) \quad (3.23)$$

El subíndice “0” denota, a no ser que se indique lo contrario, que la magnitud está medida en el instante inicial, t_0 , normalmente en este proyecto con el vehículo en la posición de periapsis. Mediante la ecuación de Kepler (3.24), y a partir de (3.23), se puede hallar la anomalía excéntrica mediante cualquier método iterativo.

$$M = E - e \sin E \quad (3.24)$$

Teniendo calculada E para cada t , se puede hallar f acudiendo a la relación geométrica existente entre ambos ángulos, la cual queda reflejada en (3.25), que ya fue definida.

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \quad (3.25)$$

Hay que tener en cuenta la corrección de los cuadrantes al resolver la ecuación, comprobándose este aspecto con la tangente del ángulo $f/2$, que estará definida entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Como el ángulo a considerar es f , la definición estará entre $-\pi$ y π . En conclusión, con los elementos definidos en este subapartado y la consideración adicional de un vector de tiempos apropiado, se tienen todas las variables de entrada relativas al blanco necesarias.

Por otro lado, ya que los métodos de cálculo que se pretenden analizar y comparar calcularán la evolución de la órbita relativa entre vehículo perseguidor y blanco, serán indispensables conocer las condiciones iniciales de este movimiento. Por ello, serán variables de entrada las reseñadas en (3.2). Serán variables directas de entrada para el caso cartesiano e indirectas para el método de los elementos orbitales relativos, ya que éste requiere condiciones iniciales como las indicadas en 3.26, por lo que habrá que recurrir al cambio de variables descrito en el subapartado 2.3.5 para la conversión.

$$\delta \vec{e}_0 = (\delta a_0, \delta \theta_0, \delta i_0, \delta q_{10}, \delta q_{20}, \delta \Omega_0) \quad (3.26)$$

3.1.2. Variables de salida

Ambos métodos de cálculo de la órbita relativa ofrecen las mismas variables de salida. Una de las diferencias fundamentales es que el método cartesiano requiere del uso de integración numérica para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales al que recurre, mientras que el método de los *ROE* está conformado por ecuaciones algebraicas. En este último caso, las variables que calcula el método son los elementos orbitales relativos en los instantes de tiempo considerados, teniéndose que efectuar el cambio de variables de 2.3.5 para transformarlos a variables cartesianas. De esta manera, la comparación puede realizarse atendiendo a los valores del siguiente vector.

$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \quad (3.27)$$

3.1.3. Resultados

Para las condiciones iniciales de (3.2) y para unos valores de los elementos orbitales que se reseñan en la Tabla 1, se obtienen los resultados que se pueden observar en las ilustraciones siguientes.

Elemento Orbital Órbita Blanco	Valor
Semieje mayor (a)	7555 km
Excentricidad (e)	0.4
Inclinación (i)	48°
Argumento de perigeo (ω)	10°
Ascensión recta del nodo ascendente (Ω)	20°

Tabla 1. Elementos Orbitales del Blanco

Para realizar la comparación se considerará que el *chief* parte del perigeo de su órbita, cumpliéndose esta hipótesis en todos los casos a no ser que se especifique lo contrario. Se tomará un vector de tiempos de 100 intervalos que abarque la totalidad del periodo orbital del blanco (ecuación (3.3)).

Se analizará, en un primer lugar, el caso de movimiento relativo libre, sin aplicación de ningún tipo de control (velocidad imprimida al vehículo perseguidor nula).

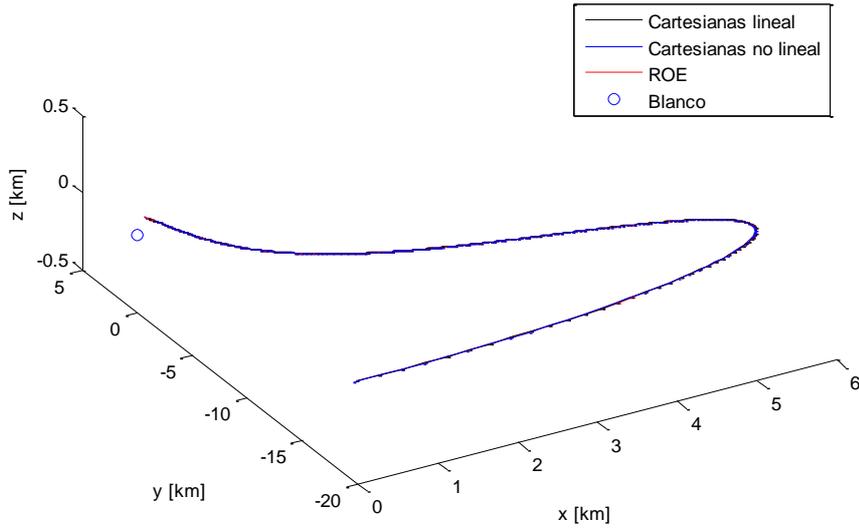


Ilustración 5. Comparación métodos rendezvous libre

En la Ilustración 5 se pueden contemplar los resultados que arrojan los diferentes métodos descritos hasta ahora. Puede verse cómo las tres gráficas prácticamente se superponen a simple vista, reflejando todos los mismos resultados prácticamente. Asimismo, se aprecia que las órbitas relativas que recorre el *deputy* no rodean al *chief*, alejándose de él con el paso del tiempo. Esto es así por lo comentado en 3.1.1; el no fijar una dependencia de la coordenada y con x hace que exista un término lineal con el tiempo que hace que la órbita se aleje paulatinamente del objetivo. Para corregir esto hay que exigir la igualdad de periodos de ambos vehículos, como se detalla en dicho apartado.

Si se hace zoom en la zona en la que se tienen posiciones en x más alejadas del blanco se pueden atisbar notables diferencias en los resultados que calcula cada método. La Ilustración 6 muestra este aspecto. Efectuando un análisis en planta, se observa que los métodos de los elementos orbitales relativos y el basado en coordenadas cartesianas linealizado ofrecen resultados muy parejos, difiriendo ligeramente de los calculados por el método cartesiano no lineal, que es el exacto. La razón por la que sucede esto estriba en las consideraciones que se han asumido a la hora de desarrollar el método de los ROE, pues se ha asumido que la matriz que hace evolucionar el estado, $\Phi_{\delta e}(t_j, t_k)$, lleva el estado $\delta \vec{e}(t_k)$ al estado $\delta \vec{e}(t_j)$ sin reportar errores. Esto no es así, pues lo que recoge la ecuación 3.28 no es un modelo exacto, siendo una aproximación con linealizaciones internas. Esta es, por tanto, la causa por la que este método se acerca más al cartesiano linealizado.

$$\delta \vec{e}(t_k) = \Phi_{\delta e}(t_j, t_k) \delta \vec{e}(t_j) \quad (3.28)$$

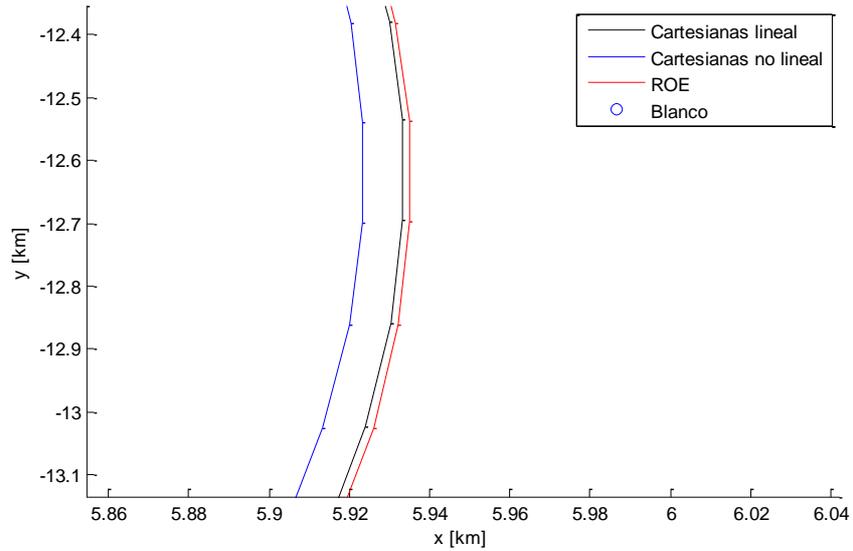


Ilustración 6. Detalle comparación métodos rendezvous libre

En el caso en que el blanco se aleje del satélite perseguidor hasta una distancia inicial de, por ejemplo, 10 km según cada eje coordenado se empiezan a observar ciertas incoherencias entre los diferentes métodos analizados. Para ello, véase la Ilustración 7.

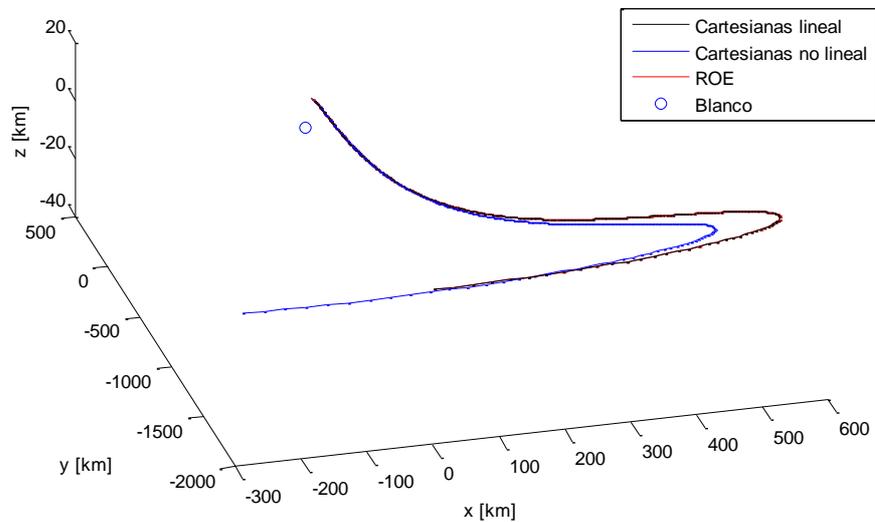


Ilustración 7. Comparación métodos rendezvous libre. Blanco a 10 km

El modelo lineal ya no tiene la precisión deseada y empieza a arrojar resultados totalmente erróneos y alejados de la realidad, del modelo cartesiano no lineal. El modelo que hace uso de elementos orbitales relativos también comienza a divergir pero esto es así, además de por lo explicado en párrafos anteriores, por el cambio de coordenadas empleado para mostrar los resultados. El cambio de coordenadas relaciona este modelado del problema con el caso lineal pero la realidad es que el modo de describir el problema recurriendo a los ROE es, en ausencia de perturbaciones, muy próximo al exacto [5]. Como el orden de magnitud de las distancias que se dan en la fase del rendezvous que se somete a estudio en este Proyecto es pequeño (menos de 100 metros), el cambio de variables del que se hablaba reproducirá fielmente lo que se pretende conseguir.

En la Ilustración 8 pueden observarse los errores absolutos que se cometen al usar el método de los ROE para una excentricidad de 0.2. En la Ilustración 9 se presentan los errores relativos para las mismas condiciones de

movimiento, percibiéndose que son muy pequeños, tendientes a 0 para prácticamente todo el intervalo de tiempos considerado. Ha de decirse que los errores aumentan conforme lo hace la excentricidad, obteniéndose, para $e=0.8$, errores respecto al método cartesiano no lineal del 5% en la coordenada x , de en torno al 7% en dirección y y de aproximadamente el 3% en el caso de la coordenada z , alcanzándose picos de hasta el 35% en dos instantes aislados.

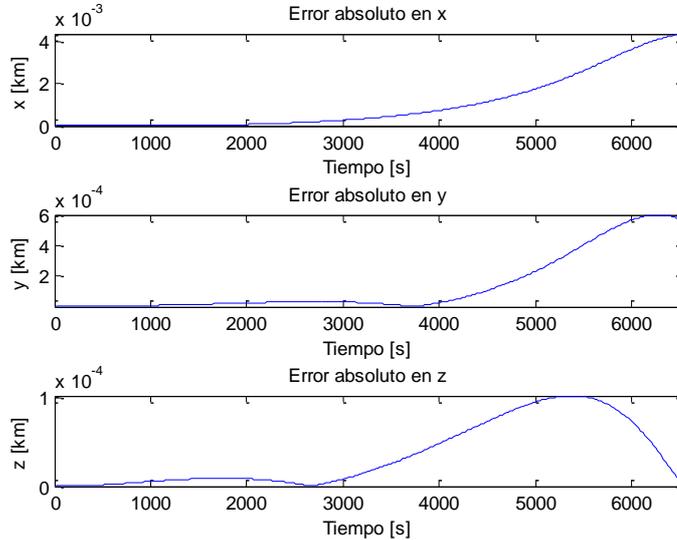


Ilustración 8. Errores absolutos al usar *ROE*

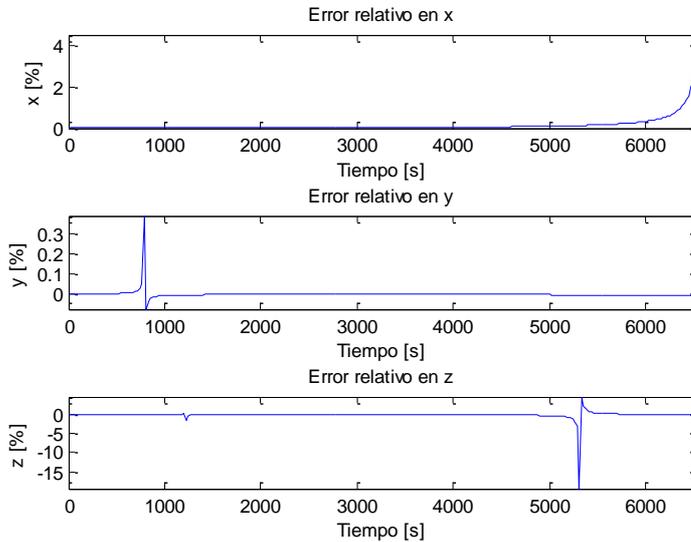


Ilustración 9. Errores relativos al usar *ROE*

Resueltas las diferencias entre las diferentes metodologías y habiéndose comprobado que el método de los *ROE* es totalmente válido cuando no se aplica control alguno sobre el perseguidor, a continuación se muestra qué ocurre cuando los periodos orbitales de blanco y perseguidor coinciden, es decir, cuando se cumple que los semiejes mayores de sus respectivas órbitas coinciden. Se realizará un barrido de excentricidades, haciéndolas variar entre 0 (órbita del blanco circular) y 0.8 (órbita elíptica muy excéntrica).

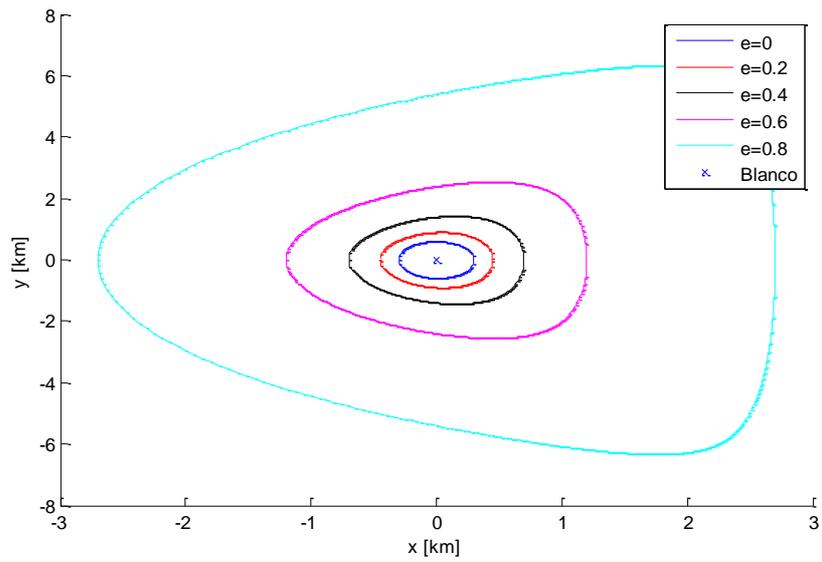


Ilustración 10. Vista x - y de órbitas según ROE para rendezvous libre y varios valores de e

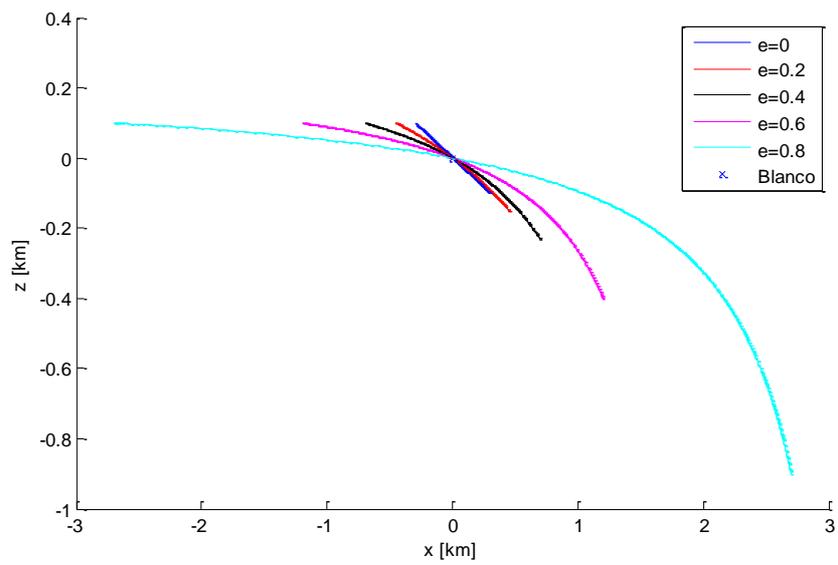


Ilustración 11. Vista x - z de órbitas según ROE para rendezvous libre y varios valores de e

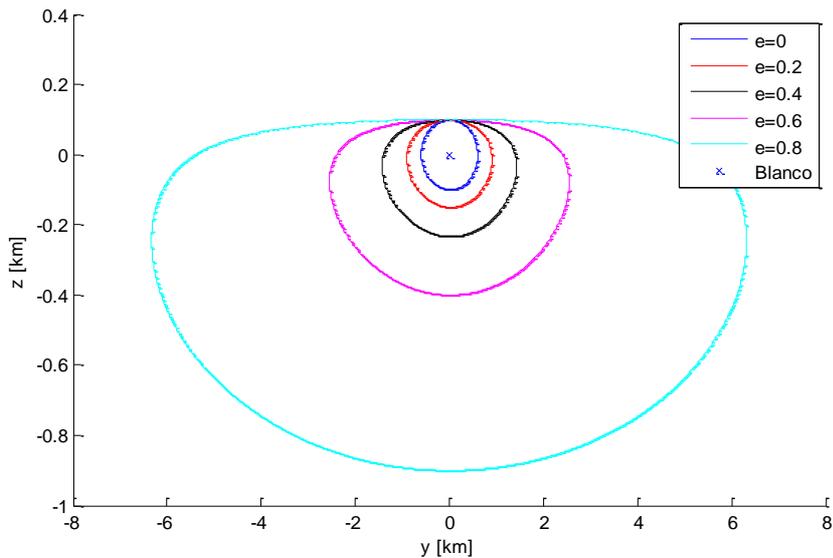


Ilustración 12. Vista y - z de órbitas según ROE para rendezvous libre y varios valores de e

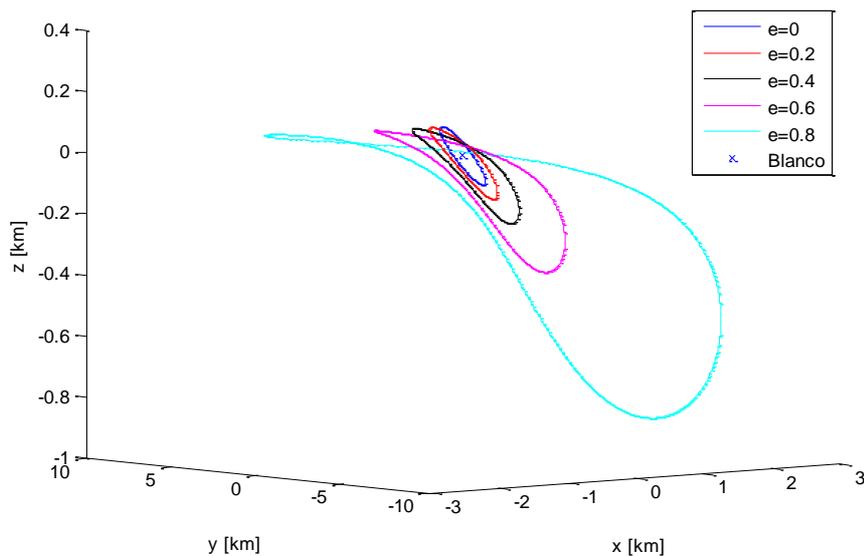


Ilustración 13. Vista 3D de órbitas según ROE para rendezvous libre y varios valores de e

Se pueden extraer varias conclusiones de las Ilustraciones 10-13. La primera es que el elemento orbital e influye enormemente en la órbita resultante, haciéndola tanto mayor e irregular cuanto mayor es su valor. Aumentar la excentricidad de la órbita del blanco provoca que la órbita relativa crezca de tamaño y vaya adquiriendo una curvatura importante. Para excentricidad nula (órbita del blanco circular) la órbita relativa es perfectamente elíptica, con el blanco en el centro de dicha elipse. Para las condiciones iniciales impuestas (ecuación (3.2)), la inclinación de las órbitas tiende a ser menos acusada en el plano x - z siendo éstas más horizontales conforme aumenta e .

Por otro lado, se comprueba lo que se comentaba anteriormente acerca de la periodicidad de la órbita relativa. Al haber impuesto la condición de que los periodos de ambos vehículos sean idénticos, ya no existe esa divergencia que se apreciaba en las Ilustraciones 5, 6 y 7. La órbita aquí descrita es cerrada y se repite para cada periodo del blanco.

Por último, es posible darse cuenta de la simetría que presentan las órbitas respecto al plano $y=0$.

3.2. Veracidad del método de los ROE: movimiento relativo forzado

En este epígrafe se añadirá a las ecuaciones dinámicas obtenidas en 2.3.4 un término de control para poder realizar cambios sobre la órbita relativa con vistas a controlarla. Para incluir estos términos en el modelo basta con recurrir a los cambios de variables ya descritos en el apartado 2.3.5. Se puede proceder como sigue:

Se parte de la relación entre ROE y coordenadas cartesianas, reflejada en la ecuación (2.83). El vector \vec{x} contiene las variables que representan la posición (son las 3 primeras y vienen representadas por la ecuación (3.30)) y la velocidad (son las 3 últimas y vienen representadas por la ecuación (3.31)) del movimiento relativo del perseguidor respecto del blanco. Dividiendo la matriz B_1 en dos submatrices de tal manera que una, que será denominada $B_{1r}(\vec{e}_c)$, constituye las 3 primeras columnas de B_1 y otra, llamada $B_{1v}(\vec{e}_c)$, las 3 últimas, se concluye que:

$$\delta\vec{e} = B_{1r}(\vec{e}_c)\vec{r} + B_{1v}(\vec{e}_c)\vec{v} \quad (3.29)$$

$$\vec{r} = (x, y, z)^T \quad (3.30)$$

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \quad (3.31)$$

Se supondrá, llegado a este punto, que se ejerce un impulso $\Delta\vec{v}$ instantáneo en un instante determinado. Siguiendo con el razonamiento anterior y con el cambio de variables aproximado desarrollado se puede llegar a expresar cómo son los elementos orbitales diferenciales justo antes (se denotará con el superíndice -) y justo después (se denotará con el superíndice +) de ejercer el impulso.

$$\delta\vec{e}^- = B_{1r}(\vec{e}_c)\vec{r} + B_{1v}(\vec{e}_c)\vec{v}^- \quad (3.32)$$

$$\delta\vec{e}^+ = B_{1r}(\vec{e}_c)\vec{r} + B_{1v}(\vec{e}_c)\vec{v}^+ \quad (3.33)$$

Asumiendo que el vector de posición relativa no ha variado en ese instante infinitesimalmente pequeño, al restar la ecuación (3.32) de (3.33):

$$\Delta(\delta\vec{e}) = \delta\vec{e}^+ - \delta\vec{e}^- = B_{1v}(\vec{e}_c)\Delta\vec{v} \quad (3.34)$$

Donde se ha aplicado 3.35.

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}^+ - \vec{v}^- \quad (3.35)$$

Una vez calculadas las variaciones producidas sobre el estado se puede desarrollar una formulación más compacta del problema. Recurriendo a la matriz que hace evolucionar el sistema desde un estado j hasta otro k , desarrollada en 2.3.4 y denotada como $\Phi_{\delta e}(t_k, t_j)$, se puede obtener lo siguiente:

$$\delta\vec{e}(t_{k+1})^- = \Phi_{\delta e}(t_{k+1}, t_k)\delta\vec{e}(t_k)^+ \quad (3.36)$$

Recurriendo a la ecuación (3.34) se llega a (3.37) y (3.38).

$$\delta\vec{e}(t_{k+1})^- = \Phi_{\delta e}(t_{k+1}, t_k)\left(\delta\vec{e}(t_k)^- + \Delta(\delta\vec{e}(t_k))\right) \quad (3.37)$$

$$\delta\vec{e}(t_{k+1})^- = \Phi_{\delta e}(t_{k+1}, t_k)\delta\vec{e}(t_k)^- + \Phi_{\delta e}(t_{k+1}, t_k)B_{1v}(\vec{e}_c(t_k))\Delta\vec{v}(t_k) \quad (3.38)$$

Se puede identificar la definición del sistema en su forma lineal (ecuaciones (3.39)-(3.41)).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.39)$$

$$A = \Phi_{\delta e}(t_{k+1}, t_k) \quad (3.40)$$

$$B = \Phi_{\delta e}(t_{k+1}, t_k) B_{1v}(\vec{e}_c(t_k)) \quad (3.41)$$

Una vez definida la dinámica que hace evolucionar el sistema, se procede a comprobar la veracidad de la misma. Para ello se recurre, una vez más, a la comparación con el procedimiento que se rige por coordenadas cartesianas. Obsérvense las Ilustraciones 14, 15 y 16 para ver la correspondencia entre los dos métodos.

