2015

Compresibilidad y turbulencia de la capa límite

Proyecto fin de carrera. Ingeniería aeronáutica

Miguel Lerín González. Tutor: Miguel Pérez-Saborid

Miguel Lerín González
Miguel Pérez-Saborid
24/03/2015

Índice

Capítulo I: Introducción

1.1 Objetivos y motivación del proyecto

El campo de la mecánica de fluidos está gobernado inexorablemente por las ecuaciones de Navier-Stokes. Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales altamente no lineales y que carecen de una solución general. Estas ecuaciones gobiernan el movimiento de los fluidos y se obtienen a partir de los principios de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía. Estas ecuaciones se obtienen mediante la aplicación de los principios en volúmenes fluidos infinitesimales, aunque pueden extenderse a forma integral aplicándose en volúmenes finitos. Las ecuaciones expresan las relaciones entre las derivadas espaciales y las temporales de las variables fluidas, que de acuerdo con los principios de conservación deben verificarse en todos los instantes de tiempo y para cada punto del espacio que pertenezca al dominio fluido. Como se ha comentado anteriormente, el conjunto de ecuaciones de Navier-Stokes a día de hoy es irresoluble, siendo considerada la resolución de este sistema de ecuaciones como uno de los problemas del milenio, que además es dotado por un millón de dólares para la persona que consiga resolverlo. A pesar de que hace poco un matemático kazajo(el profesor universitario Mujtarbay Otelbáyev) pareció obtener una solución parcial de las ecuaciones, a día de hoy sigue considerándose un problema irresoluble. De hecho, el número de casos para los que se dispone de solución exacta es de 80 según Handbuch der Physik de R.Berker. Lo normal hoy en día es usar métodos numéricos muy avanzados que las aproximen, lo que se conoce como CFD (computational fluids dynamics).

Debido a esta falta de capacidad para la resolución de las ecuaciones la enseñanza de esta materia en las escuelas de ingeniería ha versado tradicionalmente de clases teóricas, donde se deducían las ecuaciones de diversos fenómenos y posteriormente, se aplicaban a ejercicios o casos prácticos. El tratamiento de problemas complejos o realistas requería de muchas horas de manipulación, y en gran cantidad de casos ni siquiera eran explicados en las aulas por ser denominado demasiado complejo e innecesario, lo que constituía una pérdida de conocimiento por parte del alumno de la materia general de la asignatura. A veces el profesor presentaba una serie de resultados experimentales que los alumnos debían creer sin demostración alguna. Todo esto cambió con la aparición de los ordenadores, y con la posibilidad de programación de las ecuaciones.

Los objetivos de este texto se pueden resumir en 2. Por una parte ahondar en el problema de capa límite de la mecánica de fluidos, estudiando la compresibilidad y turbulencia y estudiando la capa límite en más profundidad que la vista en una asignatura clásica. Por otro lado se puede establecer un objetivo académico, que es mostrar como hoy en día es posible resolver problemas realistas con programas de 50 líneas en unos pocos segundos o minutos como mucho, algo que desde el punto de vista académico permite una mejor docencia por parte del profesor, y una máxima compresión de conocimientos por parte de los alumnos. En efecto, actualmente se puede instalar en los ordenadores personales programas numéricos muy completos y eficientes (como por ejemplo Matlab) que permiten al alumno implementar fácilmente sus propias rutinas, para resolver problemas realistas de la mecánica de Fluidos tales como problemas de capa límite, flujos estacionarios o no estacionarios en conductos, problemas fluido-mecánicos de propulsión aérea, flujos potenciales alrededor de alas o cuerpos fuselados…La experiencia ha demostrado, que hoy en día, muchos de estos problemas pueden ser resueltos fácilmente por los alumnos en clase bajo la guía del profesor, permitiéndoles adquirir conocimientos que antes no podían obtener o que debían creer sin poder ver una demostración de los mismos. Se pueden sustituir pues las tediosas clases de pizarra llenas de ecuaciones y tablas experimentales por clases donde los alumnos con sus propias manos pueden implementar un código y visualizar resultados pudiéndose comparar con datos experimentales o tablas de libros de una forma sencilla, eficiente y transparente. Además de todo esto, el alumno puede programar las ecuaciones paso a paso evitando el uso de CFD y otros programas que funcionan a modo de “caja negra” donde el alumno simplemente introduce unos datos y mágicamente saca una solución sin capacidad alguna de poder analizar los términos o fenómenos físicos que ocurren en la realidad. Por último esto también permite a los alumnos aplicar y desarrollar los conocimientos de matemáticas en general, y de cálculo numérico en particular, que los alumnos han adquirido en sus primeros cursos en una escuela de ingeniería algo que a día de hoy es vital no solo en el campo de la mecánica de fluidos, sino en el campo de la ingeniería en general.

Con todo esto los objetivos principales del proyecto son dos. Por un lado en objetivo ingenieril del estudio de la compresibilidad y turbulencia de una capa límite. Por otro lado el objetivo académico de mostrar como a día de hoy se puede aprovechar la programación para un mejor aprendizaje.

1.2 Bibliografía

Apuntes

Mecánica de fluidos I: Juan Manuel Fernández

Aerodinámica I: Jose Manuel Gordillo

Mecánica de fluidos II: Miguel Perez-Saborid

Libros

Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de Fluidos: Barrero Ripoll y Perez-Saborid

Web

http://www.lavanguardia.com/vida/20140110/54397981674/matematico-kazajo-encuentra-solucion-parcial-para-la-ecuacion-navier-stokes.html

Capítulo II: Capa límite

2.1 Introducción

La teoría de los fluidos ideales, basada en el hecho de que la viscosidad de los fluidos más comunes (aire y agua) es muy pequeña, experimentó un desarrollo considerable a lo largo del siglo XIX por su éxito en la predicción de la propagación de ondas y otros flujos de interés. Sin embargo, no fue hasta principios del siglo XX cuando se resolvió la discrepancia existente entre los resultados de la teoría de fluidos ideales aplicada a la corriente alrededor de obstáculos y los resultados experimentales. Por ejemplo, la teoría de fluidos ideales resulta inapropiada para la determinación de la resistencia al avance de un obstáculo moviéndose en el seno de un fluido en reposo, ya que predice que es nula (Paradoja de D'Alambert) en contraposición a los resultados experimentales. Se conoce hoy día que el origen de la discrepancia es la viscosidad, que independientemente de cuan pequeño sea su valor da lugar, en el caso de objetos de geometría roma o de cuerpos fuselados que forman con la corriente un ángulo de ataque grande, a distribuciones de presión sobre la superficie del obstáculo que difieren sustancialmente de las que se obtienen de la aplicación de la teoría de fluidos ideales. Como puede verse en la figura 2.1 que representa la distribución de presiones sobre una esfera, la presión medida y la calculada suponiendo flujo ideal coinciden satisfactoriamente en la parte delantera de la esfera, pero sobre la parte posterior la presiones reales son menores que las calculadas, lo que resulta en una componente neta de las fuerzas de presión que se opone al avance del cilindro y que se denomina resistencia de presión o de forma (por depender de la distribución de presiones de la forma del obstáculo). La viscosidad, por tanto, contribuye a la resistencia por una doble vía: directamente a través de la acción de esfuerzos viscosos (denominada resistencia de fricción), e indirectamente, modificando el campo de presiones para dar lugar a la resistencia de presión.

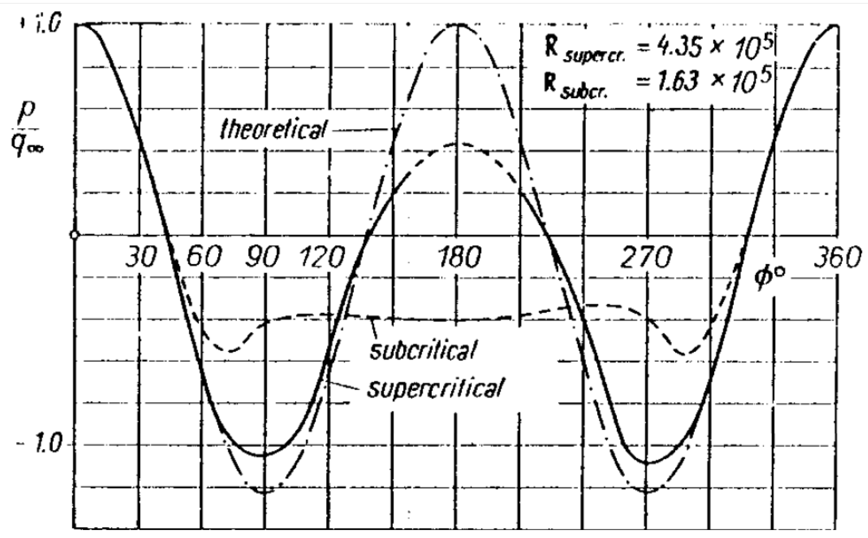

Ilustración 1: Coeficiente de presiones sobre una esfera. Libro de Schlichting.

Subsiste, no obstante, la cuestión de cómo la viscosidad cuyo efecto en principio es pequeño puede modificar tan sustancialmente los resultados de la teoría ideal. La respuesta a esta cuestión se debe a Prandtl, quien introdujo la idea de capa límite en un artículo presentado en el congreso de Heidelberg en 1904. Prandtl supuso que cerca de las paredes sólidas los efectos viscosos son siempre importantes, independientemente de lo pequeña que sea la viscosidad del fluido, y son los responsables de que se cumpla la condición de velocidad nula sobre el obstáculo (condición de adherencia) como se aprecia en la figura 2.2.

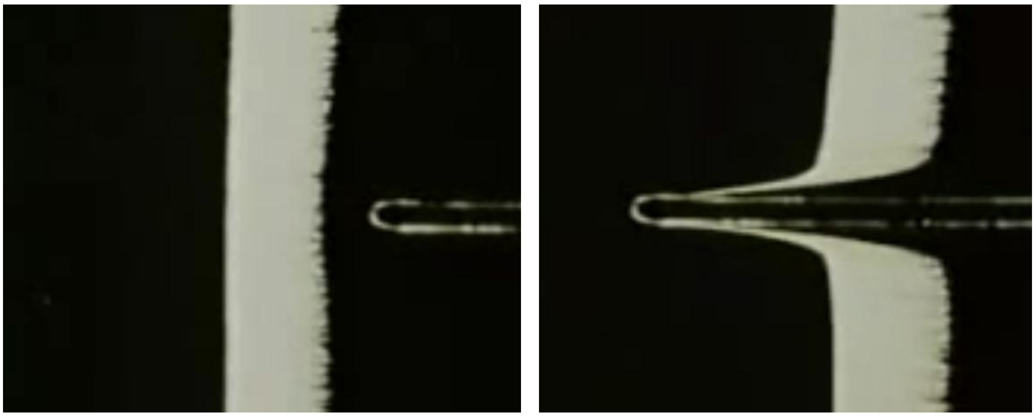

Ilustración 2: Líneas fluidas que muestran la condición de adherencia al llegar a un obstáculo. Video de youtube Fluid Mechanics (Boundary layers part 1)

En esencia, la idea de Prandtl para el análisis de flujos de fluidos con viscosidad pequeña (con mayor precisión, flujos a altos números de Reynolds) consiste en dividir el flujo en dos regiones bien diferenciadas: uno sin efectos viscosos o de conducción, que se denomina exterior donde el fluido se puede considerar ideal y que representa la base de la teoría potencial linealizada aerodinámica, y otra adyacente a las superficies sólidas, de espesor pequeño, donde los efectos viscosos son importantes, no porque el coeficiente de viscosidad del fluido sea mayor en esta zona (se presupone que μ no varía), sino porque los grandientes de velocidad en la dirección normal a la superficie son muy acusados (en una región muy delgada el fluido pasa de una velocidad nula en la superficie sólida a la velocidad de la corriente exterior en el fin de la capa límite).

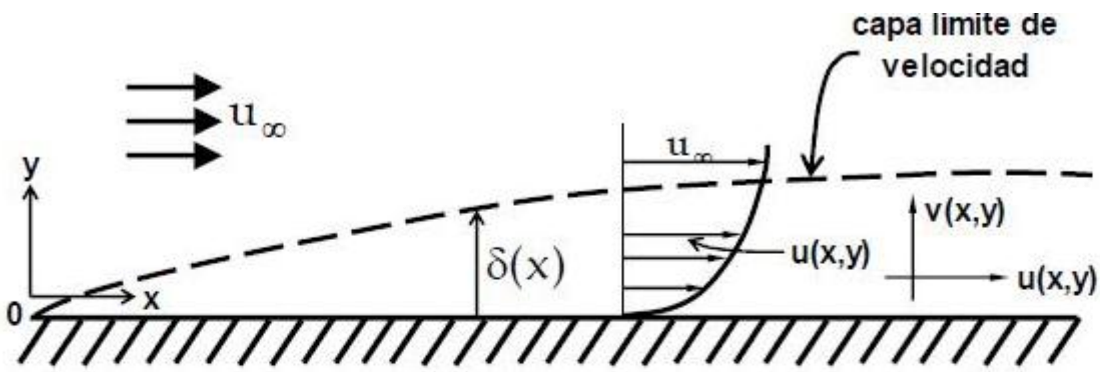

Ilustración 3: Esquema de una capa límite utilizado para estimar el orden de magnitud del espesor δ

El orden de magnitud de δ(x) en una estación situada a una distancia x aguas abajo del origen puede estimarse considerando en dicha estación una partícula fluida típica de la capa límite esquematizada en la figura 2.3 que se encuentra a una distancia de la pared del orden $y \sim\delta(x)/2 \sim \delta(x)$ donde se ha definido δ(x) como el valor de y para el cual la componente tangencial de la velocidad en la capa límite, u(x,y) alcanza un valor muy cercano a la corriente exterior. Para dicha partícula se tiene que $u(x,y) \sim u_e(x) \sim [u(x,y) - u_e(x)]$ y, teniendo en cuenta que $\Delta_\delta u \sim (u_e(x) - 0)\ y\ \Delta_x u \sim (u - U_\infty) \sim U_\infty$ en el caso de una placa plana y $\Delta_x u \sim (u - 0) \sim u_e(x)$ en el caso de que el origen de la capa límite sea un punto de remanso, se tiene que $[\partial^2 u/\partial y^2] \sim [\Delta_\delta u/\delta^2]\ y\ [\partial u/\partial x] \sim [\Delta_x u/x] \sim [u_e(x)/x]$. Puesto que en la capa límite los efectos viscosos son importantes, las fuerzas de viscosidad deben jugar un papel importante en las aceleraciones o deceleraciones convectivas de las partículas fluidas, por lo que en la componente x según la cantidad de movimiento se tiene

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;\rightarrow\; \rho u_e(x) \frac{u_e(x)}{x} \sim \mu \frac{u_e(x)}{\delta(x)^2}$$

Lo que proporciona la estimación

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_e(x)}}$$

El valor característico del espesor de la capa límite sobre una superficie de longitud característica L puede obtenerse haciendo $x \sim L$ y $u_e(x) \sim U_\infty$,

$$\delta_L \sim \frac{L}{\sqrt{LU_\infty/\nu}} \equiv \frac{L}{{Re_L}^{1/2}}$$

Donde se ha introducido el número de Reynolds basado en la longitud característica del obstáculo y la velocidad de la corriente incidente lejos del mismo, $Re_L = LU_\infty/\nu$. Se deduce, por tanto, que para los valores habituales del número de Reynolds en flujos alrededor de objetos, típicamente de orden 10^4 o mayores, la capa límite efectivamente es muy delgada, siendo la relación entre su espesor característico y la longitud característica del orden $\delta_L/L \sim {Re_L}^{1/2} \ll 1$. Obsérvese que al mismo resultado se llega estableciendo que en la capa límite el tiempo característico necesario para que cualquier perturbación se difunda en la dirección vertical por la acción de la viscosidad es del mismo orden que el tiempo de transporte convectivo aguas abajo de la capa límite.

En flujos alrededor de obstáculos a altos números de Reynolds las fuerzas de viscosidad sólo son importantes en la proximidad de las paredes sólidas, de modo que a distancias pequeñas a la pared el campo de velocidades coincide prácticamente con el que se obtiene mediante la teoría de flujos de fluidos ideales alrededor de obstáculos. La acción de la viscosidad modifica la distribución de velocidades cerca de la pared y obliga mediante la acción de los esfuerzos de viscosidad a que la velocidad del fluido en la pared sea nula, lo que se traduce en una fuerza de resistencia sobre el obstáculo (resistencia de fricción). Sucede en ocasiones que la deceleración de la corriente exterior no viscosa, que tiene lugar sobre la parte posterior de un obstáculo en el seno de una corriente, puede ser grande, como ocurre en el caso de los cuerpos romos o fuselados a alto ángulo de ataque. Debido al efecto de la viscosidad, esta deceleración será mayor aún en la capa límite, pudiéndose producir, si la deceleración es suficientemente grande, una corriente inversa al sentido del flujo exterior que dé lugar a torbellinos que forman una estela viscosa detrás del obstáculo como se aprecia en la figura 2.4 En esta situación se dice que la capa límite se ha separado, la distribución de presiones real es muy diferente a la teórica, pues el efecto de la viscosidad no está ya restringido a una zona delgada adyacente al obstáculo, y la resistencia se ve aumentada considerablemente por un factor al que contribuyen las fuerzas de presión.

Ilustración 4: Separación de la capa límite en el flujo alrededor de la esfera.

Se destaca, que para una placa plana, a un ángulo de ataque nulo, el gradiente de presiones es nulo, la capa límite no se separa, y la resistencia es exclusivamente debida a la viscosidad y se denomina de fricción. La placa plana es posiblemente la geometría más importante a resolver en una capa límite. El motivo es que como ya se ha expresado, se tiene únicamente resistencia de fricción y no de forma, dado que el gradiente de presiones es nulo, algo que es muy importante en la posibilidad de establecer desarrollos numéricos, ya que al contrario que la resistencia de fricción, la de forma no se puede determinar por medios analíticos o numéricos y debe recurrirse a la experimentación en túneles aerodinámicos.

En el caso de un perfil aerodinámico, no se podría realizar un análisis con tanta profundidad como en el caso de una placa plana debido a que por aparecer un gradiente de presiones aparece una resistencia de forma. Sin embargo, desde el punto de vista ingenieril es interesante observar lo que ocurre cualitativamente para poder comprender mejor el concepto de capa límite. En un perfil aerodinámico, según la teoría ideal, se producen dos puntos de remanso, uno en el borde de ataque y otro en el de salida. En los puntos de remanso la velocidad es nula, lo que implica según la ecuación de Bernouilli que la presión es máxima. En un punto cercado al espesor máximo, la velocidad será máxima, y la presión mínima. De esta forma, la presión baja desde el borde de ataque hasta el punto de velocidad máxima donde alcanza un mínimo de presión, y sube desde ese punto hasta llegar al punto de remanso del borde de salida. En la primera zona, el gradiente de presiones es favorable pues empuja al fluido acelerándolo hasta la velocidad máxima, mientras que en la zona posterior el gradiente de presiones es adverso decelerando el flujo. En la zona de gradientes adversos la capa límite no siempre permanecerá adherida al obstáculo, ya que puede ocurrir que las fuerzas que actúan en contraposición al movimiento de las partículas fluidas (gradiente adverso de presiones y fuerzas viscosas) lleguen a anular la cantidad de movimiento de éstas, produciendo una inversión en el movimiento de las partículas que se conoce como recirculación, y esta es la causa principal por la que no se puede calcular la resistencia de forma.

