

Proyecto Fin de Carrera Ingeniería Aeronáutica

Control de guiado de aeronaves

Autor: Elena Elía Lérica

Tutor: Eduardo Fernández Camacho

**Dep. Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016



Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Aeronáutica

Control de guiado de aeronaves

Autor:

Elena Elía Lérica

Tutor:

Eduardo Fernández Camacho

Catedrático

Dep. de Ingeniería de Sistemas y Automática

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Proyecto Fin de Carrera: Control de guiado de aeronaves

Autor: Elena Elía Lérica

Tutor: Eduardo Fernández Camacho

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Agradecimientos

A mis padres, incondicionales siempre, apoyándome en todo y con total confianza en mí.

A mis hermanos, parte fundamental de mi vida.

A Ignacio, por ser mi principal compañero, por toda la ayuda mostrada siempre y, por supuesto, en las horas que hemos dedicado juntos a nuestros proyectos.

A mis alumnas, pequeñas por fuera pero muy grandes por dentro, por toda la energía que me transmiten y la alegría que despiertan en mí.

A todos mis seres queridos, familiares, amigos y compañeros.

A todo aquel del que pude aprender y quiso enseñarme, profesores y maestros que han participado en mi formación. En especial al tutor del presente proyecto, Eduardo, por su ayuda, comprensión y más que agradable trato.

La vida es un proceso continuo de aprendizaje, y el fin de esta etapa solo constituye un punto seguido en dicho proceso.

Elena Elía Lérica

Sevilla, 2016

Resumen

El presente proyecto tiene como fin proporcionar una herramienta para los alumnos de Sistemas de Control y Guiado, y asignaturas similares, que sea útil para poner en práctica los contenidos estudiados en dicha asignatura. Con este objetivo, usando Matlab y Simulink, se van a realizar tres aplicaciones distintas: un sistema de control y guiado para un modelo no lineal de aeronave, un sistema de control de actitud con sistema de aumento de estabilidad (SAS) para un modelo lineal y la implementación en el modelo no lineal del sistema de control de actitud con sistema de aumento de estabilidad obtenido para el modelo lineal.

Abstract

This project aims to provide students of control and guidance systems, and similar courses, with a tool which is useful to implement the contents studied in the above mentioned course. To this aim, and using Matlab and Simulink, three different applications will be performed: a control and guidance system for a nonlinear aircraft model, an attitude control with a stability augmentation system (SAS) for a linear model and the implementation of the attitude control with stability augmentation system for a linear model in the nonlinear model.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xix
Notación	xxiii
1 Introducción	1
1.1 <i>Objetivos</i>	1
1.2 <i>Estructura del documento</i>	1
2 Ecuaciones generales de la aeronave	3
2.1 <i>Consideraciones previas</i>	3
2.1.1 Hipótesis generales	3
2.1.2 Sistemas de referencia	3
2.1.3 Variables de estado	7
2.1.4 Variables de control	9
2.1.5 Modelo de atmósfera	9
2.2 <i>Ecuaciones de movimiento</i>	10
2.2.1 Ecuaciones cinemáticas	10
2.2.2 Ecuaciones dinámicas	11
2.3 <i>Modelo de fuerzas y momentos</i>	13
2.3.1 Fuerzas	13
2.3.2 Momentos	16
2.4 <i>Conclusiones</i>	17
3 Modelo lineal	19
3.1 <i>Cálculo de las condiciones de equilibrio (trim)</i>	19
3.2 <i>Linealización de las ecuaciones de movimiento</i>	21
3.2.1 Dinámica longitudinal	23
3.2.2 Dinámica lateral	26
3.3 <i>Conclusiones</i>	29
4 Estabilidad y control	31
4.1 <i>Estabilidad dinámica</i>	31

4.1.1	Estabilidad dinámica longitudinal	32
4.1.2	Estabilidad dinámica lateral	33
4.2	<i>Sistema de aumento de estabilidad</i>	34
4.3	<i>Controlador PID</i>	35
4.4	<i>Conclusiones</i>	35
5	Implementación en Simulink	37
5.1	<i>Características de la aeronave</i>	37
5.2	<i>Modelo no lineal</i>	38
5.2.1	Implementación del modelo de aeronave	38
5.2.2	Control de velocidad y actitud	40
5.2.3	Guiado a un punto fijo	41
5.3	<i>Modelo lineal</i>	43
5.3.1	Implementación del modelo linealizado	43
5.3.2	Estabilidad dinámica	47
5.3.3	Sistema de Aumento de Estabilidad	48
5.3.4	Control de actitud	50
5.4	<i>Conclusiones</i>	51
6	Aplicaciones	53
6.1	<i>Aplicación 1</i>	53
6.1.1	Funcionamiento del modelo no lineal	54
6.1.2	Control de velocidad y actitud	60
6.1.3	Guiado a blanco fijo	62
6.2	<i>Aplicación 2</i>	64
6.2.1	Funcionamiento del modelo lineal	66
6.2.2	Sistema de aumento de estabilidad	73
6.2.3	Control de actitud con SAS	78
6.3	<i>Aplicación 3</i>	79
6.4	<i>Conclusiones</i>	82
7	Conclusiones finales	83
	Referencias	85
	Anexo A: Funciones de Matlab	87
A.1	<i>Trim</i>	87
A.2	<i>Sistema de Aumento de Estabilidad</i>	96
A.3	<i>Gráficas de la aplicación 1</i>	96
A.4	<i>Gráficas de la aplicación 2</i>	100
A.5	<i>Gráficas de la aplicación 3</i>	103

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Variables de estado.	7
Tabla 2.2 Variables de control.	9
Tabla 2.3 Constantes del modelo de atmósfera ISA.	10
Tabla 3.1 Coeficientes de la dinámica longitudinal correspondientes a X .	25
Tabla 3.2 Coeficientes de la dinámica longitudinal correspondientes a Y .	25
Tabla 3.3 Coeficientes de la dinámica longitudinal correspondientes a M .	26
Tabla 3.4 Coeficientes de la dinámica lateral correspondientes a Y .	28
Tabla 3.5 Coeficientes de la dinámica lateral correspondientes a L .	28
Tabla 3.6 Coeficientes de la dinámica lateral correspondientes a N .	29
Tabla 5.1 Datos máxicos, geométricos y del motor.	37
Tabla 5.2 Límites de actuación.	37
Tabla 5.3 Coeficientes aerodinámicos.	38
Tabla 5.4 Controladores PID del modelo no lineal.	40
Tabla 5.5 Límites de las variables de estado y control.	44
Tabla 5.6 Variables de estado en el punto de equilibrio para vuelo recto a 1000 m y 27 m/s .	44
Tabla 5.7 Variables de control en el punto de equilibrio para vuelo recto a 1000 m y 27 m/s .	44
Tabla 5.8 Entradas, salidas y estado de las dinámicas longitudinal y lateral.	46
Tabla 5.9 Autovalores originales y deseados de la dinámica longitudinal.	49
Tabla 5.10 Autovalores originales y deseados de la dinámica lateral.	49
Tabla 5.11 Controladores PID del modelo lineal.	51

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Sistema topocéntrico inercial.	4
Figura 2.2 Sistema de ejes cuerpo.	4
Figura 2.3 Sistema de horizonte local.	4
Figura 2.4 Ángulo de guiñada.	5
Figura 2.5 Ángulo de cabeceo.	5
Figura 2.6 Ángulo de balance.	6
Figura 2.7 Velocidades lineales y angulares.	7
Figura 2.8 Ángulo de ataque.	8
Figura 2.9 Ángulo de resbalamiento.	8
Figura 2.10 Superficies de control.	9
Figura 2.11 Fuerzas aerodinámicas	15
Figura 2.12 Diagrama de bloques de las ecuaciones generales de la aeronave.	18
Figura 4.1 Tipo de comportamiento según el carácter del autovalor.	32
Figura 4.2 Modos de la dinámica longitudinal.	33
Figura 4.3 Modos de la dinámica lateral.	33
Figura 4.4 Diagrama del sistema de aumento de estabilidad.	34
Figura 4.5 Esquema básico de control PID.	35
Figura 5.1 Diagrama de bloques del modelo no lineal.	39
Figura 5.2 Modelo no lineal.	39
Figura 5.3 Control de velocidad y actitud en el modelo no lineal.	41
Figura 5.4 Sistema de guiado del modelo no lineal.	42
Figura 5.5 Ángulos de referencia.	43
Figura 5.6 Diagrama de bloques de la dinámica longitudinal.	45
Figura 5.7 Diagrama de bloques de la dinámica lateral.	46
Figura 5.8 Diagrama de bloques del modelo lineal.	46
Figura 5.9 Autovalores de la dinámica longitudinal.	47
Figura 5.10 Autovalores de la dinámica lateral.	48
Figura 5.11 Modelo lineal con sistema de aumento de estabilidad.	50

Figura 5.12 Control de actitud en el modelo lineal.	51
Figura 6.1 Sistema de control y guiado a un punto fijo del modelo no lineal.	54
Figura 6.2 Modelo no lineal con entradas desconectadas.	55
Figura 6.3 Modelo no lineal.	55
Figura 6.4 Bloque integrador.	56
Figura 6.5 Caída libre.	57
Figura 6.6 Trayectoria parabólica.	58
Figura 6.7 Movimiento parabólico.	58
Figura 6.8 Modelo NL con entrada constante en la señal de empuje.	59
Figura 6.9 Ascenso.	60
Figura 6.10 Modelo no lineal con control de actitud y velocidad.	61
Figura 6.11 Variables controladas y referencias del modelo no lineal.	62
Figura 6.12 Sistema de control y guiado del modelo no lineal.	63
Figura 6.13 Trayectoria de la aeronave y blanco fijo.	64
Figura 6.14 Coordenadas de la aeronave y del blanco fijo.	64
Figura 6.15 Control con sistema de aumento de estabilidad del modelo lineal.	65
Figura 6.16 Variables de estado en el punto de equilibrio	66
Figura 6.17 Modelo lineal con las entradas desconectadas.	67
Figura 6.18 Modelo lineal con escalón en el elevador.	68
Figura 6.19 Respuesta a un escalón en el elevador.	68
Figura 6.20 Modo de corto periodo	69
Figura 6.21 Modo fugoide	69
Figura 6.22 Modelo lineal con escalón en el empuje.	70
Figura 6.23 Respuesta a un escalón en el empuje.	70
Figura 6.24 Modelo lineal con escalón en los alerones.	71
Figura 6.25 Respuesta a un escalón en los alerones.	71
Figura 6.26 Modelo lineal con escalón en el timón de dirección.	72
Figura 6.27 Respuesta a un escalón en el timón de dirección.	72
Figura 6.28 Modelo lineal con el sistema de aumento de estabilidad conectado.	73
Figura 6.29 Modelo lineal y SAS con escalón en el elevador.	74
Figura 6.30 Respuesta del sistema con SAS ante un escalón en el elevador.	74
Figura 6.31 Modelo lineal y SAS con escalón en el empuje.	75
Figura 6.32 Respuesta del sistema con SAS ante un escalón en el empuje.	75

Figura 6.33 Modelo lineal y SAS con escalón en el alerón.	76
Figura 6.34 Respuesta del sistema con SAS ante un escalón en el alerón.	76
Figura 6.35 Modelo lineal y SAS con escalón en el timón de dirección.	77
Figura 6.36 Respuesta del sistema con SAS ante un escalón en el timón de dirección.	77
Figura 6.37 Control de actitud con SAS en el modelo lineal.	78
Figura 6.38 Variables controladas y referencias del modelo lineal.	79
Figura 6.39 Control de actitud con SAS en el modelo no lineal.	80
Figura 6.40 Variables controladas y referencias del modelo no lineal con SAS. Simulación 1.	81
Figura 6.41 Variables controladas y referencias del modelo no lineal con SAS. Simulación 2.	82

Notación

α	Ángulo de ataque
b	Envergadura
β	Ángulo de resbalamiento
c	Cuerda aerodinámica media
C_D	Coefficiente de resistencia aerodinámica
C_l	Coefficiente de momento de balanceo
C_L	Coefficiente de sustentación
C_m	Coefficiente de momento de cabeceo
C_n	Coefficiente de momento de guiñada
C_{prop}	Coefficiente aerodinámico para el motor
C_X	Coefficiente de fuerzas aerodinámicas en el eje x de sistema de ejes cuerpo
C_Y	Coefficiente de fuerzas aerodinámicas en el eje y de sistema de ejes cuerpo
C_Z	Coefficiente de fuerzas aerodinámicas en el eje z de sistema de ejes cuerpo
d	Distancia entre un punto fijo y la aeronave
δ_a	Señal de control de la deflexión de los alerones
δ_e	Señal de control de la deflexión del elevador
δ_r	Señal de control de la deflexión del timón de dirección
δ_t	Señal de control del empuje
D	Fuerza de resistencia
\vec{F}	Vector de fuerzas externas aplicadas en la aeronave, cuyas componentes son X, Y y Z
\vec{F}_A	Vector de fuerzas aerodinámicas aplicadas en la aeronave, cuyas componentes son X_A, Y_A y Z_A
F_D	Fuerza de resistencia aerodinámica
\vec{F}_g	Vector de fuerzas de gravedad aplicadas en la aeronave, cuyas componentes son X_g, Y_g y Z_g
F_L	Fuerza de sustentación
\vec{F}_P	Vector de fuerzas de propulsión aplicadas en la aeronave, cuyas componentes son X_P, Y_P y Z_P
g	Aceleración de la gravedad
Γ_*	Productos de inercia
h	Altitud: $h = -p_z$
$(\vec{i}_B, \vec{j}_B, \vec{k}_B)$	Vectores unitarios del sistema de ejes cuerpo
$(\vec{i}_H, \vec{j}_H, \vec{k}_H)$	Vectores unitarios del sistema horizonte local
$(\vec{i}_I, \vec{j}_I, \vec{k}_I)$	Vectores unitarios del sistema topocéntrico inercial

\bar{I}	Tensor de inercias. Los elementos de tensor se denotan como I_x, I_y, I_z, I_{xz}
k_D	Ganancia derivativa del PID
k_I	Ganancia integral del PID
k_{motor}	Constante que especifica la eficiencia del motor
k_P	Ganancia proporcional del PID
L	Momento de balance
λ	Autovalor
m	Masa de la aeronave
M	Momento de cabeceo
\vec{M}	Vector de momentos externos aplicados en la aeronave
\vec{M}_A	Vector de momentos aerodinámicos externos aplicados en la aeronave cuyas componentes son L, M y N
N	Momento de guiñada
p	Velocidad angular de la aeronave según una rotación alrededor de \vec{i}_B
p_x	Posición de la aeronave en el sistema de referencia inercial según \vec{i}_I
p_y	Posición de la aeronave en el sistema de referencia inercial según \vec{j}_I
p_z	Posición de la aeronave en el sistema de referencia inercial según \vec{k}_I
ϕ	Ángulo de balance
ψ	Ángulo de guiñada
q	Velocidad angular de la aeronave según una rotación alrededor de \vec{j}_B
r	Velocidad angular de la aeronave según una rotación alrededor de \vec{k}_B
ρ	Densidad del aire
$R^{b \leftarrow a}$	Matriz de rotación del sistema a al sistema b
S	Superficie del ala
S_B	Sistema de referencia ejes cuerpo
S_H	Sistema de referencia horizonte local
S_I	Sistema de referencia topocéntrico inercial
S_{motor}	Área del motor
S_{V_1}	Sistema de referencia auxiliar 1
S_{V_2}	Sistema de referencia auxiliar 2
T	Temperatura del aire
θ	Ángulo de cabeceo
u	Velocidad de la aeronave en ejes cuerpo según \vec{i}_B
u_{lat}	Vector de las variables de control de la dinámica lateral: $u_{lat} = (\delta_a, \delta_r)^T$
u_{lon}	Vector de las variables de control de la dinámica longitudinal: $u_{lon} = (\delta_e, \delta_t)^T$
v	Velocidad de la aeronave en ejes cuerpo según \vec{j}_B
\vec{V}_a	Vector velocidad aerodinámica
V_a	Velocidad aerodinámica absoluta
w	Velocidad de la aeronave en ejes cuerpo según \vec{k}_B
x	Variables de estado
x_{lat}	Variables de estado de la dinámica lateral: $x_{lat} = (v, p, r, \phi, \psi)^T$

x_{lon}	Variables de estado de la dinámica longitudinal: $x_{lon} = (u, w, q, \theta, p_z)^T$
x_E	Variable en el punto de equilibrio
\bar{x}	Incremento de las variables respecto al punto de equilibrio: $\bar{x} = x - x_E$
X_*	Coefficientes del espacio de estados asociados a la dinámica longitudinal para X
Y_*	Coefficientes del espacio de estados asociados a la dinámica lateral para Y
Z_*	Coefficientes del espacio de estados asociados a la dinámica longitudinal para Z