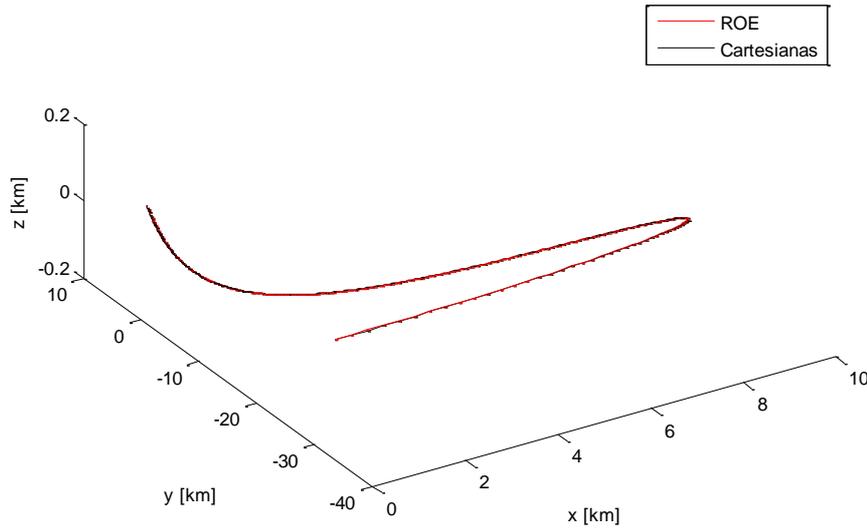


Ilustración 14. Comparación métodos con aplicación de v_x

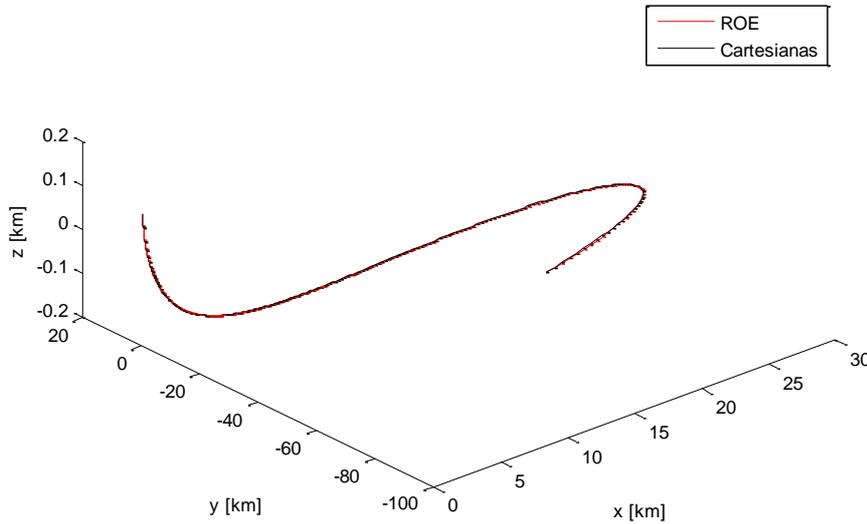


Ilustración 15. Comparación métodos con aplicación de v_y

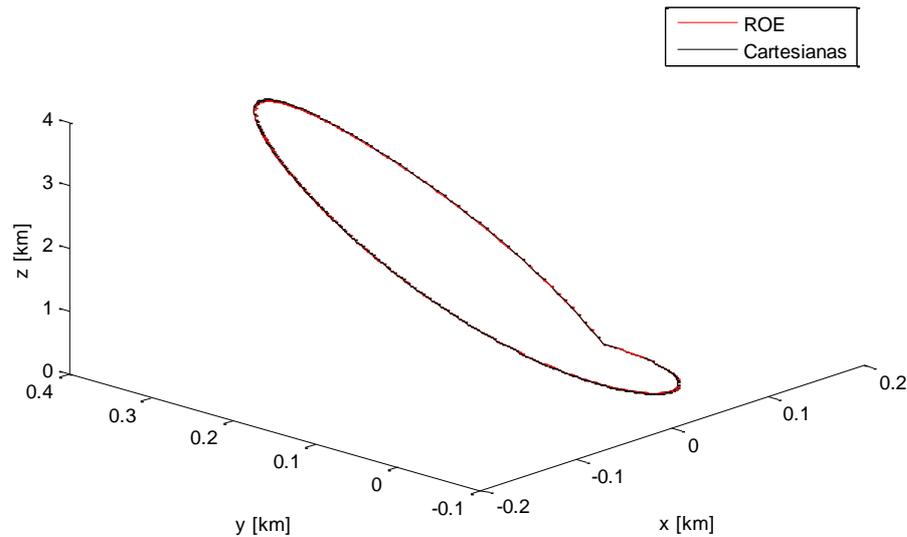


Ilustración 16. Comparación métodos con aplicación de v_z

Por simple inspección visual se puede ver que los métodos arrojan prácticamente los mismos resultados. Cabe decir que estas gráficas se han generado para un valor de la excentricidad de $e=0.3$, no correspondiéndose los resultados que generan ambas metodologías tan exactamente cuando este valor de e alcanza cotas elevadas (para $e=0.8$ y en adelante la divergencia en los resultados empieza a ser ligeramente palpable). Las velocidades aplicadas para poner de ejemplo dicha correspondencia han sido del orden de 1 m/s.

Tras lo visto en los apartados (3.1) y (3.2) se llega a la conclusión de que el método de los elementos orbitales relativos es totalmente válido para describir el problema del rendezvous de vehículos espaciales. La única condición que se ha de cumplir para que sea efectivo es que no existan perturbaciones en el movimiento. La distancia entre perseguidor y objetivo puede ser cualquiera, no requiriendo que esta sea pequeña respecto del módulo del radiovector que une el *chief* con la Tierra como ocurre en el caso del método cartesiano linealizado. Asimismo se ha comprobado, con la resolución numérica de las ecuaciones de ambos métodos, que los ROE aproximan adecuadamente los resultados para un amplio abanico de valores del elemento orbital e de la órbita del blanco. La divergencia en los resultados para muy elevadas excentricidades ($e>0.8$) no adquiere tanta importancia si se tiene en cuenta que la inmensa mayoría de los casos reales de rendezvous trabajan con excentricidades menores que esa cota.

4 PROCEDIMIENTOS PARA EL CÁLCULO Y OPTIMIZACIÓN DEL RENDEZVOUS

En este capítulo se efectuará la totalidad de los desarrollos teóricos contruidos para resolver el problema del rendezvous de vehículos espaciales. Tras comprobarse la bondad del método de los elementos orbitales relativos, se explicará el problema de los dos impulsos, obteniéndose por primera vez un rendezvous completo. Tras esto, se efectuará una formulación en el espacio de estados con el objetivo de realizar una discretización del tiempo y, consecuentemente, de las diferentes variables que intervienen en el problema de manera que se obtenga un modelo algebraico no continuo y fácilmente resoluble y de implementar.

Después, se detallará el modelo elegido para llevar a cabo el control de las maniobras, describiendo un modelo de control predictivo. Se desarrollarán las ecuaciones del modelo, la justificación en la elección de la función objetivo y la construcción de las diferentes restricciones matemáticas. Asimismo, se incluirá un apartado en el que se incluirán un modelo de perturbaciones para que el estudio del problema se acerque lo máximo posible a la realidad.

Teniendo todo esto, se estará en condiciones de establecer una formulación completa del problema y de estimar las perturbaciones anteriormente nombradas. Debe hacerse notar que este capítulo es de corte descriptivo, dejando el muestrario de soluciones numéricas y gráficas de las ecuaciones para el capítulo siguiente.

4.1. Maniobra de dos impulsos

En este apartado se describirá la maniobra de dos impulsos para llegar a realizar completamente el rendezvous. La táctica de esta maniobra es efectuar únicamente dos impulsos, uno al inicio de la maniobra y otro al final de la misma. El objetivo es que el vector de estados en el instante del vector de tiempos en que se quiere conseguir el rendezvous, al que se llamará t_R , sea nulo o lo que es lo mismo, que las posiciones y velocidades relativas en dicho instante sean totalmente nulas.

La manera de proceder, trabajando en principio con coordenadas cartesianas, es la que aquí se describe. Como se ha comentado, la idea es, partiendo de las condiciones iniciales previas al impulso inicial (\vec{r}_0 y \vec{v}_0), conseguir que

$$\vec{r}(t_R) = \vec{0} \quad (4.1)$$

$$\vec{v}(t_R) = \vec{0} \quad (4.2)$$

Suponiendo la existencia de solución analítica del método cartesiano descrito en 2.3.3 para una excentricidad genérica distinta de 0, aquélla se podría expresar matricialmente como sigue:

$$\begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ \vec{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{rr}(t) & A_{rv}(t) \\ A_{vr}(t) & A_{vv}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{v}_0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$A_{rr}(t)$ es una submatriz que relaciona el vector de posición, \vec{r} en el instante inicial y dicho vector en cualquier otro instante genérico. Esta matriz varía según el instante de tiempo al que se quiera hacer evolucionar el estado. Los vectores \vec{r} y \vec{v} definen lo reseñado en las ecuaciones (3.30) y (3.31), respectivamente. Análogamente pueden definirse las submatrices $A_{rv}(t)$, $A_{vr}(t)$ y $A_{vv}(t)$.

Desarrollando por la primera fila de la matriz, particularizando para el instante t_R , se puede encontrar el impulso inicial que hay que proporcionar al sistema:

$$\vec{r}(t_R) = A_{rr}(t_R)\vec{r}_0 + A_{rv}(t_R)\vec{v}_0^+ \quad (4.4)$$

Como se dijo anteriormente, hay que exigir que, en el instante en que se desea hacer el rendezvous, tanto posición como velocidades relativas se anulen. De esta manera, la ecuación (4.4) sería igual a 0, por lo que despejando la velocidad inicial justo tras el impulso:

$$\vec{v}_0^+ = -A_{rv}^{-1}(t_R)A_{rr}(t_R)\vec{r}_0 \quad (4.5)$$

Teniendo la velocidad en el instante inicial justo después de imprimir el impulso y sabiendo la condición inicial en velocidad, impuesta (es dato), se obtiene el primero de los dos impulsos (ecuación (4.6)).

$$\Delta\vec{v}_1 = -A_{rv}^{-1}(t_R)A_{rr}(t_R)\vec{r}_0 - \vec{v}_0^- \quad (4.6)$$

Si en esta ocasión se toma la segunda fila de la matriz de submatrices y se particulariza para el instante t_R se obtiene, mediante la sustitución de (4.5), (4.7).

$$\vec{v}^-(t_R) = [A_{vr}(t_R) - A_{vv}(t_R)A_{rv}^{-1}(t_R)A_{rr}(t_R)]\vec{r}_0 \quad (4.7)$$

Se conoce que la velocidad relativa tras el segundo impulso ha de ser nula. De esta manera, el impulso queda definido por la velocidad relativa antes del mismo cambiada de signo (ecuación (4.8)).

$$\Delta\vec{v}_2 = -[A_{vr}(t_R) - A_{vv}(t_R)A_{rv}^{-1}(t_R)A_{rr}(t_R)]\vec{r}_0 \quad (4.8)$$

De esta manera, el conocimiento de las submatrices A_{rr} , A_{rv} , A_{vr} y A_{vv} en el instante t_R junto con las condiciones iniciales son suficientes para calcular los dos impulsos y conseguir el rendezvous. Pero el método cartesiano no lineal no supone conocidas dichas submatrices. Estas tienen forma clara cuando la excentricidad es nula [10] pero, para excentricidades cualesquiera, no tienen forma definida ya que las ecuaciones solamente admiten resolución numérica. No obstante, este desarrollo será crucial para expresar la maniobra de 2 impulsos según el método de los elementos orbitales relativos. Para ello, se parte de la ecuación de transición entre estados, reflejada en (2.58). Si se particulariza dicha ecuación para $t_j=t_0$, se consigue (4.9).

$$\delta\vec{e}(t) = \Phi_{\delta e}(t, t_0)\delta\vec{e}(t_0) \quad (4.9)$$

Recordando de nuevo las matrices de cambio de variables desarrolladas en el apartado 2.3.5 de la presente memoria, la ecuación (4.9) puede convertirse en una análoga a (4.3) si $t=t_R$.

$$A_1^{-1}(\vec{e}_c(t_R))\vec{x}(t_R) = \Phi_{\delta e}(t_R, t_0)A_1^{-1}(\vec{e}_c(t_0))\vec{x}(t_0) \quad (4.10)$$

Agrupando matrices y comparando la ecuación resultante con (4.3), se obtiene lo siguiente:

$$\vec{x}(t_R) = A_1(\vec{e}_c(t_R))\Phi_{\delta e}(t_R, t_0)A_1^{-1}(\vec{e}_c(t_0))\vec{x}(t_0) \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} A'_{rr} & A'_{rv} \\ A'_{vr} & A'_{vv} \end{bmatrix} = A_1(\vec{e}_c(t_R))\Phi_{\delta e}(t_R, t_0)A_1^{-1}(\vec{e}_c(t_0)) \quad (4.12)$$

En el caso de (4.12), las submatrices sí son conocidas por lo que, procediendo de idéntica manera que para el caso cartesiano, se llega a que los dos impulsos que han de efectuarse sobre el sistema para que el vehículo perseguidor dé alcance al objetivo son:

$$\Delta \vec{v}'_1 = -A'_{rv^{-1}}(t_R)A'_{rr}(t_R)\vec{r}'_0 - \vec{v}'_0 \quad (4.13)$$

$$\Delta \vec{v}'_2 = [A'_{vv}(t_R)A'_{rv^{-1}}(t_R)A'_{rr}(t_R) - A'_{vr}(t_R)]\vec{r}'_0 \quad (4.14)$$

Donde se aplica que:

$$\begin{bmatrix} \vec{r}'_0 \\ \vec{v}'_0 \end{bmatrix} = A_1(\vec{e}_c(t_0))\delta \vec{e}(t_0) \quad (4.15)$$

Hay que tener en cuenta otra consideración adicional. Y es que la matriz $A'_{rv^{-1}}(t_R)$ ha de ser una matriz regular, teniendo que ser su determinante distinto de cero para que admita inversa. Esto se traduce en que el instante en que se efectúe el acoplamiento, el instante t_R , ha de cumplir la ecuación (4.16), donde k es un número entero positivo.

$$t_R \neq \frac{k}{2}T \quad (4.16)$$

4.2. Problema del control

En este apartado se abordará el problema objetivo del Proyecto. Se procederá a efectuar la optimización del problema de rendezvous de vehículos espaciales mediante el método de los elementos orbitales relativos. En un primer lugar se definirá de forma física y matemática el problema en sí. Tras esto, en el apartado 4.3 se establecerá el modelo de control predictivo (*MPC*) con el que se trabajará para obtener los resultados.

4.2.1. Formulación en el espacio de estados

En este punto se establece, simplemente, un breve recordatorio sobre lo desarrollado en 3.2. En dicho apartado, se consiguió formular el problema de rendezvous de manera matricial, con la introducción de las variables de control en el modelo (ecuación (4.17)).

$$\delta \vec{e}(t_{k+1})^- = \Phi_{\delta e}(t_{k+1}, t_k)\delta \vec{e}(t_k)^- + \Phi_{\delta e}(t_{k+1}, t_k)B_{1v}(\vec{e}_c(t_k))\Delta \vec{v}(t_k) \quad (4.17)$$

Mediante (4.17) es posible calcular el estado del sistema en cualquier instante. En lo sucesivo se omite el superíndice “-“. El estado vendrá dado por el set de elementos orbitales relativos recogidos en la ecuación (2.34). Para ser calculado se requiere el estado en el instante previo, la matriz de transición entre los estados correspondientes, la matriz B_{1v} y el vector de impulsos, $\Delta \vec{v}$. Estas tres últimas matrices dependen, a su vez, de los elementos orbitales del blanco en cada instante y, por tanto, del tiempo. El vector de impulsos únicamente depende del instante en el que nos encontremos.

La matriz B_{1v} está constituida por las 3 últimas columnas de la matriz B_1 mientras que el vector de impulsos está definido según (4.18). Como se dijo en el capítulo 2, se considerará que el vehículo perseguidor presenta capacidad de propulsión según los tres ejes cartesianos.

$$\Delta \vec{v}(t_k) = \begin{bmatrix} \Delta v_x(t_k) \\ \Delta v_y(t_k) \\ \Delta v_z(t_k) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Como también se comentó en el apartado 3.2, la expresión del estado posterior en función del anterior y de los impulsos a ejercer en cada instante de tiempo permite identificar el sistema con la ecuación de definición de un sistema lineal (ecuación 4.19).

$$\delta\vec{e}(t_{k+1}) = A\delta\vec{e}(t_k) + B\Delta\vec{v}(t_k) \quad (4.19)$$

De esta manera se tiene descrita de forma discreta la variación del sistema a lo largo del tiempo.

4.2.2. Restricciones

Volviendo a recordar la definición del problema planteado en el apartado introductorio, algunos de los puntos planteados se reflejarán como restricciones matemáticas de dicho problema. En primer lugar, hay que garantizar que la finalidad de la misión será cumplida, esto es, que se acabará consiguiendo el rendezvous. Esto se expresa fácilmente simplemente diciendo que los elementos orbitales de blanco y perseguidor, en el instante final del vector de tiempos considerado, serán iguales (ecuación (4.20)).

$$\delta\vec{e}(t_N) = \vec{0} \quad (4.20)$$

Otra restricción que habrá que modelar será la que limita el valor de los impulsos de velocidad que se imprima al perseguidor para que éste alcance al blanco. Los impulsos deberán ser positivos y estar limitados por una cota superior (ecuación (4.21)).

$$\vec{0} \leq \Delta\vec{v}(t_k) \leq \Delta\vec{v}_{max} \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (4.21)$$

Este conjunto de restricciones se modelarán de cara a aplicar el modelo de control predictivo. Como se dijo en capítulos anteriores, la restricción de no colisión se formula en el capítulo 6; por esta razón no se le da cabida en el presente subapartado, ya que su implementación no se ha llevado a cabo.

4.3. Modelo de Control Predictivo

Los sistemas de control predictivo permiten manipular las variables para establecer una trayectoria deseada a tiempo futuro. Una vez manipuladas dichas variables se procede a su cálculo optimizándolas según la función objetivo definida. El horizonte de planificación puede considerarse móvil o fijo. En este último caso, la dimensión del problema decrece con la sucesión de las iteraciones. Será la opción escogida, a posteriori. Tal como se reseña en [13], el control predictivo utiliza un modelo explícito para predecir la salida de procesos en instantes futuros, mediante el uso de algoritmos para el cálculo de señales de control minimizando cierta función objetivo cumpliendo con unas determinadas restricciones. En base a esto, puede construirse el problema de control del rendezvous de vehículos espaciales, definido en 4.2. Se supone que el blanco permanece en una órbita incontrolable, por lo que las maniobras las efectuará el vehículo perseguidor.

4.3.1. Predicción del estado

Sabiendo que la matriz de transición entre estados es variable con el tiempo, al igual que la matriz B_{1v} , la predicción del estado queda como sigue en ausencia de perturbaciones.

$$\delta\vec{E} = F\delta\vec{e}(t_0) + G\Delta\vec{V} \quad (4.22)$$

Las ecuaciones (4.23)-(4.25) definen los diferentes elementos de (4.22). Tenemos, con la definición de (4.22),

la totalidad de los estados del sistema definidos. $\delta\vec{E}$ aglutina todos los elementos orbitales relativos en cada instante de tiempo, F comprende las matrices de transición entre el instante inicial, t_0 , y todos los incluidos en el vector de tiempos, G es una matriz de submatrices producto de matrices de transición y B_{1v} según instantes y, por último, $\Delta\vec{V}$ es un vector que recoge los diferentes impulsos dados en las tres direcciones del espacio en cada instante de tiempo.

$$\delta\vec{E} = \begin{bmatrix} \delta\vec{e}(t_1) \\ \delta\vec{e}(t_2) \\ \vdots \\ \delta\vec{e}(t_N) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$F = \begin{bmatrix} \Phi_{\delta e}(t_1, t_0) \\ \Phi_{\delta e}(t_2, t_0) \\ \vdots \\ \Phi_{\delta e}(t_N, t_0) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$G = \begin{bmatrix} \Phi_{\delta e}(t_1, t_0)B_{1v}(t_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_{\delta e}(t_2, t_0)B_{1v}(t_0) & \Phi_{\delta e}(t_2, t_1)B_{1v}(t_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \Phi_{\delta e}(t_3, t_1)B_{1v}(t_1) & \Phi_{\delta e}(t_3, t_2)B_{1v}(t_2) & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \Phi_{\delta e}(t_N, t_0)B_{1v}(t_0) & \Phi_{\delta e}(t_N, t_1)B_{1v}(t_1) & \Phi_{\delta e}(t_N, t_2)B_{1v}(t_2) & \dots & \Phi_{\delta e}(t_N, t_{N-1})B_{1v}(t_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\Delta\vec{V} = \begin{bmatrix} \Delta\vec{v}(t_0) \\ \Delta\vec{v}(t_1) \\ \vdots \\ \Delta\vec{v}(t_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

4.3.2. Función objetivo

Con la elección de la función objetivo se pretende básicamente minimizar el consumo de combustible. Para modelar este aspecto se trabajará por llevar al mínimo valor posible la suma de los módulos de las componentes del vector $\Delta\vec{V}$, de manera que los impulsos queden minimizados en cada instante y globalmente. Esta función objetivo será denominada J y seguirá la expresión (4.27).

$$J = \sum_{i=1}^{N-1} |\Delta\vec{v}_i| \quad (4.27)$$

El subíndice representa el instante en que se toma el vector $\Delta\vec{v}$. Cada $\Delta\vec{v}_i$ tiene tres componentes que deberán ser distinguidas; x , y y z .

4.3.3. Expresión de restricciones

Para poder aplicar el modelo de control predictivo es requisito indispensable expresar las restricciones descritas en 4.2.2 en función de la variable a optimizar, en este caso, los impulsos en cada instante de tiempo.

En lo referente a la condición de acoplamiento en el instante final, en el que los *ROE* deben anularse,

matricialmente se puede expresar como sigue:

$$\vec{0} = [0_{6 \times 6} \quad 0_{6 \times 6} \quad \dots \quad 0_{6 \times 6} \quad I_{6 \times 6}] \begin{bmatrix} \delta \vec{e}(t_1) \\ \delta \vec{e}(t_2) \\ \vdots \\ \delta \vec{e}(t_N) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

La matriz $I_{6 \times 6}$ denota la matriz identidad de orden 6. La finalidad de expresar esta restricción según (4.28) es que, denominando a la primera matriz como G_1 e identificando el vector $\delta \vec{E}$, recurriendo a (4.22) e ignorando las perturbaciones que afectan al sistema, se obtiene una restricción en función de las variables a optimizar, de los impulsos (ecuación (4.29)).

$$\vec{0} = G_1(F\delta \vec{e}(t_0) + G\Delta \vec{V}) \quad (4.29)$$

Despejando convenientemente se llega a la primera restricción correctamente expresada:

$$G_1 G \Delta \vec{V} = -G_1 F \delta \vec{e}(t_0) \quad (4.30)$$

Por otro lado, en lo relativo a las restricciones de limitación del valor de los impulsos a aplicar para conseguir el rendezvous, se comentó en apartados anteriores que el límite inferior se corresponderá con un impulso nulo. Por otro lado, la cota superior se denotará como $\Delta \vec{v}_{max}$. Siguiendo la misma manera de proceder que para agrupar los vectores impulso en un único vector, $\Delta \vec{V}$, se efectúa lo prescrito en (4.31).

$$\Delta \vec{V}_{max} = \begin{bmatrix} \Delta \vec{v}_{max} \\ \Delta \vec{v}_{max} \\ \vdots \\ \Delta \vec{v}_{max} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

De esta manera, la doble restricción quedaría como se indica en (4.32)-(4.33).

$$\Delta \vec{V} \leq \Delta \vec{V}_{max} \quad (4.32)$$

$$\vec{0} \leq \Delta \vec{V} \quad (4.33)$$

4.3.4. Cálculo de la señal de control

Para conseguir optimizar los valores de los impulsos en cada instante del vector de tiempos habrá que resolver, el problema dado por las ecuaciones (4.34)-(4.37).

$$J = \min |\Delta \vec{V}| \quad (4.34)$$

s. a.

$$G_1 G \Delta \vec{V} = -G_1 F \delta \vec{e}(t_0) \quad (4.35)$$

$$\Delta \vec{V} \leq \Delta \vec{V}_{max} \quad (4.36)$$

$$\vec{0} \leq \Delta \vec{V} \quad (4.37)$$

Las matrices y vectores que aparecen en el modelo del problema aparecen definidos en apartados anteriores.

Las variables a obtener son los impulsos en cada dirección e instante de tiempo, que aparecen agrupados en el vector $\Delta\vec{V}$. Como se puede observar, el problema es de carácter lineal. La expresión de la función objetivo se puede manipular, atendiendo al significado de la función *valor absoluto*, para que pueda ser contemplada como una función lineal [14].

La resolución del problema de optimización proporcionará las variables de control óptimas que hacen que el vehículo perseguidor alcance al *chief* satisfaciendo todas las restricciones que se tenían en cuenta en el apartado 4.2.2, de manera que se consiga el rendezvous consumiendo el mínimo combustible posible. Todo ello en ausencia de perturbaciones.

Hay otro aspecto a tener en cuenta, y es el hecho de que el control predictivo requiere una replanificación del problema, esto es, llevar a cabo la resolución de un problema totalmente nuevo en cada instante partiendo de las condiciones resultantes de la resolución del problema anterior (en el instante anterior). Así, se exige refrescar las condiciones iniciales en cada instante y retocar ciertos aspectos del modelado como la matriz F . Para abordar esto se puede optar por mantener constante el horizonte de planificación o, por el contrario, desplazarlo en cada instante. Las características más generales de cada elección se detallan a continuación.

Horizonte deslizando

En este caso se supone que el horizonte de planificación avanza conforme lo hace la misión. Esta idea queda resumida según los siguientes puntos:

- En cada instante k se resolverá el problema planteado hasta el final de la misión (N).
- Los actuadores aplican únicamente la primera señal de control calculada, efectuando el vehículo perseguidor solamente el primero de los impulsos calculados.
- En el instante siguiente ($k + 1$) se vuelve a resolver el mismo problema pero desde el nuevo instante inicial hasta el final de la misión, que también varía ($N + 1$).
- Los actuadores solo aplican el primer impulso del nuevo problema, desechando los restantes.
- ...

Al final de la misión, las variables de control optimizadas vendrán dadas por la combinación de todos los “primeros” impulsos calculados en cada nuevo problema en cada instante de tiempo.

Horizonte fijo

En este caso el horizonte de planificación permanece fijo reduciéndose, en consecuencia, el tamaño del problema en cada instante de tiempo. Los puntos que caracterizan esta manera de proceder son:

- En el instante k se resuelve el problema planteado hasta el final de la misión (N).
- Los actuadores aplican la primera señal de control calculada, desechando las demás.
- En el nuevo instante ($k + 1$) se vuelve a resolver el problema desde el nuevo instante inicial hasta el final, que sigue siendo el mismo que en el caso anterior (N).
- ...

Esta metodología acelera el proceso de cálculo por la reducción en la dimensión del problema con el paso del tiempo. Para maniobras como el rendezvous esto es esencial, por lo que será la técnica escogida.

4.4. Perturbaciones

Hasta este momento no se ha considerado ningún tipo de perturbación en el movimiento relativo entre

vehículo objetivo y perseguidor. Ello ha conllevado una simplificación del problema y una pérdida parcial de realismo en los resultados recogidos. Por ello, y con vistas a aumentar el grado de realismo del modelo desarrollado, se considerará la perturbación más representativa en las altitudes en las que la maniobra de rendezvous tiene lugar, el J_2 .

Dentro de las perturbaciones que pueden darse a la hora de efectuar maniobras orbitales en el espacio, éstas pueden ser conservativas o no conservativas [15] si se atiende a la naturaleza de la fuerza que las origina. Dentro de este criterio, las conservativas vienen dadas por aquella que derivan de un potencial, mientras que las no conservativas dependen de la geometría del problema y del satélite, resultando muy difíciles de modelar. Asimismo, si se presta atención al periodo de influencia, se pueden tener perturbaciones seculares (de efecto acumulativo a lo largo del tiempo) y perturbaciones periódicas, cuyo valor medio es nulo. La perturbación del J_2 se encuadra dentro de las conservativas y tiene componentes periódicas y seculares. Es debida a la forma no totalmente esférica de la Tierra. Nuestro planeta tiene forma de geoide, estando achatado por los polos y ensanchado por el ecuador, lo que provoca una alteración en la normal de la órbita originando, a su vez, una fuerza perturbadora.

Tal como se indica en [16], el J_2 provoca ligeras alteraciones en los elementos orbitales de cualquier vehículo espacial que orbite en órbitas bajas, lo cual implica que provoca ligeros cambios, igualmente, en los elementos orbitales relativos. A pesar de ello, los efectos sobre los elementos orbitales a , e e i son únicamente de carácter periódico, de media nula, por lo que no serán tomados en consideración. Sin embargo, sobre los 3 elementos orbitales restantes provoca efectos seculares, crecientes con el paso del tiempo. En el Proyecto se recurre a los elementos orbitales relativos para calcular el problema de rendezvous, por lo que se necesitan expresiones en las que estos ROE aparezcan. De esta manera, se tiene que:

$$\delta\dot{a}(t) = 0 \quad (4.38)$$

$$\delta\dot{e}(t) = 0 \quad (4.39)$$

$$\delta\dot{i}(t) = 0 \quad (4.40)$$

$$\delta\dot{\Omega}(t) = \epsilon n \left(\frac{7}{4} \cos i \frac{\delta a}{a} - 2 \frac{e}{\eta^2} \cos i \delta e + \frac{1}{2} \sin i \delta i \right) \quad (4.41)$$

$$\delta\dot{\omega}(t) = \epsilon n \left(-\frac{7}{8} (5 \cos^2 i - 1) \frac{\delta a}{a} + \frac{e}{\eta^2} (5 \cos^2 i - 1) \delta e - \frac{5}{4} \sin(2i) \delta i \right) \quad (4.42)$$

$$\delta\dot{M}_0(t) = \epsilon n \left(-\frac{7}{8} \eta (3 \cos^2 i - 1) \frac{\delta a}{a} + \frac{3e}{4\eta} (3 \cos^2 i - 1) \delta e - \frac{3}{4} \eta \sin(2i) \delta i \right) \quad (4.43)$$

Los parámetros que aparecen en las ecuaciones anteriores obedecen a las siguientes expresiones:

$$\epsilon(a, e) = 3J_2 \left(\frac{R_T}{a(1 - e^2)} \right)^2 \quad (4.44)$$

$$\eta = \sqrt{1 - e^2} \quad (4.45)$$

El set de ecuaciones (4.38)-(4.43) no está en términos de las variables definidas en 2.3.4 por lo que hay que realizar las transformaciones oportunas para poder aplicar dichas ecuaciones al problema. Sin embargo, las variables que aparecen guardan relación conocida con las definidas a lo largo del presente documento. El valor de J_2 se estimará en el capítulo siguiente, a la hora de representar los diferentes resultados. Surge, como se ha dicho, una pequeña discrepancia si se observan las ecuaciones de variación temporal de los elementos orbitales relativos, discrepancia derivada de la elección que se ha hecho de los ROE . Por lo tanto, hay que jugar con los resultados que arrojan las ecuaciones en cada instante para obtenerlos en función de las variables elegidas $\delta q_1, \delta q_2, \delta \theta$.