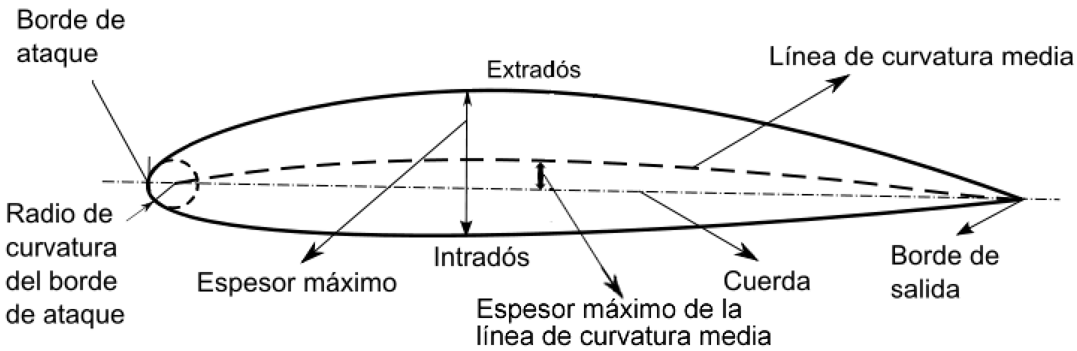

Ilustración 5: Perfil aerodinámico

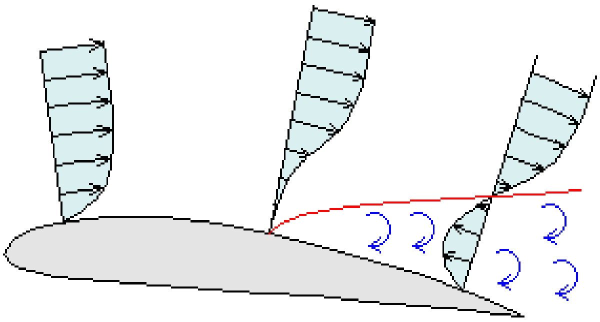

Ilustración 6: Proceso de recirculación

La ausencia de curvatura en una placa plana, implica la ausencia de un gradiente de presiones y por lo tanto de resistencia de forma, lo que permite el cálculo numérico de su capa límite al tener solo resistencia de fricción debida a la viscosidad. En el caso de cuerpos fuselados, como perfiles aerodinámicos a pequeños ángulos de ataque, los gradientes de presión adversos son muy suaves, y la capa límite se separa muy cerca del bode de salida del perfil. En estos casos, la corriente exterior que predice la teoría no viscosa (Teoría aerodinámica potencial linealizada) se aproxima bastante a la real y la única corrección necesaria a esta teoría sería la resistencia de fricción que se calcula con el problema de capa límite. Cuando el cuerpo es romo, los gradientes de presión adversos crecen, provocando el desprendimiento de la corriente en zonas próximas al punto de mínima presión, como ocurre en el caso de un cilindro circular. Detrás del punto de separación de la corriente (desprendimiento) se forma una estela turbulenta, en la que los esfuerzos viscosos son importantes. En la estela, la presión no experimenta grandes variaciones, y su valor es aproximado a la presión en el punto de separación y, por lo tanto, a la presión mínima, ya que ambos puntos (el de presión mínima y el de separación) son muy próximos en el caso de cuerpos romos. Las diferencias de presión entre las partes frontal y trasera del obstáculo son por consiguiente grandes y dan lugar a una fuerza de presión que se opone al movimiento (resistencia de forma) y que depende casi exclusivamente de la forma del obstáculo y que como se ha comentado no es calculable numéricamente. La razón estriba en que desde el punto de vista analítico no es útil dividir la corriente en dos zonas (viscosa y no viscosa), ya que la frontera de separación entre ellas es desconocida y cambia su posición con el tiempo por los efectos no estacionarios debidos al desprendimiento de la capa límite.

Cuando la capa límite esta adherida (placa plana y perfiles con geometría muy suave), la idea de Prandtl es extraordinariamente fructífera, pues permite simplificar drásticamente cada uno de los problemas en los que se divide el flujo (flujo exterior y capa límite). Su aplicación sistemática y el entendimiento de los numerosos fenómenos que es capaz de explicar unificó las hasta entonces inconexas ciencias de la Hidrodinámica Teórica, cultivada por matemáticos y físicos, y la Hidrodinámica Empírica de aplicación en la Ingeniería. Sin exagerar se puede decir que a través de la idea de prandtl y de su definición de la capa límite surge la Mecánica de fluidos moderna.

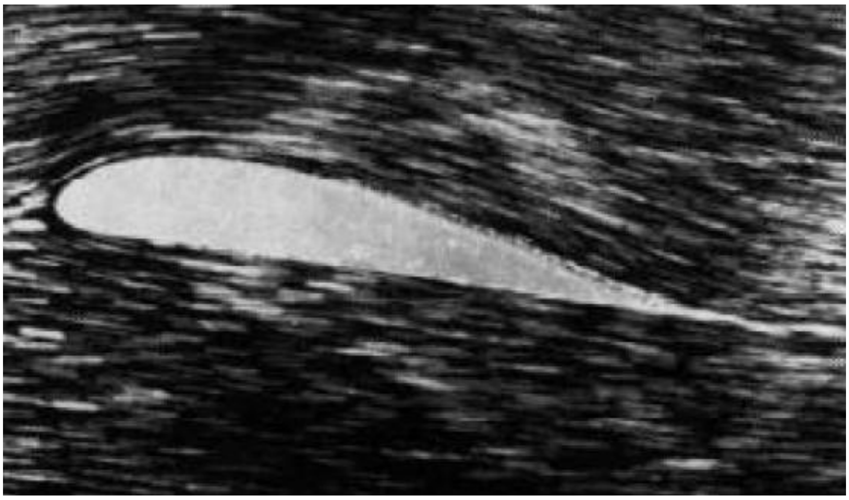

Ilustración 7: Capa límite adherida en un perfil. Luis David Horna

Ilustración 8: Capa límite desprendida en un perfil. Luis David Horna

2.2 Ecuaciones y condiciones de contorno

Por simplicidad se considerará el flujo bidimensional de un fluido compresible a lo largo de una superficie sólida. En la capa límite las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican por el hecho de que el espesor δ_L de la misma es mucho menor que la longitud L característica del movimiento a lo largo de la superficie ($\delta_L \ll L$). Las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben

$$\frac{\partial(\hat{\rho}V_x)}{\partial\hat{x}}+\frac{\partial(\hat{\rho}V_y)}{\partial\hat{y}}=0$$

$$\hat{\rho}V_x\frac{\partial V_x}{\partial\hat{x}}+\hat{\rho}V_y\frac{\partial V_x}{\partial\hat{y}}=-\frac{\partial P}{\partial\hat{x}}+\mu\left[\frac{\partial^2V_x}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial^2V_x}{\partial\hat{y}^2}\right]$$

$$\hat{\rho}V_x\frac{\partial V_y}{\partial\hat{x}}+\hat{\rho}V_y\frac{\partial V_y}{\partial\hat{y}}=-\frac{\partial P}{\partial\hat{y}}+\mu\left[\frac{\partial^2V_y}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial^2V_y}{\partial\hat{y}^2}\right]$$

$$\hat{\rho}C_pV_x\frac{\partial(T-T_p)}{\partial\hat{x}}+\hat{\rho}C_pV_y\frac{\partial(T-T_p)}{\partial\hat{y}}=V_x\frac{\partial P}{\partial\hat{x}}+k\frac{\partial^2(T-T_p)}{\partial\hat{y}^2}+\mu\left[\frac{\partial V_x}{\partial\hat{y}}\right]^2$$

Debido a que $\delta_L \ll L$, las velocidades tanto en x como en y varían mucho más rápidamente en la dirección del eje y que en la del eje x. En efecto, si U y V denotan los valores característicos de las componentes según x e y de las velocidades en la capa límite, puede estimarse que

$$\frac{\partial^2V_x}{\partial\hat{x}^2}\sim\frac{\Delta u}{(\Delta x)^2}\sim\frac{U}{L^2}\qquad y\qquad\frac{\partial^2V_y}{\partial\hat{x}^2}\sim\frac{\Delta v}{(\Delta x)^2}\sim\frac{V}{L^2}$$

Donde se ha supuesto que las velocidades en x e y varían alo largo del eje x del orden de ellas mismas (es decir, del orden de sus magnitudes características U y V) en distancias del orden L, mientras que

$$\frac{\partial^2V_x}{\partial\hat{y}^2}\sim\frac{\Delta u}{(\Delta y)^2}\sim\frac{U}{{\delta_L}^2}\qquad y\qquad\frac{\partial^2V_y}{\partial\hat{y}^2}\sim\frac{\Delta v}{(\Delta y)^2}\sim\frac{V}{{\delta_L}^2}$$

De modo que

$$\frac{\partial^2V_x}{\partial\hat{x}^2}\ll\frac{\partial^2V_x}{\partial\hat{y}^2}\qquad y\qquad\frac{\partial^2V_y}{\partial\hat{x}^2}\ll\frac{\partial^2V_y}{\partial\hat{y}^2}$$

En tanto que $\delta_L \ll L$. Por otra parte, las variaciones transversales de presión $\Delta_y P\sim\rho V^2$ son pequeñas frente a las longitudinales $\Delta_x P\sim\rho U^2$. En efecto, de la ecuación de continuidad se tiene

$$\frac{V}{U}\sim\frac{\delta_L}{L}\ll 1$$

Que muestra que el movimiento de la capa límite es casi-unidireccional y que

$$\frac{\Delta_y P}{\Delta_x P}\sim\left(\frac{V}{U}\right)^2\sim\left(\frac{\delta_L}{L}\right)^2\ll 1$$

Esto es, que la ecuación muestra que las variaciones de presión según el eje y son nulas salvo errores del orden de $(\delta_L/L)^2$. Si la presión no varía con la distancia y a la pared su valor debe venir dado por el valor de la presión exterior fuera de la capa límite. Podría relacionarse la presión con la velocidad exterior gracias a la ecuación de Bernouilli

$$P_e+\frac{1}{2}\rho {u_e}^2=cte$$

Finalmente las ecuaciones del movimiento en la capa límite son

$$\frac{\partial(\hat{\rho}V_x)}{\partial\hat{x}} + \frac{\partial(\hat{\rho}V_y)}{\partial\hat{y}} = 0$$

$$\hat{\rho}V_x\frac{\partial V_x}{\partial\hat{x}} + \hat{\rho}V_y\frac{\partial V_x}{\partial\hat{y}} = -\frac{\partial P_e}{\partial\hat{x}} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial\hat{y}^2}\right]$$

$$\hat{\rho}C_pV_x\frac{\partial(T-T_p)}{\partial\hat{x}} + \hat{\rho}C_pV_y\frac{\partial(T-T_p)}{\partial\hat{y}} = V_x\frac{\partial P}{\partial\hat{x}} + k\frac{\partial^2(T-T_p)}{\partial\hat{y}^2} + \mu\left[\frac{\partial V_x}{\partial\hat{y}}\right]^2$$

Se tienen unas ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, no lineales, que permiten el cálculo de las velocidades en x e y así como de la temperatura. Nótese que en caso de no ser una placa plana y desaparecer el gradiente de presiones, mediante la ecuación de Bernouilli aparece un término en función de la velocidad de la corriente exterior, y la resolución de la capa límite implica resolver primero el problema aerodinámico exterior de la corriente ideal a lo largo de la superficie u objeto considerado. Se hace notar también que en el desarrollo anterior no se ha considerado que la viscosidad y la conductividad térmica del fluido dependen en realidad de la temperatura.

La resolución de las ecuaciones en este texto se va a llevar a cabo para una placa plana, y se busca estudiar el caso más real posible, luego se incorpora la dependencia con la temperatura de la viscosidad y la conductividad térmica. Para este caso no es necesario establecer la temperatura de la pared como referencia. Las ecuaciones resultantes son las conocidas en la literatura como Boundary-Layer Equations on a plate.

$$\frac{\partial(\hat{\rho}V_x)}{\partial\hat{x}} + \frac{\partial(\hat{\rho}V_y)}{\partial\hat{y}} = 0$$

$$\hat{\rho}V_x\frac{\partial V_x}{\partial\hat{x}} + \hat{\rho}V_y\frac{\partial V_x}{\partial\hat{y}} = \frac{\partial}{\partial\hat{y}}\left[\hat{\mu}\frac{\partial V_x}{\partial\hat{y}}\right]$$

$$\hat{\rho}C_pV_x\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{x}} + \hat{\rho}C_pV_y\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{y}} = \frac{\partial}{\partial\hat{y}}\left[\hat{k}\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{y}}\right] + \hat{\mu}\left[\frac{\partial V_x}{\partial\hat{y}}\right]^2$$

Como condiciones de contorno del sistema se impone lo siguiente:

1. Condición de velocidad nula en la pared y=0 (Condición de adherencia)

$$V_x(x,0) = V_y(x,0) = 0$$

Cabe destacar que esta condición excluye el estudio de capa límite con succión o soplado a lo largo de obstáculos con superficie porosa, en cuyo caso la condición de la velocidad en y debe sustituirse por $V_y(x,0) = V_s(x)$ siendo V_s la velocidad de succión o soplado

2. Condición de acoplamiento con la corriente exterior. Nótese que y debe ser grande frente a δ_L pero pequeño frente a L.

$$\lim_{y\to\infty} V_x(x,y) = U_\infty$$

Obsérvese que la condición implica también $(\partial V_x/\partial y) = 0$ cuando $y \to \infty$ que demuestra que, como debería ocurrir, los esfuerzos de viscosidad son nulos en la región de acoplamiento con el exterior.

3. La ecuación de la cantidad de movimiento es parabólica y, por lo tanto, para comenzar la integración es necesario especificar un perfil inicial de velocidades en alguna estación $x = x_o$ que se tomara como estación de partida para integrar aguas abajo

$$V_x(x_o\,, y) = V_{xo}(y)$$

Como observación final conviene decir que las condiciones de contorno anteriores no garantizan que $V_y(x, \infty) = 0$ como debería ocurrir dado que la velocidad normal en el exterior es nula ($v_e \sim 0; u_e \sim U_\infty$). No obstante, desde el punto de vista práctico, esta objeción carece de interés ya que la velocidad normal es un infinitésimo de U. Si se quiere una mejor aproximación puede procederse por iteración teniendo en cuenta el efecto de la capa límite sobre la corriente exterior y resolviendo ésta de nuevo con la condición de que la velocidad normal sobre el obstáculo sea ahora igual a la velocidad $V_y(x, \infty)$en el infinito de la capa límite y no nula, como se prescribió en primera instancia.

2.3 Métodos numéricos

El ejemplo más simple de aplicación de las ecuaciones y condiciones de contorno de la capa límite es para una placa plana, como ya se ha expresado, dado que desaparece el gradiente de presiones debido a que la velocidad de la corriente exterior es constante. Históricamente fue también el primer ejemplo que ilustro la teoría de Prandtl, y fue estudiado en detalle por Blasius en su tesis doctoral el Gottinga en 1908. Para el caso de placa plana, se admite una solución de semejanza, que mediante una serie de cambios de variable permite reducir el problema original de ecuaciones en derivadas parciales a un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En flujos sobre superficies curvas la distribución de presiones no es constante, y el sistema no lineal de ecuaciones y condiciones de contorno no admite por lo general una solución de semejanza siendo necesario por lo tanto abordar de una forma numérica el problema.

Debido a la gran potencia computacional existente hoy en día, la integración numérica del sistema de derivadas parciales puede realizarse sin gran esfuerzo mediante algunos de los métodos clásicos de integración de ecuaciones como el método de las líneas o el método de las diferencias finitas.

El método de las líneas es un método eficiente y fácil de implementar para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico como las que aparecen en flujos en capas límite. Sin embargo, para la resolución turbulencia requiere de demasiadas líneas y gasto computacional motivo por el cual se busca la alternativa del método de diferencias finitas para la resolución de la capa límite que se puede implementar para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. A diferencia del anterior este método no permite obtener mediante la discretización un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya integración proporciona los valores $u_j(x) = u(x, y_j)$ y de $\theta_j(x) = \theta(x, y_j)$ sino que esos valores se obtienen de un sistema matricial formado por ecuaciones algebraicas gracias a otro tipo de discretización. Se comienza adimensionalizando

$$V_x = U_\infty\, u;\ V_y = U_\infty\, v;\ \hat{x} = Lx; \hat{y} = Ly; \hat{T} = T\, T_\infty; \hat{\mu} = \mu\, \mu_\infty; \hat{\rho} = \rho_\infty \rho$$

La viscosidad se modela a través de la teoría de Sutherland para la viscosidad

$$\mu = \frac{\hat{\mu}}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^\omega \left[\frac{T_\infty + S_1}{T + S_1}\right]^\sigma ; \ \omega = \frac{3}{2}; \ \sigma = 1;$$

Para una placa plana las ecuaciones son

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y}\left[k \frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\gamma - 1}{Re} M_\infty{}^2 \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2$$

Nótese que el adimensionalizar la componente vertical de la velocidad y con las variables típicas longitudinales permite la aparición explicita del número de Reynolds lo que facilita el manejo de las ecuaciones frente a una transición a la turbulencia. Nótese también el diferente rango de valores de θ que permite hacer una representación gráfica más intuitiva.

Para realizar este método se realiza una discretización del dominio $x \geq x_o$, $y \geq 0$ en un número suficiente de líneas paralelas y perpendiculares al eje x: $y = y_1, \dots, y_j, \dots y_N$; $x = x_1, \dots, x_j, \dots x_N$ separadas una pequeña distancia h_y y h_x constantes. Mediante dicha discretización se obtiene un sistema matricial cuya resolución proporciona los valores $u_j(x) = u(x, y_j)$ y de $\theta_j(x) = \theta(x, y_j)$. Mientras que las soluciones analíticas proporcionan valores en todos los puntos, este método al igual que todos los métodos numéricos solo proporciona soluciones en los puntos nodales, que son los puntos en los que se interseccionan los dos sistemas de líneas

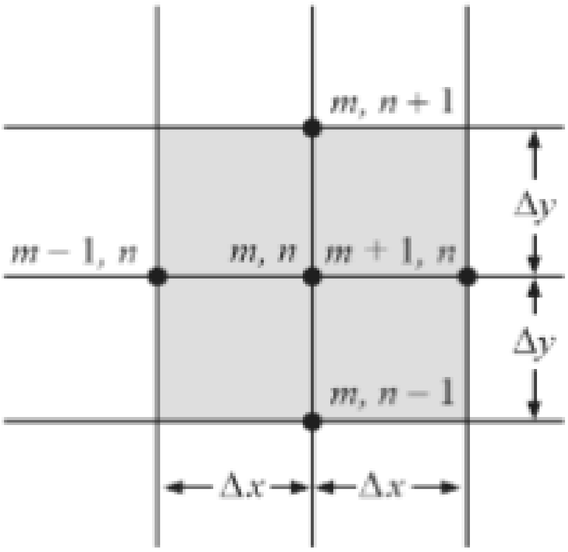

Ilustración 9: Mallado

A partir de la ecuación de continuidad:

$$\rho v = \rho(0)v(0) - \int_0^H \left[\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right] dy$$

Donde el primer sumando es 0 por $v(0)$

De la ecuación conservación de movimiento:

$$\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})\frac{u_j(x_n) - u_j(x_{n-1})}{h_x} + \rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})\frac{u_{j+1}(x_n) - u_{j-1}(x_n)}{2h_y}$$
$$= \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial \mu}{\partial y}\bigg|_j (x_{n-1})\frac{u_{j+1}(x_n) - u_{j-1}(x_n)}{2h_y} + \mu_j(x_{n-1})\frac{u_{j+1}(x_n) - 2u_j(x_n) + u_{j-1}(x_n)}{{h_y}^2}\right]$$

Buscando una ecuación del tipo:

$$a_j u_{j-1}(x_n) + b_j u_j(x_n) + c_j u_{j+1}(x_n) = r_j$$

$$u_{j-1}(x_n)\left[-\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{2h_y} - \frac{\mu_j(x_{n-1})}{Re\ {h_y}^2} + \frac{1}{Re\ 2h_y}\frac{\partial \mu}{\partial y}\bigg|_j (x_{n-1})\right]$$
$$+ u_j(x_n)\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})}{h_x} + \frac{2\mu_j(x_{n-1})}{Re\ {h_y}^2}\right]$$
$$+ u_{j+1}(x_n)\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{2h_y} - \frac{\mu_j(x_{n-1})}{Re\ {h_y}^2} - \frac{1}{Re\ 2h_y}\frac{\partial \mu}{\partial y}\bigg|_j (x_{n-1})\right]$$
$$= \rho_j(x_{n-1})\frac{\left[u_j(x_{n-1})\right]^2}{h_x}$$

Con lo que se obtiene que:

$$a_j = \left[-\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{2h_y} - \frac{\mu_j(x_{n-1})}{Re\ {h_y}^2} + \frac{1}{Re\ 2h_y}\frac{\partial \mu}{\partial y}\bigg|_j (x_{n-1})\right];$$

$$b_j = \left[\frac{\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})}{h_x} + \frac{2\mu_j(x_{n-1})}{Re\ {h_y}^2}\right];$$

$$c_j = \left[\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{2h_y} - \frac{\mu_j(x_{n-1})}{Re\ {h_y}^2} - \frac{1}{Re\ 2h_y}\frac{\partial \mu}{\partial y}\bigg|_j (x_{n-1})\right];$$

$$r_j = \rho_j(x_{n-1})\frac{\left[u_j(x_{n-1})\right]^2}{h_x}$$

Las condiciones de contorno son:

$$a(1) = a(M) = 0; b(1) = b(M) = 1; c(1) = c(M) = 0; r(1) = 0; r(M) = 1;$$

La ecuación de la energía se expresa como:

$$\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})\frac{T_j(x_n)-T_j(x_{n-1})}{h_x}+\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})\frac{T_{j+1}(x_n)-T_{j-1}(x_n)}{2h_y}$$
$$=\frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\left[\left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_j(x_{n-1})\frac{T_{j+1}(x_n)-T_{j-1}(x_n)}{2h_y}\right.$$
$$\left.+k_j(x_{n-1})\frac{T_{j+1}(x_n)-2T_j(x_n)+T_{j-1}(x_n)}{h_y{}^2}\right]$$
$$+\frac{\gamma-1}{Re}M_\infty{}^2\,\mu\left[\frac{u_{j+1}(x_n)-u_{j-1}(x_n)}{2h_y}\right]^2$$