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Objetivos

El objetivo del presente trabajo es elaborar una herramienta para la práctica de los alumnos en asignaturas de Sistema de Control y Guiado y similares. Con el fin de que los alumnos puedan implementar los contenidos estudiados en dicha asignatura, se van a elaborar tres aplicaciones:

1. La primera de ellas consiste en realizar un sistema de control de actitud y velocidad, de modo que la aeronave siga unas referencias marcadas de los tres ángulos que definen la actitud de la aeronave y de la velocidad longitudinal, además de implementar un sistema de guiado que proporcione dichas referencias en dos de sus ángulos. Para ello, será necesario partir de un modelo que recoja el comportamiento físico del problema y que se acerque lo más posible a la realidad, de modo que se tratará de un modelo no lineal complejo con alto acoplamiento entre las variables.
2. La segunda trata de realizar un sistema de aumento de estabilidad y de control de actitud para un modelo más sencillo, que se obtendrá linealizando el modelo no lineal y descomponiendo el movimiento en una parte longitudinal y una lateral. Dicho modelo lineal se obtendrá para un punto de operación concreto y solo será válido en el entorno de dicho punto. Al someter este modelo a perturbaciones del equilibrio, se producen oscilaciones que son debidas a los modos propios del sistema. Alterando estos modos pueden eliminarse, o al menos reducirse, dichas oscilaciones. De esto se encarga el sistema de aumento de estabilidad. El control de actitud permitirá a la aeronave alcanzar las referencias marcadas de las perturbaciones de los tres ángulos que definen la actitud.
3. Por último, la tercera de las aplicaciones consiste en implementar los resultados obtenidos en la segunda aplicación en el modelo de la primera, esto es, implementar el sistema de aumento de estabilidad y control de actitud obtenidos para el modelo lineal en el modelo no lineal. Como se ha comentado, el modelo no lineal es complejo debido al fuerte acoplamiento entre variables, por ello, para técnicas avanzadas de control y guiado es necesario trabajar con modelos linealizados. A su vez, el modelo lineal realiza grandes simplificaciones, lo que lo aleja de la realidad, por lo que es necesario comprobar que los resultados obtenidos en dicho modelo linealizado son válidos en el modelo no lineal, que se acerca más al comportamiento real del sistema.

El desarrollo de estas aplicaciones se va a realizar con los entornos de programación Matlab y Simulink.

1.2 Estructura del documento

Para poder llevar a cabo estos los objetivos presentados, se ha estructurado el documento como se indica a continuación.

En primer lugar, en el capítulo 2: *Ecuaciones generales de la aeronave*, se resuelve la necesidad de obtener un modelo matemático que traduzca el comportamiento físico del problema. Para ello, se obtienen las ecuaciones cinemáticas y dinámicas y se modelan las fuerzas y momentos que actúan en la aeronave.

En segundo lugar, en el capítulo 3: *Modelo lineal*, se linealizan estas ecuaciones y se obtiene un modelo lineal con las dinámicas longitudinal y lateral desacopladas. Dicho modelo lineal requiere de un punto de equilibrio. La rutina para obtener dicho punto también se explica en este capítulo.

A continuación, en el capítulo 4: *Estabilidad y control*, se hace una introducción a la estabilidad dinámica de los aviones y se explica cómo realizar un Sistema de Aumento de Estabilidad para mejorarla. Por otro lado, se presenta el controlador PID, que será el que se usará para los sistemas de control de actitud y velocidad. Dichos controladores son sencillos de implementar y para el nivel de control que se aborda en este proyecto obtiene buenos resultados.

Una vez obtenidos los modelos y explicado las herramientas para el estudio de la estabilidad y control, en el capítulo 4: *Implementación en Simulink*, se explica cómo llevar estas herramientas al entorno Simulink.

Posteriormente, se llega a la parte fundamental de este proyecto en el capítulo 6: *Aplicaciones*, donde se presentan las distintas aplicaciones a las que se pretendía llegar y se explica cómo usarlas y cómo realizar distintas simulaciones con ellas.

Por último, en el capítulo 7: *Conclusiones finales*, se hace un sumario de todo lo obtenido en el presente proyecto y un análisis de los resultados obtenidos.

2 ECUACIONES GENERALES DE LA AERONAVE

El primer paso que se debe dar al estudiar problemas de control como el que se pretende en este documento es la obtención de un modelo matemático que recoja el comportamiento físico de la aeronave. En este capítulo se obtendrán las ecuaciones generales de la aeronave con el objetivo de relacionar el movimiento de ésta con las fuerzas que actúan sobre ella.

En el apartado 2.1 se tratarán algunas consideraciones previas a tener en cuenta (hipótesis generales, sistemas de referencia, variables de estado, superficies de control y modelo de atmósfera). En el apartado 2.2 se obtendrán las ecuaciones cinemáticas que relacionan posición lineal y angular con velocidad lineal y angular respectivamente, y las ecuaciones dinámicas que relacionan las velocidades lineales y angulares con las fuerzas y momentos aplicados. En el apartado 2.3 se desarrollan los modelos de fuerzas y momentos que actúan sobre la aeronave.

2.1 Consideraciones previas

2.1.1 Hipótesis generales

Para obtención del modelo, se van a realizar las siguientes hipótesis simplificativas:

- Se considera la aeronave como un sólido rígido de 6 grados de libertad.
- La aeronave es simétrica con respecto al plano XZ.
- La masa de la aeronave se mantiene constante, despreciando así el consumo de combustible.
- Se utilizará un modelo de tierra plana, por lo que el sistema topocéntrico se considera inercial.
- La gravedad se considera constante.
- No se considerará el viento, por lo que la velocidad respecto a tierra \vec{V}_g coincide con la velocidad aerodinámica \vec{V}_a .

2.1.2 Sistemas de referencia

Se van a definir tres sistemas de referencia principales: un sistema topocéntrico inercial, que se usará para expresar la posición de la aeronave, un sistema de ejes cuerpo, esto es, ligado a la aeronave, donde se expresarán las fuerzas y momentos actuantes, y un sistema de referencia de horizonte local, paralelo al sistema topocéntrico y con origen en el centro de masas de la aeronave, que se usará para expresar la actitud de la misma.

- Sistema topocéntrico inercial (S_I) con el centro en cualquier punto de la tierra y sus vectores unitarios $[\vec{i}_I, \vec{j}_I, \vec{k}_I]$ orientados hacia el norte, este e interior de la tierra respectivamente.

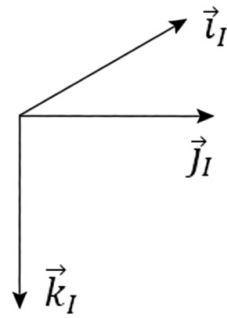


Figura 2.1 Sistema topocéntrico inercial.

- Sistema de ejes cuerpo (S_B) con el centro en el centro de gravedad de la aeronave y sus vectores unitarios $[\vec{i}_B, \vec{j}_B, \vec{k}_B]$ en el plano de simetría apuntando hacia el morro (\vec{i}_B), en dirección al ala derecha (\vec{j}_B) y en el plano de simetría apuntando hacia la parte inferior de la aeronave (\vec{k}_B).

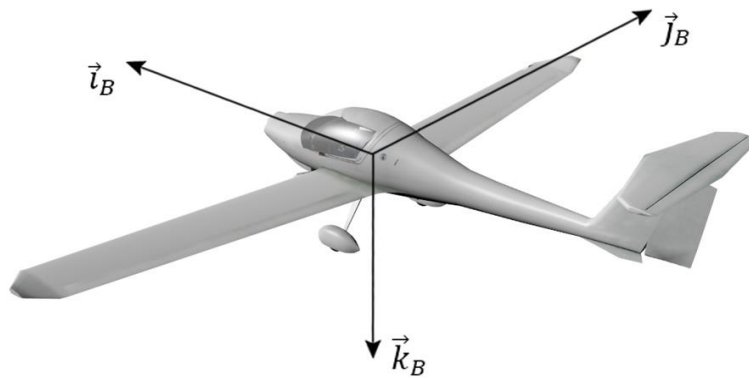


Figura 2.2 Sistema de ejes cuerpo.

- Sistema de horizonte local (S_H) con el centro en el centro de masas de la aeronave y sus vectores unitarios $[\vec{i}_H, \vec{j}_H, \vec{k}_H]$ paralelos a los vectores unitarios del sistema topocéntrico inercial, es decir, orientados hacia el norte, este e interior de la tierra.

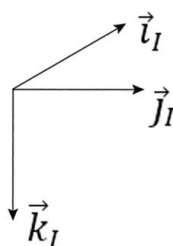
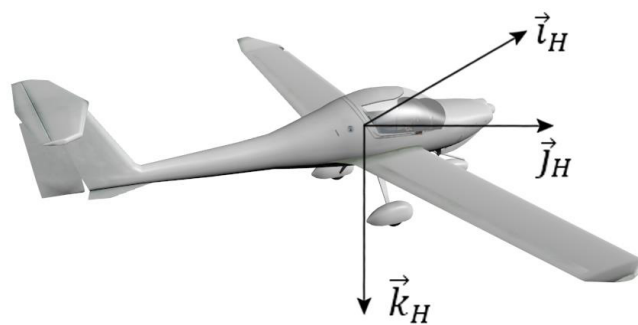


Figura 2.3 Sistema de horizonte local.

Los sistemas de referencia topocéntrico inercial y horizonte local están relacionados por una traslación, mientras que para pasar de cualquiera de estos sistemas al sistema de ejes cuerpo es necesario realizar rotaciones. Para ello se emplean los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) , los cuales definen la actitud de la aeronave:

- Ángulo de guiñada o yaw (ψ), formado por \vec{i}_H y la proyección de \vec{i}_B sobre el plano horizonte local. Para representarlo se utiliza un sistema de referencia auxiliar (S_{V_1}) resultante de rotar el sistema horizonte local S_H un ángulo ψ en torno a \vec{k}_H en sentido positivo.

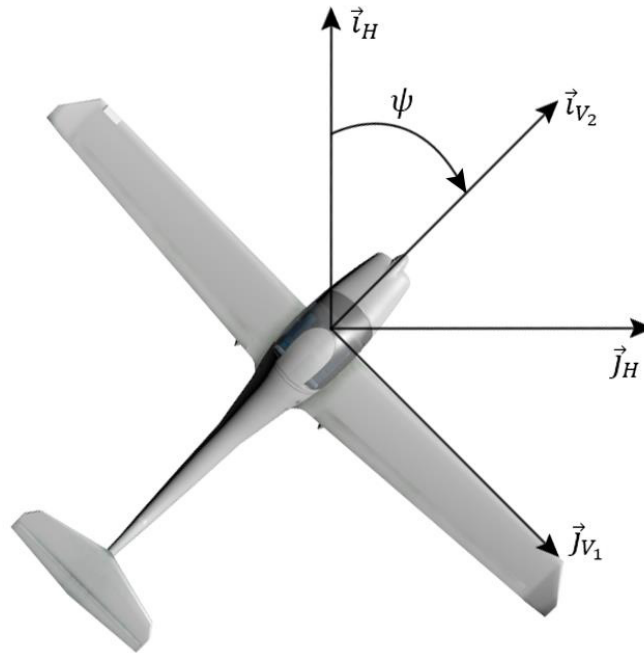


Figura 2.4 Ángulo de guiñada.

- Ángulo de cabeceo o pitch (θ), formado por \vec{i}_B y el plano horizonte local. Para representarlo se usa un nuevo sistema de referencia auxiliar (S_{V_2}) resultante de rotar el sistema S_{V_1} un ángulo θ en torno a \vec{j}_{V_1} en sentido positivo.

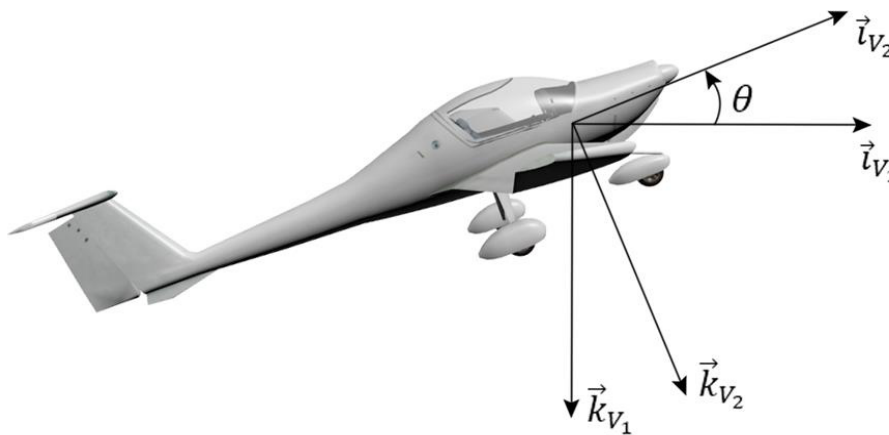


Figura 2.5 Ángulo de cabeceo.

- Ángulo de balance o roll (ϕ), formado por \vec{j}_B y la intersección del plano $\vec{j}_B\vec{k}_B$ con el plano horizonte local. El sistema de ejes cuerpo resulta de rotar el sistema S_{V_2} un ángulo ϕ en torno a $\vec{l}_{V_2} \equiv \vec{l}_B$ en sentido positivo.

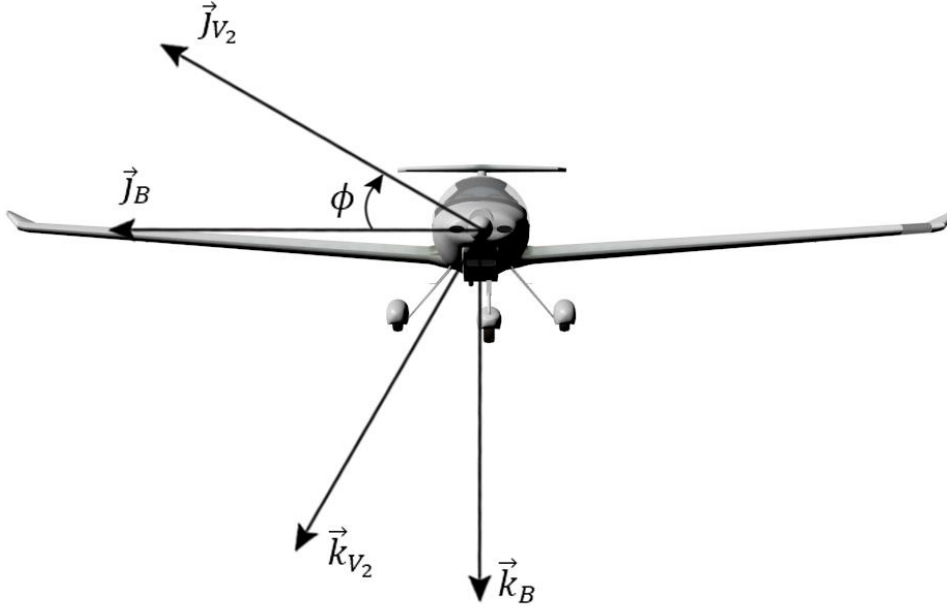


Figura 2.6 Ángulo de balance.