5 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Tras ver en el capítulo 2 una introducción sucinta al problema de rendezvous de vehículos espaciales, en ese mismo capítulo y en el capítulo 4 se ha desarrollado todo el modelo matemático del problema. El modelo que describe la órbita relativa ha sido verificado en el 3 y se ha establecido un modelo de control predictivo que optimizará el conjunto de maniobras que el vehículo perseguidor realizará para dar caza al blanco, minimizando el combustible consumido y consiguiendo el rendezvous. Se ha considerado, por otro lado, el efecto de la perturbación más importante en esas cotas y, a modo de referencia y para establecer una comparación, se ha desarrollado la maniobra de los dos impulsos.

En este nuevo capítulo se implementará todo lo definido y modelado en los dos capítulos teóricos anteriores en software adecuado para ver la evolución de las diferentes variables que toman partido en el problema.

5.1. Datos de partida

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones que se han desarrollado a lo largo del presente documento se requieren valores de un determinado número de parámetros y de ciertas condiciones del movimiento.

Los elementos orbitales del vehículo objetivo son los recogidos en la Tabla 1. Estas variables serán el punto de partida para realizar las simulaciones. Definen la órbita geocéntrica del blanco. Adicionalmente se considerará que el blanco siempre parte del perigeo a no ser que se diga lo contrario, de manera que la anomalía verdadera en el instante inicial será nula, con la consecuencia de que la latitud verdadera, al principio del movimiento, coincide con el argumento de perigeo.

Para definir la evolución de la órbita relativa de vehículo perseguidor respecto del blanco es necesario definir las condiciones iniciales en las que ese movimiento comienza. Por ello, en un principio, se asumen como condiciones iniciales (dadas en coordenadas cartesianas) las que se recogen en la Tabla 2, La excentricidad del blanco se fijará, de inicio, en el valor $e = 0.2$.

Variable	x_0 (km)	y_0 (km)	z_0 (km)	\dot{x}_0 (km/s)	\dot{y}_0 (km/s)	\dot{z}_0 (km/s)
Valor	0.1	0.1	0.1	0	0	0

Tabla 2. Condiciones iniciales del movimiento relativo, en cartesianas

Recurriendo al cambio de sistema de coordenadas descrito en el apartado 2.3.5 pueden conseguirse las condiciones del movimiento relativo en términos de elementos orbitales relativos, tal como aparece en la Tabla 3.

Variable	δa_0 (km)	$\delta \theta_0$ (rad)	δi_0 (rad)	δq_{10} (-)	δq_{20} (-)	$\delta \Omega_0$ (rad)
Valor	0.688	3.122e-4	2.873e-5	5.757e-4	1.649e-4	-2.193e-4

Tabla 3. Condiciones iniciales del movimiento relativo, en ROE

El vector de tiempos a lo largo del que se propagarán las diferentes soluciones de las ecuaciones será como indica la ecuación (5.1).

$$t = \begin{bmatrix} 0 \\ t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_N = T \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Donde el último instante se corresponderá con el periodo orbital del *chief*, que viene dado por la expresión (2.19), de manera que $T = 6535.26$ s, lo que resulta ser en torno a 1.82 horas.

En el Tabla 4 se recoge el valor de los diferentes parámetros que intervienen de una manera u otra en la resolución de cada problema para las condiciones que definen la órbita del objetivo.

Parámetro	Valor
η (-)	0.98
p (km)	7253
μ (km ³ /s ²)	398600,4
h (km ² /s)	5.38e4
n (rad/s)	9,614e-4
J_2 (-)	0.001083
R_T (km)	6378.14
$ \Delta \vec{v}_i _{max}$ ($i = x, y, z$) (m/s)	0.001

Tabla 4. Parámetros que intervienen en el problema

5.2. Problema de los dos impulsos

Como se describió en el apartado 4.1 del capítulo anterior, la maniobra de dos impulsos recurre únicamente a dos impulsos en los instantes inicial y aquel en el que se produce el rendezvous final. A continuación se muestra un reportaje gráfico de la órbita descrita por el perseguidor alrededor del blanco hasta darle caza. Se muestran resultados por un amplio abanico de valores del valor orbital e .

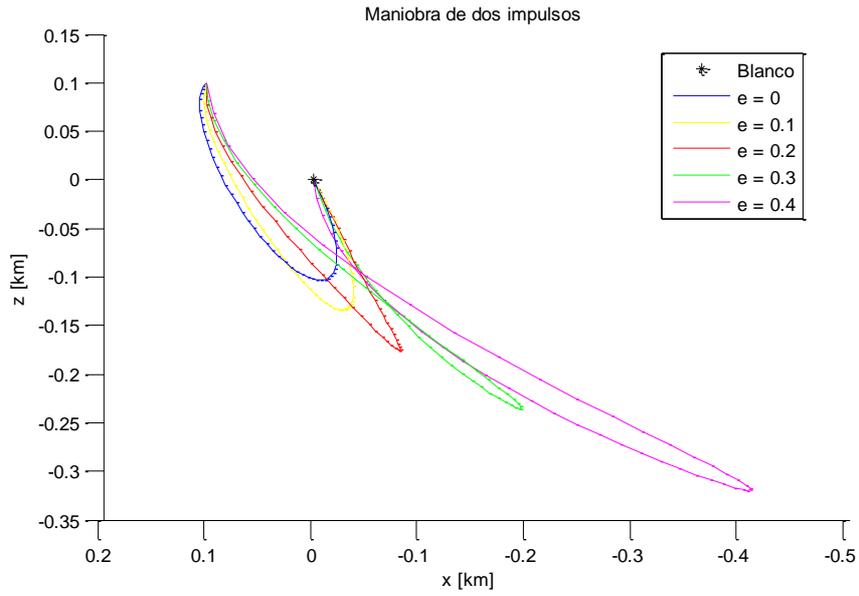


Ilustración 17. Maniobra de los 2 impulsos. Vista x-z para varios valores de e

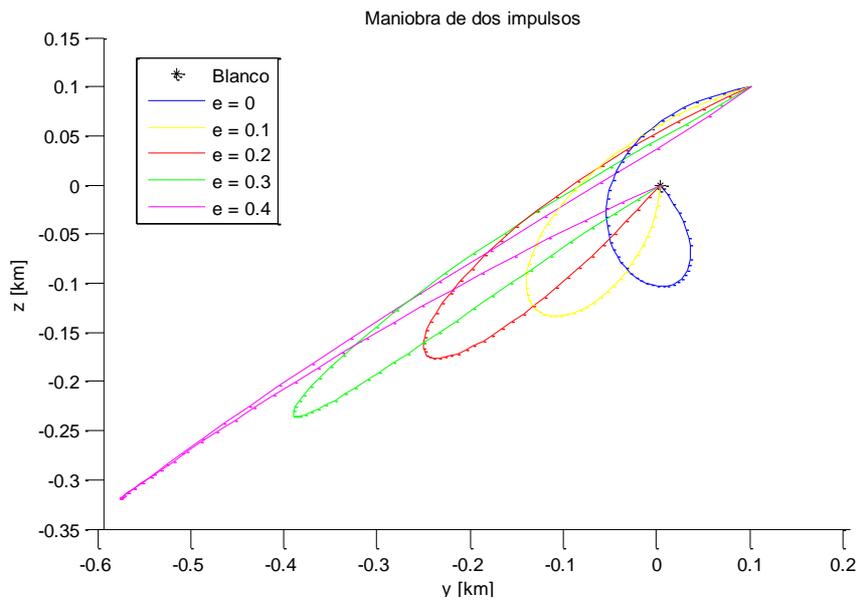


Ilustración 18. Maniobra de los 2 impulsos. Vista y-z para varios valores de e

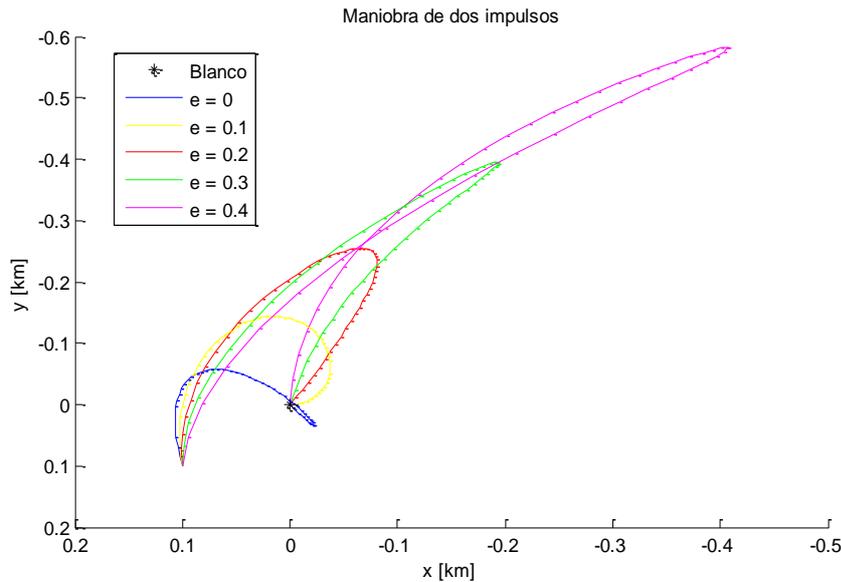


Ilustración 19. Maniobra de los dos impulsos. Vista x-y para varios valores de e

A la luz de las gráficas presentadas (Ilustraciones 17-19) se puede observar la gran influencia que el valor de la excentricidad tiene sobre los resultados. Cuanto mayor es el elemento orbital e mayores son las distancias que el perseguidor recorre antes de completar el rendezvous. Para ver estos efectos sobre los impulsos efectuados en cada maniobra se presenta la Tabla 5, en la cual se demuestra que un aumento de la excentricidad de la órbita del blanco implica un gran aumento del gasto de combustible, pues así lo hacen los impulsos de velocidad.

Valor de e (-)	Primer impulso (m/s)	Segundo impulso (m/s)	Impulso neto (m/s)
0	[0.028, -0.172, -0.025]	[-0.047, -0.020, -0.099]	0.391
0.1	[0.026, -0.212, -0.055]	[-0.058, -0.021, -0.113]	0.485
0.2	[0.019, -0.264, -0.102]	[-0.078, -0.023, -0.132]	0.618
0.3	[0.006, -0.335, -0.178]	[-0.111, -0.024, -0.158]	0.812
0.4	[-0.023, -0.437, -0.305]	[-0.170, -0.026, -0.192]	1.153

Tabla 5. Impulsos efectuados en las maniobras de los dos impulsos

La evolución del gasto puede apreciarse más claramente en la Ilustración 20, donde se enfrentan el valor de la excentricidad con el impulso neto de la maniobra de dos impulsos. La evolución del gasto es más o menos cuadrática con e por lo que un valor elevado de dicho elemento orbital conllevaría un gasto de combustible inadmisiblemente alto. Es por esta razón por la que no se ha escogido un rango más amplio de excentricidades a la hora de representar las órbitas relativas de cada caso. Asimismo, observando la Tabla 5, se percibe que el primero de los impulsos es siempre mayor que el segundo, por lo que se emplea mayor cantidad de combustible en hacer que el satélite perseguidor se dirija, mediante la órbita adecuada, al blanco que en frenarlo para el posterior acoplamiento.

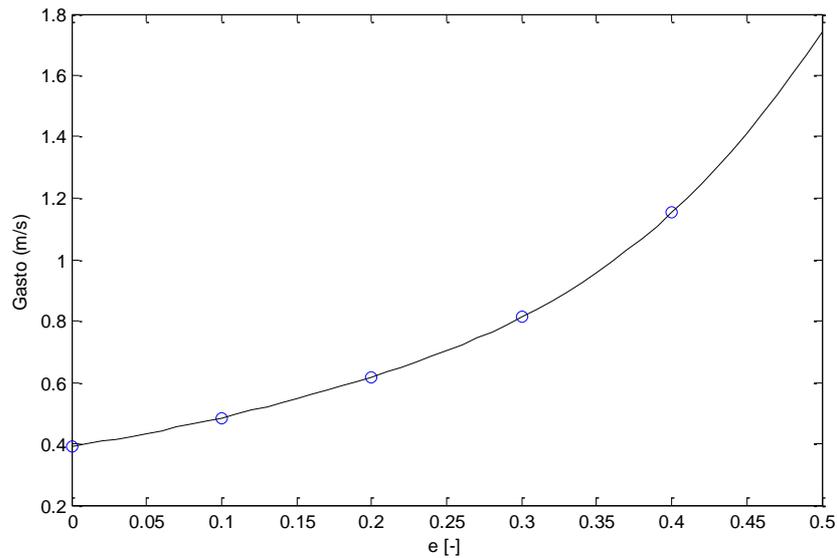


Ilustración 20. Tendencia del gasto con la excentricidad en la maniobra de los dos impulsos

5.3. Problema de rendezvous mediante control predictivo

En el apartado que a continuación se desarrolla se expondrán multitud de resultados gráficos y numéricos para diferentes valores de los parámetros y condiciones iniciales del modelo planteado.

5.3.1. Modelo perturbado y no perturbado

En primera instancia se procederá a comparar los rendezvous optimizados que resultan de resolver el modelo de control predictivo en ausencia de perturbaciones y contando con la presencia de las mismas en las ecuaciones del modelado.

Tal y como se explicó en el apartado 4.4, un tipo de perturbaciones a considerar será la debida a la forma no totalmente esférica de la Tierra, esto es, la perturbación del J_2 . Para los valores de las constantes reseñados en el apartado 5.1 e incluyendo la triada de ecuaciones (4.41)-(4.43) en el modelo de *MPC* con las pertinentes modificaciones para ser tenidas en cuenta en función de los *ROE* considerados, se obtiene la siguiente comparación gráfica.

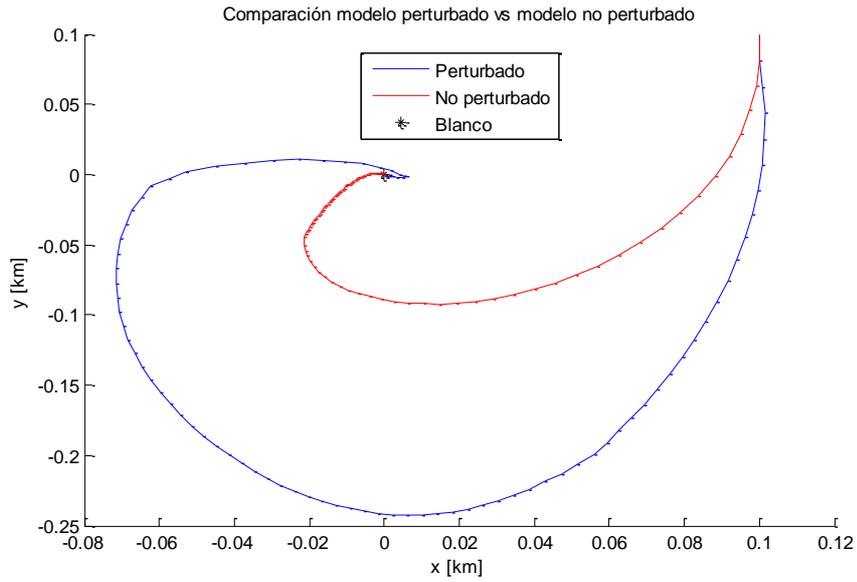


Ilustración 21. Comparación entre modelo perturbado y no perturbado. Vista x-y.

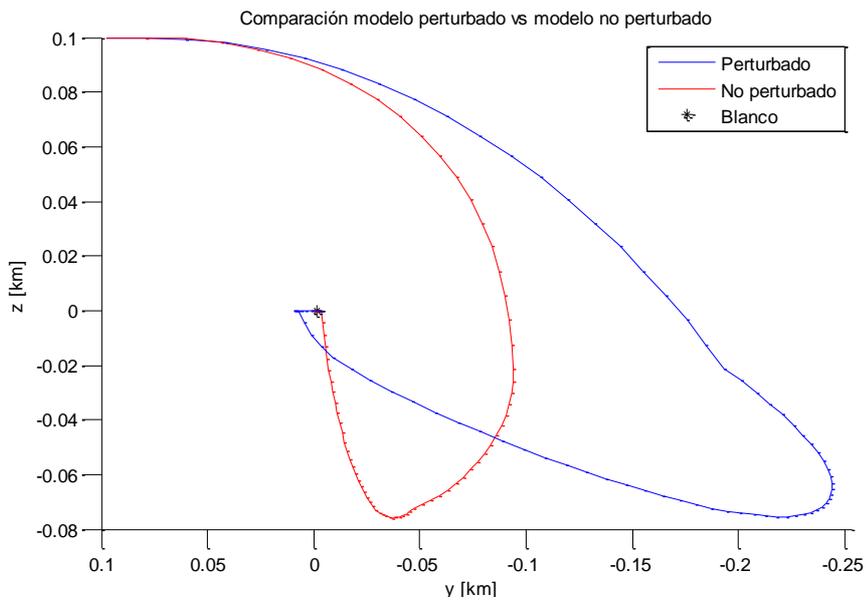


Ilustración 22. Comparación entre modelo perturbado y no perturbado. Vista y-z.

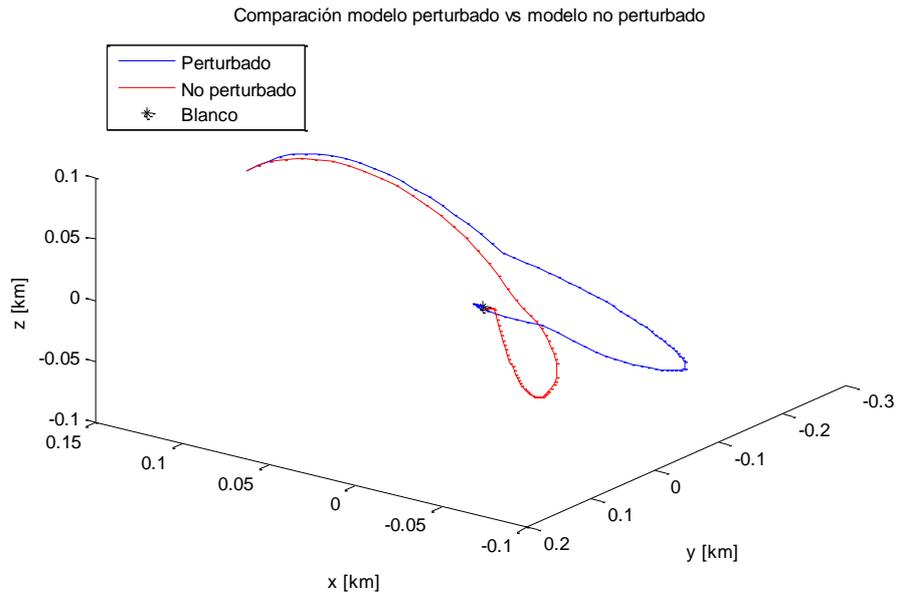


Ilustración 23. Comparación entre modelo perturbado y no perturbado. Vista en 3D

A la luz de los resultados representados en las Ilustraciones 21-23, se observa el gran efecto que supone considerar la existencia de perturbaciones en el modelo. Estas perturbaciones, como se dijo en el capítulo anterior, introduce efectos acumulativos en el tiempo en los diferentes elementos orbitales relativos, efectos que se van sumando en cada instante de tiempo. No son efectos periódicos como en otros casos, sino definitivos. A pesar de ello, el algoritmo planteado consigue el rendezvous a la perfección, haciendo que el vehículo perseguidor alcance al objetivo. Sin embargo, se pierde esa optimización que sí se alcanzaba en el caso sin perturbaciones.

Si se observa con más detenimiento las vistas anteriores se puede atisbar, sobre todo en la Ilustración 22, que las diferencias en la coordenada z no son tan grandes como en el caso x - y . Esto se debe a que el movimiento fuera del plano, gobernado por los elementos i y Ω , no se ve muy influenciado por las perturbaciones. El valor δi no se ve afectado por la existencia de perturbaciones con el paso del tiempo, al menos no de manera secular. El valor $\delta \Omega$ sí se ve afectado pero de manera ínfima, con órdenes de magnitud 5 veces menores a los órdenes de los valores sin perturbar, por lo que puede considerarse que la dinámica fuera del plano orbital apenas se ve afectada. No ocurre lo mismo con la dinámica en el plano, pues los valores de δq_1 , δq_2 y $\delta \theta$ se ven algo más afectados por la presencia de perturbaciones.

Si se comparan los valores de los gastos en cada caso se obtiene lo reflejado en la Tabla 6.

	Gasto (m/s)
Movimiento no perturbado	0.407
Movimiento perturbado	0.592

Tabla 6. Comparación gastos modelo perturbado y no perturbado

Se puede ver cómo aumenta el gasto en el caso perturbado, y es que están introduciéndose pequeñas variaciones de las variables no contempladas en el modelado del problema. A pesar de estas diferencias, y tal como se ha dicho en párrafos anteriores, el rendezvous se consigue, a cambio, eso sí, de un mayor gasto de combustible.

Se verá a continuación la influencia del elemento orbital e en la diferencia entre los casos perturbado y no perturbado valorando, para ello, el gasto en ambos casos. Los resultados se recogen en la Tabla 7, mientras que

se efectúa una comparación gráfica en la Ilustración 24.

Excentricidad (-)	Gasto (m/s)	
	Caso perturbado	Caso no perturbado
0	0.290	0.301
0.1	0.398	0.348
0.2	0.592	0.407
0.3	0.973	0.489
0.4	2.3	0.606

Tabla 7. Comparación casos perturbado y no perturbado para varias e

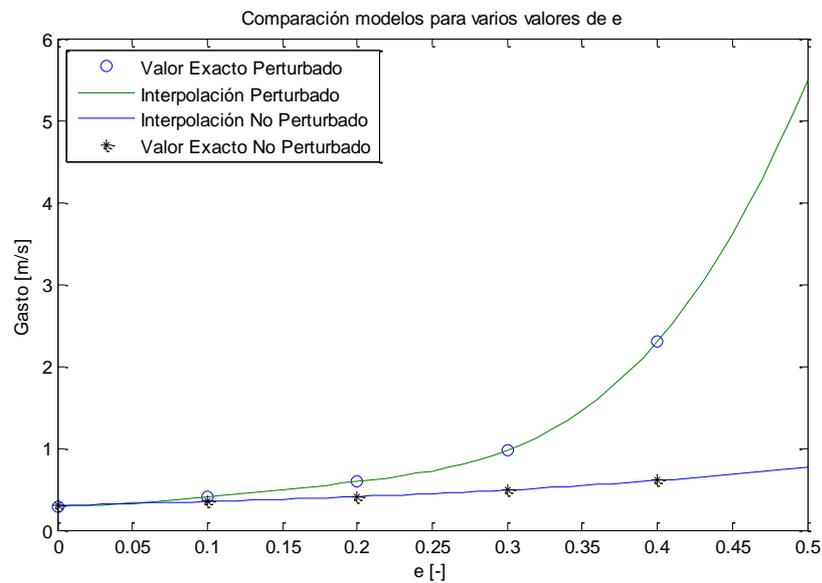


Ilustración 24. Comparación modelo perturbado y no perturbado para varios valores de e

Tanto de manera numérica (en la Tabla 7) como gráfica (Ilustración 24) pueden observarse las diferencias tan notables que van adquiriendo los gastos de ambos modelos de control predictivo (perturbado y sin perturbaciones de ningún tipo) cuando el elemento orbital e empieza a aumentar. Aunque los gastos en ambos casos empiezan prácticamente parejos, de hecho para el caso en el que el blanco se mueve en una órbita circular el caso perturbado supone un gasto de combustible incluso algo menor que en el caso no perturbado (las perturbaciones, en este caso, favorecen el movimiento, por lo que se ahorra cierta cantidad de combustible), cuando la excentricidad de la órbita del vehículo objetivo comienza a aumentar se produce un aumento prácticamente exponencial del consumo en el modelo con perturbaciones, adquiriendo valores inadmisibles para excentricidades superiores a 0.5. Desafortunadamente, habrá que contar con las perturbaciones en el modelo pues son algo inexorable, por lo que estos resultados serán los que habría que tener en cuenta en el caso de una hipotética realización del sistema desarrollado. De esta manera, en lo sucesivo, las representaciones reflejadas en el presente documento corresponderán a casos perturbados según los valores de la Tabla 4, a no ser que se especifique lo contrario.

Además de los resultados comentados, se ha calculado el vector de velocidades relativas en el último instante

del vector de tiempos, aquel en el que se consigue el rendezvous con el posterior acoplamiento del perseguidor y el vehículo objetivo. Estas velocidades relativas resultan ser completamente nulas, cumpliéndose la premisa de la que se partía en el modelado del problema.

El hecho de comparar los modelos perturbado y no perturbado que arroja el modelo de control predictivo tiene su causa justificada. Como se comentó en capítulos anteriores, el modelo de control predictivo recurre a una replanificación del problema en cada instante de tiempo. Asimismo, previo a la definición completa del modelo, se ha experimentado brevemente con la planificación del problema, calculando los impulsos a efectuar en cada instante de tiempo de golpe, sin refrescar condiciones, sin replantear el problema con el paso del tiempo y sin reducir su dimensión como sí se ha hecho en 4.3. En ausencia de perturbaciones, este modelo arroja idéntico resultado que el modelo de control predictivo, pues estamos ante casos perfectos. Sin embargo, cuando entran en juego las perturbaciones que, por ejemplo, se definieron en 4.4, los resultados varían en demasía, no consiguiéndose el rendezvous y haciendo necesario construir el modelo de control predictivo. Partiendo de las mismas condiciones iniciales y sin alterar el valor de las perturbaciones ni el de los diferentes parámetros que van apareciendo a lo largo de la definición del problema, se concluye que los resultados son los representados en la Ilustración 25.

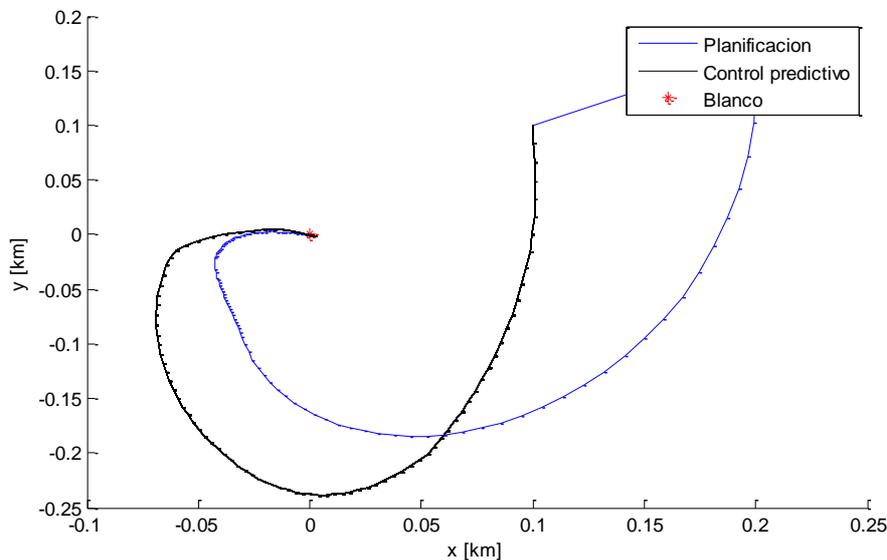


Ilustración 25. Planificación vs Control predictivo para $e = 0.2$.

La excentricidad que se ha considerado es $e = 0.2$. Mientras que aplicando replanificación, técnica en la que se basa el control predictivo, los errores en la consecución del rendezvous son imperceptibles, la planificación arroja unos errores de aproximadamente $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (1, 0.01, 0.001) m$. La órbita relativa se aleja bastante de la que es la óptima, calculada por el algoritmo de control predictivo.

En el caso de que la excentricidad aumente a $e = 0.5$, los resultados gráficos pasan a ser los de la Ilustración 26. En ella se pueden observar notables diferencias entre las órbitas relativas calculadas. Aunque aparentemente en ambos casos se alcanza el blanco, esto no es así. La replanificación en la que se basa el control predictivo logra el rendezvous sin apenas error en tanto que la planificación comete unos errores ya notables: $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (32.4, 0.46, 0.51) m$. Es por este motivo por el que se recurre al control predictivo. En cuanto la excentricidad u otro elemento orbital del blanco hagan que la órbita del blanco se haga muy excéntrica, los errores cometidos al usar planificación aumentan.