Buscando una ecuación del tipo:

$$d_jT_{j-1}(x_n)+e_jT_j(x_n)+f_jT_{j+1}(x_n)=h_j$$

$$T_{j-1}(x_n)\left[-\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{2h_y}-\frac{k_j(x_{n-1})}{Re\ Pr\ h_y{}^2}+\frac{1}{Re\ Pr\ 2h_y}\left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_j(x_{n-1})\right]$$
$$+T_j(x_n)\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})}{h_x}+\frac{2k_j(x_{n-1})}{Re\ Pr\ h_y{}^2}\right]$$
$$+T_{j+1}(x_n)\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{2h_y}-\frac{k_j(x_{n-1})}{Re\ Pr\ h_y{}^2}-\frac{1}{Re\ Pr\ 2h_y}\left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_j(x_{n-1})\right]$$
$$=\rho_j(x_{n-1})\frac{T_j(x_{n-1})}{h_x}u_j(x_{n-1})+\frac{\gamma-1}{Re}M_\infty{}^2\,\mu\left[\frac{u_{j+1}(x_n)-u_{j-1}(x_n)}{2h_y}\right]^2$$

Con lo que se obtiene que:

$$d_j=\left[-\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{2h_y}-\frac{k_j(x_{n-1})}{Re\ Pr\ h_y{}^2}+\frac{1}{Re\ Pr\ 2h_y}\left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_j(x_{n-1})\right];$$

$$e_j=\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})}{h_x}+\frac{2k_j(x_{n-1})}{Re\ Pr\ h_y{}^2}\right];$$

$$f_j=\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{2h_y}-\frac{k_j(x_{n-1})}{Re\ Pr\ h_y{}^2}-\frac{1}{Re\ Pr\ 2h_y}\left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_j(x_{n-1})\right];$$

$$h_j=\rho_j(x_{n-1})\frac{T_j(x_{n-1})}{h_x}u_j(x_{n-1})+\frac{\gamma-1}{Re}M_\infty{}^2\,\mu\left[\frac{u_{j+1}(x_n)-u_{j-1}(x_n)}{2h_y}\right]^2$$

Las condiciones de contorno dependen del caso de resolución que puede ser adiabático o de temperatura interpuesta. En el caso adiabático se tiene

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y_1}=0\rightarrow T_1-T_2=0$$

Las condiciones de contorno quedan como

$$d(1)=d(M)=0;e(1)=e(M)=1;f(1)=-1;f(M)=0;h(1)=0;h(M)=1;$$

En el caso de temperatura interpuesta, se debe fijar que la temperatura partícula que está tocando a la pared debe estar a la misma temperatura que la pared del sólido luego

$$T(y_1) = T_p$$

Luego las condiciones de contorno quedan como

$$d(1) = d(M) = 0; e(1) = e(M) = 1; f(1) = f(M) = 0; h(1) = \frac{T_p}{T_\infty}; h(M) = 1;$$

Una vez obtenida las dos ecuaciones matriciales la resolución es muy simple formando las denominadas matrices tridiagonales. En el algebra clásica se denomina matriz banda a aquella que tiene ocupada la diagonal principal y alguna de sus paralelas. Un tipo de matriz banda es la matriz tridiagonal que es aquella que solo tiene ocupara la diagonal principal y las diagonales adyacentes tanto superior como inferior. Son matrices muy utilizadas en los métodos numéricos para todo tipo de resoluciones, sobre todo para los casos en que se aproximan ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias finitas. Estas matrices tienen sus propios métodos de factorización como el algoritmo de Crout, mucho más eficiente que los métodos clásicos al considerar la tridiagonalidad de la matriz. En el caso de una capa límite son vitales, ya que permiten resolver los sistemas encontrados

$$A \cdot \vec{u} = \vec{r};\ C \cdot \vec{T} = \vec{h};$$

Las matrices tridiagonales tienen la siguiente forma:

$$A = \left[\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & & 0 & \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & & & \\ & & & & \ddots & c_{j-3} & 0 \\ & & 0 & & a_{j-2} & b_{j-2} & c_{j-2} \\ & & & & 0 & a_{j-1} & b_{j-1} \end{bmatrix}\right]$$

$$C = \left[\begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & 0 & & & \\ d_2 & e_2 & f_2 & 0 & & 0 & \\ 0 & d_3 & e_3 & f_3 & & & \\ 0 & 0 & d_4 & e_4 & & & \\ & & & & \ddots & f_{j-3} & 0 \\ & & 0 & & d_{j-2} & e_{j-2} & f_{j-2} \\ & & & & 0 & d_{j-1} & e_{j-1} \end{bmatrix}\right]$$

Como se aprecia en la forma, las matrices con las que se resuelven los sistemas son tridiagonales y además dispersas, debido fundamentalmente a que tienen más elementos nulos que no nulos, lo que hay que tener en cuenta en la programación MATLAB usando para la creación de las matrices la instrucción sparse que permite a MATLAB realizar las instrucciones solo con los términos no nulos.

2.4 Capa límite compresible laminar

Con lo expuesto anteriormente es posible resolver la capa límite bajo unas condiciones de compresibilidad y para un objeto como la placa plana. El tipo de resolución como se ha expresado anteriormente depende de la consideración de flujo adiabático o de un flujo con una temperatura impuesta en la pared, lo cual modifica las condiciones de contorno para el sistema matricial que resuelve la temperatura.

2.4.1 Caso de pared adiabática

Primeramente se analiza el caso de pared adiabática. Una pared aislada se aproxima bastante a esa idea. Una pared adiabática consiste en que el fluido que está realizando trabajo no intercambia calor con la pared. Se analizan los siguientes casos basados en el libro de Schlichting:

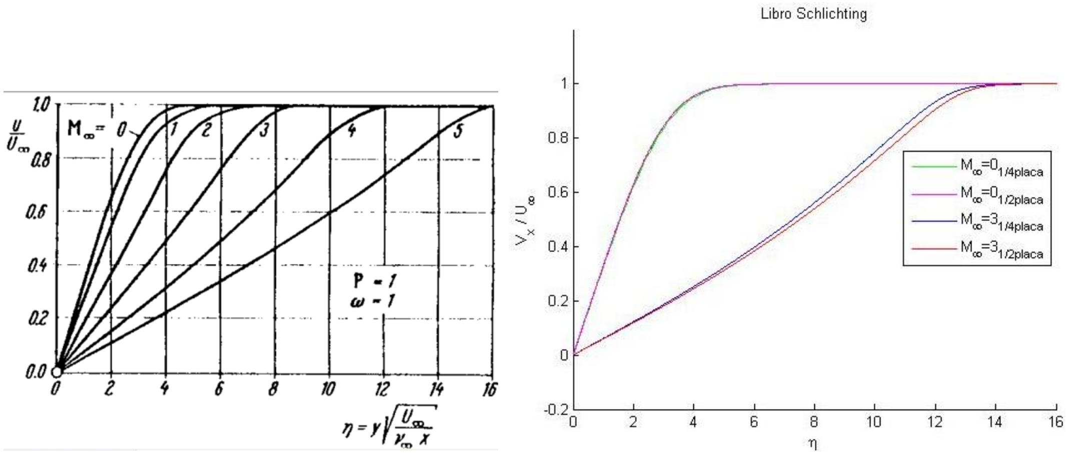

Ilustración 10: Comparación entre la gráfica mostrada por Schlichting en su libro y los resultados de la programación matlab con los datos de Schlichting

En la figura anterior se puede apreciar en primera estancia la gráfica que expone Schlinchting para el caso adiabático en su libro Boundary Layer Theory que se toma como referencia de cálculo. A continuación al lado se muestra la gráfica obtenida por matlab del mismo caso que es Pr=1 , $\omega = 1 \; y \; \sigma = 0$. Se aprecia como se consigue reproducir la gráfica a la perfección de forma que para cada Mach elegido ($M_\infty = 0 \; y \; M_\infty = 3$) se representan dos etapas distintas de x (que se corresponden con un cuarto y un medio de la placa) que colapsan en una línea al igual que en los resultados de Schlichting en el caso de $M_\infty = 0$ y que llegan a 1 para el mismo valor $\eta = 4$ que la gráfica original. En el caso de $M_\infty = 3$ no se produce un colapso del todo y numéricamente muestra un η un poco mayor al de la gráfica de Schlichting. Con todo esto puede concluirse que el programa matlab representa francamente bien la gráfica de Schlichting.

A continuación en la gráfica de la izquierda se muestra el caso de Pr=0.73 y $\omega = 1, \sigma = 0$, que busca comparar el modelo de Schlichting (sin incorporar la ley de Sutherland) con unos valores de Prandtl del aire. Se encuentra que para las dos etapas representadas de x (un cuarto de la placa y mitad de la placa) para el caso de $M_\infty = 0$ de nuevo ambas etapas colapsan en una línea y llegan al valor de 1 (velocidad de corriente exterior) en un $\eta = 4$, igual que en el caso de Schlichting. Sin embargo, para el caso de $M_\infty = 3$ el colapso de las dos etapas en una línea no es tal, ya que hay una pequeña separación, y la llegada al valor de 1 se adelante a

$\eta = 13$, de forma que se puede apreciar pequeñas diferencias entre considerar un Pradtl de aire o de 1 con el mismo modelo de viscosidad y conductividad térmica.

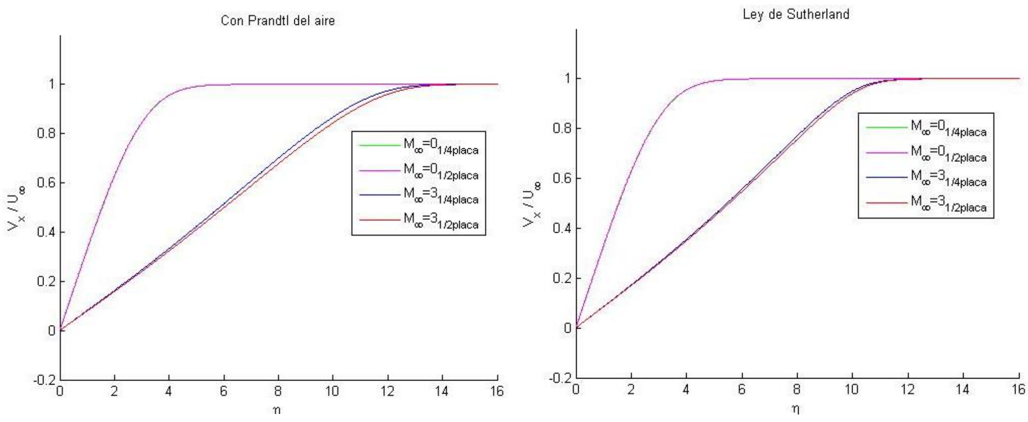

Ilustración 11: A la izquierda se encuentra la gráfica con el modelo de Schlichting y Prandtl del aire. A la derecha se usa el modelo de viscosidad de Sutherland y los valores de Schlichting

La gráfica mostrada a la derecha es para el caso de Pr=1 y $\omega = 3/2\,, \sigma = 1$ (Ley de Sutherland para la viscosidad). Se busca analizar como afecta el incluir la temperatura en el modelo de viscosidad de conductividad térmica. Se aprecia de nuevo que en el caso de $M_\infty = 0$ las líneas colapsan y la llegada al exterior es para un $\eta = 4$. En el caso de $M_\infty = 3$, prácticamente se produce un colapso ya que las líneas están muy juntas. También se adelanta la llegada a 1 hasta un $\eta = 11$. Se pueden apreciar pues pequeñas diferencias entre emplear un modelo sin dependencia de la temperatura o con dependencia de la temperatura para un mismo Prandtl.

En la siguiente ilustración en la gráfica mostrada a la izquierda se ve el caso real de un gas, esto es Pr=0.73 y $\omega = 3/2\,, \sigma = 1$. Se considerá pues un gas con el valor de Prandtl del aire y se considera la dependencia de la temperatura con la Ley de Sutherland. De nuevo para el caso de $M_\infty = 0$ el resultado es invariante. Para el caso de $M_\infty = 3$ también se puede considerar que hay colapso por muy poco de las distintas etapas y la llegada a 1 hasta un η que está próximo a 11. No cambia mucho respecto al caso anterior luego se concluye que el Prandtl no afecta notoriamente.

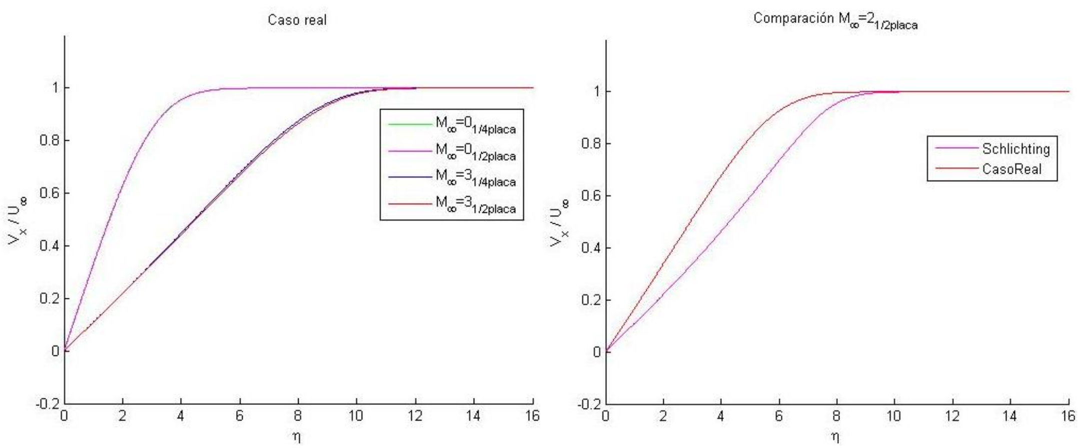

Ilustración 12: A la izquierda el caso real. A la derecha la comparación entre el caso de Schlichting y el caso real.

La última gráfica busca mostrar en una imagen la diferencia entre el modelo mostrado por Schlichting en su libro y el caso real, esto es la diferencia entre la primera pareja de gráficas y el caso real, ya que a priori no hay mucha diferencia. Para ello se resuelve para un mismo Mach ($M_\infty = 2$) y en una misma etapa (la mitad de la placa) ambos modelos, de forma que se aprecia como en el caso real, con un Prandtl del aire y la ley de Sutherland para mostrar la dependencia de la viscosidad con la temperatura, la llegada a 1 se produce para un η similar que para el caso de la aproximación de Schlichting, aunque quizás en el modelo de Schlichting se tarda algo más. Sin embargo, se ve como la forma es distinta, y en el trayecto la línea del caso real queda por encima de la de Schichting.

Para el caso de la temperatura se puede ver en la primera gráfica la representación de Schlichting en su libro y al lado, la gráfica que se extrae de Matlab del mismo caso que es Pr=1 y $\omega = 1, \sigma = 0$. La gráfica a priori es la misma y de nuevo en este caso para un $M_\infty = 3$ no acaba de colapsar posiblemente por errores numéricos.

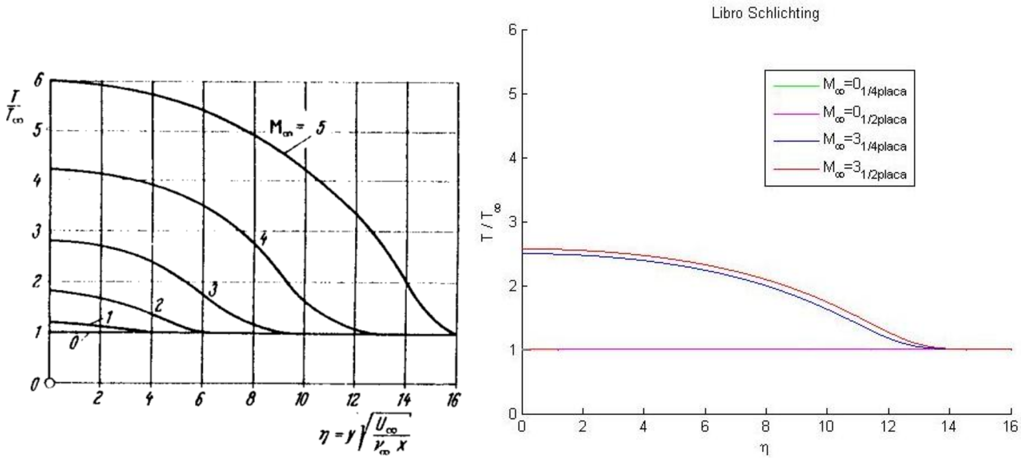

Ilustración 13: A la izquierda gráfica del libro de Schlichting y a la derecha su representación en Matlab

En la pareja siguiente a la izquierda se tiene el caso de Pr=0.73 y $\omega = 1, \sigma = 0$. Al igual que en el caso de la velocidad para el $M_\infty = 0$ las gráficas colapsan pero no para $M_\infty = 3$ que alcanza el equilibrio en torno a $\eta = 14$. En la derecha se representa el caso de Pr=1 y $\omega = 3/2, \sigma = 1$ (Ley de Sutherland para la viscosidad). Se aprecia de nuevo el colapso del caso de $M_\infty = 0$ y como en el caso de $M_\infty = 3$ no colapsa. Se llega a 1 en torno a $\eta = 12$.

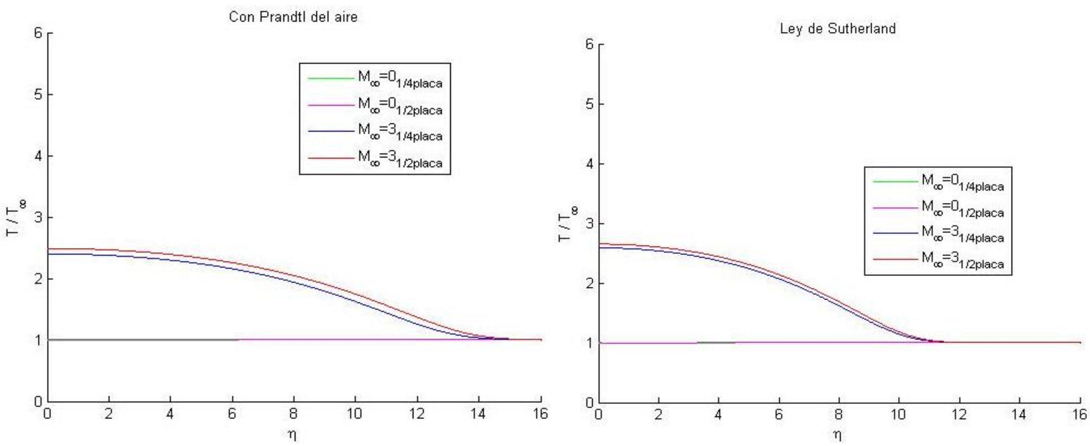

Ilustración 14:A la izquierda el caso del modelo de Schlchting con el Prandtl del aire. A la derecha los valores de Schlchting con la ley de Sutherland.

A la izquierda de la siguiente pareja de nuevo se representa el caso real, esto es Pr=0.73 y $\omega = 3/2\,, \sigma = 1$ y en la derecha se compara con el primer caso. De nuevo ambos modelos llegan más o menos a la misma solución de η aunque el de Schlinchting de nuevo se puede considerar un poco mayor, pero la forma cambia dejando el modelo de Schlichting siempre por encima.

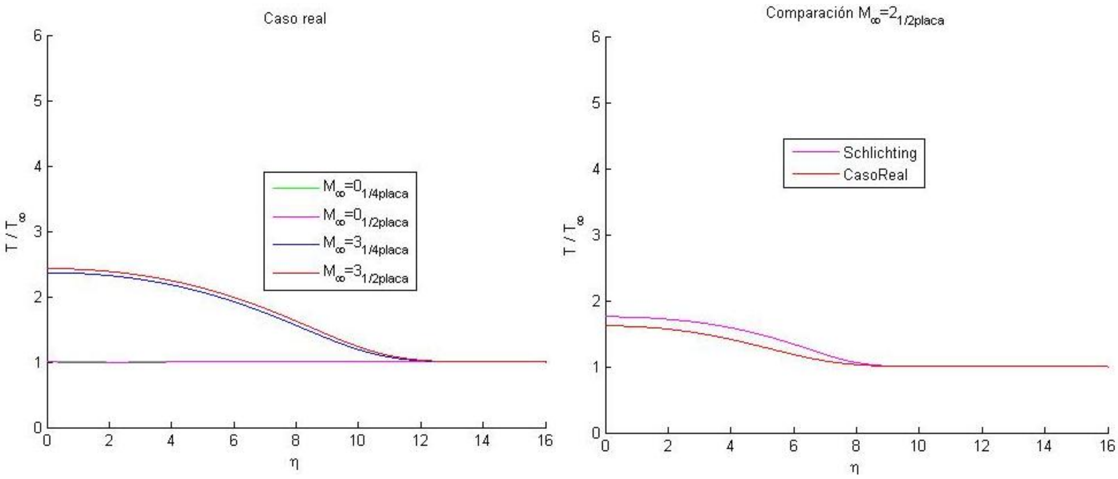

Ilustración 15: A la izquierda el caso real. A la derecha la comparación entre Schlichting y el caso real.