Para obtener el conjunto de ecuaciones cinemáticas y dinámicas que definen el movimiento de la aeronave, es necesario expresar todas las variables en un mismo sistema de referencia, este será el sistema de ejes cuerpo. Puesto que la orientación de la aeronave viene definida en ejes cuerpo, se necesitan las matrices de transformación para pasar del sistema horizonte local al sistema ejes cuerpo ($R^{B \leftarrow H}$). Ésta se obtiene a partir de las rotaciones de los sistemas de referencia auxiliares definidos anteriormente en los ángulos de Euler.

$$R^{B \leftarrow H} = R^{B \leftarrow V_2} R^{V_2 \leftarrow V_1} R^{V_1 \leftarrow H} \quad (2.1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde $c\chi = \cos\chi$ y $s\chi = \sin\chi$.

Por otro lado, también será necesario obtener la matriz de transformación del sistema de ejes cuerpo al sistema topocéntrico inercial ($R^{I \leftarrow B}$). Puesto que dicho sistema inercial y el de horizonte local son paralelos, la transformación $R^{I \leftarrow B}$ coincide con $R^{H \leftarrow B}$, y puesto que las matrices son ortonormales se tiene:

$$R^{I \leftarrow B} = R^{H \leftarrow B} = (R^{B \leftarrow H})^{-1} = (R^{B \leftarrow H})^T \quad (2.4)$$

2.1.3 Variables de estado

En las ecuaciones de movimiento de la aeronave intervienen doce variables de estado: tres de posición y tres de velocidad asociadas al movimiento de traslación, y tres de posición angular y de velocidad angular asociados al movimiento de rotación. Estas variables se muestran en la siguiente tabla:

Nombre	Descripción
p_x	Posición de la aeronave en el sistema de referencia inercial según \vec{l}_I
p_y	Posición de la aeronave en el sistema de referencia inercial según \vec{j}_I
p_z	Posición de la aeronave en el sistema de referencia inercial según \vec{k}_I (altitud negativa)
u	Velocidad de la aeronave en ejes cuerpo según \vec{l}_B
v	Velocidad de la aeronave en ejes cuerpo según \vec{j}_B
w	Velocidad de la aeronave en ejes cuerpo según \vec{k}_B
ϕ	Ángulo de balance definido respecto al sistema de referencia auxiliar S_{V_2}
θ	Ángulo de cabeceo definido respecto al sistema de referencia auxiliar S_{V_1}
ψ	Ángulo de guiñada definido respecto al sistema de referencia de ejes cuerpo
p	Velocidad angular de la aeronave según una rotación alrededor de \vec{l}_B
q	Velocidad angular de la aeronave según una rotación alrededor de \vec{j}_B
r	Velocidad angular de la aeronave según una rotación alrededor de \vec{k}_B

Tabla 2.1 Variables de estado.

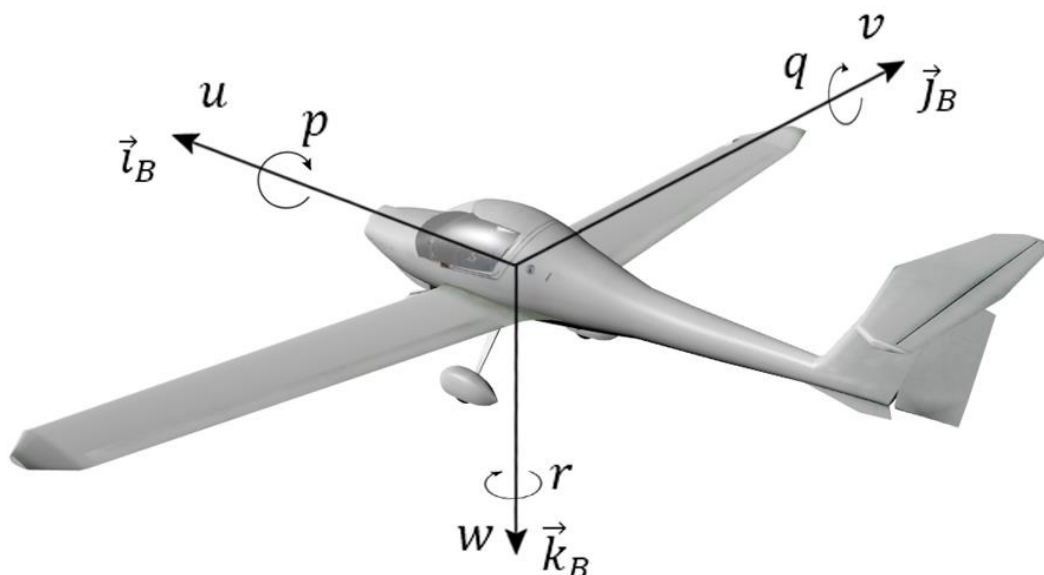


Figura 2.7 Velocidades lineales y angulares.

Además de estas doce variables, también se emplearán las correspondientes al ángulo de ataque y ángulo de resbalamiento. Siendo \vec{V}_a el vector velocidad absoluta en ejes cuerpo cuyo módulo es

$$V_a = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (2.5)$$

Se define el ángulo de ataque (α) como el ángulo formado entre \vec{l}_B y la proyección de la velocidad absoluta en el plano de simetría del avión (plano $X_B Z_B$):

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right) \quad (2.6)$$

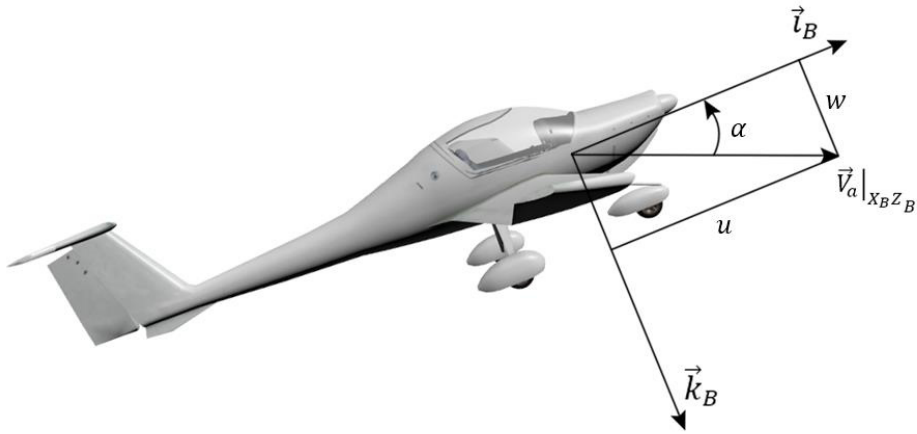


Figura 2.8 Ángulo de ataque.

Se define el ángulo de resbalamiento (β) como el ángulo formado por \vec{V}_a y el plano de simetría del avión (plano $X_B Z_B$):

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{v}{V_a} \right) \quad (2.7)$$

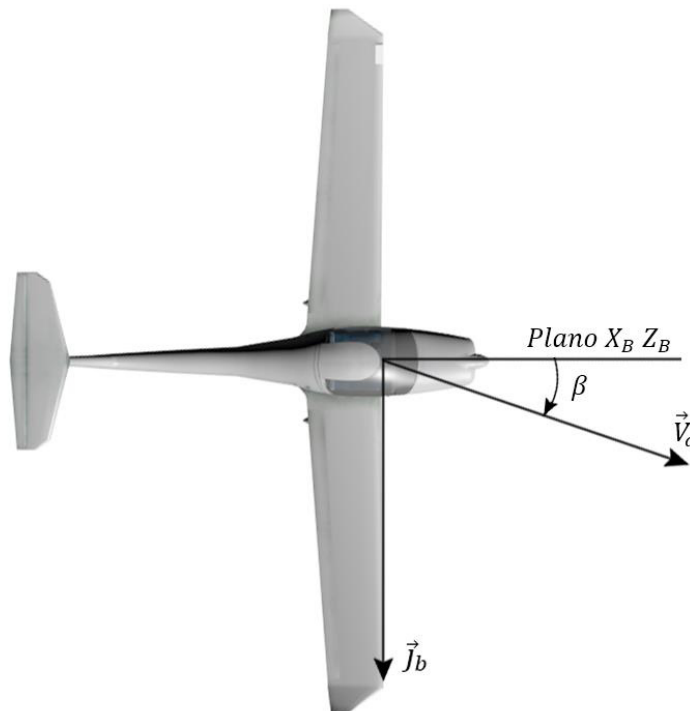


Figura 2.9 Ángulo de resbalamiento.

De manera inversa, se pueden expresar las componentes de la velocidad en función del ángulo de ataque, el ángulo de resbalamiento y el módulo de la velocidad:

$$u = V_a \cos \alpha \cos \beta \quad (2.8)$$

$$v = V_a \sin \beta \quad (2.9)$$

$$w = V_a \sin \alpha \cos \beta \quad (2.10)$$

2.1.4 Variables de control

En los modelos de fuerzas y momentos de las ecuaciones generales de la aeronave intervienen cuatro variables de control: una correspondiente al control de empuje y tres asociadas a las deflexiones de las superficies de control que controlan la actitud de la aeronave. Estas variables se muestran en la siguiente tabla:

Nombre	Descripción
δ_t	Parámetro de control de empuje
δ_a	Deflexión de los alerones
δ_e	Deflexión del timón de profundidad o elevador
δ_r	Deflexión del timón de dirección o rudder

Tabla 2.2 Variables de control.

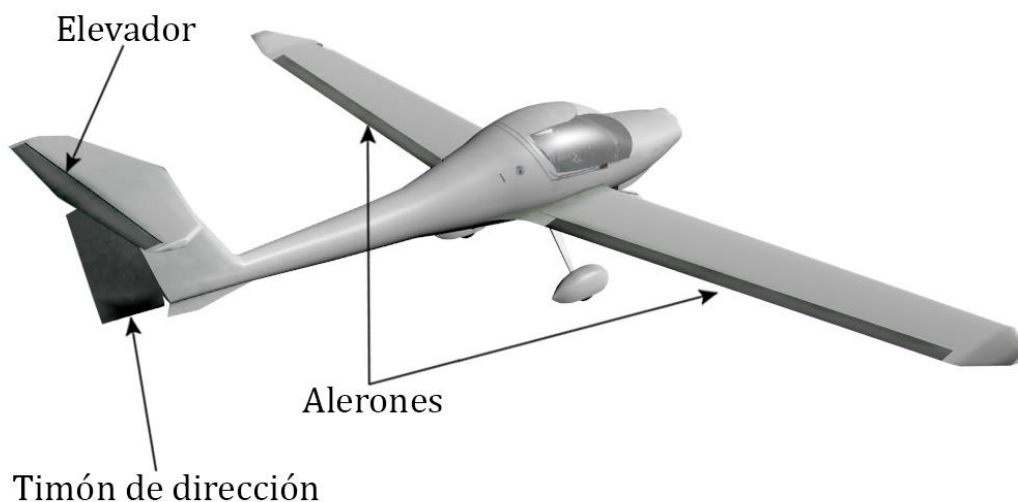


Figura 2.10 Superficies de control.

2.1.5 Modelo de atmósfera

Para conocer cambio de la densidad con la altura se empleará el modelo de atmósfera correspondiente a la Atmósfera Estándar Internacional (ISA):

$$T(p_z) = T_0 - \lambda p_z \quad (2.11)$$

$$\rho(p_z) = \rho_0 \left(\frac{T(p_z)}{T_0} \right)^{-\frac{g}{R_g \lambda} - 1} \quad (2.12)$$

donde los valores de las constantes se recogen en la siguiente tabla:

Nombre	Valor
g [m/s ²]	9.8
R_g [m ² /(s ² K)]	287
λ [K/m]	$-6.5 \cdot 10^{-3}$
T_0 [K]	288.15
ρ_0 [kg/m ³]	1.225

Tabla 2.3 Constantes del modelo de atmósfera ISA.

2.2 Ecuaciones de movimiento

2.2.1 Ecuaciones cinemáticas

En este apartado se van a obtener las ecuaciones cinemáticas lineales y angulares. Las primeras permiten obtener la posición del vehículo a partir de su velocidad, y las segundas permiten obtener la actitud de la aeronave (ángulos de Euler) a partir de la velocidad angular.

Siendo $\vec{r} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ el vector de posición de la aeronave respecto al sistema topocéntrico inercial S_I , se tiene

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_I = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Puesto que la velocidad suele expresarse en término de sus componentes en ejes cuerpo (u, v, w), es necesario hacer la transformación:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = R^{I \leftarrow B} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = (R^{B \leftarrow H})^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

De modo que las ecuaciones cinemáticas lineales quedan

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uc\theta c\psi + v(s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi) + w(c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) \\ uc\theta s\psi + v(s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi) + w(c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) \\ -us\theta + vs\phi c\theta + wc\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde se ha usado la notación $c\chi = \cos\chi$ y $s\chi = \sin\chi$.

Para las ecuaciones cinemáticas angulares debemos tener en cuenta que la aceleración angular (p, q, r) se expresa en ejes cuerpo, mientras que las posiciones angulares (ϕ, θ, ψ) se expresan en tres sistemas diferentes, así

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k}_H + \dot{\theta}\vec{j}_{V_1} + \dot{\phi}\vec{i}_B \quad (2.15)$$

Proyectando en ejes cuerpo:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R^{B \leftarrow H} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R^{B \leftarrow V_2} R^{V_2 \leftarrow V_1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\ -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Invirtiendo esta expresión obtenemos las ecuaciones cinemáticas angulares:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ (q \sin \phi + r \cos \phi) \sec \theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.2.2 Ecuaciones dinámicas

En este apartado se van a obtener las ecuaciones dinámicas de traslación y rotación. Las ecuaciones dinámicas del movimiento de traslación permiten relacionar la velocidad lineal con las fuerzas que actúan sobre la aeronave, mientras que las ecuaciones dinámicas del movimiento de rotación permiten relacionar las velocidades angulares con los momentos. Para obtenerlas se aplica la segunda ley de Newton teniendo en cuenta que éstas se cumplen en un sistema de referencia inercial, por lo que, aunque las variables estén expresadas en ejes cuerpo, las derivadas deben tomarse respecto al sistema topocéntrico inercial. Teniendo esto en cuenta, para las ecuaciones de fuerzas se tiene:

$$m \left. \frac{d\vec{V}_a}{dt} \right|_I = \vec{F} \quad (2.18)$$

donde m es la masa de la aeronave, \vec{V}_a la velocidad respecto a tierra en ejes cuerpo, $\left. \frac{d}{dt} \right|_I$ la derivada respecto al tiempo en el sistema inercial y \vec{F} es el vector resultante de las fuerzas que actúan sobre el vehículo, cuyas componentes son (X, Y, Z) .

Aplicando la Fórmula de Poisson, que permite tomar derivada en el sistema inercial a partir de las derivadas en ejes cuerpo y la velocidad angular, se tiene:

$$m \left. \frac{d\vec{V}_a}{dt} \right|_I = m \left. \frac{d\vec{V}_a}{dt} \right|_B + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_a = \vec{F} \quad (2.19)$$

Por lo que las ecuaciones dinámicas del movimiento de traslación quedan:

$$\begin{bmatrix} m(\dot{u} - rv + qw) \\ m(\dot{v} + ru - pw) \\ m(\dot{w} - qu + pv) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Dejando los términos diferenciales a un lado de la ecuación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw + \frac{f_x}{m} \\ -ru + pw + \frac{f_y}{m} \\ qu - pv + \frac{f_z}{m} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

De manera análoga, para las ecuaciones de momentos:

$$\left. \frac{d\vec{h}}{dt} \right|_I = \vec{\mathcal{M}} \quad (2.22)$$

Donde $\vec{\mathcal{M}}$ es el vector resultante de los momentos externos que actúan en el vehículo, cuyas componentes son (L, M, N) , y \vec{h} es el momento cinético, que para cuerpos rígidos se define como el producto del tensor de inercias \bar{I} y la velocidad angular, de modo que $\vec{h} = \bar{I}\vec{\omega}$.