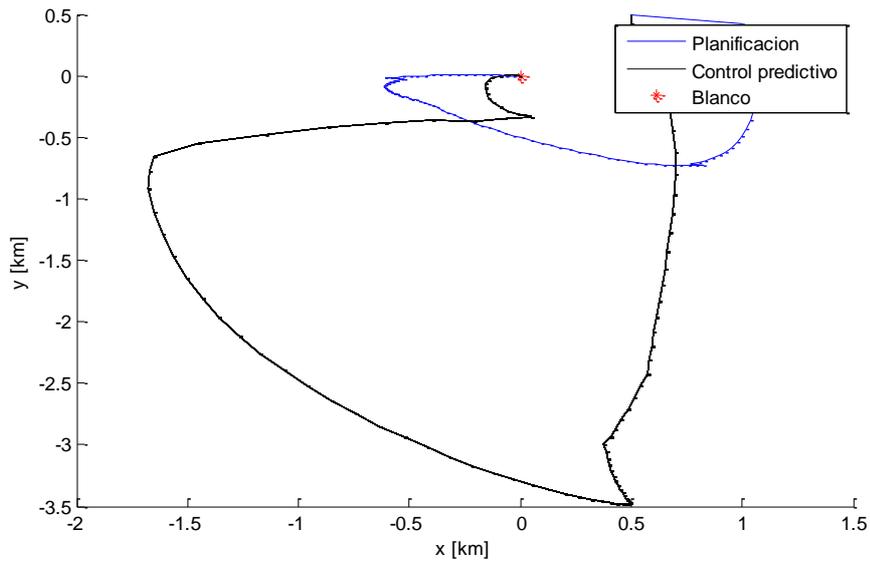


Ilustración 26. Planificación vs Control predictivo para $e = 0.5$.

5.3.2. Variación de los resultados con las condiciones iniciales

En este apartado se hará una breve comparativa de los resultados obtenidos según diferentes condiciones iniciales en posición y velocidad de la órbita relativa. Las condiciones iniciales, para su mejor entendimiento, se expondrán en coordenadas cartesianas. Se establecerá, asimismo, una breve comparación con los casos no perturbados.

5.3.2.1. Variación con x_0

Se expondrán representaciones superpuestas para varios valores de x_0 manteniendo el resto de condiciones iniciales en los valores reseñados en la Tabla 8.

x_0 (m)	y_0 (km)	z_0 (km)	\dot{x}_0 (m/s)	\dot{y}_0 (m/s)	\dot{z}_0 (m/s)
Variable	0.1	0.1	0	0	0

Tabla 8. Condiciones iniciales para variaciones de x_0

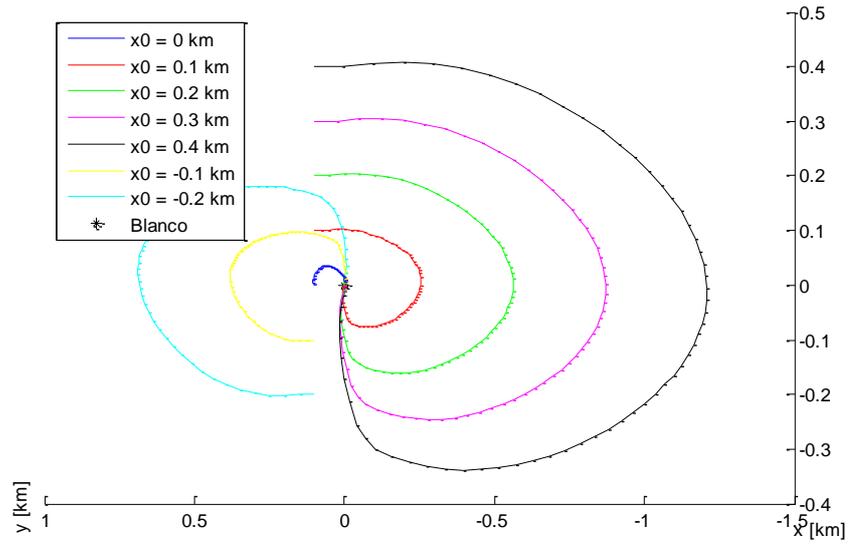


Ilustración 27. Rendezvous perturbado para x_0 variable. Vista x-y

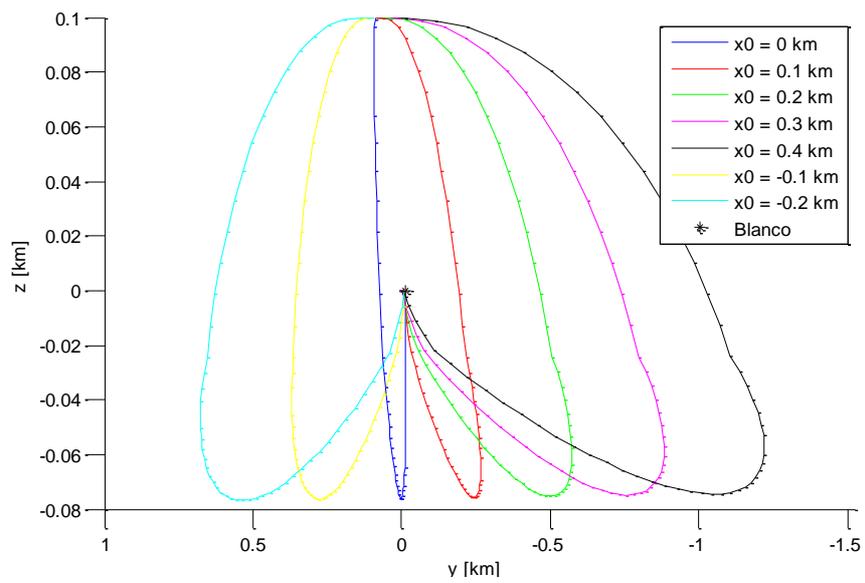


Ilustración 28. Rendezvous perturbado para x_0 variable. Vista y-z

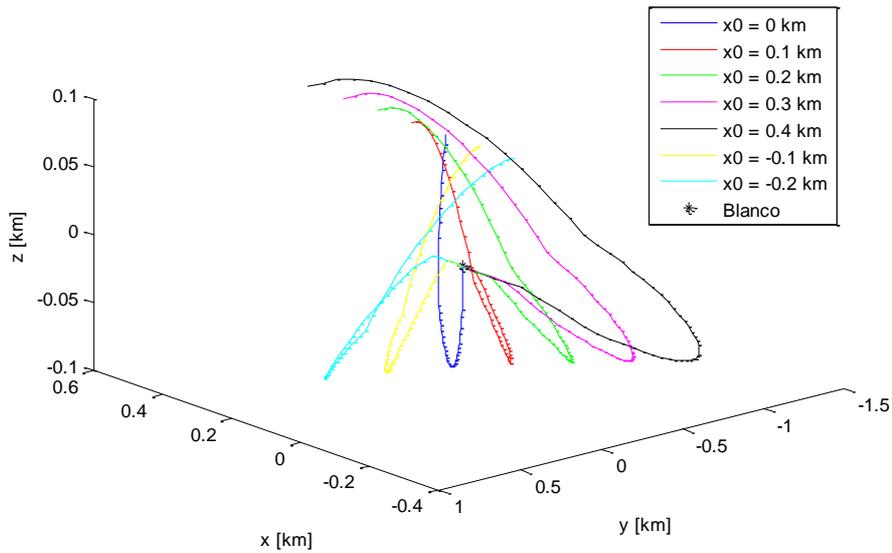


Ilustración 29. Rendezvous perturbado para x_0 variable. Vista 3D

Lo primero que hay que destacar de estos resultados, y que es aplicable a los siguientes subapartados, es que las velocidades relativas en el instante de tiempo final son prácticamente nulas, del orden de mm/s en la dinámica del plano (x - y) y de 100 veces menor que en el plano en la dinámica fuera del plano (z). En el caso no perturbado (Ilustración 30 y análogas de los subapartados posteriores) las velocidades son prácticamente 0.

En lo que atañe a los resultados ofrecidos por el modelo de control predictivo con presencia de perturbaciones cuando la condición inicial en la coordenada x es variable, se observa de antemano que la dinámica en z se estabiliza ($z = 0$) antes que la dinámica x - y . Además, cuanto mayor es el valor absoluto de la condición inicial impuesta, mayor recorrido efectúa el vehículo perseguidor antes de alcanzar al objetivo.

Comparando el caso perturbado con el no perturbado, cuya vista en el plano se muestra a continuación, se puede observar que las perturbaciones hacen que las órbitas sean más circulares en planta, menos excéntricas. Sin embargo, y a pesar de que posteriormente se comprobará que el gasto en el caso no perturbado es menor, la órbita relativa presenta, según la Ilustración 30, mayor recorrido en el plano que el caso perturbado.

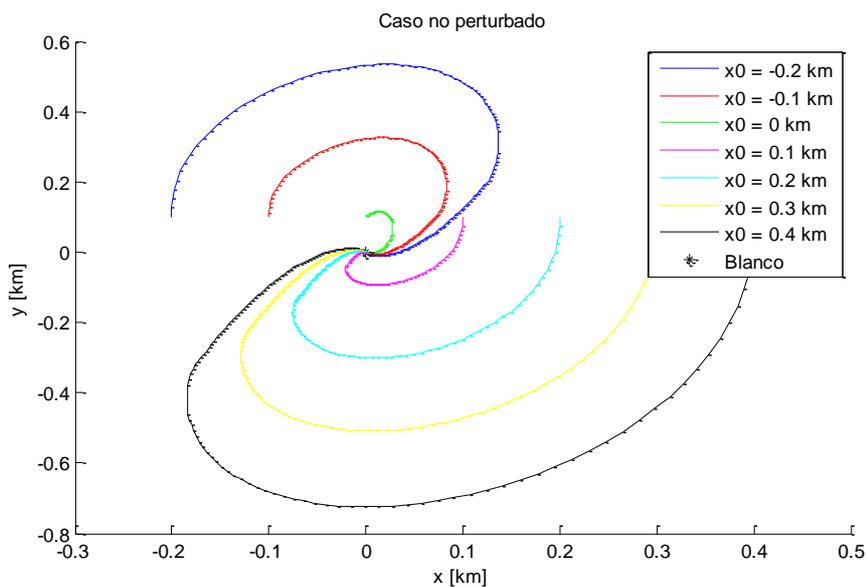


Ilustración 30. Rendezvous no perturbado para varios valores de x_0 . Vista x - y

En la tabla que aparece a continuación se recogen los gastos necesarios para efectuar los rendezvous respetando las restricciones del problema planteado. Los valores son óptimos y cumplen con las restricciones establecidas en el capítulo 4.

Valor de x_0 (km)	Gasto (m/s)	Gasto no perturbado (m/s)
-0.2	1.024	0.734
-0.1	0.568	0.435
0	0.167	0.149
0.1	0.591	0.407
0.2	1.050	0.706
0.3	1.511	1.006
0.4	1.987	1.306

Tabla 9. Gastos en función de x_0

Se observa, por un lado, cierta simetría en cuanto al gasto para los mismos valores de x_0 en los semiejes positivo y negativo, obteniendo prácticamente el mismo consumo de combustible, variando en pocos mm/s. Por otro lado, el gasto aumenta conforme lo hace el valor absoluto de x_0 , variando como se muestra en la Ilustración 31.

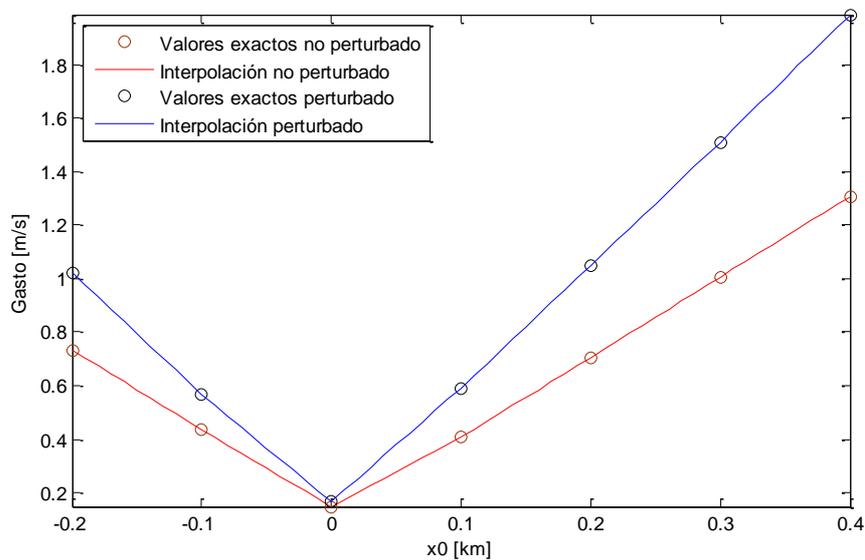


Ilustración 31. Comparación de la evolución del gasto modelo perturbado y no perturbado según x_0

El mínimo del gasto se alcanza para $x_0 = 0$ km en ambos casos. Esto es así porque, de esta manera, los impulsos en una dirección (en este caso la x) quedan anulados al estar ya en el origen del eje de coordenadas (únicamente habría que luchar contra las perturbaciones, si aplica). Se ha realizado una interpolación lineal de los resultados calculados, resultando, como puede verse, una tendencia prácticamente lineal. También puede observarse esa simetría de la que se hablaba en el párrafo anterior. Las pequeñas diferencias se deben a las

perturbaciones y a los errores de cálculo introducidos en la simulación. Se observa, por último, cómo el caso perturbado obliga a gastar cantidades de combustible mayores que en el caso no perturbado. Estas cantidades son tanto mayores cuanto mayor es el valor absoluto de x_0 .

5.3.2.2. Variación con y_0

En este caso, las condiciones iniciales del movimiento serán las definidas en la siguiente tabla.

x_0 (km)	y_0 (km)	z_0 (km)	\dot{x}_0 (m/s)	\dot{y}_0 (m/s)	\dot{z}_0 (m/s)
0.1	Variable	0.1	0	0	0

Tabla 10. Condiciones iniciales para y_0 variable

En las siguientes gráficas puede verse la evolución de la órbita relativa según los valores impuestos de la coordenada y en el instante inicial.

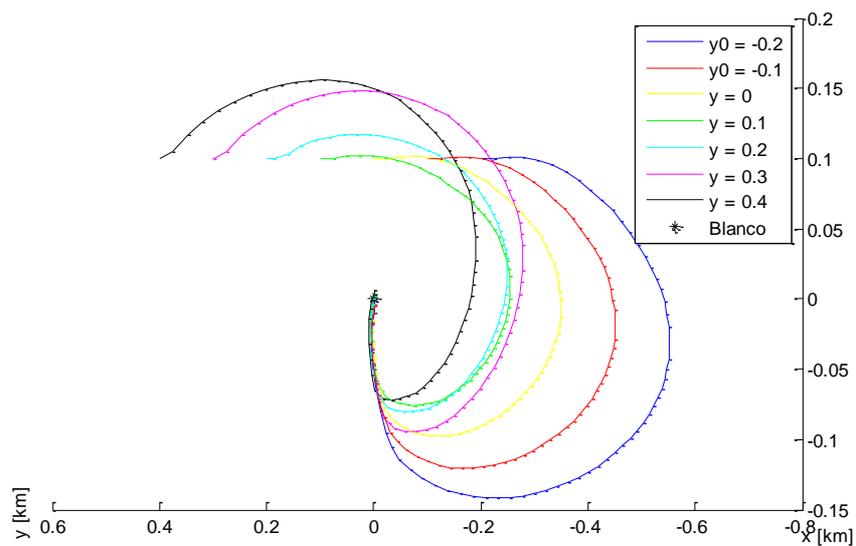


Ilustración 32. Rendezvous del caso perturbado para y_0 (km) variable. Vista x-y

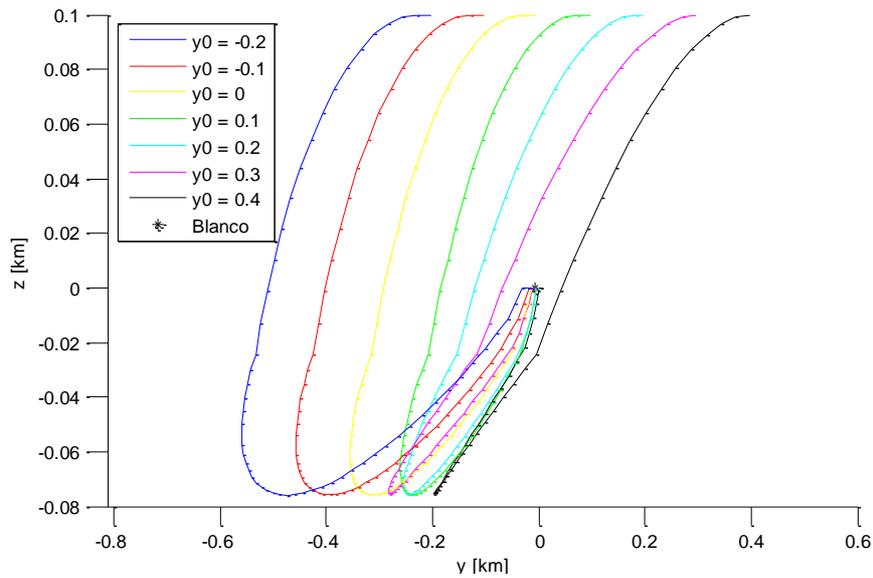


Ilustración 33. Rendezvous del caso perturbado para y_0 (km) variable. Vista x-z

y_0 (km)	Gasto (m/s)	Gasto no perturbado (m/s)
-0.2	0.610	0.455
-0.1	0.602	0.435
0	0.603	0.420
0.1	0.591	0.407
0.2	0.635	0.400
0.3	0.692	0.400
0.4	0.684	0.401

Tabla 11. Gastos en función de y_0

La característica más destacable, en este caso, es la igualdad en los valores de los gastos de combustible para los diferentes valores de y_0 en cada caso diferenciado, poniéndose de manifiesto que el gasto producido es prácticamente independiente del hecho de partir de uno u otro valor pues las diferencias entre los distintos casos son de unos pocos cm/s, las cuales son debidas a las diferentes perturbaciones y a los errores que se introducen en el cálculo. No existe una tendencia clara en la evolución del consumo en ninguno de los dos casos. No aumenta siempre que lo hace el valor absoluto de y_0 .

Por último, se observa que no existen diferencias en la evolución del movimiento fuera del plano (z). Independientemente del valor de y_0 que se tenga, la evolución en z es siempre la misma como puede desprenderse de la Ilustración 33. Si se comparan las órbitas relativas con las resultantes del caso sin perturbaciones se observa que los rangos de x alcanzados son mayores en el caso no perturbado, que el consumo es mayor en ese caso y que las órbitas no son tan suaves como en el caso sin perturbar, poniéndose de manifiesto el gran efecto que puede suponer la consideración de perturbaciones en el modelo desarrollado

en el capítulo 4.

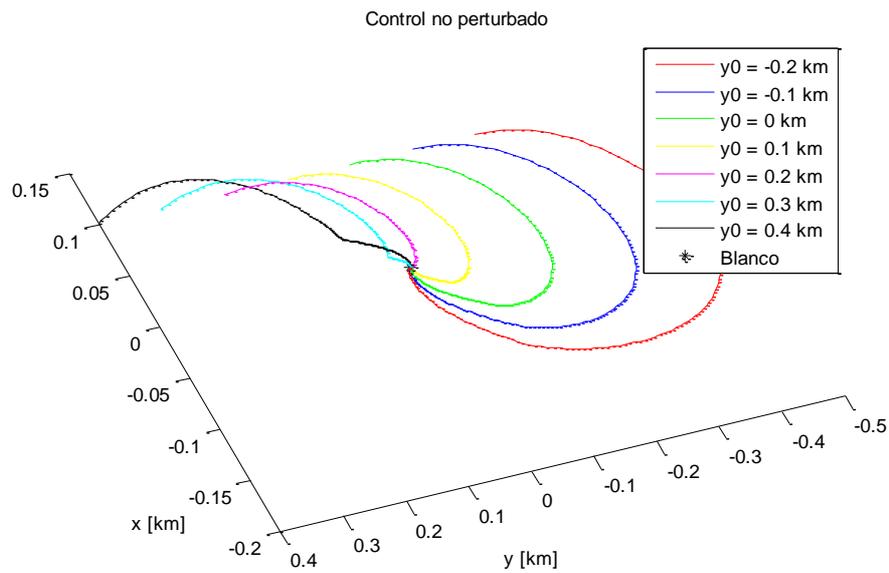


Ilustración 34. Rendezvous del caso no perturbado para y_0 variable

5.3.2.3. Variación con z_0

En este caso se verá la evolución tanto de la órbita relativa como de los valores que adquiere el gasto de combustible según valores de z_0 . Los datos para los que se llevarán a cabo las simulaciones se muestran en la Tabla 12.

x_0 (km)	y_0 (km)	z_0 (km)	\dot{x}_0 (m/s)	\dot{y}_0 (m/s)	\dot{z}_0 (m/s)
0.1	0.1	Variable	0	0	0

Tabla 12. Condiciones iniciales para z_0 variable

En las siguientes ilustraciones se muestran las órbitas relativas para varios valores de z_0 comprendidos entre -0.2 km y 0.4 km por ejemplo.

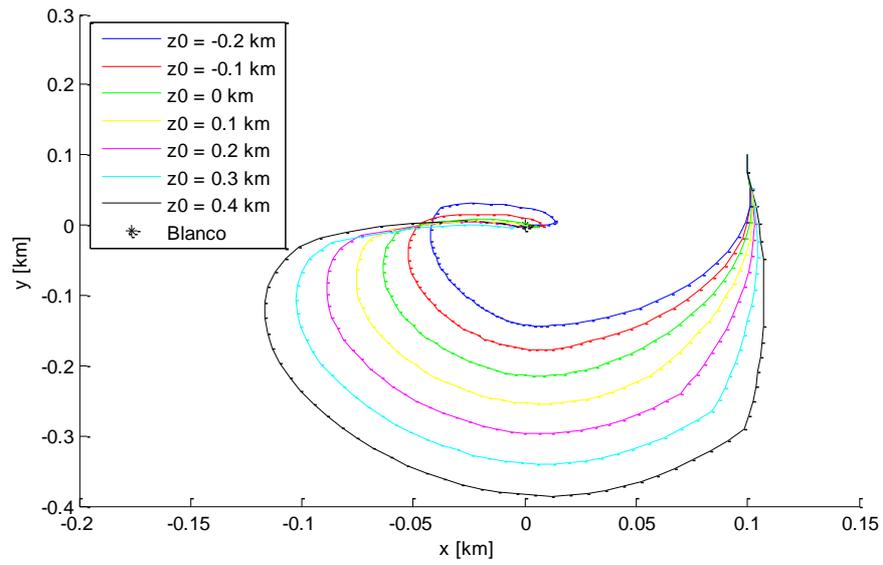


Ilustración 35. Rendezvous del caso perturbado para varios valores de z_0 . Vista x-y

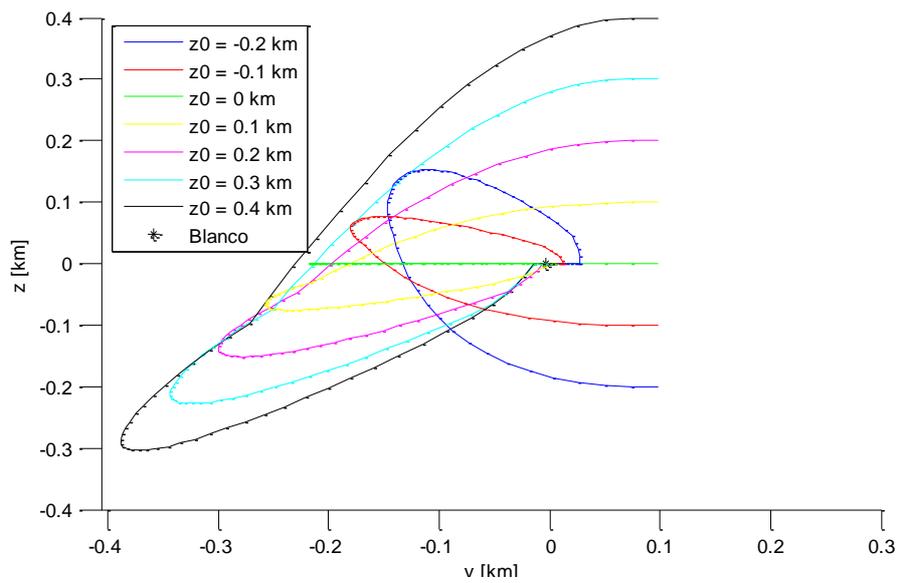


Ilustración 36. Rendezvous del caso perturbado para varios valores de z_0 . Vista y-z

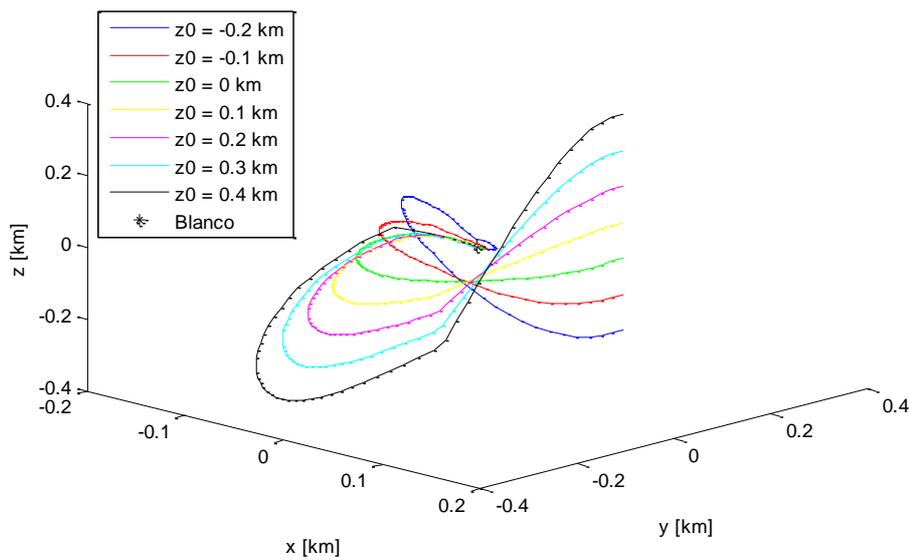


Ilustración 37. Rendezvous del caso perturbado para varios valores de z_0 . Vista 3D

z_0 (km)	Gasto (m/s)	Gasto no perturbado (m/s)
-0.2	0.668	0.527
-0.1	0.558	0.407
0	0.453	0.287
0.1	0.591	0.407
0.2	0.742	0.527
0.3	0.888	0.647
0.4	1.028	0.768

Tabla 13. Variación del gasto para varios valores de z_0

Los gastos reflejados en la Tabla 13 tienen una tendencia con el valor de la condición en z claramente lineal. Este aspecto puede observarse en la Ilustración 39. En ella también se puede destacar la no existencia de simetría en los resultados perturbados de manera que, para el mismo valor absoluto del valor de z_0 pero en diferentes semiejes, el valor del gasto no es igual, siendo mayor para el caso positivo. Esto es debido al hecho de que las perturbaciones actúan en el sentido positivo de z , haciendo más dificultosa la consecución del rendezvous cuando se parten de valores de z inicialmente positivos. El mínimo vuelve a situarse en el caso en que se parta desde el origen del eje Z por idéntica razón que en el caso 5.3.2.1: se suprime uno de los propulsores pues ya se está en $z = 0$. Por último, se desprende que las perturbaciones son constantes e independientes del valor de z_0 que se tenga. La diferencia entre los gastos es más o menos constante, lo que refuerza, junto con el hecho de que las diferencias con el modelo no perturbado son pequeñas, la afirmación de que las perturbaciones apenas afectan al movimiento fuera del plano.

En la Ilustración 38 se recoge el caso no perturbado, dando lugar a una serie de figuras superpuestas una sobre otra en el plano x - y . La distribución de gastos es perfectamente simétrica, al contrario que en el caso perturbado, y aumenta conforme lo hace el valor absoluto de z_0 .