La conclusión que se extrae de estos dos análisis es que el modelo de Schlichting representa bastante bien la realidad, dado que aunque no capta del todo bien la forma de la curva si se aproxima bastante a ella y además se aproxima bastante al resultado real. En cuanto a los parámetros, se puede observar como lo que más influye es si el modelo de viscosidad es con temperatura(Ley de Sutherland) o no, ya que un cambio en el Prandtl no tiene mucho efecto.

2.4.2 Caso de temperatura de pared impuesta

En este caso se impone una temperatura a la pared que será transmitida al fluido. Sería similar a un sistema de calefacción en el que la pared permanece a una temperatura constante. Comparando el código con lo expuesto por Schlichting en la primera gráfica se muestra de nuevo la gráfica que muestra Schlichting en su libro y justo a su lado la gráfica que sale del matlab para el mismo caso. Se aprecia como capta fielmente la realidad. El caso que se analiza por parte de Schlichting es el de Pr=0.7, temperatura de la pared igual a la del infinito y $\omega = 1, \sigma = 0$, es decir, sin tener en cuenta la ley de Sutherland.

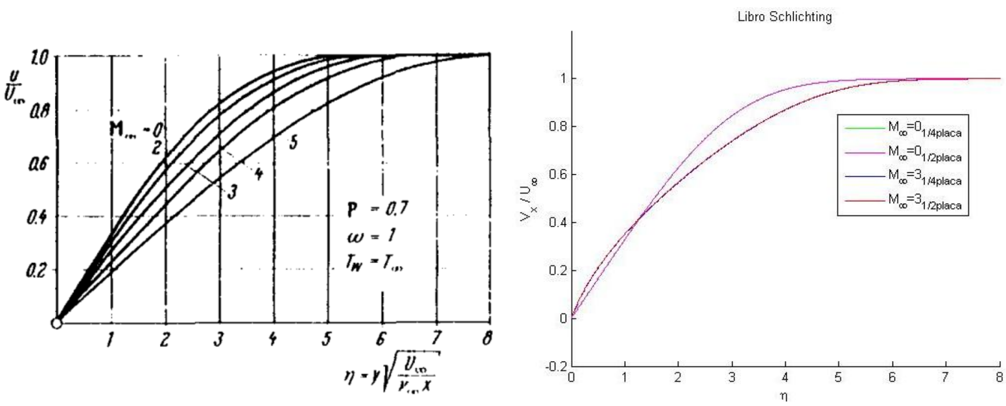

Ilustración 16: Comparación ente el caso que muestra Schlichting en su libro y lo mostrado por Matlab con sus datos.

La siguiente pareja es el caso real de de Pr=0.7, temperatura de la pared igual a la del infinito y $\omega = 3/2\,, \sigma = 1$, considerando la dependencia de la viscosidad con la temperatura con la ley de Sutherland. En la gráfica izquierda se expone simplemente para una misma etapa los distintos Mach y para la cuarta se cogen varias etapas x (un cuarto y un medio de la placa) aunque colapsan en una misma línea tal y como le ocurre a Schlichting.

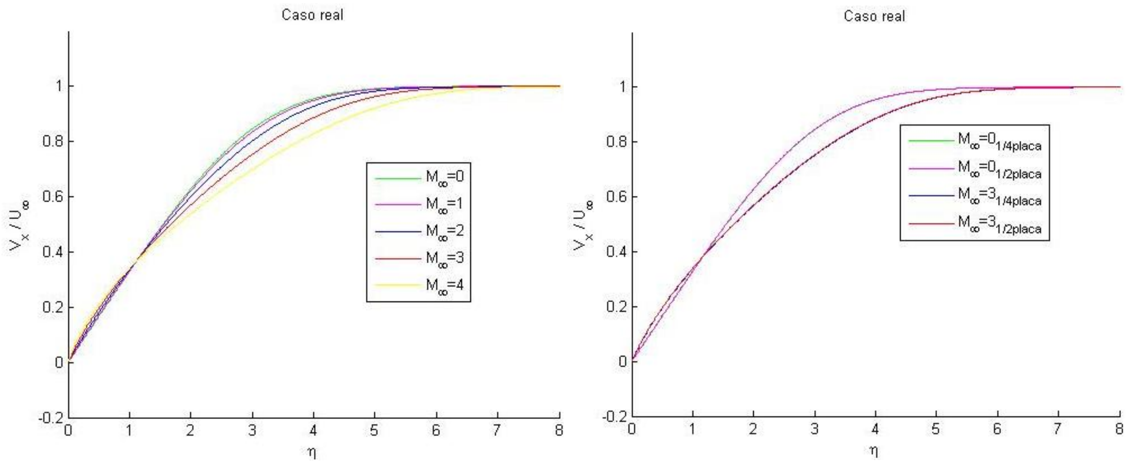

Ilustración 17: Caso real para temperatura impuesta en la pared.

En las dos últimas gráficas de nuevo se trata de comparar el modelo propuesto con Schlichting con el modelo real. Se aprecia en la izquierda como la diferencia entre ambos no es notoria, lo que implica que la dependencia de la viscosidad con la temperatura no parece ser muy importante a la hora de establecer un modelo. Si se analiza para el caso en que si hay dependencia con la temperatura cambiando el Prandtl se obtiene la última gráfica donde si se aprecia cambio.

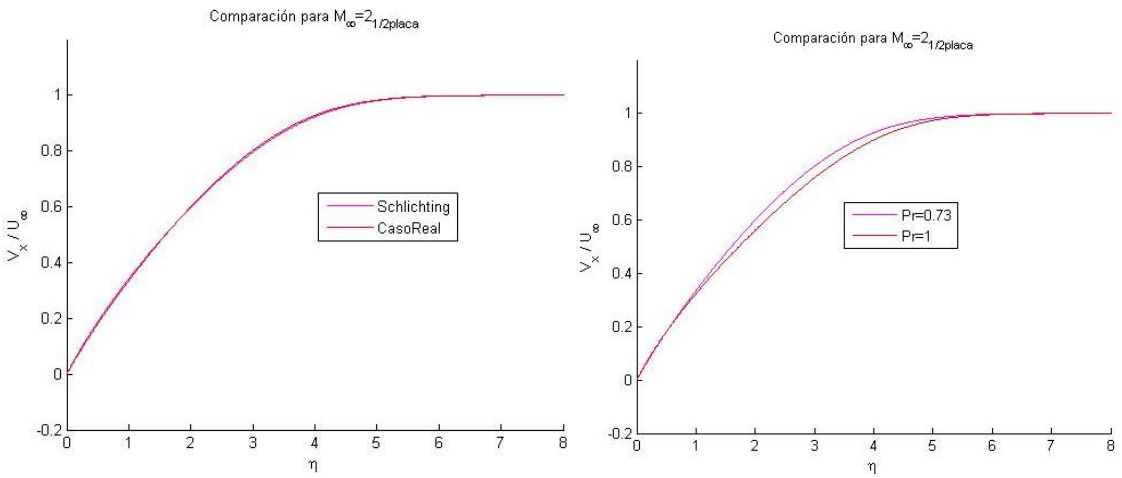

Ilustración 18: A la izquierda la comparación del caso real y el caso mostrado por Schlichting. A la derecha la comparación cambiando el Prandtl.

Para el caso de las temperaturas se puede hacer una análisis similar al de velocidades, primeramente se expone el caso de Schlichting y su comparación con la programación matlab.

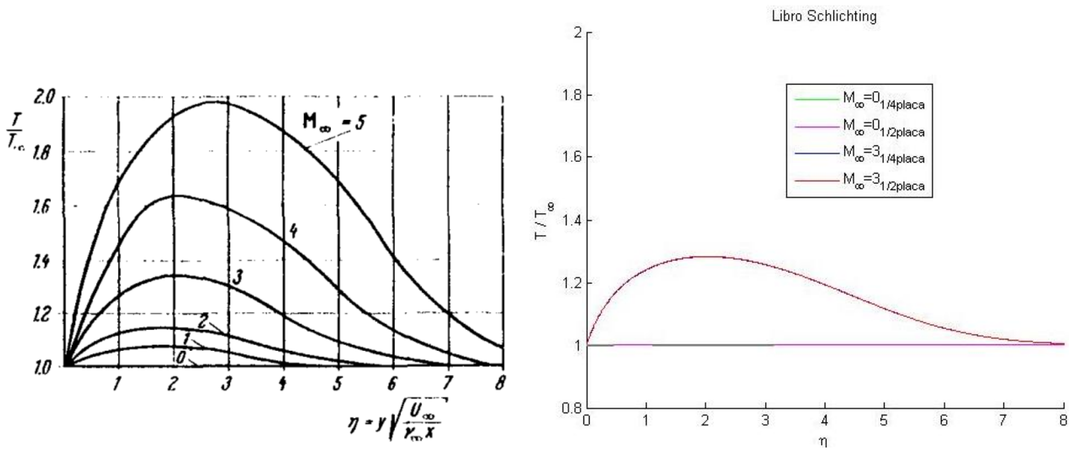

Ilustración 19: Comparación de Schlichting con la programación matlab

Lo expuesto en las dos primeras gráficas es el caso de Pr= 0.7, temperatura de la pared igual a la del infinito y $\omega = 1, \sigma = 0$, es decir, sin tener en cuenta la ley de Sutherland. En la primera gráfica se muestra el caso expuesto por Schlichting en su libro y en el segundo su representación en Matlab.

En la siguiente pareja se observa el caso real, que cambia respecto al anterior en la inclusión de la ley de Sutherland $\omega = 3/2\,, \sigma = 1$. De nuevo se muestra primero para una etapa común lo que ocurre en distintos Mach y posteriormente se muestran varias etapas y se ve como colapsan al igual que ocurre en el caso de Schlchting.

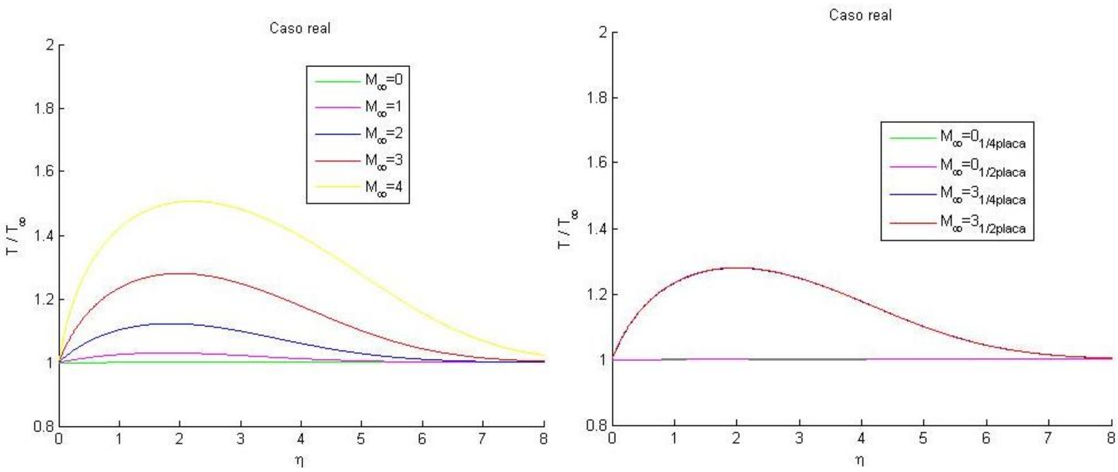

Ilustración 20: Caso real. A la izquierda una etapa para varios Mach. A la derecha misma representación que Schlichting.

En las dos últimas gráficas se busca una comparación entre el caso real y el caso propuesto por Schlichting. La comparación precisa de ambos modelos y se dan en la gráfica izquierda con idénticos resultados, lo que implica de nuevo que la dependencia con la temperatura de la viscosidad no es muy importante. En la sexta se busca mover el Prandtl viendo como si hay cambio sustancial.

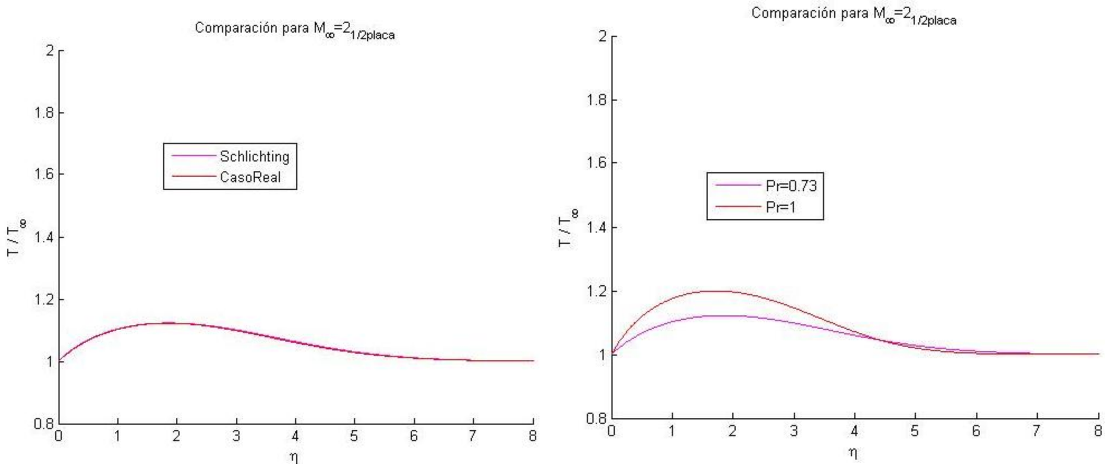

Ilustración 21: A la izquierda comparación entre lo representado por Schlichting en su libro y el caso real. A la derecha se muestra el cambio de la gráfica con el cambio de Prandtl

La conclusión de este análisis es que para una temperatura impuesta el modelo de viscosidad con dependencia de temperatura no es muy importante, al contrario que el número de Prandtl. Justo al contrario ocurre en el caso adiabático donde aparentemente el incluir o no la ley de Sutherland tendría más repercusión que el número de Prandtl escogido y quizás por eso en el caso adiabático Schlichting trabaja con un Prandtl de 1 y en el segundo con un Prandtl de 0.7 más cerca de un gas. Otra conclusión reseñable se da en que las gráficas obtenidas con Matlab se ajustan mucho mejor a las obtenidas por Schlichting en el caso de temperatura impuesta que en el caso adiabático, lo que parece indicar que el desarrollo numérico usado es una mejor aproximación para el caso de temperatura impuesta.

Por otro lado también se hace notar que en los casos reales tanto para el caso adiabático como para el caso de temperatura impuesta se produce prácticamente el colapso de las etapas en una línea, al igual que propone Schlichting en su teoría. Para más énfasis se muestra la diferencia en el caso adiabático entre la gráfica que no da colapso(la que da Matlab con los valores de Schlichting) y la que si(el caso real):

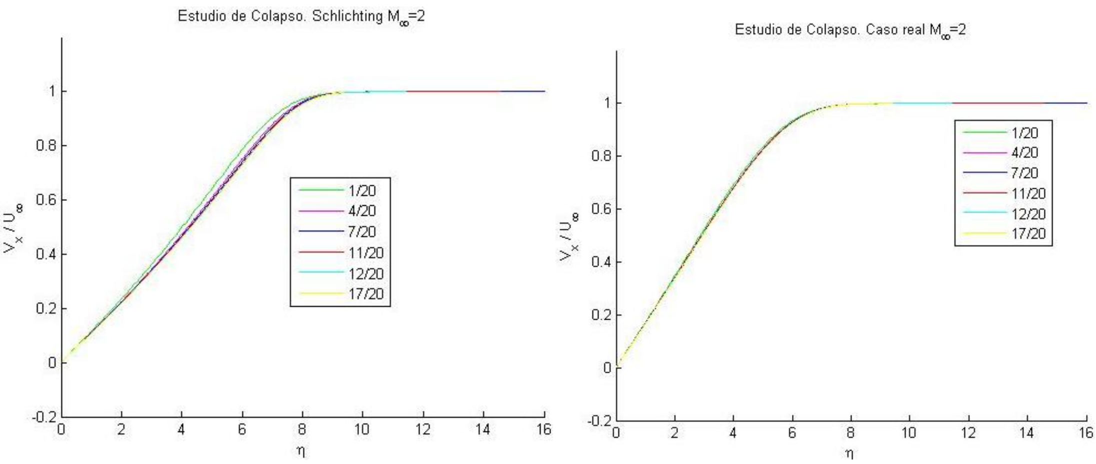

Ilustración 22: Estudio de colapso con velocidades.

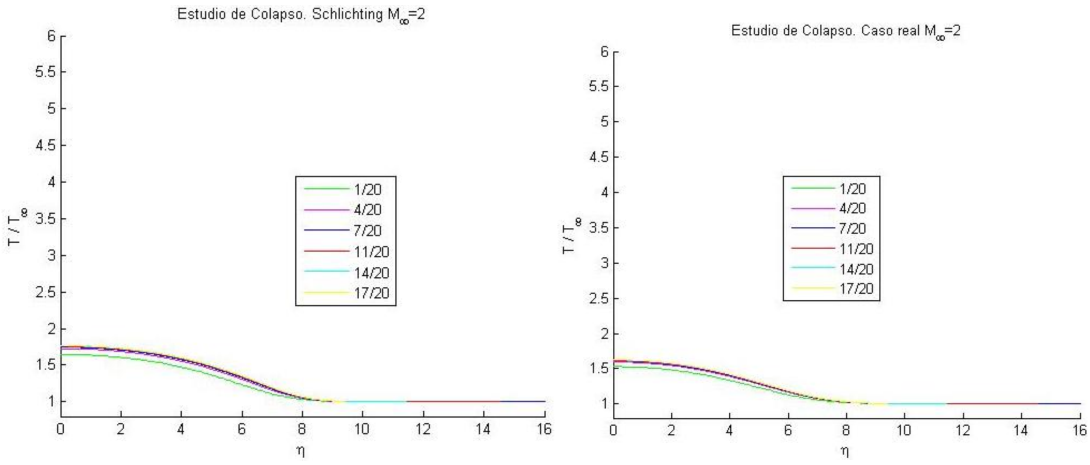

Ilustración 23. Estudio de colpaso con temperatura

2.4.3 Fricción

Se muestra en este apartado las gráficas de fricción que muestra Schlichting en su libro para el caso adibático.

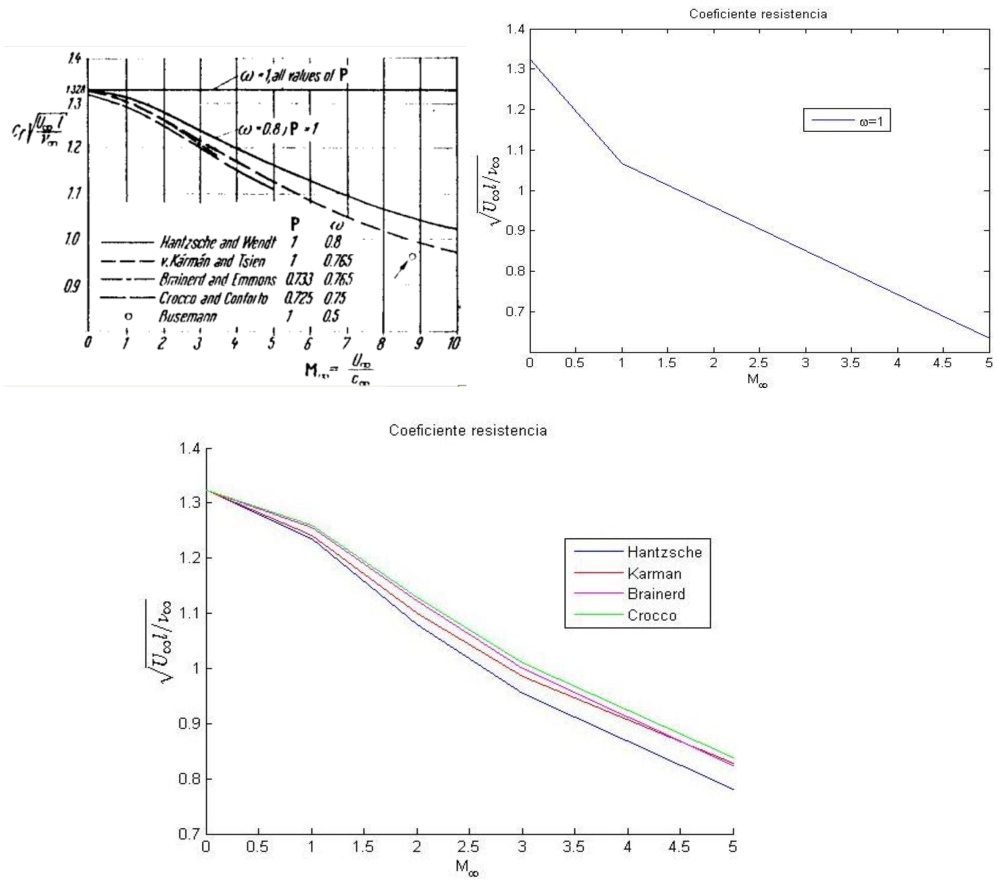

Ilustración 24: Comparación de la fricción entre la mostrada por Schlichting en su libro y la que se extrae de matlab con el mismo programa que antes.