Aplicando la Fórmula de Poisson, se tiene:

$$\left. \frac{d\vec{h}}{dt} \right|_I = \bar{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_B + \vec{\omega} \wedge \bar{I}\vec{\omega} = \vec{\mathcal{M}} \quad (2.23)$$

El tensor de inercia es constante en ejes cuerpo y viene dado por

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta la simetría en el plano XZ se tiene $I_{xy} = I_{yz} = 0$, por lo que el tensor de inercia queda

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Así, las ecuaciones dinámicas del movimiento de rotación quedan:

$$\begin{bmatrix} I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + (I_z - I_y)qr - I_{xz}pq \\ I_y \dot{q} + (I_x - I_z)pr + I_{xz}(p^2 - r^2) \\ I_z \dot{r} + (I_y - I_x)pq + I_{xz}qr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Dejando los términos diferenciales a un lado de la ecuación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \Gamma_3 L + \Gamma_4 N \\ \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{1}{I_y} M \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_8 qr + \Gamma_4 L + \Gamma_3 N \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

donde

$$\Gamma_1 = \frac{I_{xz}(I_x - I_y + I_z)}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (2.28)$$

$$\Gamma_2 = \frac{I_z(I_z - I_y) + I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (2.29)$$

$$\Gamma_3 = \frac{I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (2.30)$$

$$\Gamma_4 = \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (2.31)$$

$$\Gamma_5 = \frac{I_z - I_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (2.32)$$

$$\Gamma_6 = \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (2.33)$$

$$\Gamma_7 = \frac{I_x(I_x - I_y) + I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (2.34)$$

$$\Gamma_8 = \frac{I_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (2.35)$$

2.3 Modelo de fuerzas y momentos

Para completar las ecuaciones dinámicas se necesita modelar las fuerzas y momentos resultantes que actúan en el vehículo y que son debidos a tres fuentes: gravedad, propulsión y aerodinámica. Tanto el peso como el empuje se consideran que actúan en el centro de gravedad de la aeronave, por lo que no crean momentos, así que únicamente se considerarán los momentos aerodinámicos.

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_A \quad (2.36)$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}_A \quad (2.37)$$

2.3.1 Fuerzas

2.3.1.1 Gravedad

En el sistema de referencia horizonte local, se puede expresar fácilmente el peso como una fuerza en la dirección de \vec{k}_H

$$\vec{F}_g|_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Para expresar esta fuerza en ejes cuerpo se usa la matriz de transformación $R^{B \leftarrow H}$

$$\vec{F}_g|_B = R^{B \leftarrow H} \vec{F}_g|_H \quad (2.39)$$

Así se tiene el siguiente modelo de fuerzas gravitatorias:

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ X_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

2.3.1.2 Propulsión

Se considera el empuje como una fuerza que actúa en la dirección de \vec{i}_B . Se puede obtener un modelo a partir de la diferencia de presiones aguas arriba y aguas abajo del motor aplicada a la sección del motor, así

$$\vec{F}_p = \begin{bmatrix} S_{motor} C_{prop} (P_2 - P_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

donde S_{motor} es la sección del motor, C_{prop} es el coeficiente de propulsión y P_2 y P_1 la presión aguas abajo y aguas arriba del motor respectivamente, que se pueden obtener a partir de la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{2} \rho V_a^2 \quad (2.42)$$

$$P_2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho V_s^2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho (k_{motor} \delta_t)^2 \quad (2.43)$$

donde se ha expresado la velocidad del aire a la salida del motor V_s en función de un parámetro del motor k_{motor} y la variable de control del empuje.

Con ello la fuerza propulsiva queda modelada como:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho S_{motor} C_{prop} ((k_{motor} \delta_t)^2 - V_a^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

2.3.1.3 Fuerzas aerodinámicas

Las fuerzas aerodinámicas que actúan en la aeronave son la sustentación y la resistencia, que se pueden modelar como

$$F_L = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_L(\alpha, q, \delta_e) \quad (2.45)$$

$$F_D = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_D(\alpha, q, \delta_e) \quad (2.46)$$

La fuerza de sustentación actúa en dirección perpendicular a la velocidad absoluta \vec{V}_a , y la resistencia en dirección opuesta a dicha velocidad, por lo que proyectando en los ejes cuerpo según la siguiente figura:

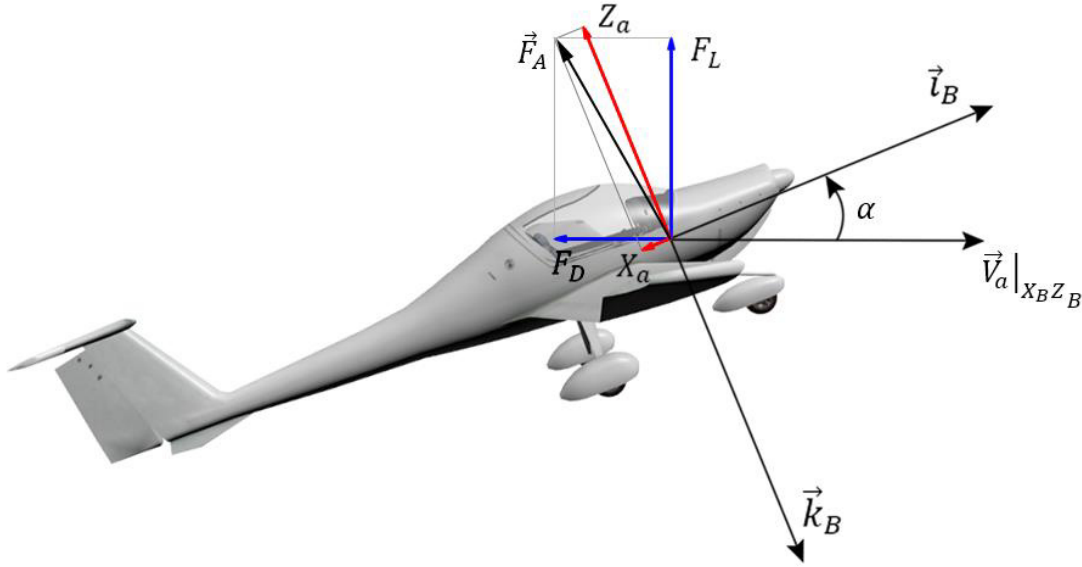


Figura 2.11 Fuerzas aerodinámicas

$$X_a = -F_D \cos \alpha + F_L \sin \alpha = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S (-C_D \cos \alpha + C_L \sin \alpha) = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_X \quad (2.47)$$

$$Z_a = -F_D \sin \alpha - F_L \cos \alpha = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S (-C_D \sin \alpha - C_L \cos \alpha) = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_Z \quad (2.48)$$

Los coeficientes de sustentación y resistencia, C_L y C_D respectivamente, se ha considerado que dependen del ángulo de ataque α , la velocidad angular de cabeceo q y la deflexión del timón de profundidad δ_e . Esta dependencia puede modelarse como

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \quad (2.49)$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha + C_{D_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{D_{\delta_e}} \delta_e \quad (2.50)$$

Por otro lado, la fuerza aerodinámica en el eje y_B puede expresarse como

$$Y_a = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_Y(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \quad (2.51)$$

El coeficiente C_Y se ha considerado que depende del ángulo de resbalamiento β , las velocidades angulares p y r , y las deflexiones de los alerones y el timón de dirección δ_a y δ_r . Esta dependencia se puede modelar como

$$C_Y = C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{Y_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \quad (2.52)$$

De modo que las fuerzas aerodinámicas quedan:

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left(C_{X_0} + C_{X_\alpha} \alpha + C_{X_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{X_{\delta_e}} \delta_e \right) \\ \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{Y_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \right) \\ \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left(C_{Z_0} + C_{Z_\alpha} \alpha + C_{Z_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{Z_{\delta_e}} \delta_e \right) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

donde se ha empleado la notación

$$C_{X_0} = -C_{D_0} \cos \alpha + C_{L_0} \sin \alpha \quad (2.54)$$

$$C_{X_\alpha} = -C_{D_\alpha} \cos \alpha + C_{L_\alpha} \sin \alpha \quad (2.55)$$

$$C_{X_q} = -C_q \cos \alpha + C_{L_q} \sin \alpha \quad (2.56)$$

$$C_{X_{\delta_e}} = -C_{D_{\delta_e}} \cos \alpha + C_{L_{\delta_e}} \sin \alpha \quad (2.57)$$

$$C_{Z_0} = -C_{D_0} \cos \alpha + C_{L_0} \sin \alpha \quad (2.58)$$

$$C_{Z_\alpha} = -C_{D_\alpha} \cos \alpha + C_{L_\alpha} \sin \alpha \quad (2.59)$$

$$C_{Z_q} = -C_q \cos \alpha + C_{L_q} \sin \alpha \quad (2.60)$$

$$C_{Z_{\delta_e}} = -C_{D_{\delta_e}} \cos \alpha + C_{L_{\delta_e}} \sin \alpha \quad (2.61)$$

2.3.2 Momentos

Los momentos aerodinámicos se pueden modelar como

$$L = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_l(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \quad (2.62)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_m(\alpha, q, \delta_e) \quad (2.63)$$

$$N = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_n(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \quad (2.64)$$

Los coeficientes de los momentos en torno a \vec{i}_B y \vec{k}_B (C_l y C_n respectivamente) se ha considerado que dependen del ángulo de resbalamiento β , las velocidades angulares p y r , y las deflexiones de los alerones y el timón de dirección δ_a y δ_r . El coeficiente del momento en torno a \vec{j}_B (C_m) se ha considerado que depende del ángulo de ataque α , la velocidad angular de cabeceo q y la deflexión del timón de profundidad δ_e . Modelando los coeficientes C_l , C_m y C_n con las dependencias indicadas:

$$C_l = C_{l_0} + C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{l_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r \quad (2.65)$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \quad (2.66)$$

$$C_n = C_{n_0} + C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{n_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r \quad (2.67)$$

Así se obtienen los momentos aerodinámicos:

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left(C_{l_0} + C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{l_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r \right) \\ \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left(C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \right) \\ \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \left(C_{n_0} + C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \frac{b}{2V_a} p + C_{n_r} \frac{b}{2V_a} r + C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r \right) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

2.4 Conclusiones

En este capítulo se han obtenido las ecuaciones generales del movimiento de la aeronave:

$$\dot{p}_x = u c \theta c \psi + v (s \phi s \theta c \psi - c \phi s \psi) + w (c \phi s \theta c \psi + s \phi s \psi) \quad (2.69)$$

$$\dot{p}_y = u c \theta s \psi + v (s \phi s \theta s \psi + c \phi c \psi) + w (c \phi s \theta s \psi - s \phi c \psi) \quad (2.70)$$

$$\dot{p}_z = -u s \theta + v s \phi c \theta + w c \phi c \theta \quad (2.71)$$

$$\dot{\phi} = p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \quad (2.72)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (2.73)$$

$$\dot{\psi} = (q \sin \phi + r \cos \phi) \sec \theta \quad (2.74)$$

$$\dot{u} = r v - q w + \frac{X}{m} \quad (2.75)$$

$$\dot{v} = -r u + p w + \frac{Y}{m} \quad (2.76)$$

$$\dot{w} = q u - p v + \frac{Z}{m} \quad (2.77)$$

$$\dot{p} = \Gamma_1 p q - \Gamma_2 q r + \Gamma_3 L + \Gamma_4 N \quad (2.78)$$

$$\dot{q} = \Gamma_5 p r - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{1}{I_y} M \quad (2.79)$$

$$\dot{r} = \Gamma_7 p q - \Gamma_8 q r + \Gamma_4 L + \Gamma_8 N \quad (2.80)$$

Constituyen un conjunto de 12 ecuaciones diferenciales que, junto con las expresiones de fuerzas y momentos descritas en el apartado 2.3 permite obtener las 12 variables de estado:

$$\vec{x} = [p_x, p_y, p_z, \phi, \theta, \psi, u, v, w, p, q, r] \tag{2.81}$$

Además se tienen 4 variables de control que representan los 4 grados de libertad que hay que fijar:

$$\vec{u} = [\delta_e, \delta_t, \delta_a, \delta_r] \tag{2.82}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales es no lineal y acoplado, por lo que no es posible obtener soluciones analíticas.

En la siguiente imagen se puede ver un esquema de estas ecuaciones:

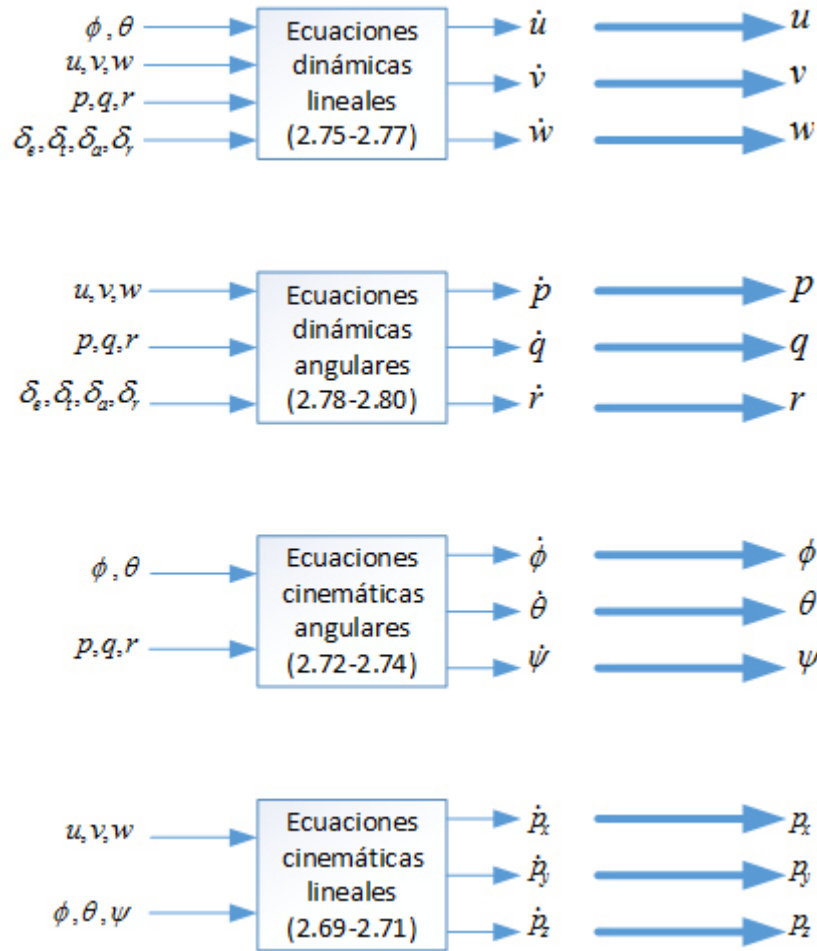


Figura 2.12 Diagrama de bloques de las ecuaciones generales de la aeronave.

Cada bloque representa un conjunto de ecuaciones con sus entradas y salidas. Como puede observarse, todas las entradas son salidas de otros o su mismo bloque, excepto las señales de control.

3 MODELO LINEAL

Las ecuaciones obtenidas en el capítulo 2 constituyen un sistema de 12 ecuaciones no lineales y acopladas. Se trata de un modelo de alta complejidad, por lo que en este capítulo se va a obtener un modelo de ecuaciones diferenciales lineales más adecuado para el estudio de problemas de estabilidad y control. Se van a linealizar las ecuaciones en torno a un punto de equilibrio, de modo que esta aproximación solo será válida para pequeñas perturbaciones respecto al punto de operación. Además, se van a desacoplar las dinámicas de los movimientos longitudinal y lateral.

En el apartado 3.1 se va a desarrollar el cálculo de las condiciones de equilibrio, también conocido en la mecánica de vuelo como *trim*. En el apartado 3.2 se van a obtener las ecuaciones linealizadas de las dinámicas longitudinal y lateral.