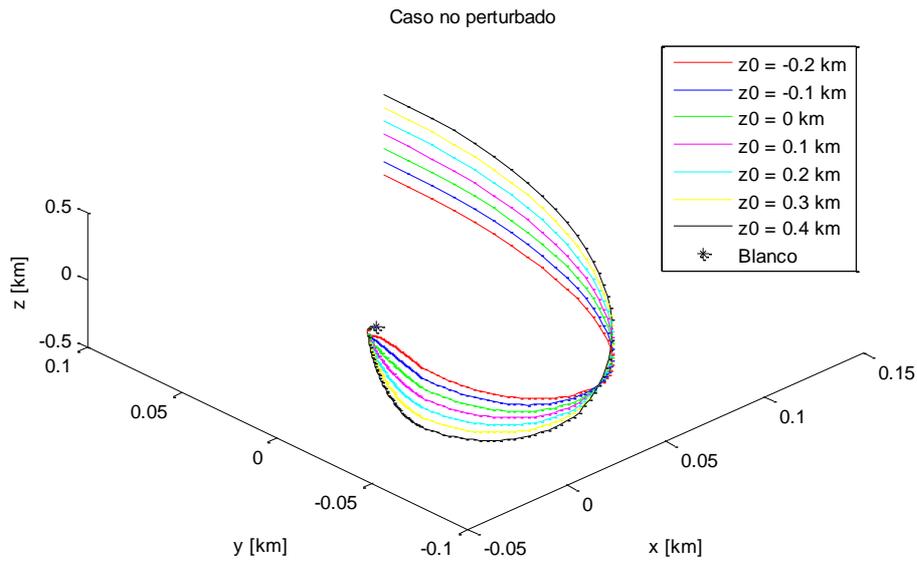


Ilustración 38. Rendezvous no perturbado para varios valores de z_0

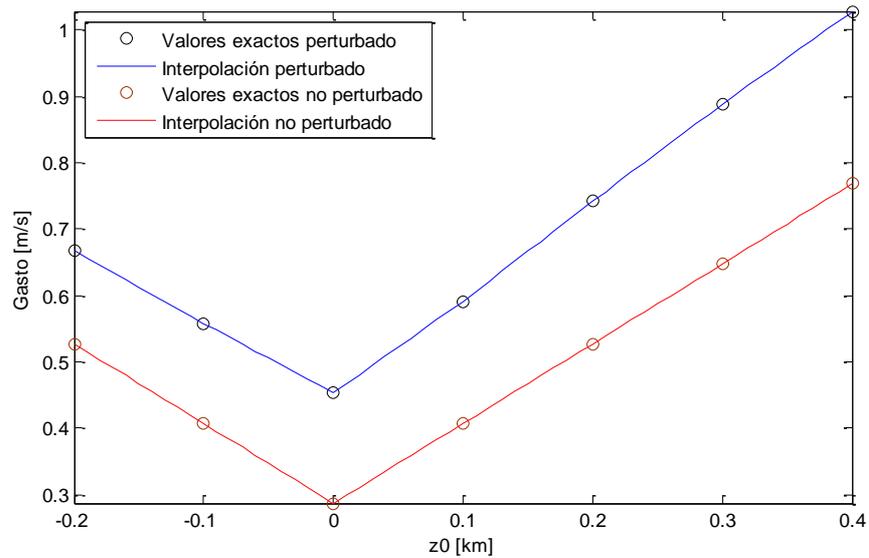


Ilustración 39. Comparación de la evolución del gasto con z_0 entre modelo perturbado y no perturbado

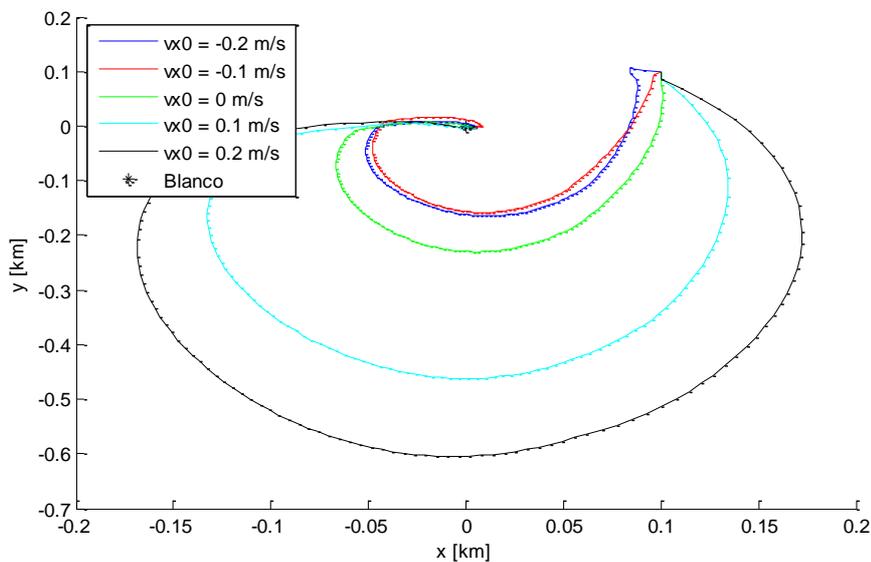
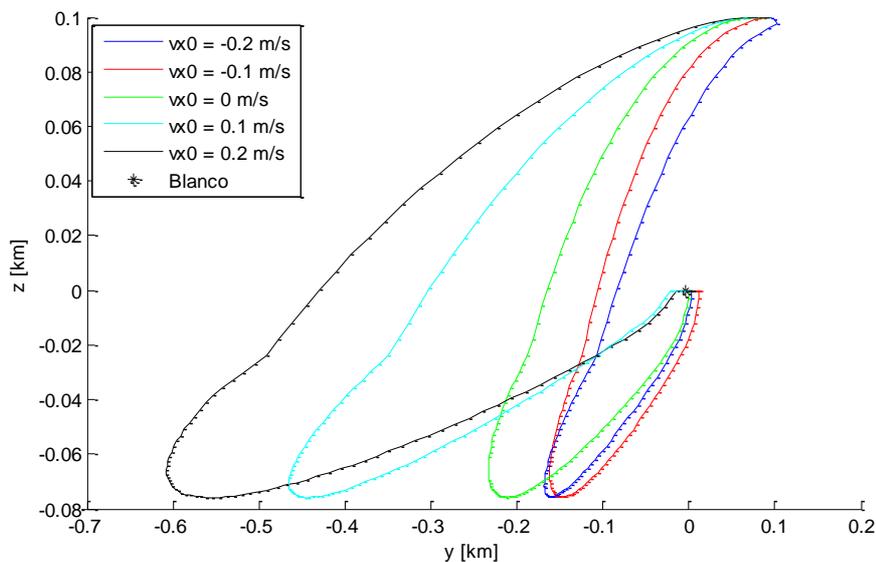
5.3.2.4. Variación con \dot{x}_0

En el caso en que las variaciones se produzcan en la condición inicial de velocidad en el eje X, el conjunto de resultados obtenidos es el detallado a continuación. Las condiciones restantes permanecen fijas tal como se reseña en la Tabla 14.

x_0 (km)	y_0 (km)	z_0 (km)	\dot{x}_0 (m/s)	\dot{y}_0 (m/s)	\dot{z}_0 (m/s)
0.1	0.1	0.1	Variable	0	0

Tabla 14. Condiciones iniciales cuando x_{p0} es variable

Las representaciones se muestran en las siguientes ilustraciones. En ellas pueden apreciarse varios hechos. El primero de ellos es que los valores de velocidad inicial en x negativos provocan un frenado de la órbita relativa, implicando una de menor recorrido que en los casos en que esta velocidad es positiva, pues estas últimas implican una diferencia muy notable entre las velocidades de ambos satélites, haciendo la órbita relativa más larga. Otro hecho es que, de nuevo, la dinámica en z es prácticamente independiente de \dot{x}_0 . Asimismo, la dinámica fuera del plano se vuelve a estabilizar antes que la dinámica x - y .

Ilustración 40. Rendezvous para varios valores de v_{x0} . Vista x - y Ilustración 41. Rendezvous para varios valores de v_{x0} . Vista y - z

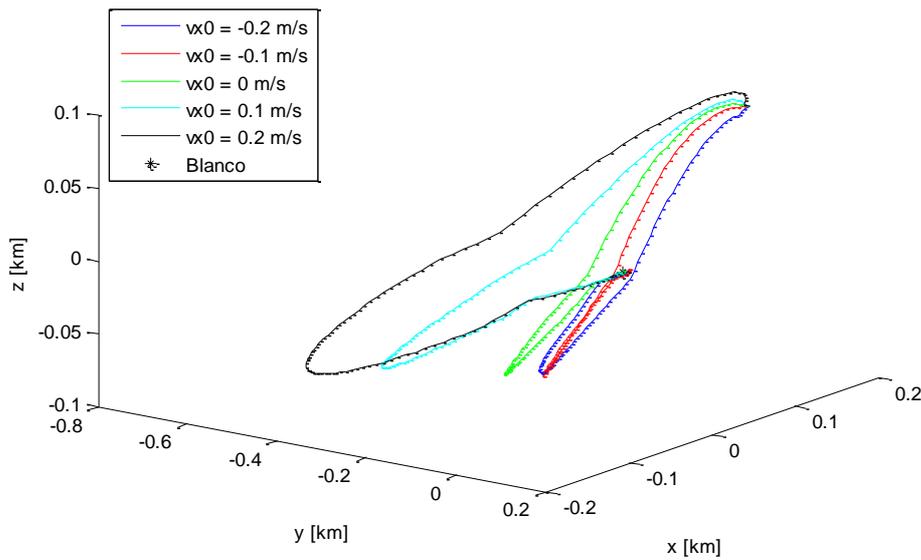


Ilustración 42. Rendezvous para varios valores de x_{p0} . Vista 3D

\dot{x}_0 (m/s)	Gasto (m/s)	Gasto no perturbado (m/s)
-0.2	0.560	0.401
-0.1	0.546	0.400
0	0.578	0.407
0.1	0.702	0.451
0.2	0.819	0.539

Tabla 15. Evolución del gasto con x_{p0}

En la Tabla 15 se puede observar qué valores adquiere el gasto de combustible en función de \dot{x}_0 para las condiciones del blanco descritas al principio del presente capítulo. La tendencia es claramente creciente cuando los valores de \dot{x}_0 son positivos, no observándose una tendencia tan clara cuando los valores de la velocidad inicial son negativos. Esto se debe a que una condición inicial negativa supone un “frenado” de la órbita relativa, haciendo el recorrido del vehículo perseguidor holgadamente más corto que en el caso de tener velocidades iniciales positivas; este hecho provoca que se requiera menor velocidad para conseguir el rendezvous, lo cual implica un menor gasto de combustible. De hecho, en este caso, el mínimo combustible se da para un valor aproximado de $\dot{x}_0 = -0.1$ m/s.

En cuanto al caso no perturbado, los valores de los gastos vuelven a ser menores que en el caso perturbado, estableciéndose una tendencia similar a la del caso perturbado, pues el valor de mínimo combustible se alcanza para aproximadamente $\dot{x}_0 = -0.1$ m/s.

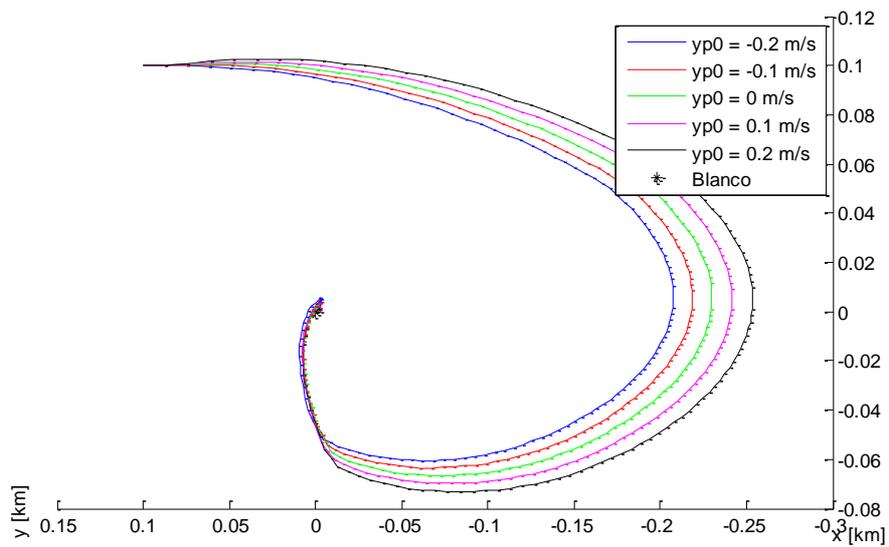
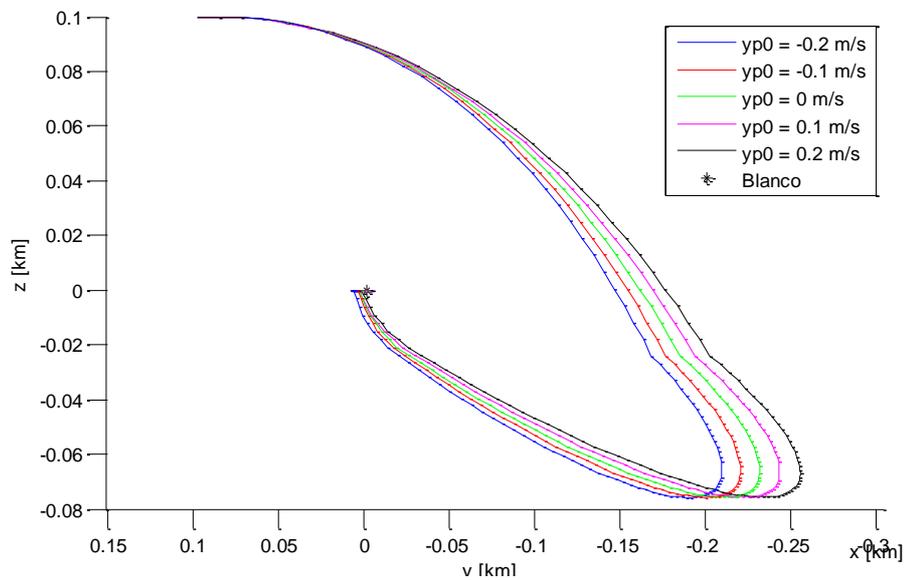
5.3.2.5. Variación con \dot{y}_0

En este apartado se analizará los cambios que experimenta tanto la órbita relativa del rendezvous como el consumo de combustible al variar el valor de \dot{y}_0 . Para ello, se considerarán las condiciones iniciales reflejadas en la Tabla 16.

x_0 (km)	y_0 (km)	z_0 (km)	\dot{x}_0 (m/s)	\dot{y}_0 (m/s)	\dot{z}_0 (m/s)
0.1	0.1	0.1	0	Variable	0

Tabla 16. Condiciones iniciales con y_{p0} variable

En las siguientes ilustraciones se recoge la evolución de las órbitas relativas para varios valores de y_0 .

Ilustración 43. Rendezvous para varios valores de y_{p0} . Vista x-yIlustración 44. Rendezvous para varios valores de y_{p0} . Vista y-z

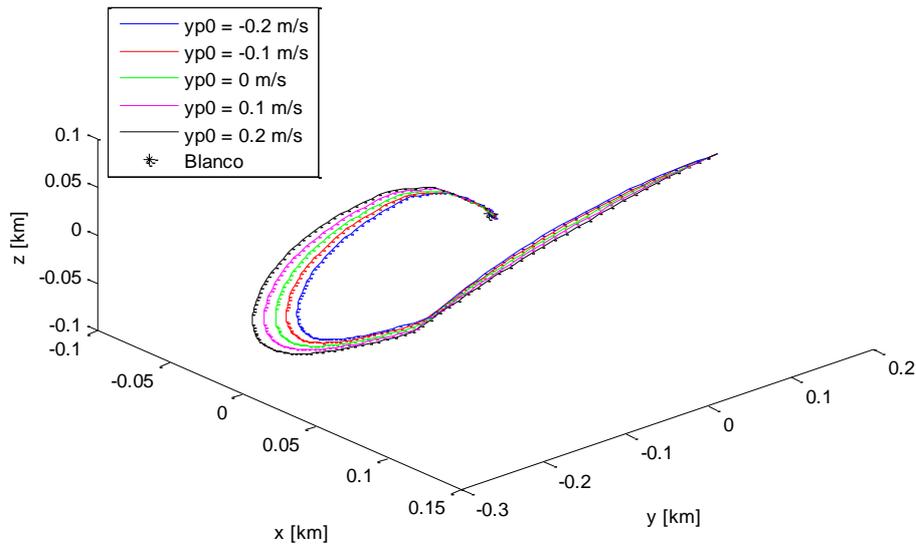


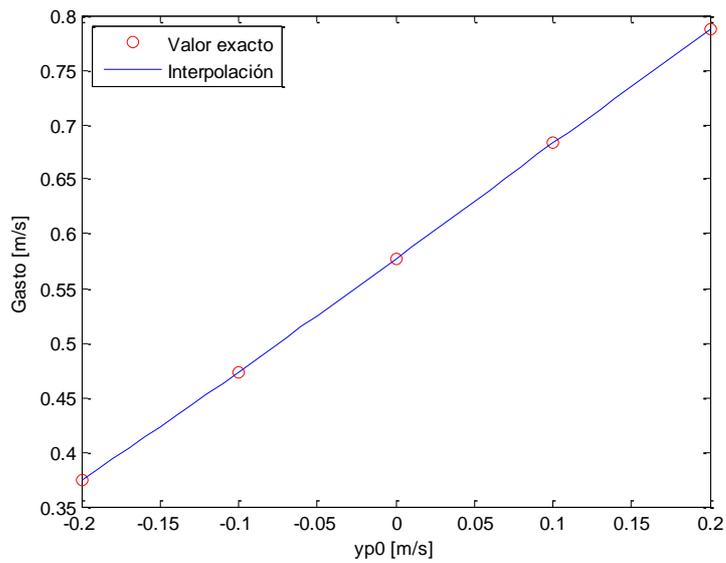
Ilustración 45. Rendezvous para varios valores de y_{p0} . Vista 3D

Lo primero que se desprende del conjunto de gráficas de este apartado es que el rendezvous se consigue llevar a cabo, pues todas las gráficas ven su final en el origen de coordenadas, esto es, el blanco. Además de este hecho, se puede ver que el valor de \dot{y}_0 no incide tanto como el de \dot{x}_0 en la forma de las órbitas relativas, pareciéndose bastante unas a otras. En el caso no perturbado, las órbitas apenas sufren variación cuando cambia el valor de \dot{y}_0 , lo que refleja un poco la independencia de la forma de dicha órbita relativa del valor de la velocidad inicial según y . Esto era algo que ya se comprobaba, parcialmente, en el caso perturbado, pues las órbitas son muy parecidas unas a otras.

En cuanto al gasto, en la Tabla 17 se detalla la evolución del mismo para los diferentes valores de \dot{y}_0 considerados. El gasto siempre aumenta conforme lo hace \dot{y}_0 para la horquilla de valores seleccionada. La tendencia de esta evolución puede apreciarse en la Ilustración 44, quedando plasmada una evolución completamente lineal del mismo. Por último, para el caso perturbado, se tiene una evolución del gasto de 1 dm/s por cada dm/s que aumenta el valor de \dot{y}_0 . Los gastos en este caso vuelven a ser menores que en el caso no perturbado.

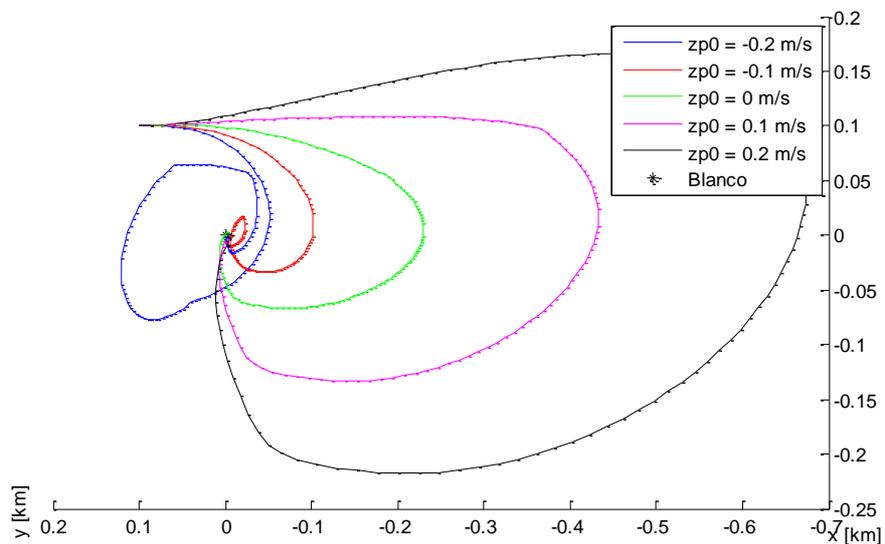
\dot{y}_0 (m/s)	Gasto (m/s)	Gasto no perturbado (m/s)
-0.2	0.374	0.207
-0.1	0.473	0.307
0	0.577	0.407
0.1	0.683	0.507
0.2	0.787	0.607

Tabla 17. Gasto para varios valores de y_{p0}

Ilustración 46. Evolución del gasto con yp_0 en el caso perturbado

5.3.2.6. Variación con \dot{z}_0

En este último subapartado se detallará la influencia de la velocidad inicial según la dirección z sobre la órbita relativa del rendezvous y sobre el gasto de combustible del vehículo perseguidor. Para ello se ofrecen las siguientes ilustraciones.

Ilustración 47. Rendezvous para varios valores de z_{p0} . Vista x-y

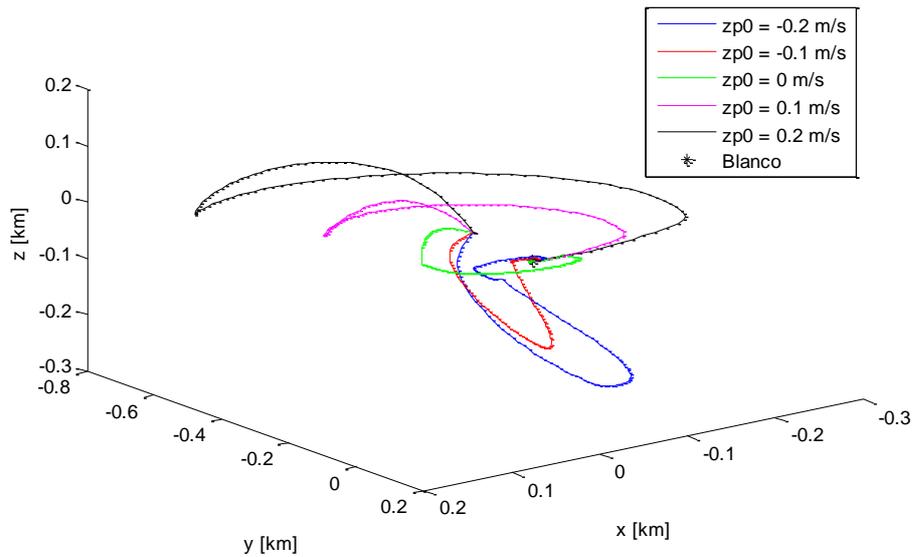


Ilustración 48. Rendezvous para varios valores de z_{p0} . Vista 3D

Con estas condiciones, la dinámica en z se hace nula mucho más rápidamente que la dinámica en el plano. Por otro lado, y como cabía esperar, una condición inicial \dot{z}_0 cada vez más negativa provoca un desplazamiento de la órbita resultante hacia valores de z más negativos.

En cuanto al gasto, la tendencia es claramente creciente al crecer el valor absoluto de \dot{z}_0 . Mirando la Ilustración 49, se puede deducir que el mínimo de gasto está muy cercano al valor $\dot{z}_0 = 0$ m/s. Para valores de \dot{z}_0 negativos, los consumos de combustible no son tan grandes como para los casos de \dot{z}_0 positivos.

\dot{z}_0 (m/s)	Gasto (m/s)	Gasto no perturbado (m/s)
-0.2	0.927	0.461
-0.1	0.575	0.419
0	0.577	0.407
0.1	0.773	0.419
0.2	1.1	0.461

Tabla 18. Evolución del gasto con vz_0

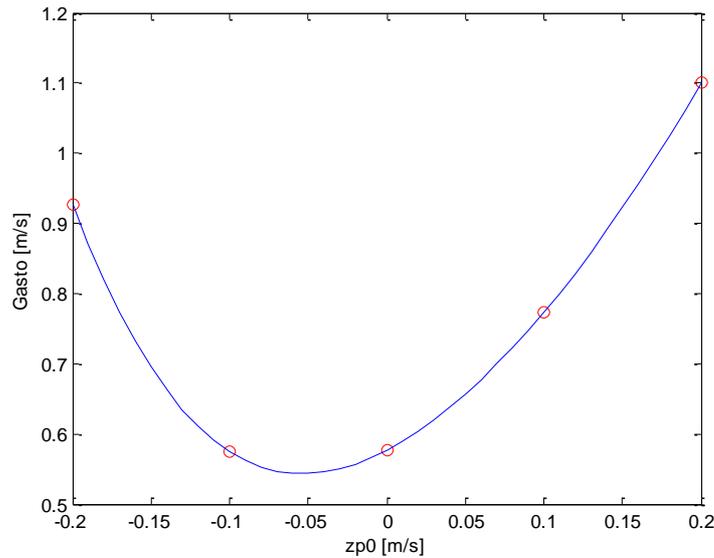


Ilustración 49. Evolución del gasto con vz_0 en el caso perturbado

Para dar una idea del efecto de las perturbaciones se ofrecen los gastos relativos a los mismos casos que los perturbados pero eliminando las perturbaciones. Se observa que los gastos adquieren una distribución simétrica y que son menores que los del caso perturbado.

5.3.3. Variación de los resultados con los elementos orbitales del blanco

En este apartado se variarán los elementos orbitales del blanco con el fin de analizar la influencia de los mismos en el comportamiento de la órbita relativa y en el gasto de combustible. A lo largo del presente capítulo y de los anteriores se han establecido comparaciones según valores admisibles del elemento orbital e , analizándose su influencia sobre el gasto de combustible y sobre otros parámetros medibles del modelo, llegándose a la conclusión de que un valor notablemente alto de dicho elemento orbital ($e > 0.6$) supone un consumo de combustible inasumible. Es por ello que no se analizará la influencia de los elementos q_1 ni q_2 , por ser su tratamiento análogo a dicho elemento e . De esta manera, se evaluará la influencia de los elementos orbitales ω , a , i y Ω .

Influencia del elemento orbital ω

Se verá a continuación qué efectos sobre el gasto y sobre la forma de la órbita relativa tiene el hecho de variar el elemento orbital ω .

Se observa que, si bien las diferencias son muy notables en la representación gráfica, difiriendo los resultados enormemente unos de otros, las variaciones en los gastos son relativamente pequeñas. La evolución del gasto no es del todo lineal, aumentando tanto más cuanto mayor es el valor de ω . En la Ilustración 51 puede observarse esta evolución.

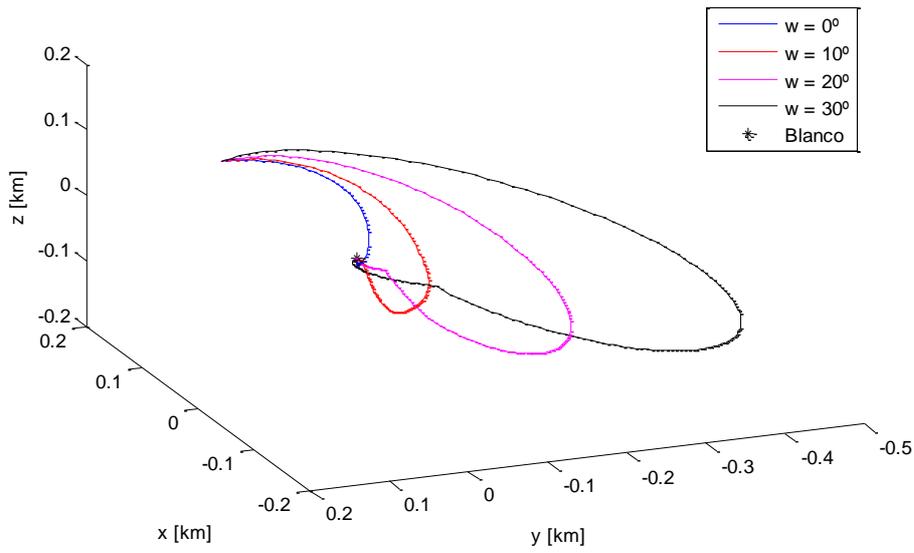


Ilustración 50. Órbitas relativas según valores de ω

ω [°]	Gasto (m/s)
0	0.400
10	0.407
20	0.434
30	0.492

Tabla 19. Comparación de gastos para varios valores de ω

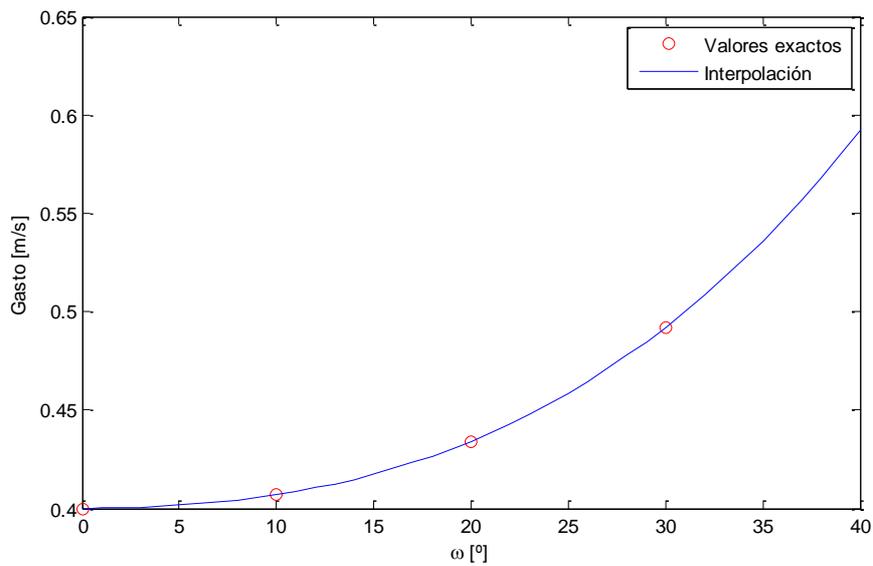


Ilustración 51. Evolución del gasto con ω

Influencia del elemento orbital i

La inclinación es uno de los dos elementos orbitales que determinan el movimiento fuera del plano orbital. Se presentan a continuación representaciones relativas a la evolución de la órbita relativa según valores de i , así como de la evolución del gasto de combustible, mostrando mediante tabla los valores calculados mediante el algoritmo de control predictivo como en el caso del elemento orbital ω .