Se aprecia como al contrario que muestra Schlichting para el caso de omega 1 no hay una línea recta sino que como se muestra en la figura de la derecha se produce un descenso de la fricción conforme aumenta el Mach. Debajo se representan los distintos modelos para el cálculo de la fricción, y aunque ninguno de ellos se corresponde con lo dicho por Schlichting dado que cuantitativamente el programa matlab da coeficientes de resistencia menores, si que capta bastante bien la tendencia y la curvatura de las líneas.

2.5 Bibliografía

Apuntes

Mecánica de fluidos II. Miguel Pérez-Saborid

Aerodinámica I. Jose Manuel Gordillo

Libros

Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos. Antonio Barrero y M. Pérez Saborid

Boundary Layer Theory. Schlichting

Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. Tuncer Cebeci

Web

https://www.youtube.com/watch?v=XOLl2KeDiOg

http://m.forocoches.com/foro/showthread.php?t=1650311&page=9

https://www.youtube.com/watch?v=7SkWxEUXIoM

http://datateca.unad.edu.co/contenidos/201005/modulo/Modulo_fenomenos/leccin_no_19__velocidad_y_arrastre_sobre_una_placa_plana.html

http://es.scribd.com/doc/139770380/Capa-Limite-MF-II#scribd

https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2007/2/ME33A/1/material_docente/ (CAP 11)

Anexo II: Programas

```
%%%Pograma compresible gas
clear all;close all;
clc;
%
Re=10^4; Tp_Tinf=1; Minf=3;
Pr=1; gam=1.4;
omega=1; sigma=0; CSuth=110/293;
%
%% Nyallado en x e y. N es para x y Ny para y
%
Nx=2000; x0=0. ; xmax=1;  xv(1:Nx)=(linspace(0,1,Nx)).^2;
Ny=2000; ymax=8/sqrt(Re); hy=ymax/(Ny-1);
yv(1:Ny)=linspace(0,ymax,Ny);
%
%%% Condiciones iniciales:
unm1(1)=0; unm1(2:Ny)=1; vnm1(1:Ny)=0;
Tnm1(1)=Tp_Tinf; Tnm1(2:Ny)=1;
rhonm1(1:Ny)=1./Tnm1;
%
%
% Matriz para el calculo de v mediante la regla de los trapecios
%
Trap(1:Ny,1:Ny)=hy*tril(ones(Ny,Ny))-0.5*hy*eye(Ny);
Trap(1:Ny,1)=0.5*hy;
%
% Resolucisn de ecuaciones
%
duyp(1)=0;
for n=2:Nx,
%
    hx=xv(n)-xv(n-1);
    vrhonm1(1:Ny)=rhonm1.*vnm1;
    urhonm1(1:Ny)=rhonm1.*unm1;
    munm1(1:Ny)=Tnm1.^omega.*((1+CSuth)./(Tnm1+CSuth)).^sigma;
    dmuynm1(1)=(4*munm1(2)-munm1(3)-3*munm1(1))/2/hy;
    dmuynm1(2:(Ny-1))=(munm1(3:Ny)-munm1(1:(Ny-2)))/2/hy;
    dmuynm1(Ny)=dmuynm1(Ny-1);
    cappanm1(1:Ny)=munm1/Pr; dcappaynm1(1:Ny)=dmuynm1/Pr;

    a(1)=0; a(Ny)=0; %Condiciones de contorno
    a(2:(Ny-1))=-vrhonm1(2:(Ny-1))/2/hy-1/Re/hy^2*munm1(2:(Ny-
1))+1/Re/hy*2*dmuynm1(2:(Ny-1));
    b(1)=1; b(Ny)=1; %Condiciones de contorno
    b(2:(Ny-1))=urhonm1(2:(Ny-1))/hx+2/Re/hy^2*munm1(2:(Ny-1));
    c(1)=0;c(Ny)=0;%Condiciones de contorno
    c(2:(Ny-1))=vrhonm1(2:(Ny-1))/2/hy-1/Re/hy^2*munm1(2:(Ny-1))-
1/Re/hy*2*dmuynm1(2:(Ny-1));
    r(1)=0; r(Ny)=1;%Condiciones de contorno
    r(2:(Ny-1))=urhonm1(2:(Ny-1)).*unm1(2:(Ny-1))/hx;
%
    A=sparse(Ny,Ny);
    A(1,1)=b(1); A(1,2)=c(1);
    for k=2:(Ny-1),
        A(k,k-1)=a(k); A(k,k)=b(k); A(k,k+1)=c(k);
    end
    A(Ny,Ny-1)=a(Ny); A(Ny,Ny)=b(Ny);
%
%Resolucisn del sistema:
```

```
%
    un(1:Ny)=(A\r')';
%     [xv(n)]
%      plot(un,yv)
%      axis([0 2 0 ymax])
% %      hold on
%      pause(0.01)
%
% Temperatura
%
    d(1)=0;d(Ny)=0;%Condiciones de contorno
    d(2:(Ny-1))=-vrhonm1(2:(Ny-1))/2/hy-1/Re/Pr/hy^2*cappanm1(2:(Ny-
1))+1/Re/Pr/hy*2*dcappaynm1(2:(Ny-1));
    e(1)=1;e(Ny)=1;%Condiciones de contorno
    e(2:(Ny-1))=urhonm1(2:(Ny-1))/hx+2*cappanm1(2:(Ny-1))/Pr/Re/hy^2;
    f(1)=-1;f(Ny)=0;%Condiciones de contorno
    f(2:(Ny-1))=vrhonm1(2:(Ny-1))/2/hy-1/Re/Pr/hy^2*cappanm1(2:(Ny-
1))-1/Re/Pr/hy*2*dcappaynm1(2:(Ny-1));
    h(1)=0; h(Ny)=1;%Condiciones de contorno
    h(2:(Ny-1))=urhonm1(2:(Ny-1)).*Tnm1(2:(Ny-1))/hx+(gam-
1)*Minf^2/Re*munm1(2:(Ny-1)).*(un(3:Ny)-un(1:(Ny-2))).^2/(2*hy)^2;
%
%resuelve sistema
%
    C=sparse(Ny,Ny);
    C(1,1)=e(1);C(1,2)=f(1);
    for k=2:(Ny-1),
        C(k,k-1)=d(k);C(k,k)=e(k);C(k,k+1)=f(k);
    end
    C(Ny,Ny-1)=d(Ny);C(Ny,Ny)=e(Ny);
%
     Tn(1:Ny)=(C\h')';
     Tsol(n,:)=Tn(1:Ny);
%
%      plot(Tn,yv,'r')
%      axis([0 2 0 ymax])
%      pause(0.01)
%     hold off
%
% densidad:
%
    rhon(1:Ny)=1./Tn(1:Ny);%compresible
%     rhon(1:Ny)=1;%incompresible
%
    urhon(1:Ny)=rhon.*un;
    durhodxn(1:Ny)=(urhon(1:Ny)-urhonm1(1:Ny))/hx;
    vn(1:Ny)=-(Trap*durhodxn')'./rhon;
%
% %Fricción
%      cf=(un(2))/Re/hy;
%      Cf(n)=cf;
% Actualizo variables
%
    unm1(1:Ny)=un;
    vnm1(1:Ny)=vn;
    Tnm1(1:Ny)=Tn;
    rhonm1(1:Ny)=rhon;
%      [yv' rhonm1' Tnm1' unm1' munm1']
%      [un(1) unm1(1)]
%      pause
%
```

```
    eta1(n,1:Ny)=yv.*sqrt(Re)/sqrt(xv(n));
    usol1(n,1:Ny)=un;
    Tsol1(n,1:Ny)=Tn;
    duyp(n)=(4*un(2)-un(3)-3*un(1))/(2*hy);
    muy0(n)=munm1(1);
end

Cd1=2/Re*trapz(xv(2:Nx),duyp(2:Nx).*muy0(2:Nx))
CD1=Cd1*sqrt(Re)
```

Capítulo III: Turbulencia

3.1 Características generales de los movimientos turbulentos

En el siglo XIX, Osborne Reynolds llevo a cabo investigaciones pioneras que dieron a conocer que para un número de Reynolds suficientemente elevado, denominado crítico, un flujo laminar se hace inestable y experimenta un cambio radical en su estructura, el fenómeno se conoce como transición a la turbulencia. Además, se observa que para números de Reynolds todavía mayores, el flujo exhibe características mixtas entre el flujo laminar y el flujo turbulento. Cuando el número de Reynolds es lo suficientemente elevado, la parte laminar desaparece dejando únicamente un movimiento caótico y difícilmente predecible, el movimiento turbulento.

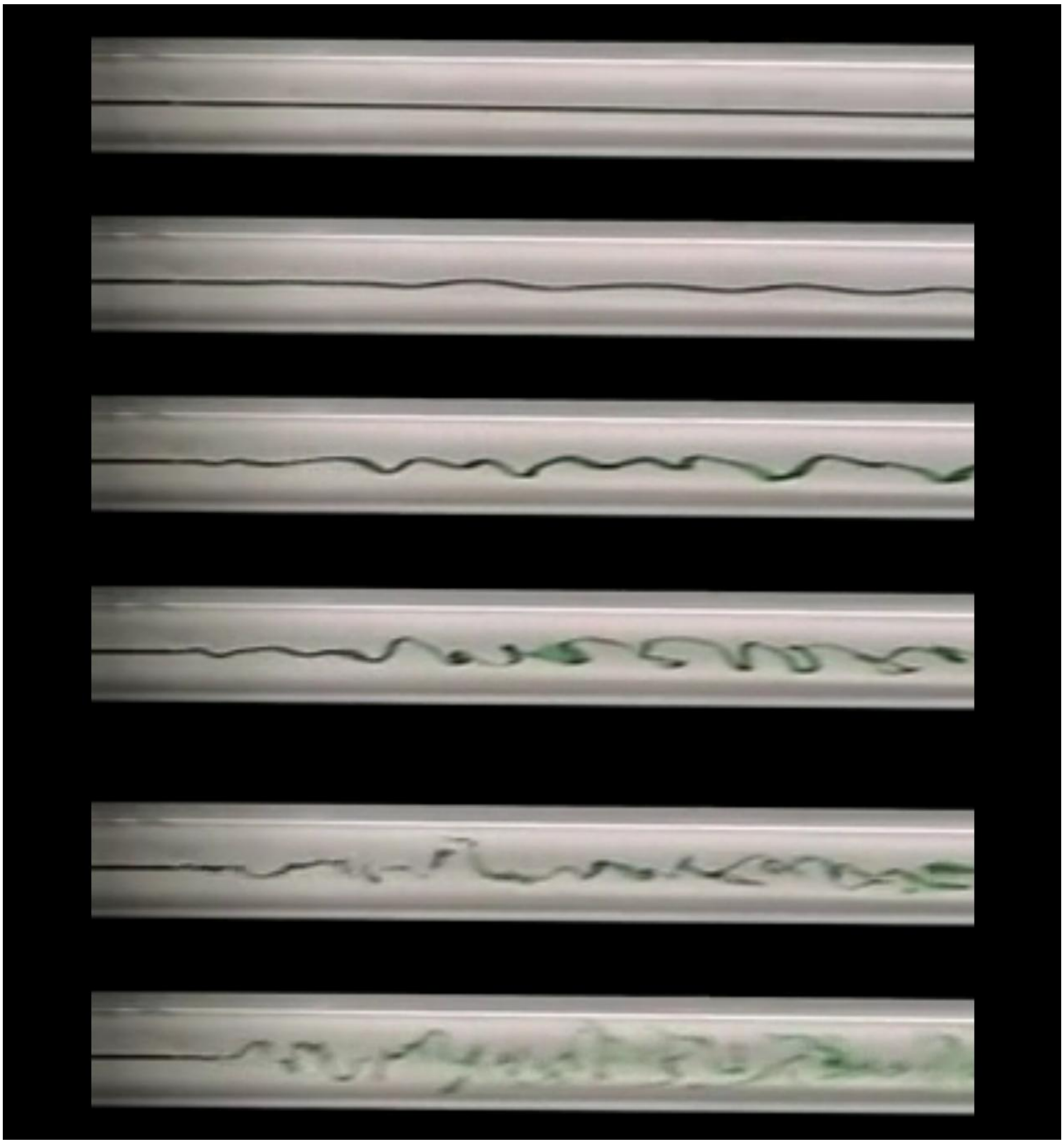

Ilustración 25: Transición a la turbulencia en un experimento. Fuente : Youtube Esocamento laminar x turbulento

A pesar de que la turbulencia es un fenómeno cotidiano (véase la ilustración 26), cualquiera que la observe puede darse cuenta de lo caótico del movimiento y por tanto puede darse cuenta de lo complicado de su cálculo. Uno de los primeros aspectos que llama la atención en un flujo turbulento es su complejidad, que se manifiesta en una extraordinaria irregularidad tanto en la distribución espacial de las variables fluidas como en su evolución temporal. En la ilustración 27 se muestra la disparidad de escalas temporales existentes en un flujo turbulento.

Ilustración 26: Fenómenos cotidianos de turbulencia.

Como ya se ha comentado, se puede observar lo caótico del flujo turbulento, de manera que para predecir los detalles de la evolución de un flujo turbulento durante cualquier intervalo de tiempo se necesitaría una precisión en las condiciones iniciales imposible de obtener experimentalmente o numéricamente.

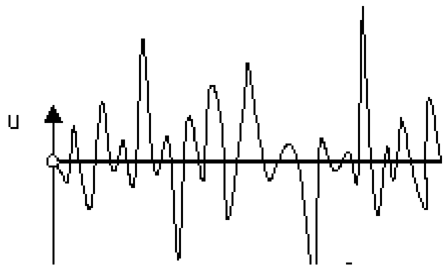

Ilustración 27: Evolución temporal de la velocidad

En un flujo turbulento, una porción del fluido se deforma muchísimo debido a las constantes fluctuaciones aleatorias, lo que permite alcanzar regiones muy alejadas del punto de partida debido a que las partículas fluidas pueden convectar sus propiedades en todas las direcciones.

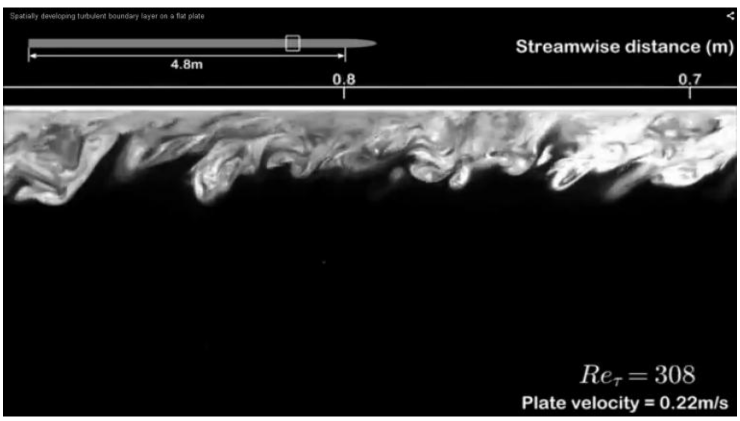

Ilustración 28: Convección turbulenta de una capa límite. Video Youtube : Spatially developing turbulent boundary layer on a flat plate

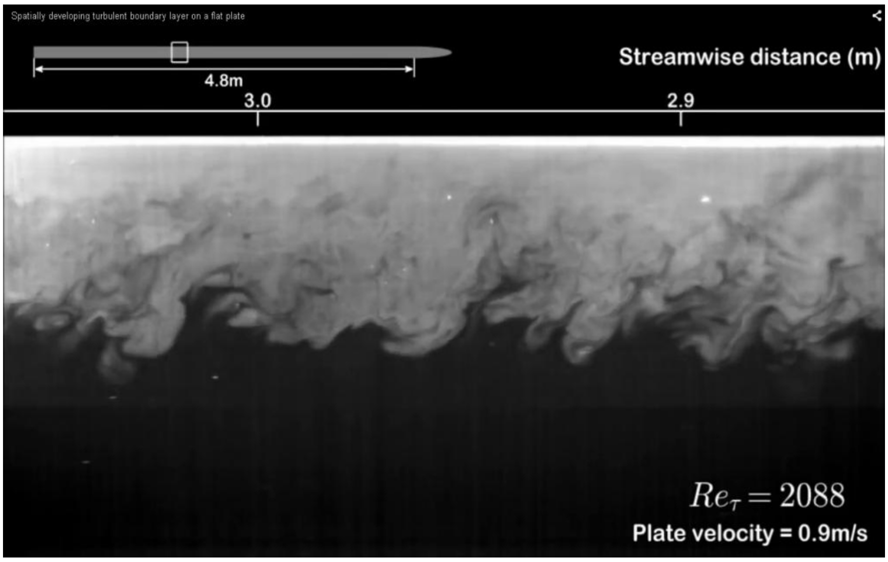

Ilustración 29: Convección turbulenta de una capa límite. Mismo video.

Esto da lugar a que la distribución de los valores medios en un flujo turbulento sea altamente uniforme. Los valores medios existentes en las zonas alejadas de cualquier punto fijo del dominio fluido tienden a manifestarse en dicho punto al promediar en éste los valores instantáneos de las partículas fluidas que provienen de aquellas zonas y que, con velocidad altamente variable en magnitud y dirección, pasan sucesivamente por el punto considerado. El transporte de magnitudes medias de las partículas fluidas de un flujo de largo alcance con movimiento turbulento se denomina transporte turbulento o mezclado turbulento (mixing en la nomenclatura anglosajona).

3.2 Ecuaciones de Reynolds

En turbulencia, no es posible hacer una descripción determinista del flujo. Incluso si se obvia el carácter caótico de las ecuaciones de Navier-Stokes, el coste computacional sería demasiado elevado para los ordenadores actuales. No obstante, debe tenerse en cuenta que una información muy exhaustiva no es relevante para algunas aplicaciones pudiéndose obtener resultados buenos mediante una descripción incompleta del flujo, realizada en términos estadísticos y basada en magnitudes medias.

El valor medio de cualquier variable fluida φ puede definirse formalmente como:

$$\emptyset(x,t) = \langle\varphi\rangle(x,t) = \int_{t-T_o}^{t+T_o} \varphi(x,t')\frac{dt'}{2T_o}$$

La integral representa el valor medio local de φ durante un intervalo de tiempo centrado en t cuya duración es de $2T_o$, la cual debe ser larga comparado con el tiempo característico de las fluctuaciones turbulentas, pero, a la vez, debe ser corta comparada con el tiempo característico para variaciones apreciables en la integral. Si los valores medios no dependen del tiempo, la turbulencia se denomina estadísticamente estacionaria y, en este caso, pude hacerse t=0 y $T_o \to \infty$ en la intregral.

La fluctuación de una variable fluida respecto a su valor medio se define como:

$$\varphi'(x,t) = \varphi(x,t) - \emptyset(x,t)$$

El valor medio de una fluctuación es nulo, puesto que si se promedian los dos miembros de la ecuación anterior usando la primera integral se obtiene:

$$\langle\varphi'\rangle(x,t) = \int_{t-T_o}^{t+T_o} \varphi(x,t')\frac{dt'}{2T_o} - \int_{t-T_o}^{t+T_o} \emptyset(x,t')\frac{dt'}{2T_o} \approx \emptyset(x,t) - \emptyset(x,t)\int_{t-T_o}^{t+T_o}\frac{dt'}{2T_o} = 0$$

Donde el símbolo de igualdad con aproximación tiene en cuenta que en un caso de turbulencia no estacionaria $\emptyset(x,t')$ no varía apreciablemente en el intervalo de tiempo y en una primera aproximación sale como constante de la integral en forma de $\emptyset(x,t)$

El valor medio del producto de dos (o más) fluctuaciones se denomina correlación. Su valor en general es distinto de 0 tal y como se muestra en la gráfica siguiente.

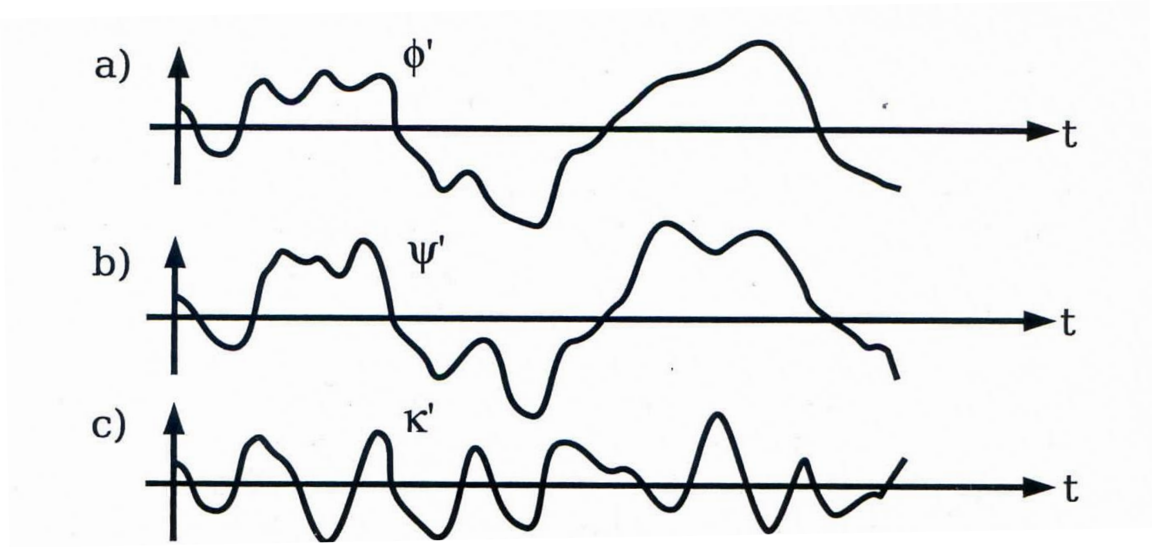

Ilustración 30: Evolución temporal de 3 fluctuaciones típicas. Libro de Barrero.