3.1 Cálculo de las condiciones de equilibrio (trim)

Dado un sistema de ecuaciones no lineal dado por

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.1)$$

donde x representa el estado y u el control, en el punto de equilibrio (x_E, u_E) se cumple

$$f(x_E, u_E) = 0 \quad (3.2)$$

En este proyecto únicamente se va a considerar el vuelo rectilíneo a altitud y velocidad constantes. En dicha condición, la altura ($h = -p_z$), velocidad lineal (u, v, w), los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) y velocidad angular (p, q, z) se mantienen constantes, por lo que, para encontrar el punto de equilibrio en la condición de vuelo deseada, se deben encontrar los valores (x_E, u_E) que hagan que las derivadas de las variables citadas sean nulas en dicho punto, esto es:

$$\dot{p}_z(x_E, u_E) = 0 \quad (3.3)$$

$$\dot{u}(x_E, u_E) = 0 \quad (3.4)$$

$$\dot{v}(x_E, u_E) = 0 \quad (3.5)$$

$$\dot{w}(x_E, u_E) = 0 \quad (3.6)$$

$$\dot{\phi}(x_E, u_E) = 0 \quad (3.7)$$

$$\dot{\theta}(x_E, u_E) = 0 \quad (3.8)$$

$$\dot{\psi}(x_E, u_E) = 0 \quad (3.9)$$

$$\dot{p}(x_E, u_E) = 0 \quad (3.10)$$

$$\dot{q}(x_E, u_E) = 0 \quad (3.11)$$

$$\dot{r}(x_E, u_E) = 0 \quad (3.12)$$

Por tanto, el problema consiste en resolver un sistema de ecuaciones no lineales. Puesto que no es posible su resolución analítica debido a la no linealidad y el alto acoplamiento, se planteará como un problema de optimización donde se debe construir una función objetivo a minimizar respecto de las variables correspondientes. La función objetivo será la suma de los cuadrados de las derivadas que deben ser nulas, esto es:

$$J = \dot{p}_z^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2 \quad (3.13)$$

Observando las ecuaciones (2.71)-(2.80), se tiene que son independientes de p_x, p_y y ψ , por lo que la optimización de la función objetivo no dependerá de estas variables, sino que se debe optimizar respecto a $p_z, u, v, w, \phi, \theta, p, q, r$ (conjunto de variables que se denotará como \hat{x}). Además, como se comentó anteriormente, solo se tratará el vuelo rectilíneo ($\phi_E = 0$) a altitud y velocidad absoluta constantes, por lo que habrá que añadir estas restricciones al problema de optimización. Con todo ello, el problema de optimización queda

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{x}} J(\hat{x}) \\ & \text{s. a.} \begin{cases} p_{zE} = p_{z\text{deseado}} \\ V_{aE} = V_{a\text{deseado}} \\ \phi_E = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para resolver este problema, se usará la función de Matlab *fmincon*, indicada para encontrar el mínimo de funciones multivariantes no lineales sujetas a restricciones, de modo que resuelve problemas del tipo

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & \text{s. a.} \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ c_{eq}(x) = 0 \\ Ax \leq b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ l_b \leq x \leq u_b \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde $c(x)$ y $c_{eq}(x)$ son funciones (lineales o no lineales) que devuelven vectores, A y A_{eq} matrices, b y b_{eq} vectores, y l_b y u_b pueden ser vectores o matrices.

La estructura de esta función es

$$[x, fval] = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, l_b, u_b, \text{nonlcon}) \quad (3.16)$$

Esta función devuelve el valor de x que minimiza la función objetivo y el valor de la función evaluada en dicho punto *fval*, a partir de las siguientes entradas:

- *fun*: función a minimizar,
- x_0 : punto inicial de x a partir del cual empieza a buscar la solución,

- A y b : matriz y vector, respectivamente, que definen las restricciones lineales de desigualdad,
- A_{eq} y b_{eq} : matriz y vector, respectivamente, que definen las restricciones lineales de igualdad,
- l_b y u_b : vectores/matrices que contienen los valores mínimos y máximos, respectivamente, de las variables,
- $nonlcon$: función que contiene las restricciones no lineales de desigualdad ($c(x)$) y de igualdad ($c_{eq}(x)$)

En el caso que se estudia en este proyecto, las restricciones en la altura y el ángulo de balance serán restricciones de tipo igualdad lineal, mientras que la restricción en la velocidad absoluta será del tipo igualdad no lineal, debido a que las ecuaciones vienen dadas en términos de las componentes de la velocidad (u, v, w) y la relación de éstas con V_a es

$$V_a = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (3.17)$$

3.2 Linealización de las ecuaciones de movimiento

Con la linealización se pretende aproximar el modelo no lineal por otro que sí lo es. Esta aproximación solo será válida en el entorno del punto de operación.

Dado un sistema de ecuaciones no lineal dado por

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.18)$$

y el punto de equilibrio (x_E, u_E) definido por

$$\dot{x}_E = f(x_E, u_E) \quad (3.19)$$

desarrollando en Serie de Taylor en torno al punto de equilibrio

$$\dot{x} = f(x_E, u_E) + \frac{\partial f(x_E, u_E)}{\partial x}(x - x_E) + \frac{\partial f(x_E, u_E)}{\partial u}(u - u_E) + T.O.S \quad (3.20)$$

despreciando términos de orden superior y dado que en el equilibrio se cumple $\dot{x}_E = f(x_E, u_E)$, se tiene

$$\dot{x} - \dot{x}_E \approx \frac{\partial f(x_E, u_E)}{\partial x}(x - x_E) + \frac{\partial f(x_E, u_E)}{\partial u}(u - u_E) \quad (3.21)$$

nombrando $\bar{x} = x - x_E$ y $\bar{u} = u - u_E$

$$\dot{\bar{x}} \approx \frac{\partial f(x_E, u_E)}{\partial x}\bar{x} + \frac{\partial f(x_E, u_E)}{\partial u}\bar{u} \quad (3.22)$$

De esta expresión se observa lo siguiente:

- La dinámica linealizada se determina hallando las derivadas de la función respecto de las

variables de estado y de las variables de control ($\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial u}$ respectivamente) evaluadas en el punto de equilibrio.

- El modelo linealizado depende del punto de equilibrio, de modo que se tendrá un modelo distinto según el punto escogido.
- Una vez linealizado, las variables originales se sustituyen por incrementos de las variables respecto del punto de equilibrio.

La ecuación (3.22) también se puede expresar como

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad (3.23)$$

donde A es la matriz de estado:

$$A = \frac{\partial f(x_E, u_E)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(x_E, u_E)} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(x_E, u_E)} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{(x_E, u_E)} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(x_E, u_E)} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(x_E, u_E)} & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{(x_E, u_E)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{(x_E, u_E)} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{(x_E, u_E)} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{(x_E, u_E)} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

y B la matriz de entradas:

$$B = \frac{\partial f(x_E, u_E)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_{(x_E, u_E)} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right|_{(x_E, u_E)} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \right|_{(x_E, u_E)} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right|_{(x_E, u_E)} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right|_{(x_E, u_E)} & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \right|_{(x_E, u_E)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right|_{(x_E, u_E)} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right|_{(x_E, u_E)} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \right|_{(x_E, u_E)} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La salida del sistema no tiene por qué coincidir con el estado, por lo que siendo $g(x, t)$ el conjunto de funciones que relaciona las salidas con el estado:

$$y = g(x, t) \quad (3.26)$$

Linealizando se llega a

$$\bar{y} = C\bar{x} \quad (3.27)$$

donde C la matriz de salidas:

$$C = \frac{\partial g(x_E, u_E)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_{(x_E, u_E)} & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right|_{(x_E, u_E)} & \cdots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right|_{(x_E, u_E)} \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right|_{(x_E, u_E)} & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right|_{(x_E, u_E)} & \cdots & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \right|_{(x_E, u_E)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_r}{\partial x_1} \right|_{(x_E, u_E)} & \left. \frac{\partial g_r}{\partial x_2} \right|_{(x_E, u_E)} & \cdots & \left. \frac{\partial g_r}{\partial x_n} \right|_{(x_E, u_E)} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Debido a que los movimientos están desacoplados, se estudiarán las dinámicas longitudinal y lateral por separado, así, para el movimiento longitudinal se tendrá

$$\dot{\bar{x}}_{lon} = A_{lon}\bar{x}_{lon} + B_{lon}\bar{u}_{lon} \quad (3.29)$$

$$\bar{y}_{lon} = C_{lon}\bar{x}_{lon} \quad (3.30)$$

y para el lateral

$$\dot{\bar{x}}_{lat} = A_{lat}\bar{x}_{lat} + B_{lat}\bar{u}_{lat} \quad (3.31)$$

$$\bar{y}_{lat} = C_{lat}\bar{x}_{lat} \quad (3.32)$$

donde de nuevo las matrices A_{lon} , B_{lon} , C_{lon} , A_{lat} , B_{lat} y C_{lat} dependerán del punto de operación.

3.2.1 Dinámica longitudinal

Las variables de estado que gobiernan el movimiento longitudinal son

$$x_{lon} = (u, w, q, \theta, p_z) \quad (3.33)$$

y las variables de control

$$u_{lon} = (\delta_e, \delta_t) \quad (3.34)$$

Así, las derivadas respecto a las variables de estado del problema longitudinal que se deben calcular son

$$\frac{\partial f_{lon}}{\partial x_{lon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial p_z} \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial p_z} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_z} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial p_z} \\ \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial u} & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial w} & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial q} & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial p_z} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Evaluando en el punto de equilibrio se obtiene la matriz de estados de la dinámica longitudinal:

$$A_{lon} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & -q_E + \frac{X_w}{m} & -w_E + \frac{X_q}{m} & -gc\theta_E & \frac{X_{p_z}}{m} \\ q_E + \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} & u_E + \frac{Z_q}{m} & -gs\theta_E c\phi_E & \frac{Z_{p_z}}{m} \\ \frac{M_u}{I_y} & \frac{M_w}{I_y} & \frac{M_q}{I_y} & 0 & \frac{M_{p_z}}{I_y} \\ 0 & 0 & c\phi_E & 0 & 0 \\ -s\theta_E & c\phi_E c\theta_E & 0 & -u_E c\theta_E - v_E s\phi_E s\theta_E - w_E c\phi_E s\theta_E & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

donde las expresiones de los coeficientes X_u , X_w , X_q , X_{p_z} , Z_u , Z_w , Z_q , Z_{p_z} , M_u , M_w , M_q y M_{p_z} se recogen en las tablas 3.1, 3.2 y 3.3.

Por otro lado, las derivadas respecto a las variables de control del problema longitudinal a obtener son

$$\frac{\partial f_{lon}}{\partial u_{lon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \delta_t} \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_t} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_t} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \delta_t} \\ \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial \delta_t} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Evaluando en el punto de equilibrio se tiene la matriz de entradas da la dinámica lateral:

$$B_{lon} = \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta_e}}{m} & \frac{X_{\delta_t}}{m} \\ \frac{Z_{\delta_e}}{m} & 0 \\ \frac{M_{\delta_e}}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

donde las expresiones de los coeficientes X_{δ_e} , X_{δ_t} , Z_{δ_e} y M_{δ_e} se recogen las tablas 3.1, 3.2 y 3.3.

Coef.	Fórmula
X_u	$-\rho_E S_{prop} C_{prop} u_E + \rho_E S C_X u_E - \frac{w_E V_{aE}^2 \rho_E S C_{X\alpha}}{2(u_E^2 + w_E^2)} - \frac{u_E \rho_E S c q_E C_{Xq}}{4V_{aE}} + \frac{w_E V_{aE}^2 \rho_E S C_Z}{2(u_E^2 + w_E^2)}$
X_w	$-\rho_E S_{prop} C_{prop} w_E + \rho_E S C_X w_E + \frac{u_E V_{aE}^2 \rho_E S C_{X\alpha}}{2(u_E^2 + w_E^2)} - \frac{w_E \rho_E S c q_E C_{Xq}}{4V_{aE}} - \frac{u_E V_{aE}^2 \rho_E S C_Z}{2(u_E^2 + w_E^2)}$
X_q	$\frac{V_{aE} \rho_E S C C_{Xq}}{4}$
X_{p_z}	$\frac{\rho_0 \lambda}{T_0} \left(-\frac{g}{R_g \lambda} - 1 \right) \left(1 + \frac{\lambda p_{zE}}{T_0} \right)^{-\frac{g}{R_g \lambda} - 2} \left\{ \frac{S_{prop} C_{prop}}{2} \left[(k_{motor} \delta_{tE})^2 - V_{aE}^2 \right] + \frac{V_{aE}^2 S C_X}{2} \right\}$
X_{δ_e}	$\frac{\rho_E V_{aE}^2 S C_{X\delta\alpha}}{2}$
X_{δ_t}	$\rho_E S_{prop} C_{prop} k_{motor}^2 \delta_{tE}$

Tabla 3.1 Coeficientes de la dinámica longitudinal correspondientes a X.

Coef.	Fórmula
Z_u	$\rho_E S C_Z u_E - \frac{w_E V_{aE}^2 \rho_E S C_{Z\alpha}}{2(u_E^2 + w_E^2)} - \frac{u_E \rho_E S c q_E C_{Zq}}{4V_{aE}} - \frac{w_E V_{aE}^2 \rho_E S C_X}{2(u_E^2 + w_E^2)}$
Z_w	$\rho_E S C_Z w_E + \frac{u_E V_{aE}^2 \rho_E S C_{Z\alpha}}{2(u_E^2 + w_E^2)} - \frac{w_E \rho_E S c q_E C_{Zq}}{4V_{aE}} + \frac{u_E V_{aE}^2 \rho_E S C_X}{2(u_E^2 + w_E^2)}$
Z_q	$\frac{V_{aE} \rho_E S C C_{Zq}}{4}$
Z_{p_z}	$\frac{\rho_0 \lambda}{T_0} \left(-\frac{g}{R_g \lambda} - 1 \right) \left(1 + \frac{\lambda p_{zE}}{T_0} \right)^{-\frac{g}{R_g \lambda} - 2} \frac{V_{aE}^2 S C_Z}{2}$
Z_{δ_e}	$\frac{\rho_E V_{aE}^2 S C_{Z\delta\alpha}}{2}$
Z_{δ_t}	0

Tabla 3.2 Coeficientes de la dinámica longitudinal correspondientes a Y.

Coef.	Fórmula
M_u	$\rho_E S C_m u_E - \frac{w_E V_{aE}^2 \rho_E S C_{m\alpha}}{2(u_E^2 + w_E^2)} - \frac{u_E \rho_E S c^2 q_E C_{mq}}{4V_{aE}}$
M_w	$\rho_E S C_m w_E + \frac{u_E V_{aE}^2 \rho_E S C_{m\alpha}}{2(u_E^2 + w_E^2)} - \frac{w_E \rho_E S c^2 q_E C_{mq}}{4V_{aE}}$
M_q	$\frac{V_{aE} \rho_E S c^2 C_{mq}}{4}$
M_{p_z}	$\frac{\rho_0 \lambda}{T_0} \left(-\frac{g}{R_g \lambda} - 1 \right) \left(1 + \frac{\lambda p_{zE}}{T_0} \right)^{-\frac{g}{R_g \lambda} - 2} \frac{V_{aE}^2 S c C_m}{2}$
M_{δ_e}	$\frac{\rho_E V_{aE}^2 S c C_{m\delta_a}}{2}$
M_{δ_t}	0

Tabla 3.3 Coeficientes de la dinámica longitudinal correspondientes a M .