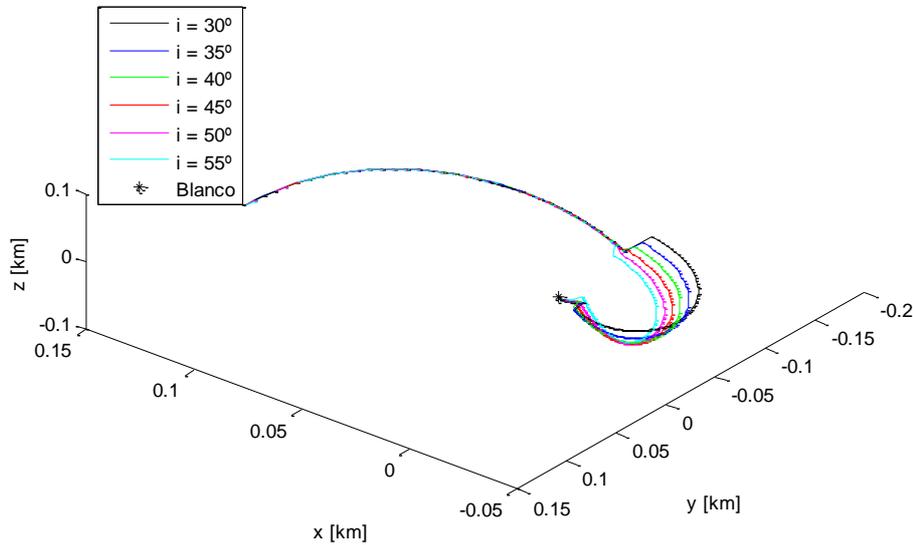


Ilustración 52. Evolución de la órbita relativa con el elemento orbital i

Inclinación de la órbita del blanco ($^{\circ}$)	Gasto (m/s)
30	0.372
35	0.383
40	0.393
45	0.402
50	0.410
55	0.418

Tabla 20. Evolución del gasto con la inclinación de la órbita del blanco

Como se observa en la Tabla 20, apenas hay variación en el gasto de combustible, de manera que queda patente que éste no se ve muy influenciado por el movimiento fuera del plano del *chief*. Asimismo, las órbitas relativas comienzan muy parejas hasta que se da el primer impulso importante; es ahí donde radican las diferencias entre los diferentes casos. Al igual que se viene dando en casos anteriores, la dinámica en z se hace nula bastante antes que la dinámica del plano (x - y). Se presenta, a modo ilustrativo, la Ilustración 53 para ver la evolución del gasto con la inclinación, pero esta no es muy representativa en comparación con la variación de otras magnitudes que sí afectan bastante al consumo.

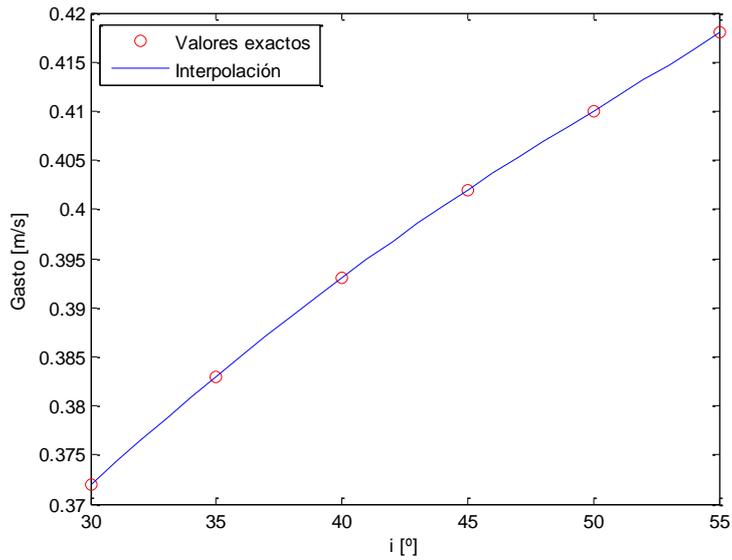


Ilustración 53. Evolución del gasto con el valor de i

Influencia del elemento orbital a

En este caso se analizará la influencia del semieje mayor de la órbita del blanco en el cálculo del gasto de combustible y de la órbita relativa.

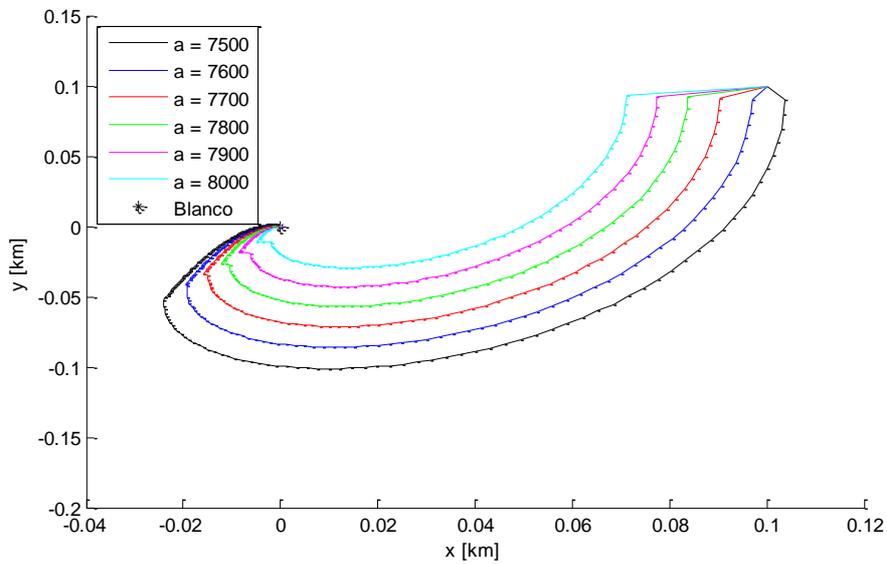
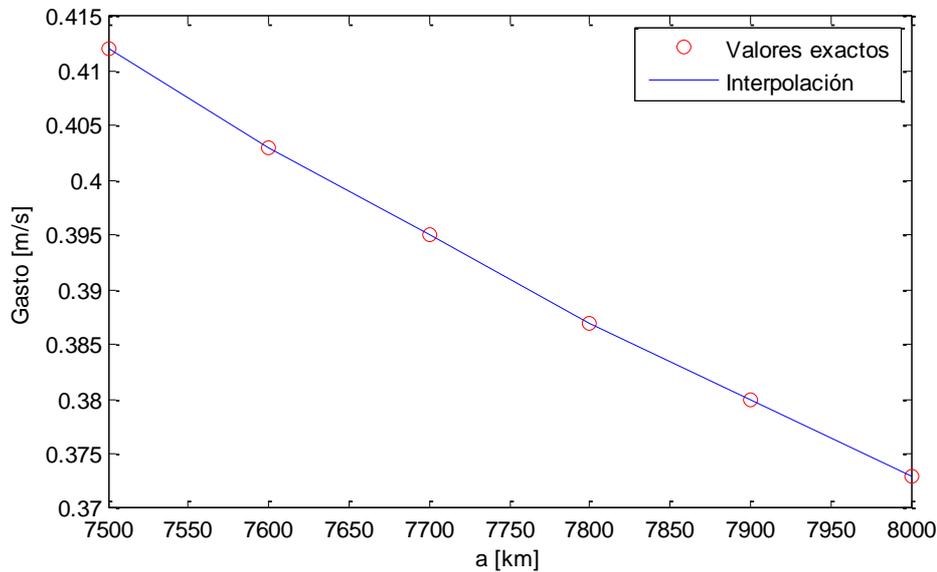


Ilustración 54. Evolución de la órbita relativa según a (km)

Semieje mayor de la órbita del blanco (km)	Gasto de combustible (m/s)
7500	0.412
7600	0.403
7700	0.395
7800	0.387

7900	0.380
8000	0.373

Tabla 21. Evolución del gasto con a Ilustración 55. Evolución del gasto con a

El gasto de combustible, a tenor de la Ilustración 55, decrece casi linealmente con el aumento del valor del semieje mayor de la órbita del blanco. El rendezvous libre toma más partido conforme este valor aumenta, no teniendo que recurrir a tanta propulsión para alcanzar el objetivo.

Asimismo, conforme aumenta a menores son los recorridos de las órbitas relativas.

Influencia del elemento orbital Ω

Ni la órbita relativa ni el gasto de combustible se ven influidos por este elemento orbital prácticamente. Esto supone que el movimiento del blanco fuera del plano apenas afecta al gasto de combustible y todo el consumo viene dado por el movimiento en el plano orbital.

5.3.4. Desajustes en el cálculo de la órbita relativa

A lo largo del presente subapartado se establecerá un estudio sobre el impacto que causaría en los resultados obtenidos el hecho de no calcular correctamente alguno o varios de los elementos orbitales relativos por causas de cierto ruido en las señales o por cualquier otro motivo que distorsione los valores emitidos por el algoritmo de control desarrollado.

Desajuste en $\delta\theta$

En el hipotético caso en que los valores de la diferencia de latitudes verdaderas de vehículos objetivo y perseguidor tuviesen cierto grado de error (no superior nunca al 5% del valor verdadero), los resultados que se obtienen son los reflejados a continuación.

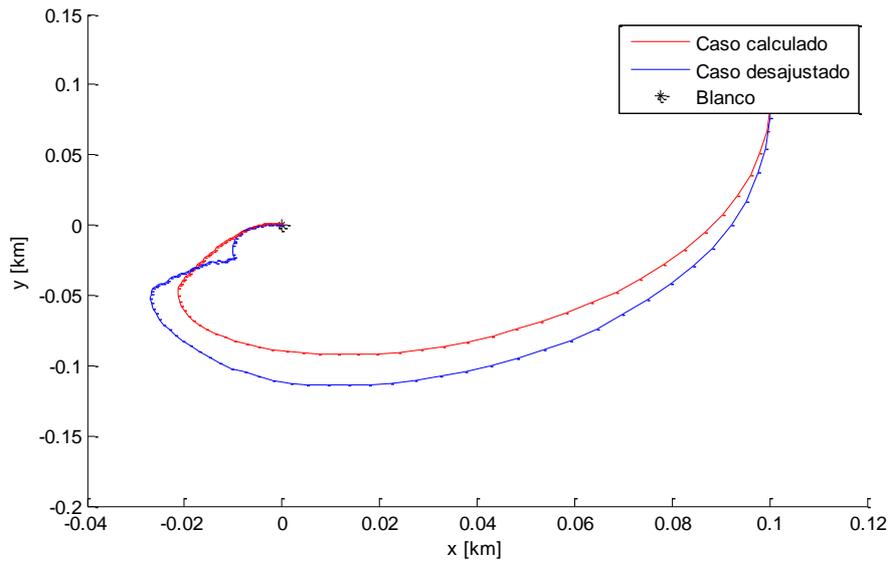


Ilustración 56. Desajustes en $\delta\theta$. Vista x-y

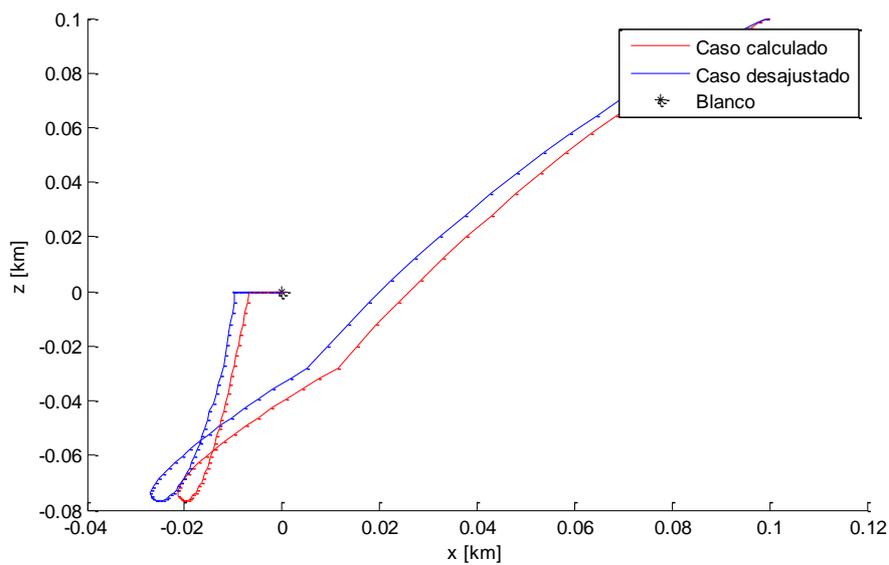


Ilustración 57. Desajustes en $\delta\theta$. Vista x-z

Las diferencias gráficas son palpables, sobre todo en el plano (x - y). El movimiento fuera del plano (z), como puede observarse en la Ilustración 57, no difiere mucho cuando se varía $\delta\theta$. Los gastos se recogen en la Tabla 22.

	Caso calculado	Caso con $\delta\theta$ desajustado
Gasto (m/s)	0.407	0.441

Tabla 22. Gastos según desajuste de $\delta\theta$

En la tabla se pone de manifiesto cómo en el momento en que el algoritmo de control recibe valores no optimizados obliga al vehículo perseguidor a realizar un mayor esfuerzo de gasto, incrementándose este levemente. Estos gastos se irán a cotas tanto mayores cuanto mayor sea la desviación de $\delta\theta$ aplicada. Sin

embargo, y a pesar de suponer un coste mayor, el algoritmo consigue el rendezvous, con un error inexistente.

Desajuste en δq_1

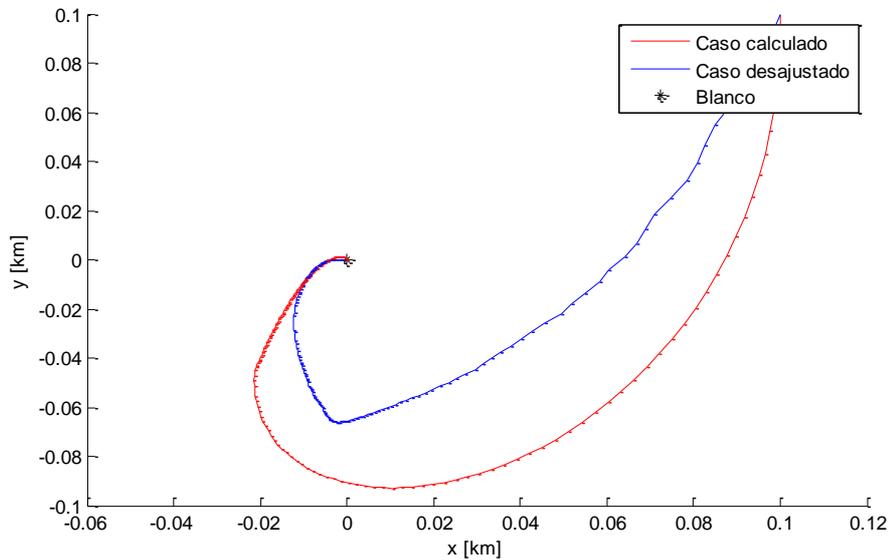


Ilustración 58. Desajustes en δq_1 . Vista x-y

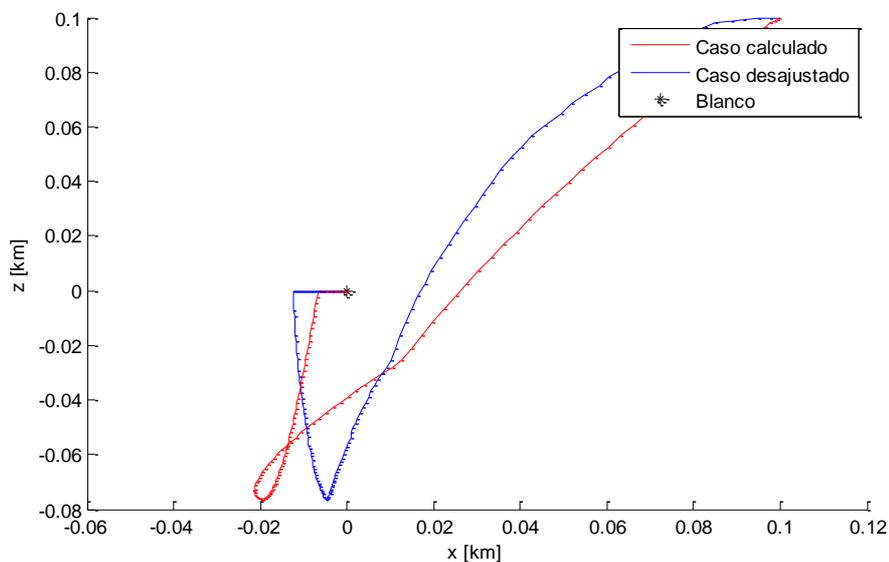


Ilustración 59. Desajustes en δq_1 . Vista x-z

En este caso se observan grandes diferencias gráficas. Y es que el elemento δq_1 contiene información directa de la excentricidad de la órbita del blanco. A lo largo del informe se ha visto que este elemento orbital tiene gran influencia sobre los resultados representados, por lo que no es de extrañar que exista una desviación tan grande en la órbita relativa del rendezvous al existir desajustes en los valores de δq_1 . En este caso sí se producen notables errores en la consecución del rendezvous, de hasta 1 metro.

En cuanto a los gastos de combustible, aparecen reflejados en la Tabla 23. A pesar de cambiar totalmente la órbita relativa, los gastos son bastante parejos, existiendo apenas diferencias. Se demuestra, de nuevo, que el gasto calculado es el mínimo posible con las condiciones de movimiento y restricciones impuestas, quedando

el gasto del caso desajustado por encima del calculado correctamente, sin desviaciones de ningún tipo.

	Caso calculado	Caso con δq_1 desajustado
Gasto (m/s)	0.407	0.410

Tabla 23. Gastos según desajuste de δq_1

Desajuste en δq_2

El caso que atañe ahora es aquel en el que existe una desviación máxima del 5% en el elemento orbital relativo δq_2 . Esta variable también recoge información directa de la excentricidad de la órbita del blanco por lo que se espera existan notables diferencias en el cálculo de la órbita relativa del rendezvous.

Efectivamente esto es así, y se producen notables diferencias gráficas. No obstante, se consigue el rendezvous con errores mucho menores que en el caso de δq_1 . En cuanto al gasto, los valores se reflejan en la Tabla 24, poniéndose de manifiesto, como era de esperar, que el caso desajustado supone un gasto mayor que el caso optimizado.

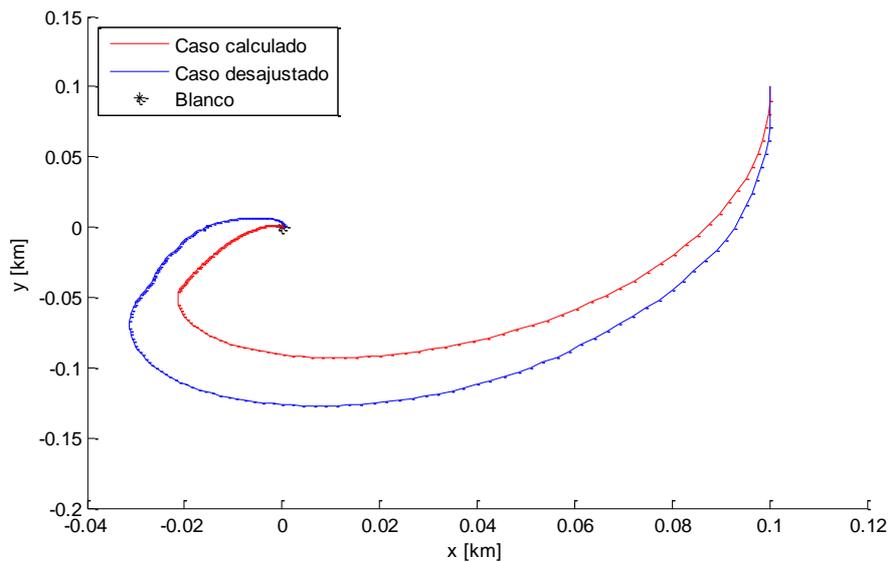


Ilustración 60. Desajustes en δq_2 . Vista x-y

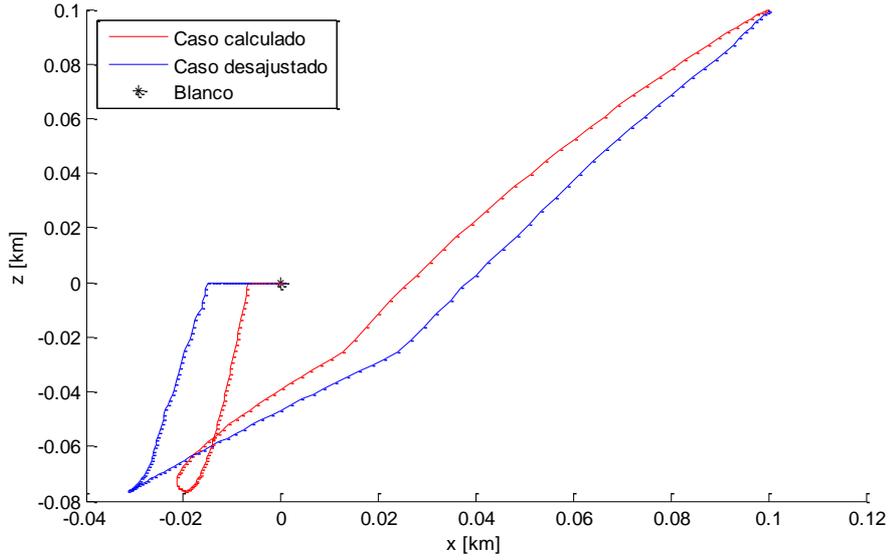


Ilustración 61. Desajustes en δq_2 . Vista x-z

	Caso calculado	Caso con δq_2 desajustado
Gasto (m/s)	0.407	0.443

Tabla 24. Gastos según desajuste de δq_2

Desajuste en δa

A continuación se expondrán las diferencias que existen en el caso en que haya desajustes por diversos motivos como los comentados al inicio del subapartado en el valor de δa .

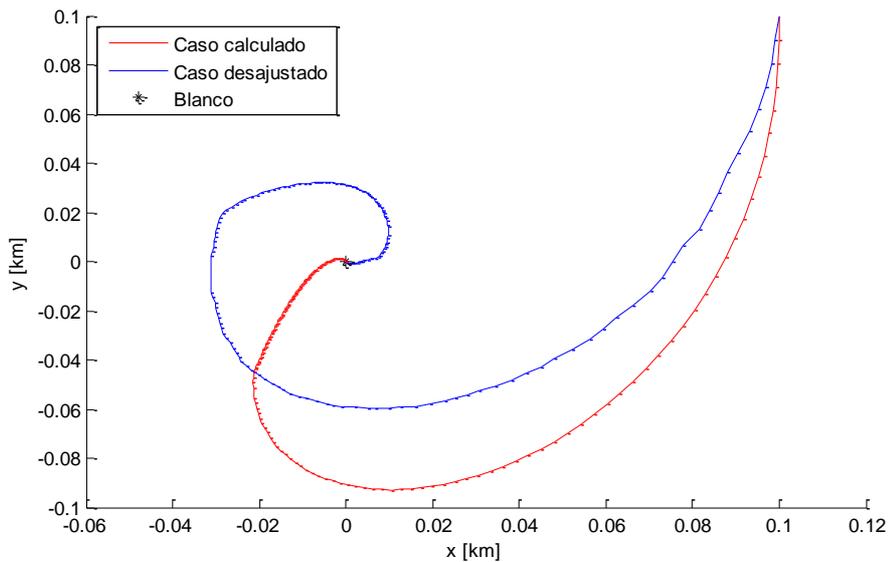


Ilustración 62. Desajustes en δa . Vista x-y

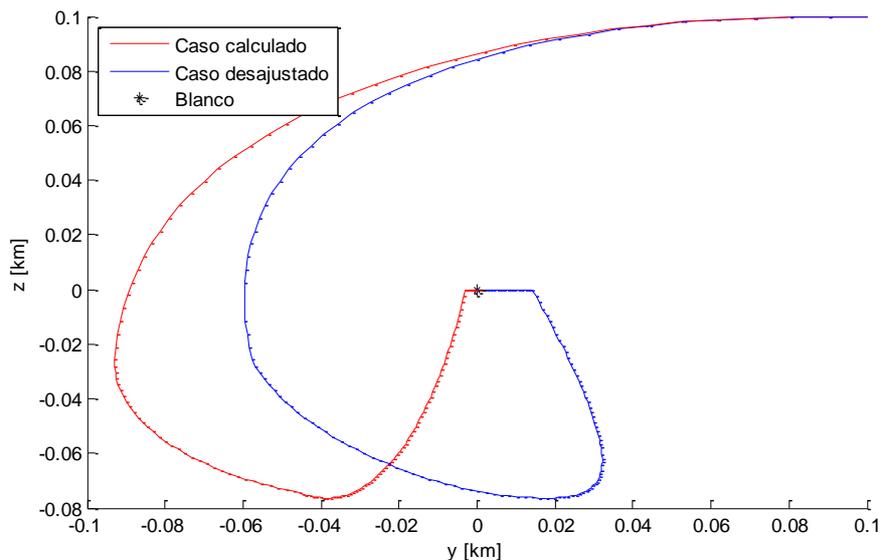


Ilustración 63. Desajustes en δa . Vista y-z

El algoritmo vuelve a funcionar a la perfección, consiguiendo el rendezvous a pesar de enviar al perseguidor información errónea. La replanificación con la que trabaja el algoritmo es el factor que causa el buen funcionamiento del mismo. Las diferencias en la geometría de la órbita relativa vuelven a ser palpables, desviándose bastante el recorrido con respecto al óptimo.

En cuanto al gasto de combustible, se produce un aumento respecto del óptimo del 10% como puede deducirse de la Tabla 25.