Una medida del grado de correlación entre dos fluctuaciones $\emptyset'$ y ψ' la porporciona el coeficiente de correlación:

$$c_{\emptyset'\psi'} = \frac{\langle\emptyset'\psi'\rangle}{\langle\psi'^2\rangle^{1/2}\langle\emptyset'^2\rangle^{1/2}}$$

Si el coeficiente anterior es 1 o -1 entonces la correlación se denomina perfecta, y la correlacion de toda fluctuación consigo misma es siempre perfecta.

Las ecuaciones que gobiernan las magnitudes medias en un flujo turbulento fueron obtenidas por Reynolds en 1883. Desde entonces las denominadas ecuaciones de Reynolds constituyen el punto de partida para la inmensa mayoría de las investigaciones, tanto analíticas como numéricas, realizadas en el campo de la turbulencia. En esta conocida teoría de Reynolds cada variable se expresa como la suma de su valor medio y de una fluctuación respecto a la media.

$$v(x,t) = V(x,t) + v'(x,t);\ p(x,t) = P(x,t) + p'(x,t);\ T(x,t) = \theta(x,t) + T'(x,t);$$

Donde V, P y θ serían las magnitudes medias y v',p', T' son las fluctuaciones respecto a la media. Si se introduce esta formulación en las ecuaciones de Navier-Stokes,

$$\nabla \cdot V = 0$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathrm{VV}) = -\nabla \mathrm{P} + \nabla \cdot \left(\overleftrightarrow{\tau'}_{\mathrm{V}} - \rho \langle \mathrm{v'v'} \rangle \right)$$

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho c V \cdot \nabla \theta = \nabla \cdot (\mathrm{k} \nabla \theta - \rho \mathrm{c} \langle \mathrm{T'v'} \rangle)$$

Donde c es el calor específico, k es la conductividad térmica y el tensor τ es el tensor de esfuerzos viscosos. Obsérvese que las ecuaciones son idénticas a las ecuaciones de Navier-Stokes salvo por $\overleftrightarrow{\tau'}_T = \rho \langle \mathrm{v'v'} \rangle$ y $\mathrm{q_T} = \rho \mathrm{c} \langle \mathrm{T'v'} \rangle$ que representan los efectos de la turbulencia. El primero de ellos es el denominado esfuerzo aparente de Reynolds o tensor de esfuerzos turbulentos, y es una densidad de flujo de cantidad de movimiento media debida a las correlaciones entre las fluctuaciones turbulentas de la velocidad. Análogamente el vector $\mathrm{q_T}$ es el vector del flujo turbulento de calor y es debido a las correlaciones entre las fluctuaciones turbulentas de la temperatura.

Debe señalarse que las cantidades $\overleftrightarrow{\tau'}_T$ y $\mathrm{q_T}$ son desconocidas y deben modelarse en función de las magnitudes medias, constituyendo el llamado problema de cierre. Así pues, en la teoría de Reynolds de la turbulencia se obtienen las ecuaciones que gobiernan las magnitudes medias de un flujo turbulento promediando las ecuaciones de Navier-Stokes y que son denominadas como ecuaciones de Reynolds (Rans), las cuales presentan lo conocido como problema de cierre que no es otra cosa que los esfuerzos aparentes de Reynolds los cuales son incógnita y deben modelarse apropiadamente. Los esfuerzos aparentes de Reynolds se modelan de una forma similar a la ley de Navier-Poisson donde aparecerá la viscosidad turbulenta que será la clave del desarrollo en las ecuaciones. La viscosidad turbulenta es una función de la posición y debe calcularse de forma semiempírica mediante modelos turbulentos que se denominan modelos de viscosidad turbulenta y proporcionan resultados bastante buenos. En este texto se usará el modelo de viscosidad turbulenta de Reichardt .

Por otro lado, ante todo ha de tenerse en cuenta que, debido al carácter macroscópico de las fluctuaciones turbulentas, los flujos turbulentos son de naturaleza eminentemente convectiva, aunque en las ecuaciones de Navier-Stokes presentadas previamente se haya expresado junto a los flujos difusivo-moleculares. Se puede demostrar tal y como se expone en muchos textos de mecánica de fluidos (Véase Barrero & Saborid 2005) que los flujos convectivos medios de cantidad de movimiento y de calor a través de un elemento de superficie son los debidos al movimiento medio, más los debidos a los flujos turbulentos que se originan por las correlaciones entre las fluctuaciones turbulentas. Si se integran las expresiones resultantes para una superficie cerrada y se aplica el teorema de Gauss, se obtiene que los flujos convectivos medios de cantidad de movimiento y de calor que abandonan la unidad de volumen son la suma de la contribución del flujo medio$[\nabla \cdot (\rho \mathrm{VV})$ y $\cdot \nabla(\rho c V \theta)]$ más el transporte turbulento $[\nabla \cdot \langle \rho \mathrm{v'v'} \rangle$ y $\nabla \cdot \rho \mathrm{c} \langle \mathrm{T'v'} \rangle]$. La ecuación de la cantidad de movimiento y la ecuación de la energía expuestas previamente en las ecuaciones de Navier-Stokes adaptadas a la turbulencia expresan, por tanto, el balance entre las variaciones en la unidad de tiempo de los valores medios de cantidad de movimiento y energía interna contenidos en la unidad de volumen $\left[\rho \frac{\partial V}{\partial t} \;\; y \;\; \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}\right]$,los flujos convectivos de dichas cantidades que abandonan la unidad de volumen con el movimiento medio$[\nabla \cdot (\rho \mathrm{VV})$ y $\cdot \nabla(\rho c V \theta)]$, y los flujos que entran en la unidad de volumen debido al transporte turbulento $[-\nabla \cdot \langle \rho v' v' \rangle$ y $-\nabla \cdot \rho c \langle T' v' \rangle]$, y al transporte difusivo-molecular asociado a las variaciones espaciales de las magnitudes medias$[\overleftrightarrow{\tau}'_V$ y $\nabla \cdot (k \nabla \theta)]$. En el caso de la ecuación de la cantidad de movimiento también debe incluirse en valor medio de la resultante de las fuerzas de presión sobre la unidad de volumen$[-\nabla P]$. Obsérvese que del mismo modo en que el transporte difusivo-molecular de la cantidad de movimiento media puede interpretarse en términos de esfuerzos de viscosidad caracterizados, de la forma usual, por tensor de esfuerzos $\overleftrightarrow{\tau}'_V$, desde el punto de vista del movimiento medio, el transporte turbulento de cantidad de movimiento puede interpretarse en términos de esfuerzos caracterizados por el tensor $\overleftrightarrow{\tau}'_T$ que, como ya se ha expuesto previamente, se denomina tensor de esfuerzos aparentes de Reynolds donde aparente se añade debido a que su verdadera naturaleza es convectiva.

3.3 Turbulencia parietal

La turbulencia parietal consiste en el análisis de la turbulencia cuando se encuentra en presencia de una pared. La presencia de una pared impone a los flujos turbulentos una estructura característica universal suficientemente cerca de la pared. En dicha estructura se distinguen dos zonas en las que la importancia relativa entre los esfuerzos viscosos y turbulentos es muy dispar. Muy cerca de la pared se distingue una capa donde la turbulencia está inhibida, llamada subcapa laminar, mientras que a distancias de la pared mayores es la viscosidad la que juega un papel muy escaso y se puede despreciar frente a los esfuerzos aparentes de Reynolds, lo que se conoce como subcapa inercial o logarítmica. El análisis demuestra que la solución del flujo en estas dos zonas próximas a la pared es universal, en el sentido en que es independiente de los detalles de la corriente turbulenta en zonas más alejadas de la pared y, por tanto, la solución en ellas es válida tanto para las capa límites turbulentas como para conductos. Existe una tercera zona, más alejada de la pared y donde el flujo satisface la ley del defecto de las velocidades que es dependiente de las condiciones de contono exteriores. En las capas limites turbulentas el estudio de este fenómeno es muy complejo debido a los fenómenos de intermitencia que tienen lugar en la frontera entre la zona turbulenta exterior gobernada por la ley de defecto de las velocidades y la corriente exterior no viscosa. Para la resolución de estos casos hay que recurrir a la simulación o experimentación. Sin embargo, en la corriente en conductos, la situación se simplifica debido a que a distancias de la entrada relativamente cortas, la turbulencia está completamente desarrollada, en el sentido de que afecta a toda la sección del conducto y el perfil de velocidades no varía aguas abajo.

Se puede mostrar que la estructura del flujo turbulento para el caso de un conducto de sección circular teniendo en cuenta los resultados de las capas más cercanas a la pared (ley de la pared) son de aplicación a cualquier situación de turbulencia parietal (donde intervenga una pared) como puede ser la capa límite.

3.3.1 Turbulencia en conductos de sección circular

Considérese un conducto de sección circular de diámetro D por el que circular un fluido (líquido) en régimen turbulento. A cierta distancia de la entrada del conducto la turbulencia está completamente desarrollada y las magnitudes medias solo dependen de la distancia r al eje del conducto. Las ecuaciones de Reynolds para este caso son:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle u'_r u'_x\rangle\right)=0$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle {u'_r}^2\rangle\right)+\frac{\langle {u'_\theta}^2\rangle}{r}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle u'_r u'_\theta\rangle\right)+\frac{\langle u'_r u'_\theta\rangle}{r}=0$$

La última ecuación proporciona $r\langle u'_r u'_\theta\rangle = cte = 0$ dado que $u'_r\ y\ u'_\theta$ son nulos en r=R. Asimismo si se deriva la segunda de las ecuaciones anteriores respecto x se obtiene $\partial^2 P/\partial r\partial x = 0$, lo que implica que $\partial P/\partial x$ es independiente de r, y por tanto, puede escribirse como $\partial P_o/\partial x$, siendo $P_o(x)$ la presión media en la pared del conducto, r=R. Entonces, si la primera ecuación se integra en r se obtiene

$$r\left(\upsilon\frac{dV}{dr}-\langle u'_r u'_x\rangle\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_o}{\partial x}\frac{r^2}{2}$$

Donde la constante que saldría de la integración no aparece por ser nula al serlo el primer miembro en r=0. Si se evalúa en la pared se obtiene:

$$\frac{R}{2\rho}\frac{dP_o}{dx}=\upsilon\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=R}=-\frac{\tau_p}{\rho}$$

Siendo $\tau_p$el esfuerzo en la pared del conducto que es desconocido a priori. En general, se supondrá conocido el caudal Q que circula por el conducto y la resolución del problema permitirá calcular teóricamente el gradiente de presiones $\partial P_o/\partial x$, o lo que es lo mismo, el esfuerzo en la pared τ_p.

A continuación, resulta conveniente expresar la primera ecuación integrada en términos de la distancia a la pared del conducto y=R-r, teniendo en cuenta que $u'_r = -u'_y$

$$\upsilon\frac{dV}{dr}-\langle u'_r u'_x\rangle = u^{*2}\left(1-\frac{y}{R}\right)$$

Donde se define

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$$

La última relación se denomina velocidad basada en el esfuerzo en la pared. La resolución de la ecuación integrada se basa en la idea original de Prandtl que distingue en la sección del conducto varias capas en las que la importancia relativa de los distintos términos de la ecuación es muy dispar. En efecto, muy cerca de la pared la turbulencia está inhibida debido a la condición de adherencia, por lo que los esfuerzos turbulentos son despreciables frente a los viscosos, lo que se denomina subcapa laminar o viscosa donde la ecuación puede aproximarse por:

$$\upsilon\frac{dV}{dy}\approx u^{*2}$$

Cuya integración con V(0) proporciona:

$$\frac{V}{u^*} = \frac{yu^*}{\upsilon}$$

Estos valores concuerdan bien con los valores experimentales en la zona $0 \leq yu^*/\upsilon \leq 5$, condición que determina el espesor de la subcapa laminar. El espesor de dicha zona puede estimarse con:

$$\frac{y}{R} = \frac{2}{Re}\frac{yu^*}{\upsilon}\frac{U_m}{u^*}$$

Donde $Re = U_m D/\upsilon$ es el número de Reynolds basado en la velocidad media, $U_m = 4Q/\pi D^2$. En efecto, para un Reynolds típico de $Re = 10^5$ y estimando un $u^* \sim 0.1U_m$, la ecuación que estima el espesor da un resultado para la subcapa laminar de $10^{-3}R$. A distancias mayores de la pared del conducto, la importancia relativa de los esfuerzos viscosos disminuye gradualmente frente a la de los turbulentos, y estos se hacen dominantes para $yu^*/\upsilon \gg 1$ donde aparece la capa inercial o logarítmica tal que $yu^*/\upsilon \gg 1 \; e \; y/R \ll 1$ donde la ecuación integrada puede aproximarse por:

$$\langle u'_y u'_x \rangle = -u^{*2}$$

Esta última ecuación expresa que los esfuerzos de Reynolds son constantes en la capa inercial, y es significativo como dicha ecuación proporciona la forma del perfil de velocidad media como una simple aplicación del análisis dimensional.

$$\frac{dV}{dy} = f(u^*, y) \rightarrow AnalisisDimensional \rightarrow \frac{y}{u^*}\frac{dV}{dy} = A$$

La constante A es universal se denomina constante de Von Karman. Integrando:

$$\frac{V}{u^*} = Aln\frac{yu^*}{\upsilon} + B$$

Donde A y B se determinan experimentalmente y son aproximadamente A=2.44 y B=5. La ley logarítmica concuerda con los resultados experimentales en $30 \leq yu^*/\upsilon \leq 10^3$ independientemente de los detalles del flujo exterior. Lo anterior se puede representar en matlab introduciendo las ecuaciones encontradas:

En la gráfica (figura 3.7) se observan las dos ecuaciones expresadas con anterioridad que representaban la capa laminar o viscosa y la capa inercial o logarítmica. Las dos ecuaciones se representan como se muestra con las dos líneas azules. La línea roja representaría la realidad, esto es, al principio cerca de la pared se adapta a la ecuación de la capa laminar y conforme se aleja a la ecuación logarítmica. Se puede ver una región intermedia donde no se adapta a ninguna de las dos que es una región de transición. Se recuerda que esta gráfica es universal, y por tanto, común para todos los casos de turbulencia parietal, y representa la variación de la velocidad adimensional con el efecto de la pared. Se puede comparar con la bibliografía básica (Ilustración 32)

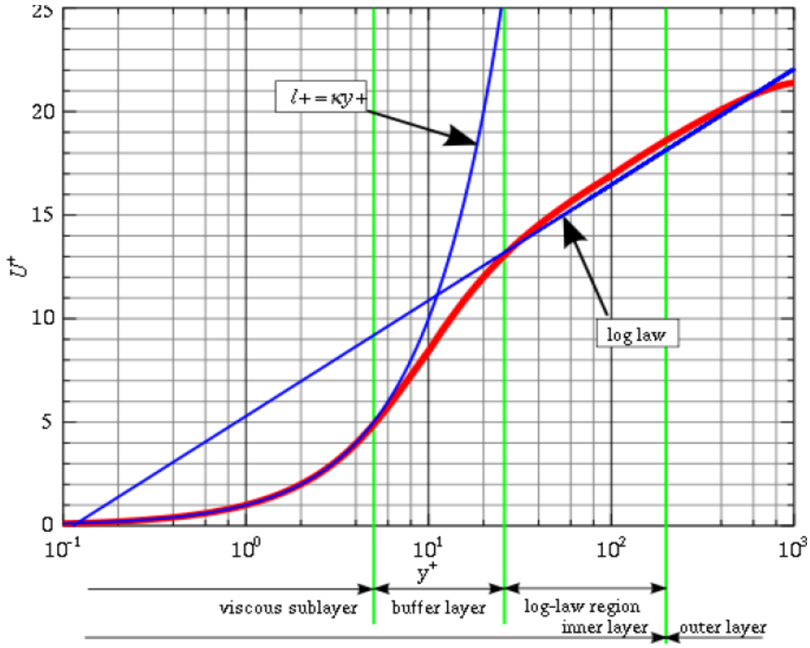

Ilustración 31: Ley de la pared

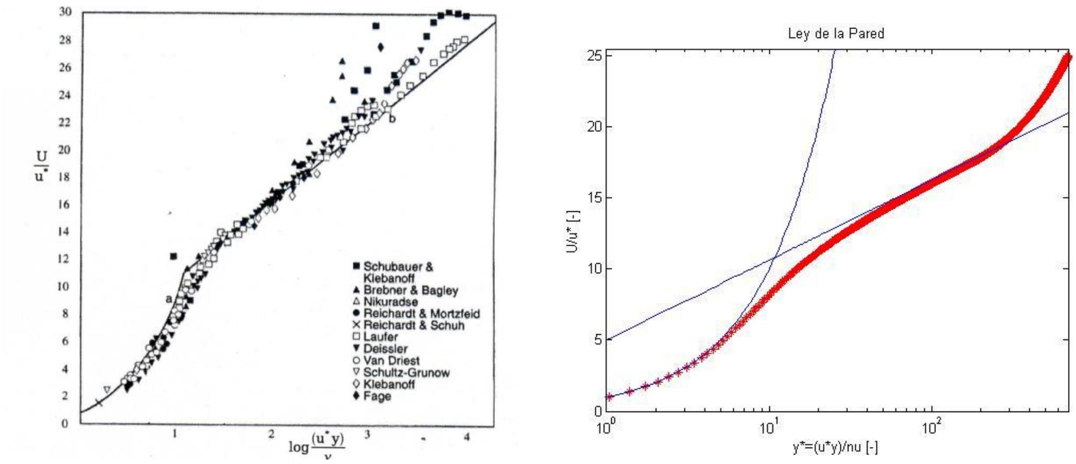

Ilustración 32: Comparación Ley de la pared Barrero & Saborid 2005 con Grafica Matlab

3.3.2 Capa límite compresible turbulenta

Al aumentar el número de Reynolds, ocurre que se produce una transición al regimen turbulento. Se produce una fuerte mezcla de partículas,y el flujo se caracteriza por el desorden y trayectorias circulares erraticas, algo asi como un caos. Se suele considerar que para un Reynolds superior a 2300 comienza la transición y al llegar a 4000 la mezcla se ha estabilizado en régimen turbulento para el caso de un conducto. Para el caso de una placa plana el límite estaría entre 10^5 y 10^6 si se basa en la longitud de la placa.

El paso de laminar a turbulento, viene marcado por el número de reynolds, de forma que, el paso de un tipo de capa límite a otro depende del espesor de la misma, pues:

$$Re_\delta = \frac{U_\infty \delta}{\nu}$$

Luego para una velocidad de corriente exterior fijada y para un fluido fijado, el Reynolds variará a lo largo de la placa plana según el espesor de la capa límite,comenzando por δ=0 y hasta llegar a un valor crítico δ^* en el que se produce la transición. Según Schlichting, ese reynolds basado en el espesor de la capa límite tiene un valor de entre 420 y 950. Tomando un valor intermedio como 600 se tiene que:

$$Re_{\delta^*} = \frac{U_\infty \delta^*}{\nu} = 600$$

De forma que si:

$$Re_\delta < Re_{\delta^*} \quad El\ flujo\ es\ laminar$$

$$Re_\delta > Re_{\delta^*} \quad El\ flujo\ es\ turbulento$$

Lo que ocurre realmente es que al subir el espesor de la capa límite, el gradiente de velocidad baja, con lo que las fuerzas viscosas bajan, lo que implica que al pasar el espesor crítico, el esfuerzo viscoso será tan pequeño que no podrá amortiguar las perturbaciones, de ahí que se cree la turbulencia y deje de haber un regimen viscoso. Basicamente en régimen laminar, la viscosidad mantenía el orden, amortiguando las perturbaciones. Al subir el Reynolds las perturbaciones dejan de poder ser amortiguadas por la viscosidad, generando un movimiento caótico que deriva en lo conocido como turbulencia.

Por otro lado, se puede buscar la longitud necesaria para que se produzca este espesor crítico:

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu L^*}{U_\infty}}$$

De forma que en el valor de L* se produce el espesor crítico.