Para las salidas del sistema en la dinámica longitudinal se suele emplear α en lugar de w , así el vector de salidas será:

$$y_{lon} = (u, \alpha, q, \theta, p_z) \quad (3.39)$$

Teniendo en cuenta la definición del ángulo de ataque ($\alpha = \tan^{-1}(w/u)$), se deben calcular las siguientes derivadas

$$\frac{\partial g_{lon}}{\partial x_{lon}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Evaluando en el punto de equilibrio se obtiene la matriz de salidas de la dinámica longitudinal:

$$C_{lon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_E & u_E & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u_E^2 + w_E^2}{u_E^2 + w_E^2} & \frac{u_E}{u_E^2 + w_E^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

3.2.2 Dinámica lateral

Las variables de estado que gobiernan el movimiento lateral son

$$x_{lat} = (v, p, r, \phi, \psi) \quad (3.42)$$

y las variables de control

$$u_{lat} = (\delta_a, \delta_r) \quad (3.43)$$

Así, las derivadas respecto a las variables de estado del problema lateral que se deben calcular son

$$\frac{\partial f_{lat}}{\partial x_{lat}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \phi} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial \phi} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \phi} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi} & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \phi} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Evaluando en el punto de equilibrio se obtiene la matriz de estados de la dinámica lateral:

$$A_{lat} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & w_E + \frac{Y_p}{m} & -u_E + \frac{Y_r}{m} & gc\theta_E c\phi_E & 0 \\ \Gamma_3 L_v + \Gamma_4 N_v & \Gamma_1 q_E + \Gamma_3 L_p + \Gamma_4 N_p & -\Gamma_2 q_E + \Gamma_3 L_r + \Gamma_4 N_r & 0 & 0 \\ \Gamma_4 L_v + \Gamma_8 N_v & \Gamma_7 q_E + \Gamma_4 L_p + \Gamma_8 N_p & -\Gamma_1 q_E + \Gamma_4 L_r + \Gamma_8 N_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c\phi_E tg\theta_E & (q_E c\phi_E - r_E s\phi_E) tg\theta_E & 0 \\ 0 & 0 & c\phi_E sec\theta_E & (q_E c\phi_E - r_E s\phi_E) sec\theta_E & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

donde las expresiones de los coeficientes $Y_v, Y_p, Y_r, L_v, L_p, L_r, N_v, N_p$ y N_r se encuentran en las tablas 3.4, 3.5 y 3.6.

Por otra parte, las derivadas respecto de las variables de control de la dinámica lateral a obtener son

$$\frac{\partial f_{lat}}{\partial u_{lat}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_a} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial \delta_a} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial \delta_a} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \delta_a} & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \delta_a} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \delta_r} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Evaluando en el punto de equilibrio se obtiene la matriz de entradas de la dinámica lateral:

$$B_{lat} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta_a}}{m} & \frac{Y_{\delta_r}}{m} \\ \Gamma_3 L_{\delta_a} + \Gamma_4 N_{\delta_a} & \Gamma_3 L_{\delta_r} + \Gamma_4 N_{\delta_r} \\ \Gamma_4 L_{\delta_a} + \Gamma_8 N_{\delta_a} & \Gamma_4 L_{\delta_r} + \Gamma_8 N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

donde las expresiones para calcular los coeficientes Y_{δ_a} , Y_{δ_r} , L_{δ_a} , L_{δ_r} , N_{δ_a} y N_{δ_r} se encuentran en las tablas 3.4, 3.5 y 3.6.

Coef.	Fórmula
Y_v	$\rho_E S v_E C_Y + \frac{\rho_E S C_{Y\beta} \sqrt{u_E^2 + w_E^2}}{2} - \frac{\rho_E S b v_E (C_{Y_p} p_E + C_{Y_r} r_E)}{4 V_{a_E}}$
Y_p	$\frac{\rho_E V_{a_E} S b C_{Y_p}}{4}$
Y_r	$\frac{\rho_E V_{a_E} S b C_{Y_r}}{4}$
Y_{δ_a}	$\frac{\rho_E V_{a_E}^2 S C_{Y_{\delta_a}}}{2}$
Y_{δ_r}	$\frac{\rho_E V_{a_E}^2 S C_{Y_{\delta_r}}}{2}$

Tabla 3.4 Coeficientes de la dinámica lateral correspondientes a Y .

Coef.	Fórmula
L_v	$\rho_E S b v_E C_l + \frac{\rho_E S b C_{l\beta} \sqrt{u_E^2 + w_E^2}}{2} - \frac{\rho_E S b^2 v_E (C_{Y_p} p_E + C_{Y_r} r_E)}{4 V_{a_E}}$
L_p	$\frac{\rho_E V_{a_E} S b^2 C_{l_p}}{4}$
L_r	$\frac{\rho_E V_{a_E} S b^2 C_{l_r}}{4}$
L_{δ_a}	$\frac{\rho_E V_{a_E}^2 S b C_{l_{\delta_a}}}{2}$
L_{δ_r}	$\frac{\rho_E V_{a_E}^2 S b C_{l_{\delta_r}}}{2}$

Tabla 3.5 Coeficientes de la dinámica lateral correspondientes a L .

Coef.	Fórmula
N_v	$\rho_E S b v_E C_n + \frac{\rho_E S b C_{n_\beta} \sqrt{u_E^2 + w_E^2}}{2} - \frac{\rho_E S b^2 v_E (C_{n_p} p_E + C_{n_r} r_E)}{4 V_{aE}}$
N_p	$\frac{\rho_E V_{aE} S b^2 C_{n_p}}{4}$
N_r	$\frac{\rho_E V_{aE} S b^2 C_{n_r}}{4}$
N_{δ_a}	$\frac{\rho_E V_{aE}^2 S b C_{n_{\delta_a}}}{2}$
N_{δ_r}	$\frac{\rho_E V_{aE}^2 S b C_{n_{\delta_r}}}{2}$

Tabla 3.6 Coeficientes de la dinámica lateral correspondientes a N .

Para las salidas del sistema en la dinámica longitudinal se suele emplear β en lugar de v , así, el vector de salidas será:

$$y_{lat} = (\beta, p, r, \phi, \psi) \quad (3.48)$$

Teniendo en cuenta la definición del ángulo de resbalamiento ($\beta = \sin^{-1}(v/V_a)$), se deben calcular las siguientes derivadas

$$\frac{\partial g_{lat}}{\partial x_{lat}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial v} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Evaluando en el punto de equilibrio, se obtiene la matriz de salidas de la dinámica longitudinal:

$$C_{lat} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{V_{aE}^2 - v_E^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

3.3 Conclusiones

En este capítulo se ha obtenido un modelo linealizado de la dinámica del avión con el movimiento longitudinal y lateral desacoplados. Para ello en primer lugar se ha explicado cómo calcular un punto de equilibrio y a continuación se han obtenido las ecuaciones linealizadas en torno al punto de operación. De este modo, el sistema lineal queda caracterizado por un conjunto de matrices que dependerán del punto donde sean evaluadas.

4 ESTABILIDAD Y CONTROL

Se distinguen dos tipos de estabilidad: estabilidad estática y estabilidad dinámica. La primera se refiere a la tendencia del vehículo a volver a la posición de equilibrio tras una perturbación, mientras que la segunda se concentra en la evolución en el tiempo del movimiento del vehículo tras ser perturbado de la posición de equilibrio. En este proyecto solo se tratará la estabilidad dinámica, por lo que se asume que el sistema es estáticamente estable. Se dice que un avión es dinámicamente estable si, cuando es perturbado de su posición de equilibrio, tiende a recuperar dicha posición conforme pasa el tiempo. La estabilidad dinámica se puede mejorar mediante un Sistema de Aumento de Estabilidad que permite introducir estabilidad artificial al sistema para mejorar su comportamiento ante una perturbación.

Por otro lado, uno de los objetivos de este proyecto es llegar a controlar actitud y velocidad de la aeronave. Para ello se usarán controladores PID.

En el apartado 4.1 se hará un estudio de la estabilidad dinámica del sistema linealizado, identificando los modos de cada una de las dinámicas. En el apartado 4.2 se verá cómo realizar un sistema de aumento de estabilidad que mejore el comportamiento ante una perturbación. En el apartado 4.3 se presentará el controlador PID.

4.1 Estabilidad dinámica

El estudio de estabilidad que se va a hacer en este proyecto es un estudio de estabilidad dinámica del movimiento de perturbación de la aeronave a partir de una condición de vuelo de referencia consistente en un crucero a altitud y velocidad constantes. Para ello, se va a partir de las ecuaciones linealizadas longitudinales y laterales. Como se comentó anteriormente, estos problemas están desacoplados y los sistemas de ecuaciones que los gobiernan se pueden escribir de manera genérica como

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad (4.1)$$

donde x es el vector de estados y u el de control.

Para estudiar la estabilidad dinámica se calculan los autovalores de la matriz A , que serán reales ($\lambda = n$) o complejos ($\lambda = n + i\omega$). Cada autovalor tiene asociado un modo del sistema y el carácter del modo dependerá de la naturaleza del autovalor, así, un autovalor real negativo indica convergencia pura, un autovalor real positivo indica divergencia pura, un autovalor complejo con parte real negativa indica oscilación convergente y un autovalor complejo con parte real positiva indica oscilación divergente.

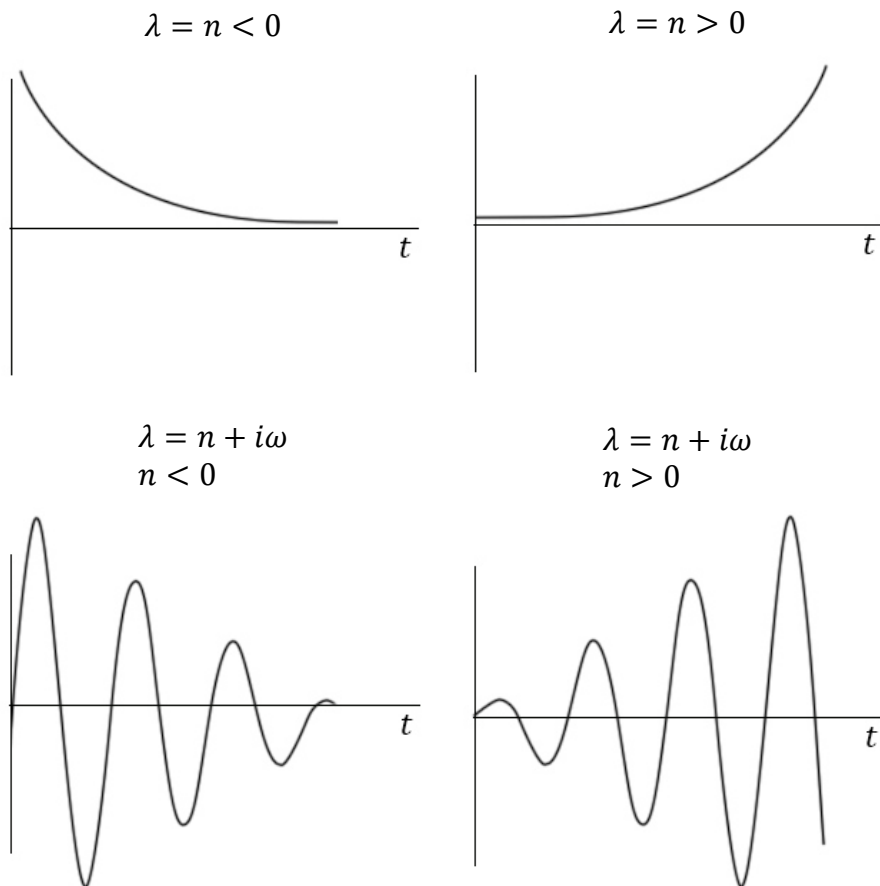


Figura 4.1 Tipo de comportamiento según el carácter del autovalor.

En los autovalores complejos, la parte real indica la atenuación de la oscilación y la parte imaginaria la frecuencia de la misma. Además, se puede obtener la frecuencia natural (ω_n) y el amortiguamiento del modo (ξ) como

$$\omega_n = \sqrt{n^2 + \omega^2} \quad (4.2)$$

$$\xi = -\frac{n}{\omega_n} \quad (4.3)$$

4.1.1 Estabilidad dinámica longitudinal

De forma general, de la dinámica longitudinal de las aeronaves convencionales resultarán dos pares de autovalores complejos conjugados, correspondientes a los dos modos longitudinales:

- **Modo de corto periodo:** asociado al autovalor de módulo mayor. Modo rápido y muy amortiguado. Suele afectar principalmente al ángulo de ataque (α) y la velocidad angular de cabeceo (q).
- **Modo fugoide:** asociado al autovalor de módulo menor. Modo lento y poco amortiguado. Suele afectar principalmente a la velocidad en el eje longitudinal (u) y al ángulo de cabeceo (θ).

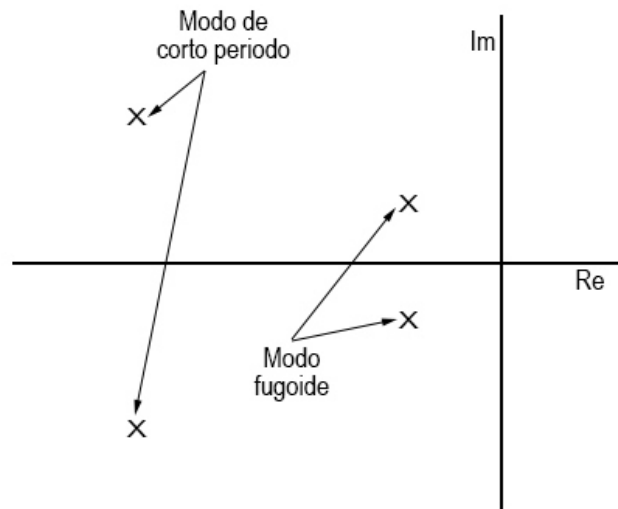


Figura 4.2 Modos de la dinámica longitudinal.

Ante una perturbación de la condición de vuelo, el modo de corto periodo se estabilizará rápidamente mientras que las oscilaciones restantes estarán asociadas al modo fugoide.

4.1.2 Estabilidad dinámica lateral

De forma general, de la dinámica lateral de las aeronaves convencionales resultarán dos autovalores reales y un par de autovalores complejos conjugados correspondientes a los modos laterales:

- **Modo espiral:** asociado al autovalor real de módulo muy pequeño (positivo o negativo). Modo lento divergente o convergente según el autovalor sea positivo o negativo. El modo espiral se caracteriza por cambios en el ángulo de balance (ϕ) y el ángulo de guiñada (ψ).
- **Modo de convergencia en balance:** asociado al autovalor real negativo de módulo grande. Modo rápido convergente. Se caracteriza por cambio en el ángulo de balance (ϕ).
- **Modo de balanceo holandés:** asociado al par de autovalores complejos conjugados con parte real negativa de módulo pequeño. Modo oscilatorio con fuerte acoplamiento entre todas las variables laterales.

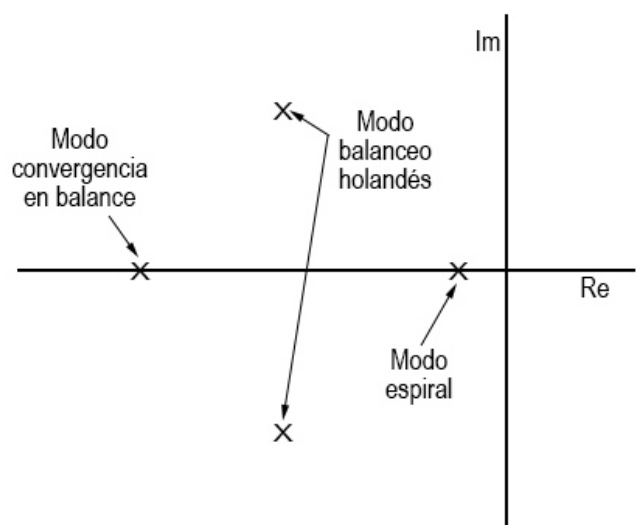


Figura 4.3 Modos de la dinámica lateral.

4.2 Sistema de aumento de estabilidad

El sistema de aumento de estabilidad (SAS) permite mejorar la estabilidad del sistema actuando sobre los modos de este, de forma que los cancele o al menos los suavice. Para poder mover todos los polos del sistema a los valores deseados es necesario que el sistema sea controlable. Esto puede comprobarse a través de la matriz de controlabilidad U :

$$U = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (4.4)$$

El sistema será controlable si U tiene el rango máximo n , esto es, si tiene n columnas linealmente independientes. Una vez comprobado que el sistema es controlable, se puede proceder a realizar el sistema de aumento de estabilidad.

Dado un sistema descrito por

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad (4.5)$$

se puede realizar una realimentación lineal del vector de estados $\bar{u} = \bar{v} - K\bar{x}$, así

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} = A\bar{x} + B(\bar{v} - K\bar{x}) = (A - BK)\bar{x} \quad (4.6)$$

Las oscilaciones del sistema se deben a que los autovalores de A tienen parte imaginaria grande. De modo que se puede usar K de forma que los autovalores de la nueva matriz del sistema $(A - BK)$ no tengan parte imaginaria, eliminando así las oscilaciones de los modos.