	Caso calculado	Caso con desajuste de δa
Gasto (m/s)	0.407	0.448

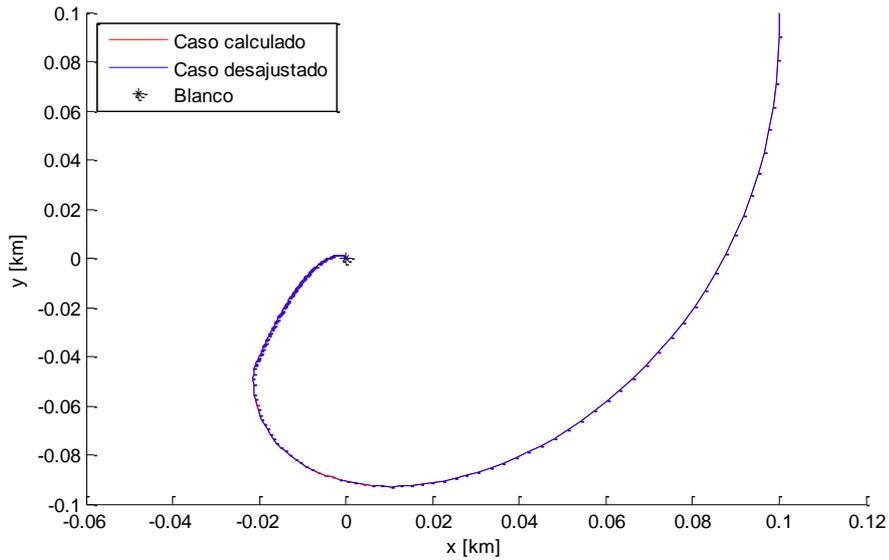
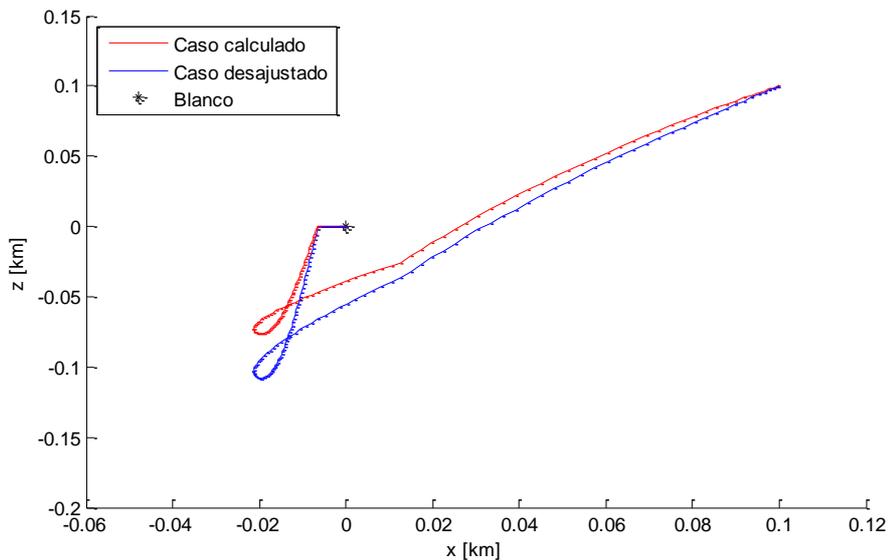
Tabla 25. Gastos según desajuste de δa

Desajuste en δi

Se verá, en este caso, cómo influye el que la diferencia de inclinaciones sea errónea y se aleje un máximo del 5% por debajo del óptimo calculado.

En la Ilustración 64 se observa cómo el elemento orbital relativo δi afecta únicamente al movimiento fuera del plano, pues las gráficas se superponen en la vista x-y. Las diferencias se observan en la Ilustración 65, donde al ser la diferencia de inclinaciones menor que en el caso exacto, la gráfica queda por debajo de la exacta.

En cuanto al gasto de combustible, en la Tabla 26 puede observarse una comparación entre ellos. En este caso el gasto en el caso desajustado se sitúa por debajo del caso exacto. Este hecho tiene su explicación en que únicamente se ha variado el vector de diferencia de inclinaciones entre vehículo perseguidor y objetivo, de manera que la diferencia de gasto existente se deberá solamente a las diferencias en el movimiento fuera del plano. Como se ha variado el vector de δi de manera que siempre quede por debajo del valor real calculado por el algoritmo, la inclinación que “habrá que vencer” para conseguir el rendezvous (diferencia de inclinaciones nula) será menor siendo, consecuentemente, también menor el gasto de combustible. Como caso adicional se ha calculado el gasto de combustible si la señal viene ampliada y se recibe un valor mayor al real un 5% máximo del valor óptimo calculado, comprobándose que, ahora sí, el consumo aumenta.

Ilustración 64. Desajustes en δi . Vista x-yIlustración 65. Desajustes en δi . Vista x-z

	Caso exacto	Caso desajustado en $0.95\delta i$	Caso desajustado en $1.05\delta i$
Gasto (m/s)	0.407	0.406	0.412

Tabla 26. Gasto según desajustes en δi

Desajuste en $\delta\Omega$

Por último, se verá la opción de recibir con errores los valores de $\delta\Omega$ a lo largo del tiempo. Para ello véanse las Ilustraciones 66 y 67 y la Tabla 27 de comparación de gastos de combustible.

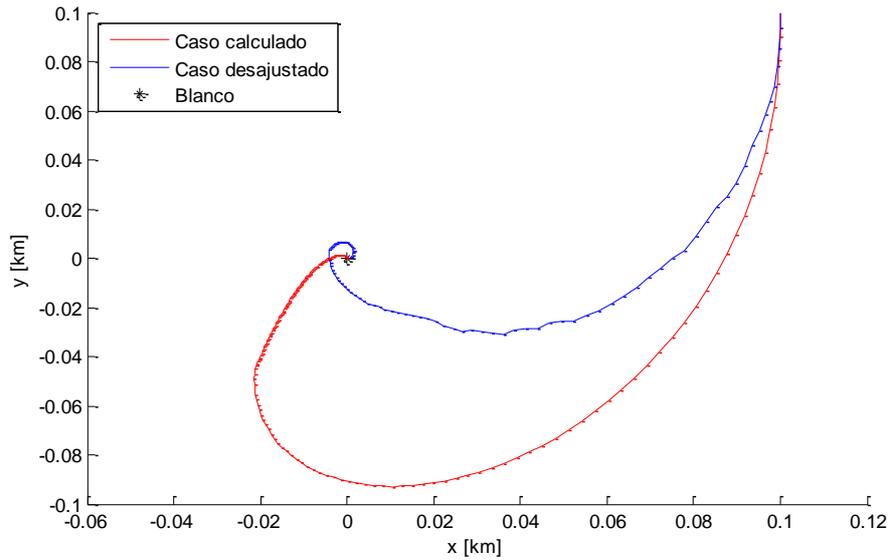


Ilustración 66. Desajustes en $\delta\Omega$. Vista x-y

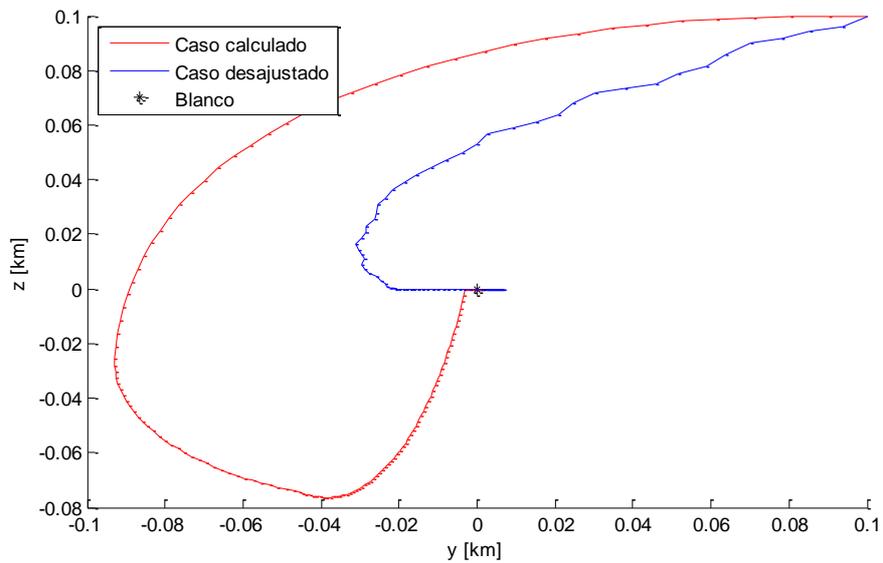


Ilustración 67. Desajustes en $\delta\Omega$. Vista y-z

	Caso calculado	Caso con desajustes en $0.95\delta\Omega$	Caso con desajustes en $1.05\delta\Omega$
Gasto (m/s)	0.407	0.342	4.6

Tabla 27. Gasto según desajustes en $\delta\Omega$

Las diferencias en la geometría de la órbita relativa son importantes, consiguiéndose un recorrido menor en el caso desajustado que en el óptimo exacto. No obstante, el rendezvous se consigue de manera correcta.

Al igual que en el caso de la inclinación, el consumo de combustible es menor (en este caso, bastante menor (16%)) que en el caso optimizado. La explicación del porqué es análoga a la del caso anterior. Suponiendo que el error recibido proporciona un valor de $\delta\Omega$ mayor que el calculado, el gasto se dispara hasta los 4.6 m/s (1030%).

5.3.5. Desalineación de las toberas

En este subapartado se hará un breve análisis acerca de los efectos que puede provocar el hecho de que las toberas propulsivas no estén totalmente alineadas con el eje de coordenadas correspondiente. Para ello, se incluirán en los resultados que proporcione el modelo de control predictivo un error aleatorio que no podrá ser superior al 10% del valor que tendría en caso de estar las toberas totalmente alineadas con su eje. Se hará una simplificación más en este caso: la velocidad que se genere en las otras dos direcciones (pues la tobera no estará alineada) se desechará y no se contabilizará para el cómputo de la velocidad en esas otras direcciones.

Se ha comentado que se provocará una desviación de los ejes de las toberas de manera que se alcance, como cota máxima, el 10% de desviación de empuje total en cada dirección. Una consecuencia inmediata de esta perturbación debida a fallos en la construcción del vehículo perseguidor será un mayor consumo de combustible, pues se calculará un consumo real y se aplicará uno irreal, debiendo ser necesario el cálculo de un gasto mayor del necesario para conseguir el cumplimiento de la misión. Se representará, en un primer caso, la gráfica de la órbita relativa y la evolución hasta la consecución del rendezvous para casos en los que la desalineación provoque una pérdida máxima del 5% de empuje en cada dirección.

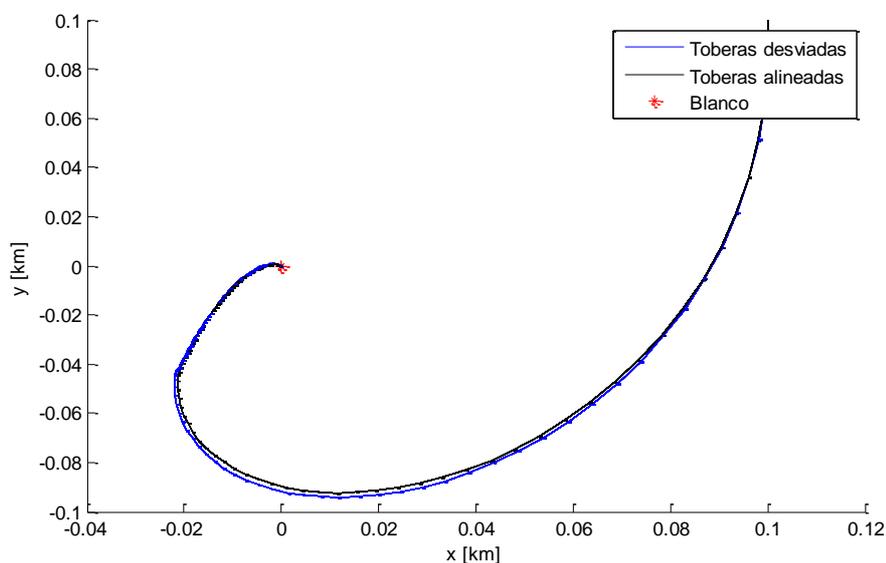


Ilustración 68. Rendezvous con toberas desalineadas al 95%

Se observa, en primera instancia, que el rendezvous se consigue a pesar de la perturbación introducida. No obstante, y aunque no se aprecia a primera vista en la Ilustración 68, se produce un cierto error en el rendezvous para el caso en el que se tienen las toberas desviadas, un error que es del orden del cm. Como se demuestra gráficamente, el algoritmo de control predictivo compensa la perturbación y responde correctamente (con un error muy pequeño) a la misma, replanificando y haciendo cumplir las restricciones. Las representaciones se han conseguido para valores de condiciones iniciales como las indicadas en la Tabla 2, pero con velocidades iniciales nulas, y para un valor de los elementos orbitales del blanco como los reseñados en el apartado 3.1.1.

Para una desviación aleatoria introducida de como máximo el 10% el valor del empuje en caso de no existir desalineación en ninguna de las toberas del vehículos, se obtienen los siguientes resultados para las mismas condiciones del caso anterior.

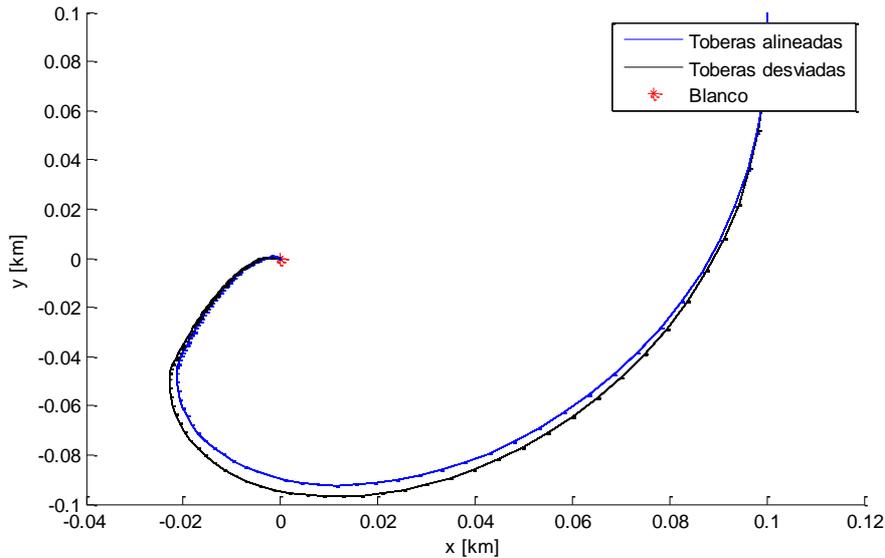


Ilustración 69. Rendezvous con toberas desalineadas al 90%

En la Ilustración 69 se aprecia mayor desviación en la órbita relativa que en el caso anterior. Evidentemente esto es así debido al mayor valor que puede alcanzar la desviación del empuje proporcionado por las toberas en este caso. Al igual que en el caso anterior, se vuelve a conseguir el rendezvous, respondiendo con eficiencia el algoritmo del control predictivo. Aunque, igual que en el caso anterior también, se produce un cierto error que en el caso sin perturbaciones es prácticamente inexistente, del orden de varios cm.

Haciendo un cambio notorio en las condiciones de la órbita del blanco, incrementando la excentricidad de su órbita geocéntrica de 0.2 a 0.5 para comprobar el efecto de este elemento orbital en los resultados, se obtiene lo representado en la Ilustración 70.

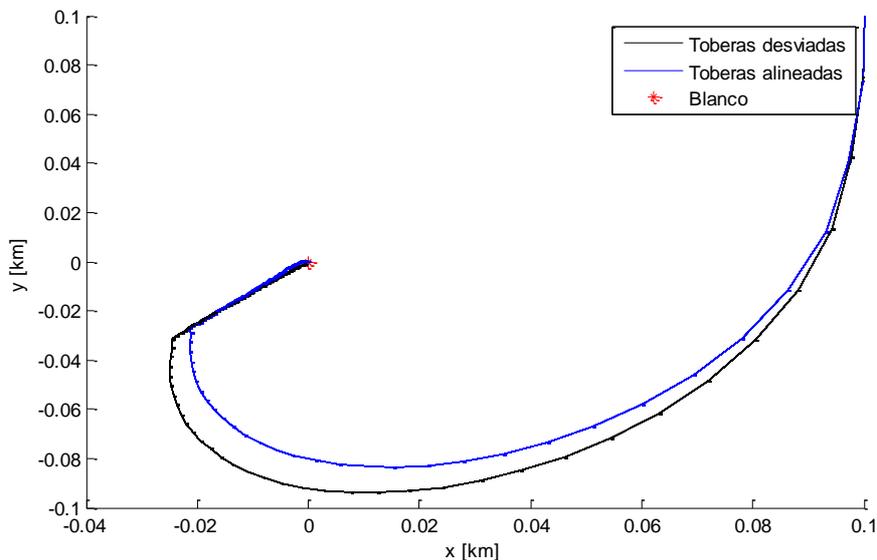


Ilustración 70. Rendezvous con toberas desalineadas al 90% y $e = 0.5$

Se constata de nuevo el gran efecto que tiene sobre los resultados la excentricidad de la órbita del blanco, tanto en el gasto de combustible como en la variación de la órbita relativa. Los errores al desalinear las toberas, en este caso, son mayores que en los dos casos anteriores.

A continuación se presentará de manera tabulada una comparación de los gastos que se producen en todos los

casos considerados, comparándolos con el caso no perturbado.

Desviación máxima (%)	Gasto caso perturbado (m/s)	Gasto caso no perturbado (m/s)
5 (para $e = 0.2$)	0.411	0.409
10 (para $e = 0.2$)	0.412	0.409
10 (para $e = 0.5$)	0.794	0.781

Tabla 28. Comparación gastos para diferentes desviaciones en las toberas

La primera conclusión que se observa es que no existe mucha diferencia entre los casos perturbados y no perturbados en cuanto al gasto de combustible. Los casos son muy parecidos y las diferencias, en el caso más desfavorable de los considerados, es de poco más de 1 cm/s. A pesar de ello, puede observarse en las diferentes ilustraciones cómo esta ínfima variación en el gasto afecta notablemente a la evolución de la órbita relativa recorrida por el perseguidor.

5.3.6. Sobre el software utilizado

En las siguientes líneas se establecerá una sucinta comparación entre los métodos de programación utilizados para calcular la respuesta dada por el *MPC* desarrollado en el capítulo 4.

Se han empleado 3 vías diferentes para llevar a cabo la optimización del problema:

- LPSolve.
- Gurobi.
- Comando *linprog* de Matlab.

Las tres formas de proceder son igualmente válidas, pues las 3 ofrecen una optimización lineal del problema. En la Ilustración 71 se observa cómo las gráficas se superponen prácticamente unas con otras, proporcionando los 3 procedimientos idéntico resultado. Se ha escogido la vista x - y por azar pero en todas las vistas analizadas se superponen las 3 soluciones.

En la Tabla 29 se presentan los diferentes tiempos de computación que emplean cada uno de los programas de optimización empleados en el presente proyecto.

Se concluye que el procedimiento más lento de los tres que se han empleado ha sido el comando *linprog* de Matlab. En compensación a ello, se ha observado una mayor precisión “por defecto” de este comando que de los otros métodos. La precisión observada en los resultados calculados ha sido del orden de 10^{-10} km, mientras que en los otros casos no existe tanta precisión, siendo ésta del orden de la decena de micra. Los tres casos consiguen, de cualquier forma, el rendezvous, anulando los elementos orbitales relativos con mayor o menos precisión en el último instante de tiempo.

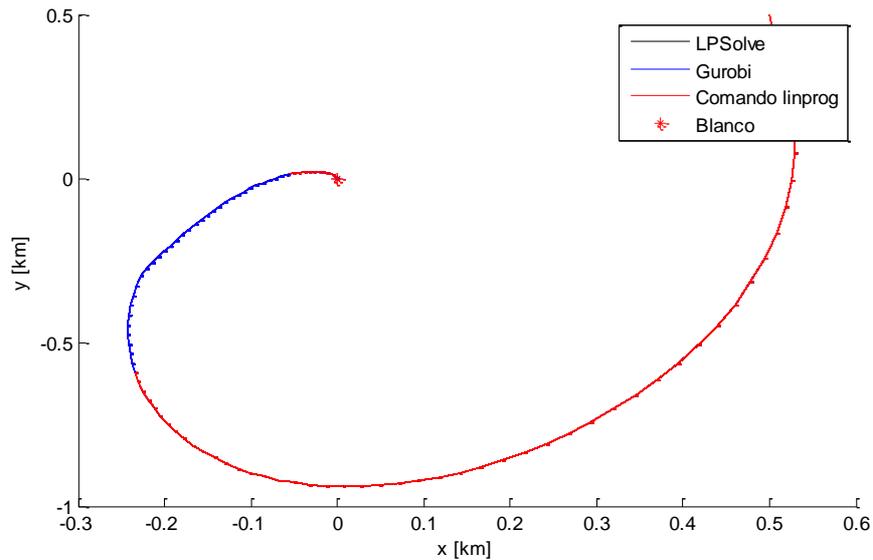


Ilustración 71. Comparación gráfica de los diferentes métodos

Tamaño del vector de tiempos	Tiempo LPSolve (s)	Tiempo Gurobi (s)	Tiempo comando <i>linprog</i> de Matlab (s)
30	1.406	1.220	1.706
70	3.623	4.419	5.163
130	8.717	9.169	13.445
170	15.214	13.331	20.334

Tabla 29. Comparación de tiempos empleados según el programa empleado

En la Ilustración 72 se presenta la evolución de los tiempos de computación según el tamaño del vector de tiempos para los tres casos, recurriéndose a la interpolación para aproximar los casos no calculados de manera exacta. Los tiempos del LPSolve y del software Gurobi pueden considerarse más o menos idénticos, pues el cálculo del tiempo de computación varía ligeramente con cada lanzamiento del programa, resultando uno mayor que otro y viceversa, indistintamente. En todos los casos, el tiempo de computación que emplea el comando *linprog* de Matlab es el mayor de los tres. Por ver tendencias, la interpolación realizada sobre los resultados obtenidos arroja una aparente evolución parabólica del tiempo de computación del software LPSolve, por lo que para grandes particiones del vector de tiempos se postula como el más lento.

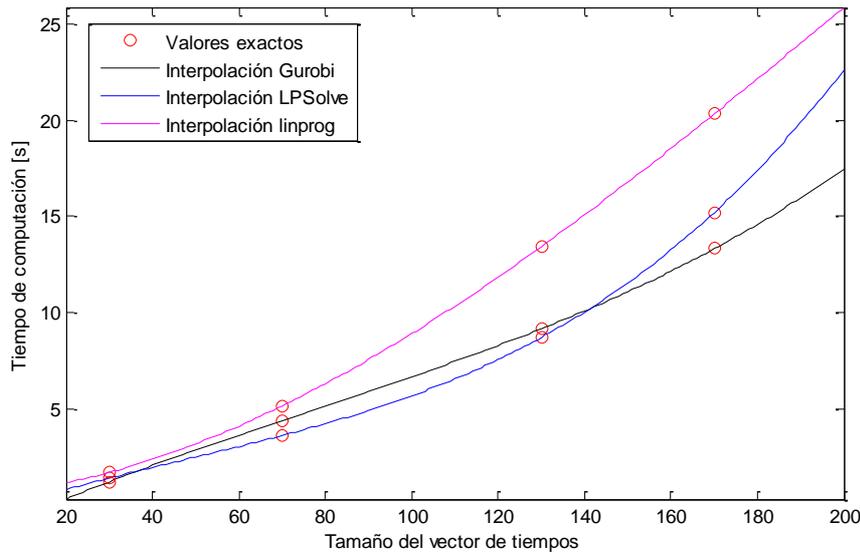


Ilustración 72. Comparación gráfica de tiempos de cómputo según métodos

5.4. Conclusiones

A lo largo del presente capítulo se han vertido multitud de resultados gráficos y numéricos para diversos valores de condiciones iniciales y parámetros. Asimismo, se han estudiado el problema de los dos impulsos no perturbado y el control predictivo del problema genérico de rendezvous llevando a cabo el cálculo de la órbita relativa por el método de los elementos orbitales relativos. En este apartado se establecerán una serie de conclusiones de todos los casos vistos.

Si se observan las variaciones tanto de la geometría de la órbita relativa de la maniobra de rendezvous como del consumo de combustible calculado según las condiciones iniciales del movimiento relativo, se deduce lo reflejado en la Tabla 30 (para los consumos), en la que se indica el caso más desfavorable de los calculados.

Condición inicial que varía	Gasto caso no perturbado (m/s)	Gasto caso perturbado (m/s)	Variación respecto del caso no perturbado (%)
x_0	1.306	1.987	52.14
y_0	0.400	0.692	73
z_0	0.768	1.028	33.85
\dot{x}_0	0.539	0.819	51.95
\dot{y}_0	0.607	0.787	29.65
\dot{z}_0	0.461	1.1	138.61

Tabla 30. Comparación gastos según condiciones iniciales

Todos los casos reseñados en la Tabla 30 coinciden con aquellos en los que el valor de la condición inicial correspondiente adquiere el mayor valor de los considerados. Haciendo un pequeño análisis, se obtiene que el

rendezvous en presencia de perturbaciones es más sensible a cambios en los valores de la velocidad inicial en z , con una desviación máxima de las calculadas del 138.61%. Es curioso el hecho de que la velocidad fuera del plano suponga el mayor incremento en el gasto de combustible en caso de rendezvous perturbado respecto del no perturbado cuando el estudio de la influencia de la condición z_0 arroja que ésta es, junto con \dot{y}_0 , la que menos hace crecer el gasto comparativamente.

Por lo tanto, el algoritmo sufre más las perturbaciones del J_2 cuando se varían la posición relativa x_0 y la velocidad relativa \dot{z}_0 , en referencia siempre a sensibilidad al gasto de combustible en comparación con el caso no perturbado. Por el contrario, es menos sensible a z_0 y \dot{y}_0 .

En el estudio que se ha llevado a cabo para analizar la influencia de los elementos orbitales de la órbita del blanco se deduce que el elemento orbital que más afecta al consumo es la excentricidad (e). Además, su influencia es tanto mayor cuanto mayor es el valor que adquiere ya que el gasto varía exponencialmente con este parámetro. Partiendo del valor $e = 0$, en el primer aumento ($e = 0.1$), el gasto aumenta un 16%. En el segundo incremento, del 100% ($e = 0.2$), el consumo de combustible aumenta el 17% respecto de su valor anterior. En el tercer incremento del valor de e , del 50% ($e = 0.3$), el gasto se empieza a disparar (20%). En el incremento siguiente, del 33% ($e = 0.4$), el gasto aumenta un 24%. Se observa, por tanto, una tendencia exponencial. Para incrementos porcentuales cada vez menores del valor de e se obtienen crecimientos cada vez mayores del gasto de combustible.

El elemento orbital ω es el siguiente en importancia pero el algoritmo no es tan sensible a él como a la excentricidad, aunque presente también evolución ligeramente exponencial. La influencia del semieje mayor del blanco no es notable en el gasto y, por último, la variación de los elementos orbitales que rigen el movimiento fuera del plano (i, Ω) apenas hacen variar el valor del consumo de combustible, siendo los que menos influencia tienen.

También se ha analizado, en el subapartado 3.3.4, el efecto de que el bloque de control (el algoritmo) reciba/emita información defectuosa, dando valores de los elementos orbitales relativos que no se corresponden con la realidad calculada. En todos los casos estudiados se consigue el rendezvous (con mayor o menor error) pero sacrificando el gasto de combustible, distanciándose excesivamente del óptimo calculado en algunos casos.

Se presenta en la Tabla 31 una comparación para dilucidar cuál es el elemento orbital relativo que provoca mayores incrementos del consumo de combustible en el momento en que los datos recibidos son desviados en un máximo del 5% de su valor óptimo por debajo de dicho valor.

Elemento orbital relativo	Gasto óptimo (m/s)	Gasto desajustado (m/s)	Diferencia de gastos (%)
δa (km)	0.407	0.448	10.07
$\delta \theta$ (°)		0.441	8.35
δi (°)		0.406	-0.25
δq_1 (-)		0.410	0.74
δq_2 (-)		0.443	8.85
$\delta \Omega$ (°)		0.342	-15.97

Tabla 31. Comparación de gastos para desajustes por debajo del óptimo

Todas las variaciones producidas en los ROE que representan el movimiento en el plano orbital implican un

aumento del combustible consumido, muy elevado en el caso de la diferencia de semiejes mayores (en torno al 10%). La variación de los elementos orbitales relativos que controlan el movimiento fuera del plano, es decir, la diferencia de inclinaciones y la diferencia entre la ascensión recta del nodo ascendente de perseguidor y blanco, implican una reducción del consumo, bastante acusada en el último caso (de casi el 16%). Esto es debido al motivo explicado en el subapartado 5.3.4 en el caso de δi : la inclinación que se debe compensar para llegar a un valor de $\delta i = 0$ es menor en el caso desajustado que en el óptimo calculado, de manera que el gasto invertido en esto será, igualmente, menor.

Esta tendencia cambia cuando se asume que los datos desajustados estarán, como máximo, un 5% por encima del valor óptimo calculado. Los gastos de combustible se disparan (véase Tabla 32), hasta límites inadmisibles. A pesar de todo, el rendezvous se consigue en todos los casos.

Elemento orbital relativo	Diferencia con el gasto óptimo (%)
δa (km)	95.82
$\delta \theta$ (°)	637
δi (°)	1.23
δq_1 (-)	124.82
δq_2 (-)	80.59
$\delta \Omega$ (°)	1030

Tabla 32. Comparación de gastos para desajustes por encima del óptimo

Como puede desprenderse de los datos vertidos en la Tabla 32, los gastos son increíblemente superiores a los reflejados en la Tabla 31. Las variables que hay que compensar, en este caso, para conseguir llevar todos los elementos orbitales relativos a 0 son, como máximo, un 10% mayores que en el caso anterior, de manera que eso significará un consumo notablemente superior. Las variables que implican un mayor gasto son $\delta \Omega$ y $\delta \theta$.