Luego:

$$Re_{\delta^*} = \frac{U_\infty \delta^*}{\nu} = 600 = \frac{U_\infty}{\nu}\sqrt{\frac{\nu L^*}{U_\infty}} = \sqrt{\frac{U_\infty L^*}{\nu}}$$

Elevando al cuadrado:

$$3.6 \cdot 10^5 = \frac{U_\infty L^*}{\nu} \rightarrow L^* = \frac{3.6 \cdot 10^5 \nu}{U_\infty}$$

Luego:

$$\frac{L^*}{L} = \frac{3.6 \cdot 10^5}{\frac{U_\infty L}{\nu}} = \frac{3.6 \cdot 10^5}{Re_L}$$

Luego si $\frac{L^*}{L} > 1$ no se desarrolla turbulencia antes de acabar placa, luego es todo laminar lo que implica que Re basado en la L debe ser menor que $3.6 \cdot 10^5$ para ser laminar. En caso contrario se tiene turbulencia.

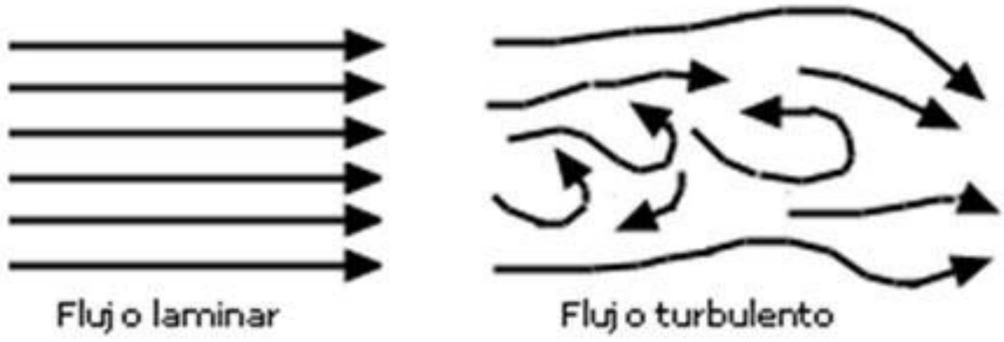

Ilustración 33: Esquema de flujos

Se destaca también que al haber un caos en el caso turbulento, es terriblemente complicado resolver el problema con las magnitudes reales del problema debido a que fluctúan constantemente, motivo por el cual es muy común trabajar con magnitudes medias como se ha expuesto previamente.

En las ecuaciones fundamentales se expresará cada variable según la teoría de Reynolds, esto es, como la suma de su valor medio (en la nomenclatura marcado entre corchetes o en mayúscula) más el valor de una fluctuación respecto a la media (en la nomenclatura marcado como prima).

Se asume pues que la densidad:

$$\rho = \langle \rho \rangle + \rho'$$

Cuando el gas es tratado como un gas perfecto y cuando las fluctuaciones son pequeñas, en primera aproximación se puede decir que:

$$\frac{\rho'}{\langle \rho \rangle} \approx \frac{p'}{\langle P \rangle} - \frac{T'}{\langle T \rangle}$$

La presencia de fluctuaciones en la densidad, constituyen un nuevo fenómeno importante en el campo de la turbulencia compresible pues las ecuaciones de los tensores de esfuerzos deben de ser reescrito teniendo en cuenta los términos adicionales por la turbulencia (Vease Boundary Layer Theory, Schlichting 1968).

Con esto la ecuación de continuidad queda como:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \rho' v'_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \rho' v'_y \rangle}{\partial y} = 0$$

Dado que :

$$\frac{\partial \langle \rho' v'_x \rangle}{\partial x} \ll \frac{\partial \langle \rho' v'_y \rangle}{\partial y}$$

La ecuación de continuidad queda:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \rho' v'_y \rangle}{\partial y} = 0$$

Que se agrupa en:

$$\frac{\partial\langle\rho\rangle\langle v_x\rangle}{\partial x}+\frac{\partial\langle\rho v_y\rangle}{\partial y}=0$$

Adaptando la ecuación de la cantidad de movimiento con los nuevos tensores:

$$\langle\rho\rangle\langle v_x\rangle\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial x}+\langle\rho v_y\rangle\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial y}=-\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial y}\right)+\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y}$$

Lo que se puede expresar como:

$$\langle\rho\rangle\langle v_x\rangle\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial x}+\langle\rho v_y\rangle\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial y}=-\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_T)\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial y}\right)$$

La ecuación de la energía se expresa como:

$$C_p\left(\langle\rho\rangle\langle v_x\rangle\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x}+\langle\rho v_y\rangle\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial y}\right)+\left(\mu\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial y}+\tau'_{xy}\right)\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial y}+\langle v_x\rangle\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x}-\frac{\partial q'_y}{\partial y}$$

Lo que se expresa como:

$$C_p\left(\langle\rho\rangle\langle v_x\rangle\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x}+\langle\rho v_y\rangle\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left((k+k_T)\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial y}\right)+(\mu+\mu_T)\left[\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial y}\right]^2+\langle v_x\rangle\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x}$$

3.4 Integración numérica de las ecuaciones

Las ecuaciones para la capa límite turbulenta, expresadas en variables físicas (denotadas con acento circunflejo) y para una placa plana (eliminando el gradiente de presiones) son:

$$\frac{\partial\langle\hat\rho\rangle\langle v_x\rangle}{\partial\hat x}+\frac{\partial\langle\hat\rho v_y\rangle}{\partial\hat y}=0$$

$$\langle\hat\rho\rangle\langle v_x\rangle\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial\hat x}+\langle\hat\rho v_y\rangle\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial\hat y}=+\frac{\partial}{\partial\hat y}\left((\hat\mu+\hat\mu_T)\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial\hat y}\right)$$

$$C_p\left(\langle\hat\rho\rangle\langle v_x\rangle\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\hat x}+\langle\hat\rho v_y\rangle\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\hat y}\right)=\frac{\partial}{\partial\hat y}\left((\hat k+\hat k_T)\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\hat y}\right)+(\hat\mu+\hat\mu_T)\left[\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial\hat y}\right]^2$$

De la primera ecuación se obtendrá $\langle\hat\rho v_y\rangle$ y se introducirá en la segunda. A pesar de ser $\langle\hat\rho v_y\rangle$ y no $\langle\hat\rho\rangle\langle v_y\rangle$ se va a suponer que es lo segundo para quitar lo tedioso de la nomenclatura dado que a nivel de programación el resultado no cambia.

Luego las ecuaciones son:

$$\frac{\partial\hat\rho v_x}{\partial\hat x}+\frac{\partial\hat\rho v_y}{\partial\hat y}=0$$

$$\hat\rho v_x\frac{\partial\langle v_x\rangle}{\partial\hat x}+\hat\rho v_y\frac{\partial v_x}{\partial\hat y}=+\frac{\partial}{\partial\hat y}\left((\hat\mu+\hat\mu_T)\frac{\partial v_x}{\partial\hat y}\right)$$

$$C_p\left(\hat{\rho}v_x\frac{\partial T}{\partial \hat{x}}+\hat{\rho}v_y\frac{\partial T}{\partial \hat{y}}\right)=\frac{\partial}{\partial \hat{y}}\left((\hat{k}+\hat{k}_T)\frac{\partial T}{\partial \hat{y}}\right)+(\hat{\mu}+\hat{\mu}_T)\left[\frac{\partial v_x}{\partial \hat{y}}\right]^2$$

Adimensionalizando con:

$$V_x = U_\infty u;\ V_y = U_\infty v;\ \hat{x} = Lx; \hat{y} = Ly; \hat{T} = T\,T_\infty; \hat{\mu} = \mu\,\mu_\infty; \hat{\rho} = \rho_\infty\rho$$

La viscosidad se modela a través de la teoría de Sutherland para la viscosidad

$$\mu = \frac{\hat{\mu}}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^\omega \left[\frac{T_\infty + S_1}{T + S_1}\right]^\sigma;\ \omega = \frac{3}{2};\ \sigma = 1;$$

Las ecuaciones adimensionalizadas son:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_T)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$\rho u\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{k}{Pr}+\frac{k_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{\gamma-1}{Re}{M_\infty}^2\,(\mu+\mu_T)\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2$$

Como se ha comentado previamente, $\mu_T\ y\ k_T$ que provienen de los esfuerzos aparentes de Reynolds son, a priori, desconocidos. Debido a esto se debe modelar en función de las magnitudes medias, lo que antes se ha expuesto como problema de cierre. En este texto se usará el modelo de viscosidad turbulenta de Reichardt. Definiendo:

$$\mu_T = \mu\cdot v_{Rei}\quad y\quad k_T = \mu\cdot v_{Rei} = \mu_T$$

Se tiene que:

$$(\mu+\mu_T) = \rho(v+v_T) = \mu\left(1+\frac{v_T}{v}\right) = \mu(1+v_{Rei}) = \mu^*$$

Analogamente:

$$\left(\frac{k}{Pr}+\frac{k_T}{Pr_T}\right)=\left(\frac{k}{Pr}+\frac{k_T}{1}\right)=C_p\left(\frac{\mu}{Pr}+\frac{\mu_T}{1}\right)=\frac{C_p}{Pr}(\mu+Pr\mu_T)=\frac{C_p}{Pr}\rho(v+Prv_T)$$
$$=C_p\mu\left(\frac{1}{Pr}+\ v_{Rei}\right)=\frac{k}{Pr}(1+Pr\,v_{Rei})=\frac{k^*}{Pr}$$

Donde ν_{Rei} es el llamado coeficiente de viscosidad turbulenta que debe ser calculado de forma semiempírica, en este caso, utilizando el modelo de Reichardt:

$$\nu_{Rei}=\frac{\nu_T(y)}{\nu}=min\begin{cases}0.41(Re\ y\ u^*-9.7\tanh\left(\frac{Re\ yu^*}{9.7}\right))\\ 0.018\ Re\ U_\infty\delta1(x)\end{cases}$$

Donde u^* es la velocidad basada en el esfuerzo en la pared:

$$u^* = \sqrt{\frac{1}{Re}\mu(0)\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}}$$

Y el espesor del desplazamiento es:

$$\delta 1(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty}\right) dy$$

En base a esto, las ecuaciones de la cantidad de movimiento y de la energía se transforman en:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu^* \frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{k^*}{Pr}\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\gamma - 1}{Re} {M_\infty}^2 \mu^* \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2$$

3.5 Método numérico

Discretizando las ecuaciones anteriores se encontrarían las mismas expresiones que en el caso laminar. Sin embargo, a la hora de ejecutar los programas numéricos los resultados no son concluyentes. El problema radica en un mallado muy grueso en la parte inicial de la placa y en las capas más bajas del fluido lo cual no permite calcular con precisión. Se puede mejorar el problema realizando un mallado no equidistante que permita mallar de una forma más fina los valores más bajos de x e y permitiendo captar mejor las singularidades del fluido en ese comienzo de placa. Para ello se definen las derivadas siguientes con los siguientes espaciados:

$$h_y = y_{j+1} - y_j;\ h_{ym} = y_j - y_{j-1};\ h_{y2} = h_y + h_{ym};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{j+1}(x_n) - u_{j-1}(x_n)}{y_{j+1} - y_{j-1}} = \frac{u_{j+1}(x_n) - u_{j-1}(x_n)}{h_{y2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left[\frac{u_{j+1}(x_n) - u_j(x_n)}{y_{j+1} - y_j} - \frac{u_j(x_n) - u_{j-1}(x_n)}{y_j - y_{j-1}}\right]\frac{2}{y_{j+1} - y_{j-1}} \\ &= \frac{2}{h_{y2}}\left[\frac{u_{j+1}(x_n) - u_j(x_n)}{h_y} - \frac{u_j(x_n) - u_{j-1}(x_n)}{h_{ym}}\right]\end{aligned}$$

El nuevo mallado se realiza elevando al cuadrado la operación linspace en la formación de los vectores que dan lugar a la malla. Esta simple operación provoca que en las proximidades a 0 el vector tengas más nodos que en zonas más alejadas.

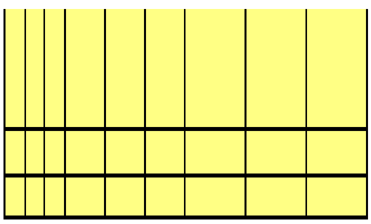

Ilustración 34: Ejemplo de mallado no equidistante

Como se observa en la imagen, en la zona de abajo a la izquierda concurren más puntos y menos espaciados que en el resto de la superficie. Esto se podría considerar un ejemplo de mallado no equiespaciado. A diferencia del método de diferencias finitas con un mallado equiespaciado explicado en la parte laminar, este método permite un análisis más riguroso en zonas cercanas al origen del sistema de coordenadas, esto es, un análisis muy fino en el borde de ataque de la placa en zonas cercanas a la superficie, donde se produce por primera vez la condición de adherencia del aire que viene sin perturbar del infinito, algo que en régimen turbulento es especialmente caótico, lo que precisa de más puntos para un buen análisis. El mallado Matlab quedaría como:

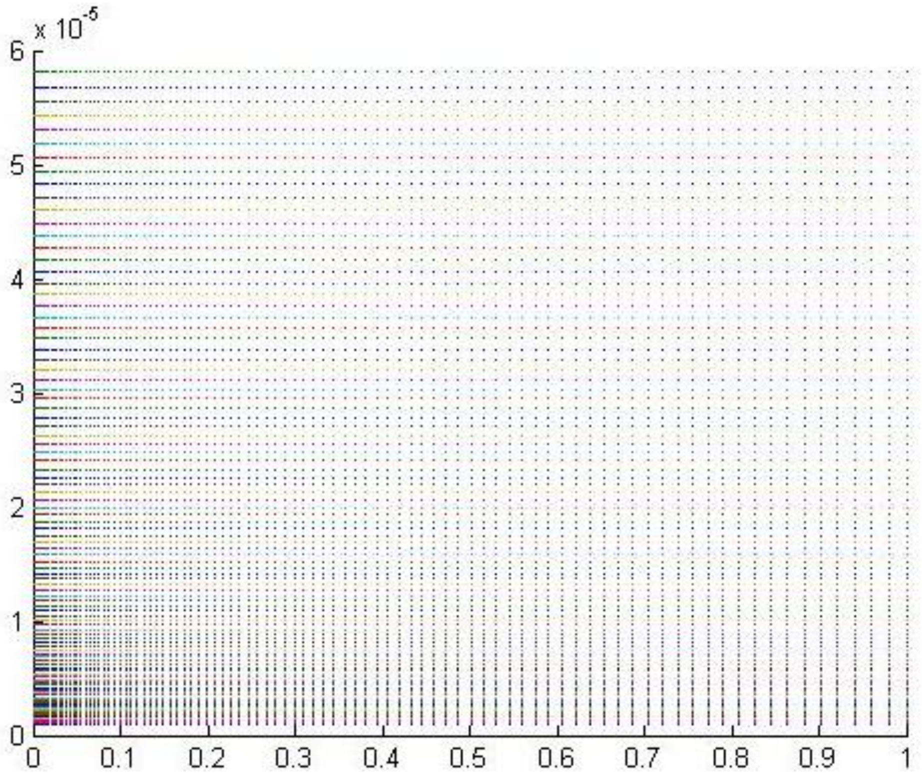

Ilustración 35: Ejemplo de mallado en matlab con más precisión en el origen de coordenadas

Analizando pues las ecuaciones con la adimensionalización y las ecuaciones numéricas propias de este método:

De la ecuación conservación de movimiento:

$$\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})\frac{u_j(x_n)-u_j(x_{n-1})}{h_x}+\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})\frac{u_{j+1}(x_n)-u_{j-1}(x_n)}{h_{y2}}$$
$$=\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial \mu^*}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\frac{u_{j+1}(x_n)-u_{j-1}(x_n)}{h_{y2}}+\mu^*{}_j(x_{n-1})\frac{2}{h_{y2}}\left[\frac{u_{j+1}(x_n)-u_j(x_n)}{h_y}-\frac{u_j(x_n)-u_{j-1}(x_n)}{h_{ym}}\right]\right]$$

Buscando una ecuación del tipo:

$$a_j u_{j-1}(x_n)+b_j u_j(x_n)+c_j u_{j+1}(x_n)=r_j$$

$$u_{j-1}(x_n)\left[-\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{h_{y2}}-\frac{\mu^*{}_j(x_{n-1})}{Re\ h_{y2}\ h_{ym}}+\frac{1}{Re\ h_{y2}}\frac{\partial\mu^*{}_j}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\right]$$
$$+u_j(x_n)\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})}{h_x}+\frac{2\mu^*{}_j(x_{n-1})}{Re\ h_{y2}}\left[\frac{1}{h_y}+\frac{1}{h_{ym}}\right]\right]$$
$$+u_{j+1}(x_n)\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{h_{y2}}-\frac{\mu^*{}_j(x_{n-1})}{Re\ h_{y2}\ hy}-\frac{1}{Re\ h_{y2}}\frac{\partial\mu^*{}_j}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\right]$$
$$=\rho_j(x_{n-1})\frac{\left[u_j(x_{n-1})\right]^2}{h_x}$$

Con lo que se obtiene que:

$$a_j=\left[-\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{h_{y2}}-\frac{\mu^*{}_j(x_{n-1})}{Re\ h_{y2}\ h_{ym}}+\frac{1}{Re\ h_{y2}}\frac{\partial\mu^*{}_j}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\right];$$

$$b_j=\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})}{h_x}+\frac{2\mu^*{}_j(x_{n-1})}{Re\ h_{y2}}\left[\frac{1}{h_y}+\frac{1}{h_{ym}}\right]\right];$$

$$c_j=\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{h_{y2}}-\frac{\mu^*{}_j(x_{n-1})}{Re\ h_{y2}\ \ h_y}-\frac{1}{Re\ h_{y2}}\frac{\partial\mu^*{}_j}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\right];$$

$$r_j=\rho_j(x_{n-1})\frac{\left[u_j(x_{n-1})\right]^2}{h_x}$$

Las condiciones de contorno son:

$$a(1)=a(M)=0;b(1)=b(M)=1;c(1)=c(M)=0;r(1)=0;r(M)=1;$$

La ecuación de la energía se expresa como:

$$\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})\frac{T_j(x_n)-T_j(x_{n-1})}{h_x}+\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})\frac{T_{j+1}(x_n)-T_{j-1}(x_n)}{h_{y2}}$$
$$=\frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\left[\frac{\partial k^*}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\frac{T_{j+1}(x_n)-T_{j-1}(x_n)}{h_{y2}}\right.$$
$$\left.+k^*{}_j(x_{n-1})\frac{2}{h_{y2}}\left[\frac{T_{j+1}(x_n)-T_j(x_n)}{h_y}-\frac{T_j(x_n)-T_{j-1}(x_n)}{h_{ym}}\right]\right]$$
$$+\frac{\gamma-1}{Re}M_\infty{}^2\ \mu^*{}_j\left[\frac{u_{j+1}(x_n)-u_{j-1}(x_n)}{h_{y2}}\right]^2$$

Buscando una ecuación del tipo:

$$d_jT_{j-1}(x_n)+e_jT_j(x_n)+f_jT_{j+1}(x_n)=h_j$$

$$T_{j-1}(x_n)\left[-\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{h_{y2}}-\frac{k^*{}_j(x_{n-1})}{Re\,\mathrm{Pr}\,h_{y2}\,h_{ym}}+\frac{1}{Re\,Pr\,h_{y2}}\frac{\partial k^*}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\right]$$
$$+T_j(x_n)\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})}{h_x}+\frac{2k^*{}_j(x_{n-1})}{Re\,\mathrm{Pr}\,h_{y2}}\left[\frac{1}{h_y}+\frac{1}{h_{ym}}\right]\right]$$
$$+T_{j+1}(x_n)\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{h_{y2}}-\frac{k^*{}_j(x_{n-1})}{Re\,\mathrm{Pr}\,h_{y2}\,hy}-\frac{1}{Re\,Pr\,h_{y2}}\frac{\partial k^*}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\right]$$
$$=\rho_j(x_{n-1})\frac{T_j(x_{n-1})}{h_x}u_j(x_{n-1})+\frac{\gamma-1}{Re}M_\infty{}^2\,\mu^*{}_j\left[\frac{u_{j+1}(x_n)-u_{j-1}(x_n)}{h_{y2}}\right]^2$$

Con lo que se obtiene que:

$$d_j=\left[-\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{h_{y2}}-\frac{k^*{}_j(x_{n-1})}{Re\,\mathrm{Pr}\,h_{y2}\,h_{ym}}+\frac{1}{Re\,Pr\,h_{y2}}\frac{\partial k^*}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\right];$$

$$e_j=\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})u_j(x_{n-1})}{h_x}+\frac{2k^*{}_j(x_{n-1})}{Re\,\mathrm{Pr}\,h_{y2}}\left[\frac{1}{h_y}+\frac{1}{h_{ym}}\right]\right];$$

$$f_j=\left[\frac{\rho_j(x_{n-1})v_j(x_{n-1})}{h_{y2}}-\frac{k^*{}_j(x_{n-1})}{Re\,\mathrm{Pr}\,h_{y2}\,h_y}-\frac{1}{Re\,Pr\,h_{y2}}\frac{\partial k^*}{\partial y}\bigg|_j(x_{n-1})\right];$$

$$h_j=\rho_j(x_{n-1})\frac{T_j(x_{n-1})}{h_x}u_j(x_{n-1})+\frac{\gamma-1}{Re}M_\infty{}^2\,\mu^*{}_j\left[\frac{u_{j+1}(x_n)-u_{j-1}(x_n)}{h_{y2}}\right]^2$$

Las condiciones de contorno dependen del caso de resolución que puede ser adiabático o de temperatura interpuesta. En el caso adiabático se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y_1}=0\rightarrow T_1-T_2=0$$

Las condiciones de contorno quedan como

$$d(1)=d(M)=0;e(1)=e(M)=1;f(1)=-1;f(M)=0;h(1)=0;h(M)=1;$$

En el caso de temperatura interpuesta, se debe fijar que la temperatura partícula que está tocando a la pared debe estar a la misma temperatura que la pared del sólido luego

$$T(y_1)=T_p$$

Luego las condiciones de contorno quedan como

$$d(1)=d(M)=0;e(1)=e(M)=1;f(1)=f(M)=0;h(1)=\frac{T_p}{T_\infty};h(M)=1;$$

3.6 Resultados

Al igual que en el caso laminar se puede comparar la programación con algunas gráficas provenientes de Schlichting.