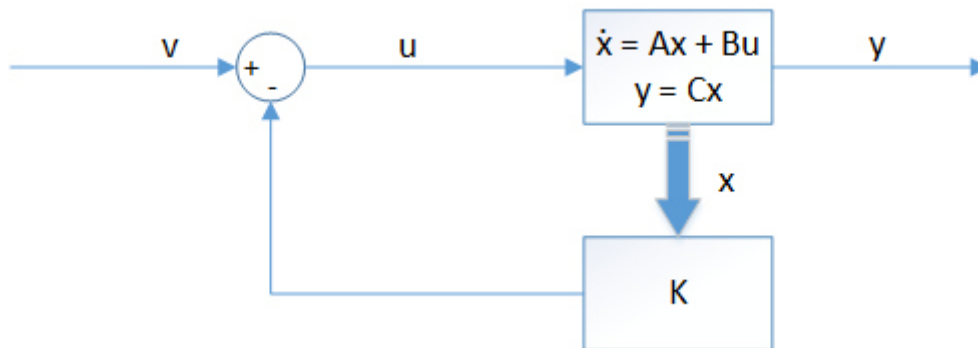


Figura 4.4 Diagrama del sistema de aumento de estabilidad.

La elección de los nuevos autovalores del sistema se hará de manera que estos tengan parte imaginaria nula para evitar las oscilaciones, sean negativos para que exista convergencia y tengan un valor cercano al módulo del autovalor original.

El cálculo de la matriz K se puede realizar usando la función *place* de Matlab. La estructura de esta función es

$$K = \text{place}(A, B, p) \quad (4.7)$$

Esta función devuelve la matriz K a partir de las matrices A y B y el vector p que contiene los nuevos autovalores del sistema. Debido a la dependencia con las matrices A y B , la matriz de realimentación K dependerá del punto de operación al igual que éstas y será diferente para la dinámica longitudinal y lateral.

4.3 Controlador PID

Para realizar controles de actitud y velocidad se usarán controladores PID, que vienen definidos esencialmente por tres parámetros: proporcional (k_P), integral (k_I) y derivativo (k_D). El término proporcional da una salida del controlador proporcional al error. El término integral permite eliminar el error en régimen permanente. El término derivativo tiene carácter de previsión y proporciona al sistema cierta anticipación sobre la respuesta. También se usarán controladores PI, consistentes únicamente en los términos proporcional e integral. El esquema básico de control con PID se muestra en la siguiente figura:

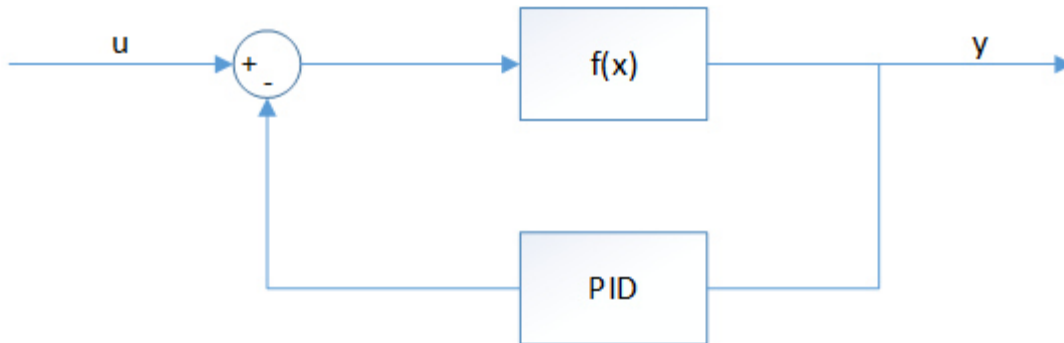


Figura 4.5 Esquema básico de control PID.

El ajuste de los parámetros se hará mediante prueba y error siguiendo los siguientes pasos:

1. Anulando los términos integral y derivativo, se elegirá un valor k_P que haga que no haya mucha sobreoscilación.
2. A continuación, se disminuirá k_P y se añadirá el término integral k_I para eliminar el error en régimen permanente.
3. Por último, se añadirá el término derivativo k_D para suavizar la sobreoscilación que pudiese haber aparecido en el paso anterior.

4.4 Conclusiones

En este capítulo se ha hecho una introducción a la estabilidad dinámica asociando el tipo de respuesta del sistema al carácter de sus autovalores. Se han presentado los modos de la aeronave y se ha diseñado un sistema de aumento de estabilidad que permite mejorar la respuesta del sistema al suavizar los modos. Además, se ha presentado el controlador PID, que es el que se usará para realizar el control de la aeronave.

5 IMPLEMENTACIÓN EN SIMULINK

En este capítulo se llevará a cabo la implementación de las ecuaciones en Simulink, primero en el modelo no lineal y luego en el modelo linealizado, así como se diseñarán sistema de control. Para el modelo lineal se realizarán controles de velocidad y actitud, y se diseñará un sistema de guiado a un punto fijo. En el caso del modelo lineal, se estudiará la estabilidad dinámica del sistema, hallando los modos de la dinámica longitudinal y lateral, se realizará un sistema de aumento de estabilidad que mejore el comportamiento ante perturbaciones y un sistema de control de actitud.

En el apartado 5.1 se presentará el modelo de aeronave empleado. En el apartado 5.2 se tratará el modelo no lineal. En el apartado 5.3 se tratará modelo linealizado.

5.1 Características de la aeronave

El modelo de aeronave usado en este proyecto se corresponde con el del UAV Aerosonde. En las siguientes tablas se recogen las características másicas y geométricas, parámetros del motor, coeficientes aerodinámicos y limitaciones de actuación correspondientes al modelo.

Parámetro	Valor
m [kg]	13.5
I_x [kg · m ²]	0.8244
I_y [kg · m ²]	1.135
I_z [kg · m ²]	1.759
I_{xz} [kg · m ²]	0.1204
S [m ²]	0.55
b [m]	2.8956
c [m]	0.18994
S_{motor} [m ²]	0.2027
k_{motor} [-]	80

Tabla 5.1 Datos másicos, geométricos y del motor.

Parámetro	Valor
$V_{a_{max}}$ [m/s]	40
h_{max} [m]	4500

Tabla 5.2 Límites de actuación.

Coefficientes longitudinales	Valor	Coefficientes laterales	Valor
C_{L_0}	0.28	C_{Y_0}	0
C_{L_α}	3.45	C_{Y_β}	-0.98
C_{L_q}	0	C_{Y_p}	0
$C_{L_{\delta_e}}$	0.36	C_{Y_r}	0
C_{D_0}	0.03	$C_{Y_{\delta_a}}$	0
C_{D_α}	0.30	$C_{Y_{\delta_r}}$	0.17
C_{D_q}	0	C_{l_0}	0
$C_{D_{\delta_e}}$	0	C_{l_β}	-0.12
C_{m_0}	-0.02338	C_{l_p}	-0.26
C_{m_α}	-0.38	C_{l_r}	0.14
C_{m_q}	-3.6	$C_{l_{\delta_a}}$	0.08
$C_{m_{\delta_e}}$	-0.5	$C_{l_{\delta_r}}$	-0.105
C_{prop}	1.0	C_{n_0}	0
		C_{n_β}	0.25
		C_{n_p}	0.022
		C_{n_r}	-0.35
		$C_{n_{\delta_a}}$	0.06
		$C_{l_{\delta_r}}$	0.032

Tabla 5.3 Coeficientes aerodinámicos.

5.2 Modelo no lineal

En primer lugar, en el apartado 5.2.1, se implementarán las ecuaciones generales de la aeronave en un modelo de bloques de Simulink. A continuación, en el apartado 5.2.2, se presentará el modelo de control empleado para controlar la velocidad y actitud de la aeronave. Por último, en el apartado 5.2.3, se diseñará un sistema de guiado que proporcione las referencias a seguir de un punto fijo hasta alcanzarlo.

5.2.1 Implementación del modelo de aeronave

Las ecuaciones cinemáticas y dinámicas obtenidas en el capítulo 2 pueden implementarse en Simulink según el siguiente diagrama de bloques:

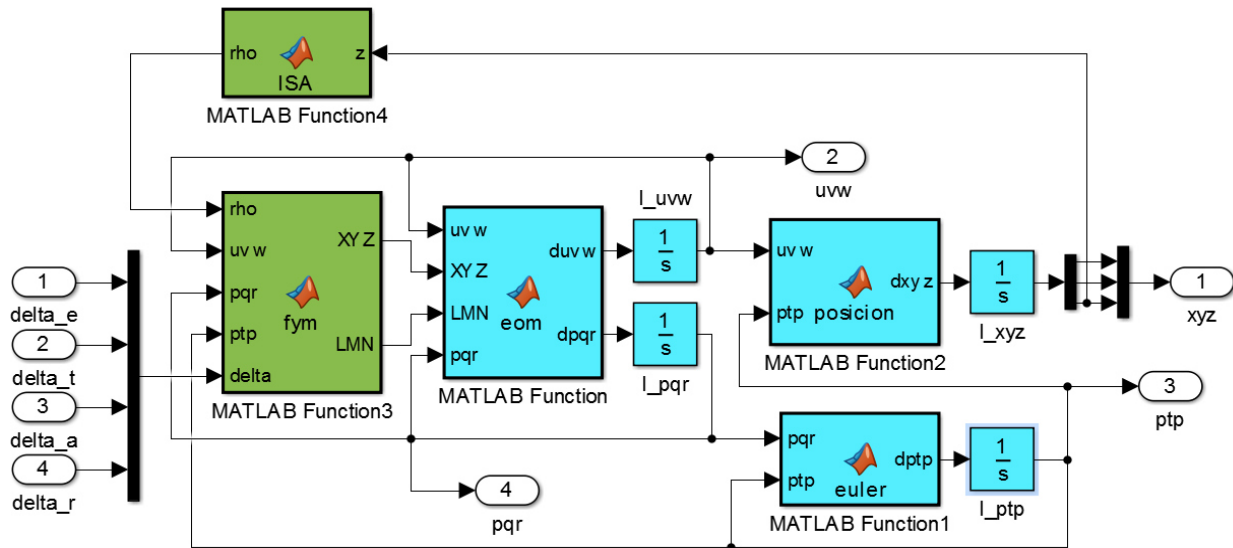


Figura 5.1 Diagrama de bloques del modelo no lineal.

Los bloques azules contienen las ecuaciones de movimiento de la aeronave descritas en el apartado 2.2. Cada uno de estos bloques va seguido de un bloque integrador de los cuales se obtendrá la velocidad lineal, velocidad angular, actitud y posición de la aeronave, que serán las salidas del modelo. En dichos bloques integradores se deben indicar las condiciones iniciales.

Los bloques verdes contienen las acciones exteriores, fuerzas y momentos que actúan sobre la aeronave y que fueron descritas en el apartado 2.3, y el modelo de atmósfera, descrito en el apartado 2.1.5, que proporciona la variación de la densidad con la altura.

El bloque de fuerzas y momentos recibe las entradas del modelo, que son las señales de control (deflexiones de las superficies de control y parámetro de control de empuje).

Para mayor comodidad, se puede crear un subsistema con este modelo no lineal que reciba las variables de control como entradas y tenga como salidas las variables de estado, como puede verse en la siguiente figura:

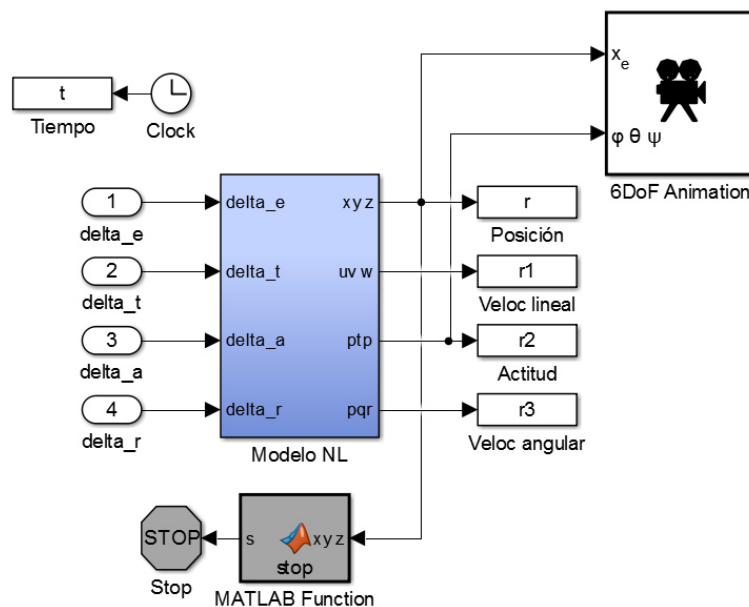


Figura 5.2 Modelo no lineal.

Donde, además del modelo con sus entradas y salidas, se ha añadido el bloque *6DoF Animation* que realiza una animación en 3D a partir de la posición y actitud, una bloque *Stop* precedido de una función (bloques grises) que paran la simulación cuando la aeronave llega al suelo, un bloque *To Workspace* para cada conjunto de variables (posición, velocidad lineal, actitud y velocidad angular) y un reloj seguido de un bloque *To Workspace* que recoge el tiempo de simulación. Esto permitirá disponer de las variables de estado y el tiempo en el espacio de trabajo, y poder así representarlas en gráficas.

5.2.2 Control de velocidad y actitud

Se va a diseñar un sistema de control de actitud y velocidad basado en controladores PID. El control de la velocidad en el eje del UAV (u) se realizará mediante el parámetro de control de empuje (δ_t), el control de ángulo de balance (ϕ) se hará con el parámetro de deflexión de los alerones (δ_a), el ángulo de cabeceo (θ) se controlará con el parámetro de deflexión del elevador (δ_e) y el control del ángulo de guiñada (ψ) se realizará con el parámetro de deflexión del timón de dirección (δ_r).

El ajuste de los parámetros del controlador se hará mediante prueba y error, ajustando primero la ganancia proporcional, luego la integral y por último la parte derivativa si fuera necesario. El valor de los parámetros escogidos para cada uno de los controladores se muestra en la siguiente tabla:

Parámetro	Control de u	Control de ϕ	Control de θ	Control de ψ
k_P	-0.8	0.8	-0.8	0.7
k_I	-0.19	0.2	-0.35	0.07
k_D	0	0.1	-0.1	0.4

Tabla 5.4 Controladores PID del modelo no lineal.

El diagrama de bloques de Simulink con los controladores implementados se muestra en la siguiente imagen:

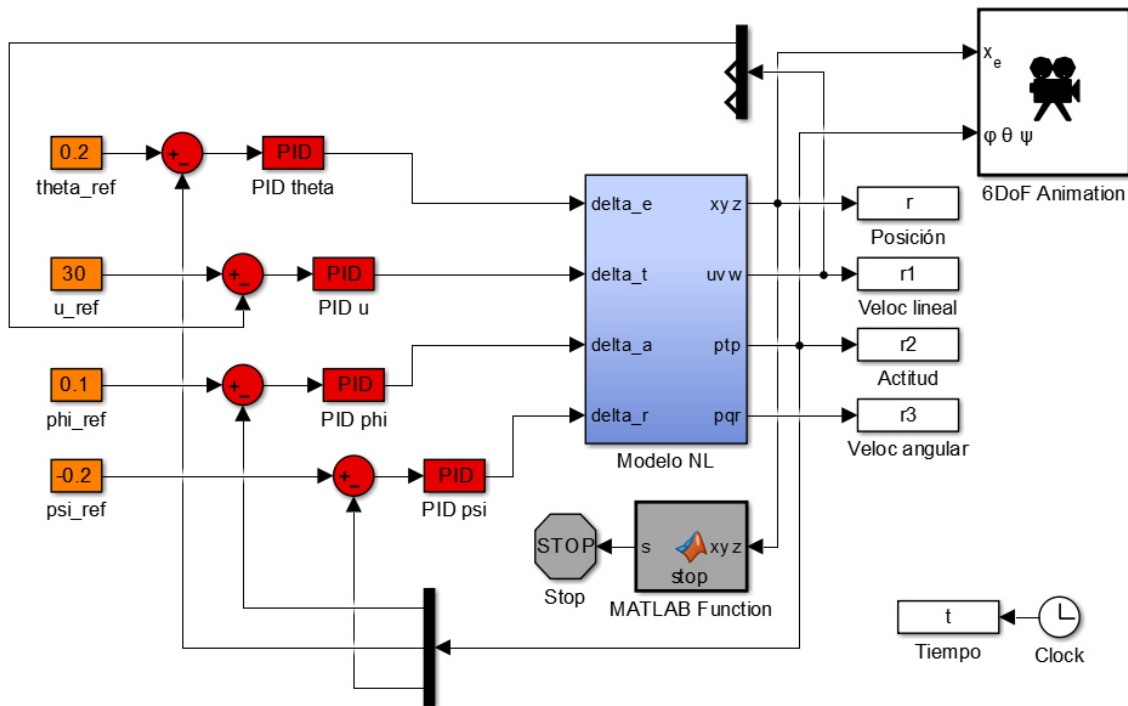


Figura 5.3 Control de velocidad y actitud en el modelo no lineal.