Además de posibles desajustes en el cálculo de los elementos orbitales relativos, se ha considerado la posibilidad de que los impulsos no sean expelidos alineadamente con el eje para el cual han sido calculados. Esto sería debido a una mala alineación de las toberas propulsivas. La conclusión que se desprende del análisis realizado es que cuanto mayores son las desviaciones que sufren las toberas propulsivas respecto de su eje de alineación, mayores son los gastos de combustible empleados puesto que los impulsos dados serán menores a los calculados llevando al vehículo perseguidor, en cada instante de tiempo, a un estado no óptimo, el cual requerirá, en el siguiente instante, un consumo mayor del que tendría en caso de ser ese estado el óptimo. Y así, sucesivamente, hasta conseguir el rendezvous.

Los incrementos en el consumo no son demasiado importantes, siendo del 1.66% para el caso más desfavorable de los considerados. Sin embargo, como se dijo en 3.3.5, no se consideró el recuento de impulsos en las diferentes direcciones debido a los impulsos remanentes que se producen en esas otras direcciones. A modo de ejemplo, no se ha considerado el impulso que se produce en y y z al existir desalineación de la tobera propulsiva que ofrece impulso según el eje X .

Por último se puede establecer una comparación entre el problema de rendezvous genérico al que se le implementa un algoritmo de control predictivo y el problema de los dos impulsos estudiado en el apartado 5.2. Ambos casos sin contar con la presencia de perturbaciones de ningún tipo. La comparación de los gastos según el valor de la excentricidad de la órbita del blanco, que ha sido el parámetro que se ha variado por ser este el que mayor influencia tiene sobre el gasto (como se ha demostrado posteriormente), se puede observar en la

Ilustración 73.

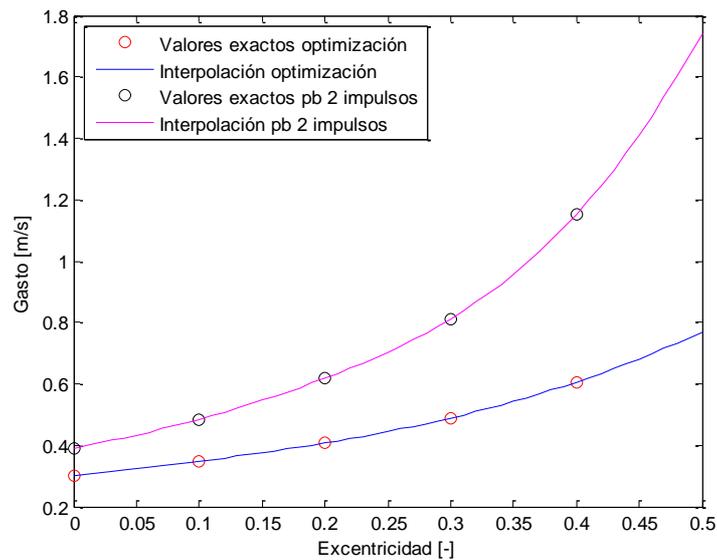


Ilustración 73. Comparación gastos para los casos óptimo y el problema de los dos impulsos

Como era de esperar, para unas mismas condiciones iniciales del movimiento y los mismos parámetros del modelo (con la única excepción de que se ha considerado un instante de tiempo en que se realiza el rendezvous anterior al considerado para el caso óptimo para que la matriz que interviene en el desarrollo de 4.1 sea invertible) los gastos de combustible para el problema de los dos impulsos son mayores que en el caso calculado por el algoritmo de control predictivo.

Conforme aumenta el valor de la excentricidad de la órbita del blanco mayores son las diferencias en los gastos de combustible, aumentando de manera más exponencial en el caso del problema de los dos impulsos. A pesar de requerirse muchos menos impulsos para conseguir el rendezvous en el último caso (únicamente dos como el propio nombre de la maniobra indica), éstos son de muy elevado valor, pues la maniobra ha de completarse con únicamente dos empujes que no están acotados. Por el contrario, en el caso optimizado se está realizando una replanificación del problema, actualizando en cada instante la situación del estado y volviendo a recalcular todo el problema, eligiendo siempre el impulso óptimo para llevar al sistema al estado óptimo, minimizando el combustible y consiguiendo el rendezvous.

6 PLANTEAMIENTO DE LA RESTRICCIÓN DE NO COLISIÓN

Como tendencia futura a aplicar en el modelo desarrollado en el capítulo 4 se debería analizar el aseguramiento de la integridad de los vehículos, para lo cual se deberá impedir, en todo instante, incluido el inicial, la colisión entre ellos. Se excluiría el instante final por ser éste aquel en el que se efectúa el acoplamiento. Este aspecto se consigue de la manera reseñada en [11] y [12]. En dichas fuentes esta restricción se plantea con la posición relativa del vector excentricidad relativa, dado por las ecuaciones (6.1)-(6.2).

$$\delta e_x = \delta q_1 \quad (6.1)$$

$$\delta e_y = \delta q_2 \quad (6.2)$$

Igualmente toma protagonismo el vector inclinación relativa, definidas sus componentes por las ecuaciones (6.3)-(6.4). Aunque el vector excentricidad relativa viene directamente dado por el set de elementos orbitales relativos escogido al principio de esta memoria, el vector inclinación relativa requiere de la definición de una nueva variable.

$$\delta i_x = \delta i \quad (6.3)$$

$$\delta i_y = \delta \Omega \text{sen} i \quad (6.4)$$

El vector excentricidad controla lo que ocurre en el plano mientras que el vector inclinación asume el control fuera de él. Recurriendo a las referencias citadas se llega a la conclusión, a la luz de las definiciones anteriores, de que la condición que ha de cumplirse para garantizar la seguridad de la misión es exigir la existencia de paralelismo (o antiparalelismo) entre los vectores $\delta \vec{e}$ y $\delta \vec{i}$. Y dos vectores son paralelos (o antiparalelos) si sus componentes son proporcionales entre sí. De esta manera, deberá cumplirse la condición (6.5). Esto se cumplirá independientemente del tipo de órbita que recorra el blanco (circular, geostacionaria, inclinación nula,...). La justificación geométrica de esto puede entenderse con la Ilustración 74. En dicha Ilustración se definen las variables reseñadas a lo largo de la presente memoria, siguiendo una nomenclatura diferente. Así, la anomalía verdadera, f , se define como θ ; la latitud verdadera, denotada en este proyecto como θ , aparece en la figura como u . Por otro lado, el sistema de ejes tiene las asignaciones de (6.6).

$$\delta i \delta q_2 - \delta q_1 \delta \Omega \text{sen} i = 0 \quad (6.5)$$

$$\{\vec{e}_R, \vec{e}_T, \vec{e}_N\} = \{\vec{o}_r, \vec{o}_\theta, \vec{o}_z\} \quad (6.6)$$

Por último, s/c 1 representa el vehículo blanco y s/c 2 el perseguidor. Además del paralelismo del que se habla en el párrafo anterior, y para que 6.5 tenga sentido, es necesario que los módulos de los vectores $\delta \vec{e}$ y $\delta \vec{i}$ sean mayores que 0 en todo instante de tiempo, exceptuando aquel en el que se completa el rendezvous mediante el acoplamiento (ecuaciones (6.7) y (6.8)). Esto supone, en realidad, la existencia de una triple restricción matemática (que será desarrollada en apartados posteriores) para garantizar la integridad del sistema *chief*-

chaser.

$$\delta q_1^2 + \delta q_2^2 \geq 0 \quad (0 \leq t \leq t_{N-1}) \quad (6.7)$$

$$\delta i^2 + \delta \Omega^2 \sin^2 i \geq 0 \quad (0 \leq t \leq t_{N-1}) \quad (6.8)$$

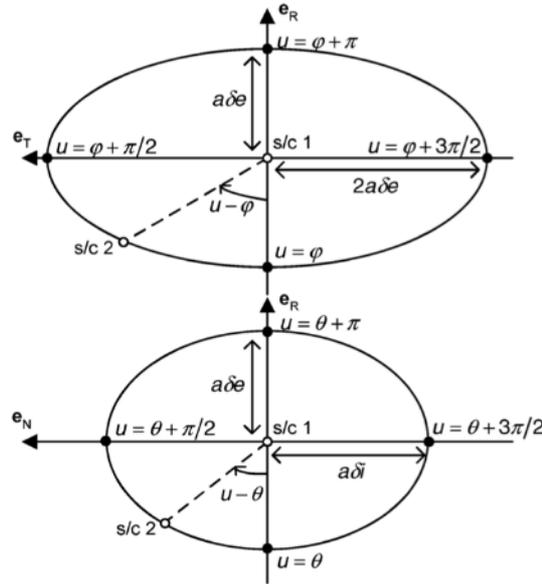


Ilustración 74. Geometría justificativa restricción no colisión

Para incluir esto en el modelo de control predictivo se desarrollará la formulación pertinente para tenerla en cuenta en trabajos futuros. El caso de la restricción de no colisión obliga, como se ha dicho, a exigir el paralelismo (o antiparalelismo) entre los vectores excentricidad relativa e inclinación relativa. Las simulaciones numéricas relativas a optimización que se han implementado para conseguir los resultados vertidos en el capítulo 5 se han llevado a cabo mediante software de optimización lineal. Esto exige que el problema sea, igualmente, lineal. De esta manera, las restricciones que conforman la condición de no colisión deberán linealizarse para poder aplicar el método seguido hasta ahora. Siguiendo el método tradicional, se define lo prescrito en las ecuaciones (6.9)-(6.12). El subíndice “r” define la magnitud de referencia y el subíndice “l” especifica la componente lineal de la magnitud, la “pequeña señal”, de tal manera que $|\delta x_l| \ll |\delta x_r|$, reseñando x una magnitud cualquiera.

$$\delta q_1 = \delta q_{1r} + \delta q_{1l} \quad (6.9)$$

$$\delta q_2 = \delta q_{2r} + \delta q_{2l} \quad (6.10)$$

$$\delta i = \delta i_r + \delta i_l \quad (6.11)$$

$$\delta \Omega = \delta \Omega_r + \delta \Omega_l \quad (6.12)$$

Por mera sustitución de estas definiciones en (6.5), (6.7) y (6.8) se obtiene lo siguiente. Cabe reseñar que tanto (6.14) como (6.15) se han de cumplir en todo instante de tiempo excepto en el final.

$$\delta i_r \delta q_{2r} + \delta q_{2r} \delta i_l + \delta i_r \delta q_{2l} - [\delta q_{1r} \delta \Omega_r + \delta q_{1r} \delta \Omega_l + \delta \Omega_r \delta q_{1l}] \sin i = 0 \quad (6.13)$$

$$\delta q_{1r}^2 + 2\delta q_{1r} \delta q_{1l} + \delta q_{2r}^2 + 2\delta q_{2r} \delta q_{2l} > 0 \quad (6.14)$$

$$\delta i_r^2 + 2\delta i_r \delta i_l + \sin^2 i (\delta \Omega_r^2 + 2\delta \Omega_r \delta \Omega_l) > 0 \quad (6.15)$$

Teniendo en cuenta (6.13)-(6.15) y linealizando, asimismo, tanto la variable de control (ecuación (6.16) o equivalente (6.17)) como el resto de elementos orbitales relativos, esta triple restricción puede ser expresada en función de la variable de control, que es lo que se persigue.

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_r + \Delta \vec{v}_l \quad (6.16)$$

$$\Delta \vec{V} = \Delta \vec{V}_r + \Delta \vec{V}_l \quad (6.17)$$

Recurriendo a la ecuación de la predicción del estado, se puede expresar lo que indica la ecuación (4.18) de tal modo que se puede desglosar en las ecuaciones (6.19) y (6.20).

$$\delta \vec{E}_r + \delta \vec{E}_l = F \delta \vec{e}(t_0) + G(\Delta \vec{V}_r + \Delta \vec{V}_l) \quad (6.18)$$

$$\delta \vec{E}_r = F \delta \vec{e}(t_0) + G \Delta \vec{V}_r \quad (6.19)$$

$$\delta \vec{E}_l = G \Delta \vec{V}_l \quad (6.20)$$

Habiendo realizado estas consideraciones la restricción de no colisión puede, ya sí, expresarse como lo requiere el modelo de control predictivo.

Matricialmente se puede poner la ecuación (6.13) como sigue.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta q_{2r} & -\delta \Omega_r \sin i & \delta i_r & -\delta q_{1r} \sin i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a_l \\ \delta \theta_l \\ \delta i_l \\ \delta q_{1l} \\ \delta q_{2l} \\ \delta \Omega_l \end{bmatrix} = -\delta i_r \delta q_{2r} + \delta q_{1r} \delta \Omega_r \quad (6.21)$$

Identificando en la ecuación anterior la parte lineal de un vector genérico $\delta \vec{e}$, es decir, $\delta \vec{e}_l$, se llega a (6.22).

$$A_{2k} \delta \vec{e}_l = b_{2k} \quad (6.22)$$

Tanto el vector A_{2k} como el escalar b_{2k} están definidos en un instante genérico, k , por lo que todas las componentes tomarán un valor diferente según el instante en el que se encuentre la maniobra. Agrupando para todos los instantes de tiempo exceptuando el último y teniendo en cuenta la expresión (6.20), se está en condiciones de optimizar el problema linealizado introduciendo la primera de las tres restricciones (ecuación (6.23)).

$$A_2 \delta \vec{E}_l = \vec{b}_2 \quad (6.23)$$

Donde

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{2N-1} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{20} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{2N-1} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Teniendo (6.23) puede completarse la transformación recurriendo al desglose que se ha practicado en la ecuación de la predicción del estado, cristalizando todo en la ecuación (6.26). Esta ecuación muestra que la restricción de no colisión (la primera de sus ecuaciones al menos) puede formar parte del modelo de control predictivo que se pretende construir.

$$A_2 G \Delta \vec{V}_l = \vec{b}_2 \quad (6.26)$$

Una vez definida la primera restricción en pos de introducirla en el modelado de control predictivo que se está montando se pasará, brevemente, a proceder de la misma manera para las desigualdades (6.14) y (6.15). Para un instante genérico se obtiene, para ambas inecuaciones, respectivamente, lo que se reseña a continuación.

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 2\delta q_{1r} \quad 2\delta q_{2r} \quad 0] \begin{bmatrix} \delta a_l \\ \delta \theta_l \\ \delta i_l \\ \delta q_{1l} \\ \delta q_{2l} \\ \delta \Omega_l \end{bmatrix} > -\delta q_{1r}^2 - \delta q_{2r}^2 \quad (6.27)$$

$$[0 \quad 0 \quad 2\delta i_r \quad 0 \quad 0 \quad 2\delta \Omega_r \sin^2 i] \begin{bmatrix} \delta a_l \\ \delta \theta_l \\ \delta i_l \\ \delta q_{1l} \\ \delta q_{2l} \\ \delta \Omega_l \end{bmatrix} > -\delta i_r^2 - \delta \Omega_r^2 \sin^2 i \quad (6.28)$$

Las ecuaciones (6.27) y (6.28) pueden expresarse, más compactamente, como se recoge en las ecuaciones (6.29) y (6.30), respectivamente. En ellas se hace uso de las mismas identidades a las que se han recurrido para montar (6.23), definiéndose y montando las matrices A_3 y A_4 y los vectores \vec{b}_3 y \vec{b}_4 de manera análoga al primer caso.

$$A_3 \delta \vec{E}_l > \vec{b}_3 \quad (6.29)$$

$$A_4 \delta \vec{E}_l > \vec{b}_4 \quad (6.30)$$

Por último, para que las ecuaciones anteriores tengan concordancia con el modelo *MPC* definido hasta ahora, hay que hacer la última sustitución en las mismas. Así, se generan los sistemas de inecuaciones de (6.31) y (6.32).

$$A_3 G \Delta \vec{V}_l > \vec{b}_3 \quad (6.31)$$

$$A_4 G \Delta \vec{V}_l > \vec{b}_4 \quad (6.32)$$

Como último comentario para cerrar este apartado, hay que decir que esta restricción implica la resolución de un problema cuyas variables de decisión son las partes lineales de los impulsos.

De nuevo hay que decir que no se introduce, en la contabilización de las restricciones a la hora de construir el

modelo de control predictivo, la restricción de no colisión al no ser considerada en la implementación del modelo. Sin embargo, se detalla el desarrollo teórico para implementar el modelo en caso de existir continuación de este Proyecto. Por ello, el problema se resolvería de la siguiente manera. En primer lugar se resolvería el problema (4.34)-(4.37) para después, con los impulsos provisionales calculados, resolver el problema (6.33)-(6.39).

$$J_l = \min |\Delta \vec{V}_l| \quad (6.33)$$

s. a.

$$\Delta \vec{V}_l \leq \Delta \vec{V}_{max} - \Delta \vec{V}_r \quad (6.34)$$

$$\Delta \vec{V}_l \geq -\Delta \vec{V}_r \quad (6.35)$$

$$G_1 G \Delta \vec{V}_l = -G_1 F \delta e(t_0) - G_1 G \Delta \vec{V}_r \quad (6.36)$$

$$A_2 G \Delta \vec{V}_l = \vec{b}_2 \quad (6.37)$$

$$A_3 G \Delta \vec{V}_l > \vec{b}_3 \quad (6.38)$$

$$A_4 G \Delta \vec{V}_l > \vec{b}_4 \quad (6.39)$$

En este problema de optimización sí se tiene en consideración la restricción de no colisión, por lo que el problema de no linealidad que se tenía al principio queda resuelto. Las variables de decisión, en este segundo problema, pasan a ser la parte de pequeña señal, $\Delta \vec{V}_l$, de los impulsos definitivos, $\Delta \vec{V}$. Los valores de referencia, $\Delta \vec{V}_r$, vienen dados por los impulsos calculados en el problema de optimización (4.34)-(4.37), de manera que se cumple (2.91). Las restricciones (6.37)-(6.39) se han alcanzado recurriendo a la descomposición de las magnitudes en parte de referencia y parte lineal descrita en apartados.

7 CONCLUSIONES DEL PROYECTO Y TRABAJO FUTURO

En este capítulo se expondrán una serie de consideraciones que se dejarán como trabajo futuro del presente Proyecto. Tras desarrollar el modelo de control predictivo y representar los resultados numéricos obtenidos, se van a realizar comentarios extra acerca de las simplificaciones realizadas a lo largo del documento, así como posibles variantes que harían tanto del problema como del proyecto uno más completo. Lo desarrollado en el capítulo 6 se considera tendencia futura.

7.1. Conclusiones

Una vez desarrollado el Proyecto completamente se realizarán algunos comentarios concluyentes sobre la totalidad del mismo. Las conclusiones particulares de cada situación considerada y de cada tanda de resultados hallada se han ido comentando en los apartados correspondientes, dejándose este final para conclusiones generales del Proyecto en sí.

La finalidad primera del Proyecto era emplear un método de cálculo orbital novedoso y apenas usado por el mundo del espacio. Este método, el de los elementos orbitales relativos, que calcula la órbita relativa del vehículo perseguidor alrededor del blanco, junto con el modelo de control predictivo, que optimiza el combustible satisfaciendo unas determinadas restricciones, han permitido resolver el problema general de rendezvous inicialmente planteado. El hecho de incluir perturbaciones en el problema no ha hecho que este falle en su trabajo de proporcionar órbitas que consigan la misión. El *MPC* ha logrado controlar estas perturbaciones haciendo que el rendezvous se consiga con prácticamente error nulo en el cálculo.

Se han establecido numerosas comparaciones de los resultados obtenidos poniéndose de manifiesto que es cierto que el modelo propuesto minimiza el consumo de combustible satisfaciendo las restricciones impuestas. La planificación planteada inicialmente es perfecta en ausencia de perturbaciones pero la inclusión de estas en el modelo hace que no se pueda considerar este método de optimización, pues los errores son palpables y no se consigue el rendezvous con efectividad. Se ha demostrado, asimismo, que el problema de los dos impulsos es una solución viable pero muy costosa.

Por último, los diferentes problemas durante el tiempo de realización del Proyecto no han resultado en absoluto algo negativo. De estos problemas ha surgido la necesidad de recurrir a otros métodos para llevar a cabo la resolución del problema en el ordenador, por lo que ha valido para hacer una pequeña comparación entre ellos y deducir cuál es el más efectivo en términos de tiempo de computación y efectividad.

7.2. Tendencias futuras

En esta sección se definirán una serie de consideraciones a tener en cuenta en ampliaciones futuras del

presente Proyecto.

7.2.1. Problema de actitud

La primera gran simplificación realizada al modelo ha sido obviar el problema de la actitud de los vehículos espaciales. Al inicio de la memoria, en el apartado introductorio, se hizo la consideración de que el Proyecto se iba a centrar únicamente en el problema propulsivo (de alcance), dejando de lado el de actitud. Esto ha supuesto una gran ventaja en cuanto a desarrollos teóricos y cálculos se refiere, pero ha significado también una pérdida notable de realidad en el proyecto. La consecuencia inmediata real de esta hipótesis es que el vehículo perseguidor puede dar caza al objetivo en una posición inadecuada para realizar el posterior acoplamiento. Es por ello por lo que se describe, a continuación, de manera sucinta, el nombrado problema de actitud.

Para estudiar la orientación de un sistema respecto de otro es necesario hacer un estudio cinemático y dinámico del problema, los cuales cristalizan en una serie de ecuaciones cinemática y dinámicas, respectivamente. La forma de las ecuaciones cinemáticas varía en función del procedimiento escogido a la hora de representar la actitud de un vehículo. Puede escogerse una representación basada en matrices de cosenos directores, una que haga uso de los ángulos de Euler u otra que emplee cuaterniones. Este último caso se basa en el teorema para la rotación de Euler, el cual dice que

Cualquier rotación o conjunto de rotaciones sucesivas puede expresarse siempre como una única rotación alrededor de una dirección o eje de rotación principal.

La representación de la actitud mediante esta última forma se define como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

El vector $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ representa el cuaternión que representa la actitud del vehículo en tanto que el vector $[\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ define el vector velocidad angular a la que ese cuerpo está sometido.

En cuanto al problema dinámico, las ecuaciones que lo rigen parten del teorema del momento cinético, cristalizando en el siguiente sistema:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + M_1 \quad (7.2)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + M_2 \quad (7.3)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_3 \quad (7.4)$$

Los valores I_1, I_2 e I_3 son los valores de la inercia del sistema en ejes principales. El vector $[M_1 \ M_2 \ M_3]^T$ define los pares externos perturbadores aplicados. El sistema de ecuaciones (7.2)-(7.4) es válido para el giro del vehículo perseguidor, si éste es considerado como sólido rígido, alrededor de su centro de gravedad.

El conjunto anterior de ecuaciones junto con (7.1) definen el problema de la orientación del vehículo. Su expresión en función de los elementos orbitales relativos, definidos en 2.3.4, así como la implementación en software adecuado para generar resultados numéricos y gráficos se deja para una extensión futura del proyecto.

7.2.2. Cono de visión

Otro de los aspectos que se han supuesto cumplidos ha sido el relativo a la visión del vehículo objetivo por parte del perseguidor en todo instante de tiempo. Para ello, el *chaser* debería tener capacidad de visión de 360

grados, lo cual es caro e inviable. Por ello, se debería exigir que el blanco siempre estuviera, durante el movimiento, dentro de un área admisible de visión de manera que siempre esté localizado. En el caso de este proyecto se ha asumido que las maniobras se llevaban a cabo independientemente de la posición del blanco respecto del perseguidor, o sea, independientemente de si se encuentra dentro de esa área de visión o no. Esto constituye una propuesta de mejora del modelado del problema descrito en el capítulo 2.

7.2.3. Estudios de seguridad

En el capítulo 2 se han vertido numerosas situaciones y requerimientos que han de exigirse al vehículo perseguidor según las características del mismo para garantizar la consecución del rendezvous y asegurar el éxito de la misión ante cualquier problema o eventualidad que pueda suceder. Como tendencia futura de este Proyecto se propone hacer un estudio basado en estos casos descritos, demostrando cómo se puede garantizar que el perseguidor alcanza al blanco de manera adecuada, sin colisiones ni fallos catastróficos.

7.2.4. Inclusión de más perturbaciones

Tan solo se ha considerado la perturbación del J_2 , pero lo cierto es que existen más perturbaciones presentes en el espacio. Concretamente, a órbitas tan bajas como las consideradas, en los pasos por perigeo adquiere cierta relevancia los efectos de resistencia aerodinámica. Estos efectos serán tanto mayores cuanto mayor sea la excentricidad de la órbita, pues esta hará que el perigeo quede cada vez más bajo. Cabe decir que en los ejemplos descritos a lo largo del presente documento se ha obviado la posibilidad de que exista colisión con la Tierra por quedar ciertos puntos de la órbita de cualquiera de los dos vehículos a una distancia menor que la del radio de la misma.

Otras perturbaciones que pueden incluirse en el modelado son las debidas a la existencia y cercanía tanto de la Luna como del Sol, convirtiéndose el problema en uno regido por la existencia de 3 y 4 cuerpos en función del astro que se considere en los cálculos. Estas perturbaciones no serán demasiado grandes pero harían más exacto el conjunto de resultados calculados, por lo que se deja como trabajo futuro del Proyecto.

Asimismo, para cerrar este tema, se propone perfeccionar el modelo de perturbaciones incluido, considerando los efectos periódicos que origina la perturbación del J_2 sobre los diferentes elementos orbitales relativos, además de los seculares ya incluidos.

REFERENCIAS

- [1] Apuntes de Vehículos Espaciales y Misiles. Rafael Vázquez Valenzuela. Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla. 21 de abril de 2014. Tema 4. Rendezvous de vehículos espaciales. Dinámicas, estabilidad y maniobras básicas. Planificación.
- [2] Resolución del problema de rendezvous de vehículos espaciales mediante control predictivo. Cristóbal Beltrán Blázquez Pérez. Proyecto Fin de Carrera. Ingeniería Aeronáutica. Universidad de Sevilla.
- [3] Apuntes de Astronáutica y Vehículos Espaciales. Rafael Vázquez Valenzuela. Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla. 1 de octubre de 2013. Tema 2. Mecánica orbital básica. Tema 3. Análisis y diseño de misiones geocéntricas.
- [4] Orbital Element. <http://spaceflight.nasa.gov/realdata/elements>
- [5] Hanspeter Schaub. Analytical mechanics of space systems. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009. Spacecraft flying formation.
NOTA: el desarrollo correspondiente al apartado 1.3.4 de esta memoria supone una corrección del que se puede encontrar en la citada referencia, erróneo. Corrección realizada por el autor del presente Proyecto: Gino Daniel Jiménez Segura.
- [6] Christopher D. Karlgaard. Second Order Relative Motion Equations. Julio 2001. Capítulo 3. “Linear Model”.
- [7] Kirk W. Johnson, Captain, USAF. Relative orbit elements for satellites in elliptical orbits. Department of the Air Force. Air Force Institute of Technology. March 2010. Chapter III. Relative orbit elements for the circular chief problem.
- [8] Kepler’s equation. <http://webs.um.es/bussons/ecKepler.pdf>
- [9] Journal of Guidance control and dynamics. State Transition Matrix of relative motion for the perturbed noncircular reference orbit. 11/2003.
- [10] Apuntes de Vehículos Espaciales y Misiles. Rafael Vázquez Valenzuela. Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla. 21 de abril de 2014. Tema 4. Rendezvous de vehículos espaciales. Dinámicas, estabilidad y maniobras básicas. Planificación. Páginas 23-24.
- [11] Simeone D’Amico and Oliver Montenbruck. Proximity operations of formation-flying spacecraft using an eccentricity/inclination vector separation. Mayo – Junio 2006.
- [12] G. Gaias, DLR/GSOC/Space flight technology department. Onboard maneuver planning for the autonomous vision approach navigation and target identification (AVANTI) experiment within the DLR FireBird mission. 31/10/2013.
- [13] Sistemas de control predictivo. <http://es.scribd.com/doc/45848373/Que-son-los-sistemas-de-control-predictivo#scribd>

-
- [14] Linealización de la función valor absoluto.
<http://italica.us.es/asignaturas/Examenes/Linealización%20de%20funciones%20con%20valores%20absolutos.pdf>
- [15] Ramón Martínez Rodríguez-Osorio & Miguel Calvo Ramón. Comunicaciones por satélite. Dpto. de Señales, sistemas y radiocomunicaciones. Universidad politécnica de Madrid. Perturbaciones orbitales. Curso 2009/2010
- [16] Hanspeter Schaub. American Institute of Aeronautics and Astronautics. Incorporating secular drifts into the orbit element difference description of relative orbits. 02/2003.
- [17] ROEs application to DLR systems. http://www.dlr.de/rb/en/desktopdefault.aspx/tabid-4736/10535_read-23363/
- [18] ROEs application to NASA system. <http://www.dept.aoe.vt.edu/~cdhall/papers/naaszjgcd.pdf>