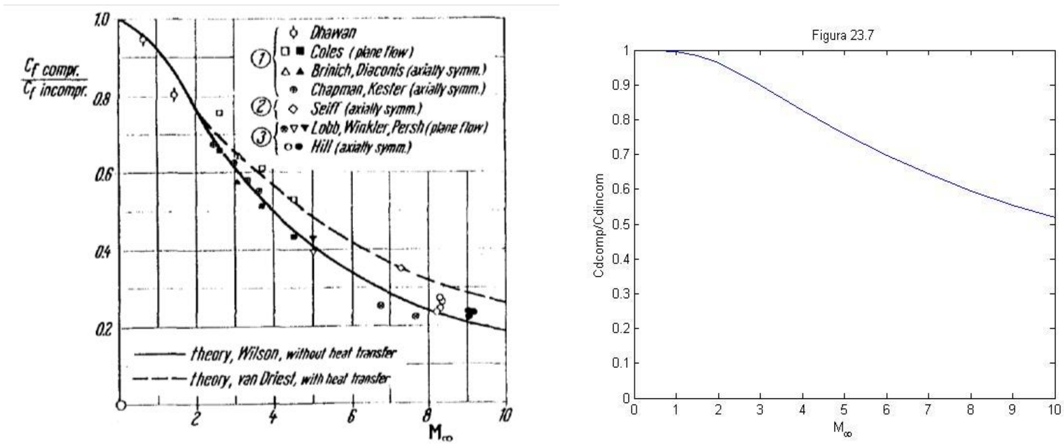

Ilustración 36: Imagen 23.7 del libro de Schlichting

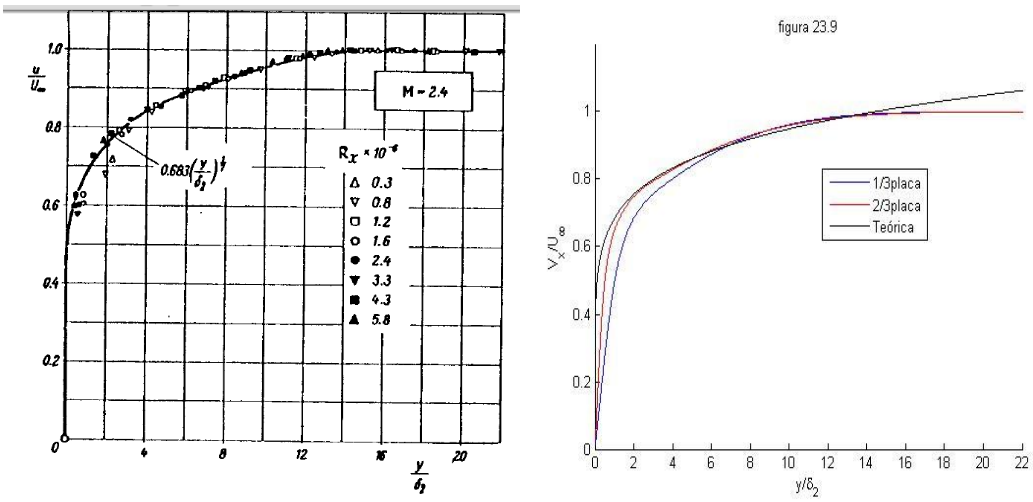

Ilustración 37: Fig 23.8 del libro de Schlichting. El 1 de la gráfica de la derecha equivale a 〖10〗^6 y el 4 a 〖10〗^9

Se puede apreciar como en ambos casos se capta bastante bien la tendencia pudiéndose representar cualitativamente las gráficas mediante la programación en Matlab. Sin embargo, en ambos casos se puede apreciar como cuantitativamente los resultados se separan un poco. Esto es debido a que Schlichting no aplica la ley de Sutherland.

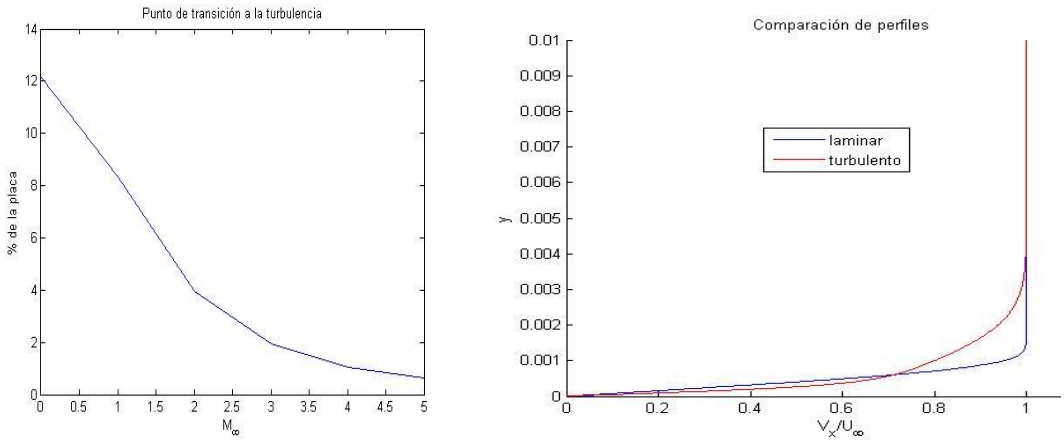

Ilustración 38: A la izquierda el punto de transición a turbulencia. A la derecha un perfil laminar frente a uno turbulento

Finalmente se muestran dos gráficas interesantes. A la izquierda se puede ver el punto de transición a la turbulencia frente al Mach y como disminuye con el Mach. Esto es debido a que conforme el Mach sube la fricción aumenta, lo que conlleva un aumento de la temperatura y por tanto del volumen de la capa límite alcanzando antes el espesor de capa límite que provoca el salto de laminar a turbulento.

A la derecha se muestra la comparación de un perfil laminar frente a uno turbulento, y se puede apreciar como el turbulento es más plano inicialmente y luego se vuelve más pronunciado de modo que si se representan juntos se cortan.

3.7 Bibliografía

Apuntes

Mecánica de fluidos II. Miguel Pérez-Saborid

Aerodinámica I. Jose Manuel Gordillo

Libros

Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos. Antonio Barrero y M. Pérez Saborid

Boundary Layer Theory. Schlichting

Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. Tuncer Cebeci

Web

https://www.youtube.com/watch?v=e1TbkLIDWys

https://www.youtube.com/watch?v=9TVz_Mdx26g

http://www.manualvuelo.com/PBV/PBV18.html

http://es.scribd.com/doc/97754499/METODO-DE-DIFERENCIAS-FINITAS-PARA-RESOLUCION-DE-PROBLEMAS-DE-CONTORNO#scribd

Anexo III: Programas

```
%%%Programa compresible turbulento no equiespaciado
clear all;close all;
clc;
%
Re=10^8; Tp_Tinf=1; Minf=2;
Pr=1; gam=1.4;
omega=1.5; sigma=1; CSuth=110/293;
%
%% Nyallado en x e y. N es para x y Ny para y
%
Nx=3000; x0=0. ; xmax=1;  xv(1:Nx)=(linspace(0,1,Nx)).^2;
xmin=0.00001; xv(1:Nx)=(linspace(sqrt(xmin),sqrt(xmax),Nx)).^2;
hx(1)=xv(1);hx(2:Nx)=xv(2:Nx)-xv(1:Nx-1);

Ny=3000; ymax=15/sqrt(Re);
yv(1:Ny)=(linspace(sqrt(0.0001),sqrt(ymax),Ny)).^3;
hy(1:(Ny-1))=yv(2:Ny)-yv(1:Ny-1);hy(Ny)=hy(Ny-1);
hym(1)=yv(1);hym(2:(Ny))=yv(2:(Ny))-yv(1:(Ny-1));hy2=hy+hym;
hy11=yv(2)-yv(1);hy22=yv(3)-yv(2);
f1=-hy22*(2*hy11+hy22)/hy11/hy22/(hy11+hy22);
f2=((hy11+hy22)^2)/hy11/hy22/(hy11+hy22);
f3=-hy11^2/hy11/hy22/(hy11+hy22);
%%% Condiciones iniciales:
unm1(1)=0; unm1(2:Ny)=1; vnm1(1:Ny)=0;
Tnm1(1)=Tp_Tinf; Tnm1(2:Ny)=1;
rhonm1(1:Ny)=1./Tnm1;
rhoinf=rhonm1(3);%cualquiera vale
uinf=1;
%
%
% Matriz para el calculo de v mediante la regla de los trapecios
%
% Trap(1:Ny,1:Ny)=hy*tril(ones(Ny,Ny))-0.5*hy*eye(Ny);
Trap(1:Ny,1)=0.5*hy;
%
for i=2:Ny,
%
    Trap(i,1:i-1)=hy(1:i-1)/2+hy(2:i)/2;
    Trap(i,1)=0.5*hy(i);
    Trap(i,i)=0.5*hy(i);
%
end
Trap(1,1)=0.5*hy(1);
% Resolucisn de ecuaciones
%
duyp(1)=0;
for n=2:Nx,
%
    hx=xv(n)-xv(n-1);
    vrhonm1(1:Ny)=rhonm1.*vnm1;
    urhonm1(1:Ny)=rhonm1.*unm1;
    munm1mol(1:Ny)=Tnm1.^omega.*((1+CSuth)./(Tnm1+CSuth)).^sigma;
    uast(n)=sqrt((4*unm1(2)-unm1(3)-
3*unm1(1))/(hy2(1))/Re*munm1mol(1));%Se añade el munm1 despecto a
incompresible
    delta1(n)=trapz(yv(1:Ny),(ones(1,Ny)-
(rhonm1(1:Ny).*unm1(1:Ny)./rhoinf/uinf)));
```

```
    nuRei(1:Ny)=min(0.41*(Re*uast(n)*yv-
9.7*tanh(Re*uast(n)*yv/9.7)),0.018*Re*uinf*delta1(n));
    munm1(1:Ny)=munm1mol.*(1+nuRei);
    dmuynm1(1)=(4*munm1(2)-munm1(3)-3*munm1(1))/hy2(1);
    dmuynm1(2:(Ny-1))=(munm1(3:Ny)-munm1(1:(Ny-2)))./hy2(2:(Ny-1));
    dmuynm1(Ny)=dmuynm1(Ny-1);

    cappanm1(1:Ny)=munm1mol.*(1+Pr*nuRei)/Pr;
    dcappaynm1(1)=(4*cappanm1(2)-cappanm1(3)-3*cappanm1(1))/hy2(1);
    dcappaynm1(2:(Ny-1))=(cappanm1(3:Ny)-cappanm1(1:(Ny-
2)))./hy2(2:(Ny-1));
    dcappaynm1(Ny)=dcappaynm1(Ny-1);
    %Coeficientes de viscosidad turbulenta

    a(1)=0; a(Ny)=0; %Condiciones de contorno
    a(2:(Ny-1))=-vrhonm1(2:(Ny-1))./hy2(2:(Ny-1))-2/Re./hy2(2:(Ny-
1))./hym(2:(Ny-1)).*munm1(2:(Ny-1))+1/Re./(hy2(2:(Ny-
1))).*dmuynm1(2:(Ny-1));
    b(1)=1; b(Ny)=1; %Condiciones de contorno
    b(2:(Ny-1))=urhonm1(2:(Ny-1))/hx+2/Re./hy2(2:(Ny-1)).*munm1(2:(Ny-
1)).*((1./hy(2:(Ny-1)))+(1./hym(2:(Ny-1))));
    c(1)=0;c(Ny)=0;%Condiciones de contorno
    c(2:(Ny-1))=vrhonm1(2:(Ny-1))./hy2(2:(Ny-1))-2/Re./hy2(2:(Ny-
1))./hy(2:(Ny-1)).*munm1(2:(Ny-1))-1/Re./(hy2(2:(Ny-
1))).*dmuynm1(2:(Ny-1));
    r(1)=0; r(Ny)=1;%Condiciones de contorno
    r(2:(Ny-1))=urhonm1(2:(Ny-1)).*unm1(2:(Ny-1))/hx;
%
    A=sparse(Ny,Ny);
    A(1,1)=b(1); A(1,2)=c(1);
    for k=2:(Ny-1),
        A(k,k-1)=a(k); A(k,k)=b(k); A(k,k+1)=c(k);
    end
    A(Ny,Ny-1)=a(Ny); A(Ny,Ny)=b(Ny);
%
%Resolucisn del sistema:
%
   un(1:Ny)=(A\r')';
   [xv(n)]
   plot(un,yv)
   axis([0 2 0 ymax])
   pause(0.01)
   hold off
%
% Temperatura
%
    d(1)=0;d(Ny)=0;%Condiciones de contorno
    d(2:(Ny-1))=-vrhonm1(2:(Ny-1))./hy2(2:(Ny-1))-2/Re/Pr./hy2(2:(Ny-
1))./hym(2:(Ny-1)).*cappanm1(2:(Ny-1))+1/Re/Pr./(hy2(2:(Ny-
1))).*dcappaynm1(2:(Ny-1));
    e(1)=1;e(Ny)=1;%Condiciones de contorno
    e(2:(Ny-1))=urhonm1(2:(Ny-1))/hx+2*cappanm1(2:(Ny-
1))/Pr/Re./hy2(2:(Ny-1)).*((1./hy(2:(Ny-1)))+(1./hym(2:(Ny-1))));
    f(1)=0;f(Ny)=0;%Condiciones de contorno
    f(2:(Ny-1))=vrhonm1(2:(Ny-1))./hy2(2:(Ny-1))-2/Re/Pr./hy2(2:(Ny-
1))./hy(2:(Ny-1)).*cappanm1(2:(Ny-1))-1/Re/Pr./(hy2(2:(Ny-
1))).*dcappaynm1(2:(Ny-1));
    h(1)=Tp_Tinf; h(Ny)=1;%Condiciones de contorno
    h(2:(Ny-1))=urhonm1(2:(Ny-1)).*Tnm1(2:(Ny-1))/hx+(gam-
1)*Minf^2/Re*munm1(2:(Ny-1)).*(un(3:Ny)-un(1:(Ny-2))).^2./(hy2(2:(Ny-
1))).^2;
```

```
%
%resuelve sistema
%
    C=sparse(Ny,Ny);
    C(1,1)=e(1);C(1,2)=f(1);
    for k=2:(Ny-1),
        C(k,k-1)=d(k);C(k,k)=e(k);C(k,k+1)=f(k);
    end
    C(Ny,Ny-1)=d(Ny);C(Ny,Ny)=e(Ny);
%
     Tn(1:Ny)=(C\h')';
     Tsol(n,:)=Tn(1:Ny);
%
%     plot(Tn,yv,'r')
%     axis([0 2 0 ymax])
%     pause(0.01)
%     hold off
%
% densidad:
%
    rhon(1:Ny)=1./Tn(1:Ny);%compresible
%    rhon(1:Ny)=1;%incompresible
%
    urhon(1:Ny)=rhon.*un;
    durhodxn(1:Ny)=(urhon(1:Ny)-urhonm1(1:Ny))/hx;
    vn(1:Ny)=-(Trap*durhodxn')'./rhon;
%
% %Fricción
%     cf=(un(2))/Re/hy;
%     Cf(n)=cf;
% Actualizo variables
%
    unm1(1:Ny)=un;
    vnm1(1:Ny)=vn;
    Tnm1(1:Ny)=Tn;
    rhonm1(1:Ny)=rhon;
%     [yv' rhonm1' Tnm1' unm1' munm1']
%     [un(1) unm1(1)]
%     pause
%
%
%     [yv' rhonm1' Tnm1' unm1' munm1']
%     [un(1) unm1(1)]
%     pause

    eta1(n,1:Ny)=yv.*sqrt(Re)/sqrt(xv(n));
    usol1(n,1:Ny)=un;
    Tsol1(n,1:Ny)=Tn;
    duyp(n)=f1*un(1)+f2*un(2)+f3*un(3);
    muy0(n)=munm1(1);
end
Cd=2/Re*trapz(xv(2:Nx),duyp(2:Nx).*muy0(2:Nx))
CD=Cd*sqrt(Re)
```

Capítulo IV: Conclusiones

4.1 Alcance de objetivos

Los objetivos de este proyecto se dividían en dos. Por un lado se buscaba ampliar los conocimientos turbulencia de la mecánica de fluidos, mediante la aplicación a una capa límite de compresibilidad y turbulencia. Por otro lado se buscaba un objetivo académico, en el cual se ponía de manifiesto como ha día de hoy es posible resolver problemas mediante codificación numérica, dando solución a problemas que hace 50 años eran muy tediosos de resolver y revolucionando la enseñanza en las aulas. Se puede decir que los objetivos han sido alcanzados.

En cuanto al lado de profundizar en conocimientos, a lo largo de este texto se ha podido ver como se han desarrollado ecuaciones para una capa límite compresible laminar y compresible turbulenta, mostrando la importancia de la densidad no constante en un problema de capa límite, algo de vital importancia en la ingeniería aeronáutico ya que el régimen compresible es el régimen de vuelo por excelencia. Además de los conocimientos de mecánica de fluidos adquiridos, también puede hablarse de adquisición de conocimientos numéricos, dado que es frecuente tratar los problemas de capa límite mediante el método de las líneas en las explicaciones académicas de las clases magistrales. En efecto, el método de las líneas es el método usado para la explicación de la capa límite, y el uso del método de diferencias finitas abre un sinfín de posibilidades y una mejora clara en la parte de estudio turbulento. Todos estos conocimientos físicos y matemáticos cobran especial relevancia en la ingeniería cuando pueden ser aplicados. A lo largo de este texto se ha intentado relacionar siempre los conceptos expuestos con aplicaciones de otros autores, en especial con las gráficas y estudios de Schlichting, pudiendo llegar a mostrar como mediante una codificación básica que es perfectamente realizable en un aula se puede representar teorías experimentales o bien cálculos muy complejos que fueron desarrollados nada más y nada menos que en 1955, y que en ese momento parecían tremendamente difíciles de representar.

En efecto, el final del párrafo anterior nos introduce de lleno en el segundo objetivo satisfecho, el objetivo académico. No hay duda de que este proyecto es la fiel representación de cómo la computación y los ordenadores han supuesto una revolución en el campo de las ciencias en general y de la ingeniería en particular. Mediante programas matlab se ha podido representar gráficas y resultados que en 1955 eran realmente complicados de obtener. Esto permite a día de hoy, exponer en las aulas teorías clásicas que antes los alumnos debían creer sin demostración alguna, y gracias a los ordenadores y métodos modernos, hoy en día pueden ser explicadas y perfectamente asimiladas por los alumnos, mejorando sin ninguna duda el nivel de la enseñanza en las escuelas técnicas de todo el mundo. La máxima representación de la evolución de la técnica con los ordenadores puede verse en este texto en la parte de resultados turbulentos. Como se ha dicho, la aparición de los ordenadores permite cálculos que hace 50 años eran imposibles de realizar, y el trascurso de los años permite ir mejorando los métodos y los instrumentos permitiendo desarrollar cada vez teorías más complejas. En este texto gracias a los métodos modernos es posible representar cualitativamente estudios turbulentos, algo que hace 50 años era impensable. Poco a poco los ordenadores han ido evolucionando, y con ellos los métodos numéricos, permitiendo calcular de una manera simple cosas que antes no se podían calcular, y con el tiempo, se podrán calcular cosas que a día de hoy todavía son complejas de resolver, permitiendo dentro de otros 50 años resolver computacionalmente problemas que a día de hoy requieren de un tiempo de computación muy alto y resolviendo en unos pocos segundos programas que a día de hoy tardan horas en ejecutarse.

Con todo lo expuesto, se puede decir que se han alcanzado los dos objetivos marcados inicialmente, y que este proyecto sirve de punto de partida para futuros proyectos o investigaciones que posiblemente mejorarán los resultados de este texto.