Los bloques rojos corresponden a la parte de control y los bloques naranjas marcan las referencias a seguir. Estas referencias (u_{ref} , ϕ_{ref} , θ_{ref} , ψ_{ref}) se comparan con el valor correspondiente que lleva la aeronave (u , ϕ , θ , ψ) y su diferencia se hace pasar por los controladores PID, lo que le permite al UAV alcanzar los valores deseados.

5.2.3 Guiado a un punto fijo

A continuación se va a diseñar un sistema de guiado que permita a la aeronave alcanzar un punto fijo. El diagrama de bloques de Simulink se muestra a continuación:

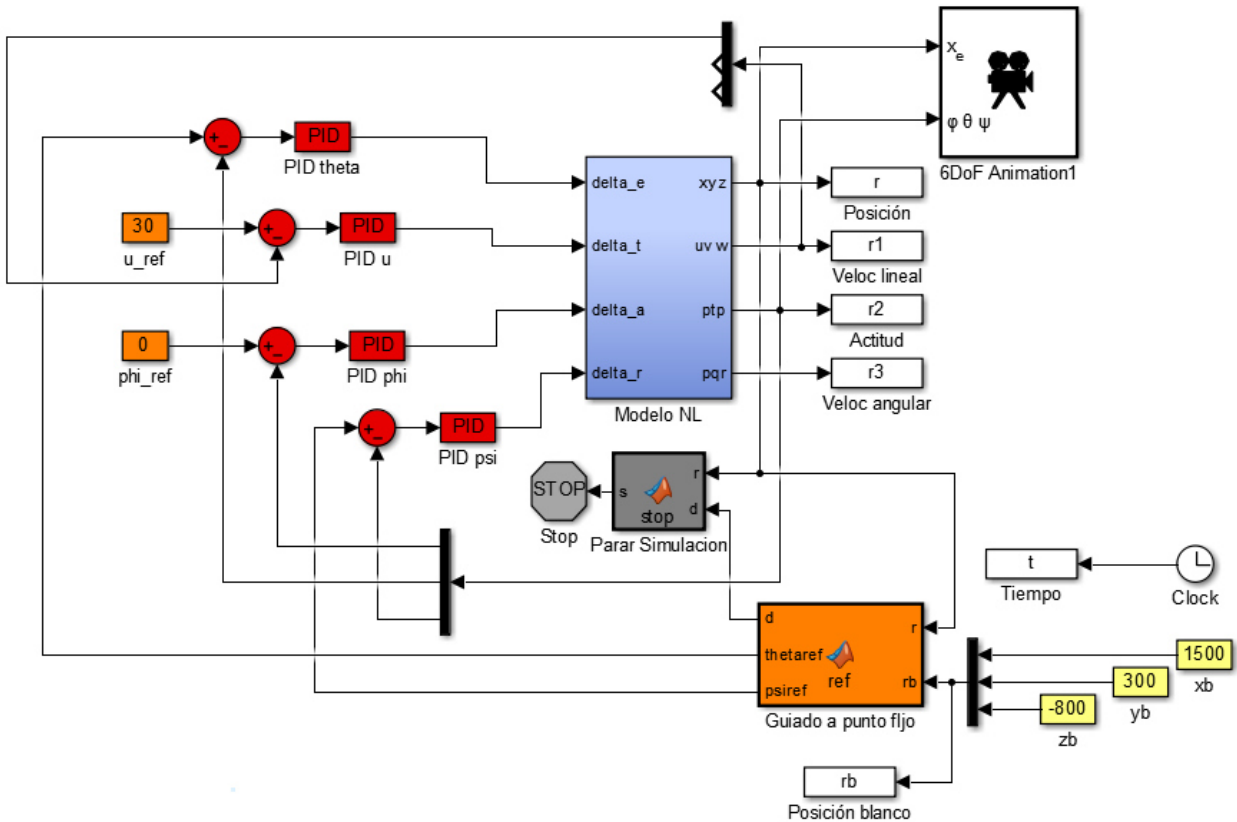


Figura 5.4 Sistema de guiado del modelo no lineal.

Para el guiado se han añadido los bloques amarillos, que permiten introducir las coordenadas del punto al que se quiere ir, y el bloque naranja, que proporciona las referencias a seguir a partir de la posición de la aeronave respecto al punto objetivo. Este bloque recibe como entradas la posición del UAV y la posición del punto, y calcula por un lado la pendiente vertical (θ_{ref}) y por otro la lateral (ψ_{ref}), dividiendo así el problema de en dos partes: una longitudinal que controla la altura y otra lateral encargada del guiado en el plano XY . Además de las referencias, este bloque también tiene como salida la distancia entre la aeronave y el blanco. Dicha distancia se calcula como:

$$d = \sqrt{(x_b - p_x)^2 + (y_b - p_y)^2 + (z_b - p_z)^2} \tag{5.1}$$

Este dato se usará para entrar en la función *stop* y parar la simulación cuando la aeronave de encuentre suficientemente cerca del objetivo. En este caso se ha tomado un valor del orden de la envergadura, esto es, la simulación se parará cuando se encuentre a 2 metros de distancia.

Para calcular las pendientes de referencia se hace uso de la siguiente imagen:

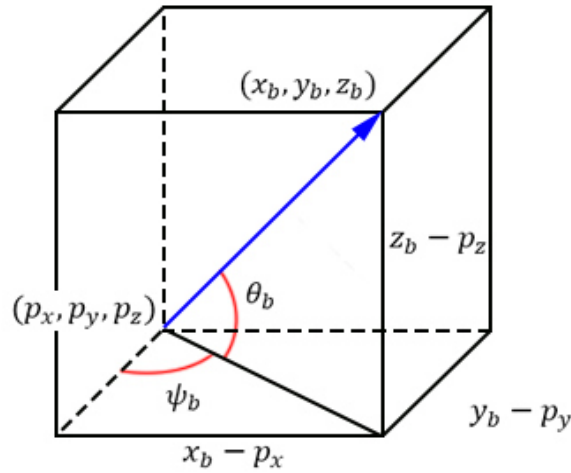


Figura 5.5 Ángulos de referencia.

Así, el cálculo de la pendiente vertical será:

$$\theta_{ref} = \tan^{-1} \left(- \frac{z_b - p_z}{\sqrt{(x_b - p_x)^2 + (y_b - p_y)^2}} \right) \quad (5.2)$$

y el de la pendiente lateral:

$$\psi_{ref} = \tan^{-1} \left(\frac{y_b - p_y}{x_b - p_x} \right) \quad (5.3)$$

5.3 Modelo lineal

En primer lugar, en el apartado 5.3.1 se implementará el modelo linealizado mediante un diagrama de bloques en Simulink. A continuación, en el apartado 5.3.2, se estudiará la estabilidad dinámica del sistema identificando los modos de la dinámica longitudinal y la dinámica lateral. Con el objetivo suavizar los modos y mejorar así la respuesta ante perturbaciones, en el apartado 5.3.3 se implementará un sistema de aumento de estabilidad. Por último, en el apartado 5.3.4 se realizará un control de actitud.

5.3.1 Implementación del modelo linealizado

Para obtener el sistema lineal, en primer lugar debemos obtener el punto de equilibrio. Se tratará vuelo rectilíneo a altitud y velocidad constante, por lo que habrá que fijar el ángulo de balance en cero y la altitud y velocidad absoluta en los valores deseados.

Para ello, como se vio en el apartado 3.1, se usará la función *fmincon* que tiene la siguiente estructura:

$$[x, fval] = fmincon(fun, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, l_b, u_b, nonlcon) \quad (5.4)$$

Esta función recibe como entrada la función a minimizar, que será

$$J = \dot{p}_z^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2 \quad (5.5)$$

Además requiere de un valor inicial de cada una de las variables, que se introducen en el vector x_0 . Estos valores iniciales se fijarán nulos excepto para la componente u de la velocidad y para p_z que se fijarán cercanos a los valores de velocidad y altitud deseados. Puesto que no se tienen restricciones de desigualdad, la matriz A y el vector b serán vacíos. Las restricciones lineales de ángulo de balance nulo y altura constante se fijan en la matriz A_{eq} (que tendrá tantas columnas como variables y tantas filas como restricciones) y el vector b_{eq} (que tendrá tantas filas como restricciones). Los vectores l_b y u_b recogen los límites inferiores y superiores, respectivamente, de las variables de estado y de control que intervienen en la optimización. Estos valores se han fijado según las limitaciones de actuación de la aeronave para la altura y velocidad, y según valores típicos y restricciones físicas en el resto de variables, así, los límites fijados se muestran en la siguiente tabla:

Variabes	Valor mínimo	Valor máximo
p_z [m]	-4500	0
u, v, w [m/s]	-40	40
ϕ [rad]	$-\pi$	π
θ [rad]	$-\pi/2$	$\pi/2$
p, q, r [rad/s]	-1	1
δ_t [-]	-1	1
$\delta_e, \delta_a, \delta_r$ [rad]	$-\pi/6$	$\pi/6$

Tabla 5.5 Límites de las variables de estado y control.

Por último, la entrada *nonlcon* de la función introduce las restricciones no lineales. Este es el caso de la restricción en la velocidad, debido a que se impone en el módulo (V_a) mientras que el problema viene dado en función de sus componentes (u, v, w).

La implementación de la función *fmincon*, con las configuraciones de entradas descritas, para la obtención del punto de equilibrio se ha implementado en el archivo *trimado.m* que se indica en el Anexo. En este archivo también se incluyen los cálculos de las matrices $A_{lon}, B_{lon}, C_{lon}, A_{lat}, B_{lat}$ y C_{lat} a partir de dicho punto.

Para un vuelo recto a 1000 m de altitud y velocidad absoluta de 27 m/s se obtienen los valores de equilibrio de las variables de estado recogidos en la siguiente tabla:

Variabes	p_{zE}	u_E	v_E	w_E	ϕ_E	θ_E	p_E	q_E	r_E
Valor	-1000	26.8595	0	2.7513	0	0.1021	0	0	0

Tabla 5.6 Variables de estado en el punto de equilibrio para vuelo recto a 1000 m y 27 m/s.

Y los siguientes valores de equilibrio para las variables de control:

Variabes	δ_{eE}	δ_{tE}	δ_{aE}	δ_{rE}
Valor	-0.1243	0.3643	0	0

Tabla 5.7 Variables de control en el punto de equilibrio para vuelo recto a 1000 m y 27 m/s.

Tras calcular el punto de equilibrio, se obtienen las matrices correspondientes. Para la dinámica longitudinal se tiene:

$$A_{lon} = \begin{bmatrix} -0.4890 & 0.3455 & -2.7513 & -9.7490 & -0.0001 \\ -0.5026 & -2.1800 & 26.8595 & -0.9986 & 0.0011 \\ 0.0535 & -0.5222 & -0.4723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1019 & 0.9948 & 0 & -27 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$B_{lon} = \begin{bmatrix} 0.6056 & 38.9219 \\ -5.9123 & 0 \\ -1.5678 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$C_{lon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0038 & 0.0368 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Y para la dinámica lateral:

$$A_{lat} = \begin{bmatrix} -0.5992 & 2.7513 & -26.8595 & 9.7490 & 0 \\ -3.0131 & 10.9600 & 4.9202 & 0 & 0 \\ 3.1908 & -0.3174 & -6.5487 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.1024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0052 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$B_{lat} = \begin{bmatrix} 0 & 2.8065 \\ 66.5038 & -81.2922 \\ 26.5648 & 26.5648 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$C_{lat} = \begin{bmatrix} 0.0370 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Una vez obtenidas las matrices dinámicas, se puede implementar el modelo en Simulink de ambas dinámicas siguiendo los siguientes diagramas de bloques:

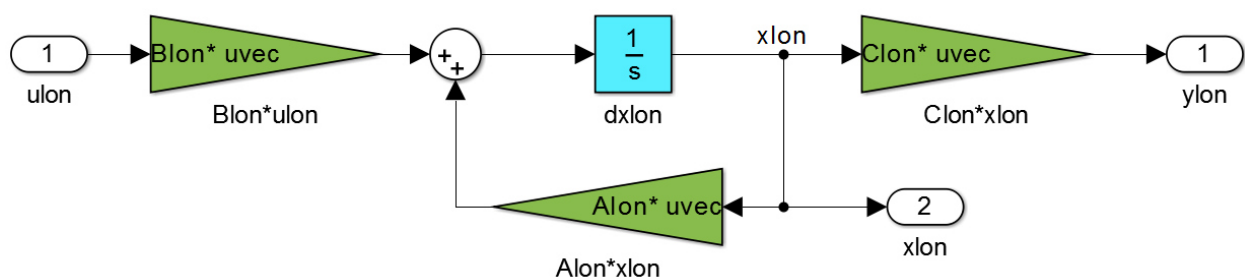


Figura 5.6 Diagrama de bloques de la dinámica longitudinal.

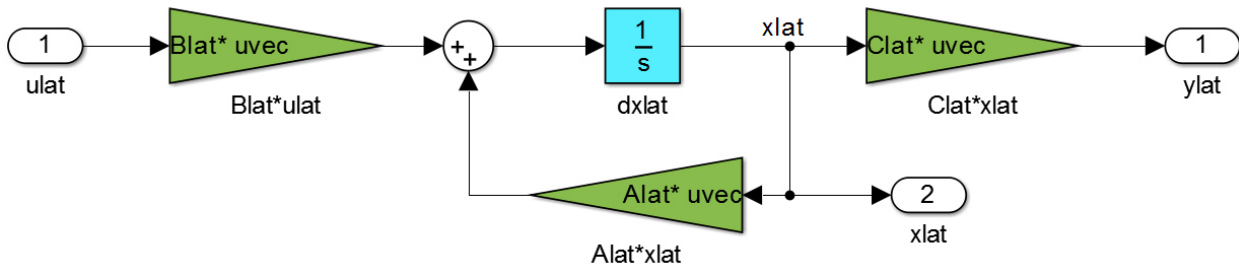


Figura 5.7 Diagrama de bloques de la dinámica lateral.

Los bloques verdes multiplican la señal que entra en el bloque por la matriz correspondiente. El bloque azul es un integrador con las condiciones iniciales nulas. Tanto las entradas como las salidas y el estado de cada una de las dinámicas son incrementos de las variables originales y se recogen en la siguiente tabla:

Variables	Dinámica longitudinal	Dinámica lateral
Entradas	$\bar{\delta}_e, \bar{\delta}_t$	$\bar{\delta}_a, \bar{\delta}_r$
Salidas	$\bar{u}, \bar{\alpha}, \bar{q}, \bar{\theta}, \bar{p}_z$	$\bar{\beta}, \bar{p}, \bar{r}, \bar{\phi}, \bar{\psi}$
Estado	$\bar{u}, \bar{w}, \bar{q}, \bar{\theta}, \bar{p}_z$	$\bar{v}, \bar{p}, \bar{r}, \bar{\phi}, \bar{\psi}$

Tabla 5.8 Entradas, salidas y estado de las dinámicas longitudinal y lateral.

Cada uno de los modelos se puede recoger en un subsistema tal y como se muestra en la siguiente imagen:

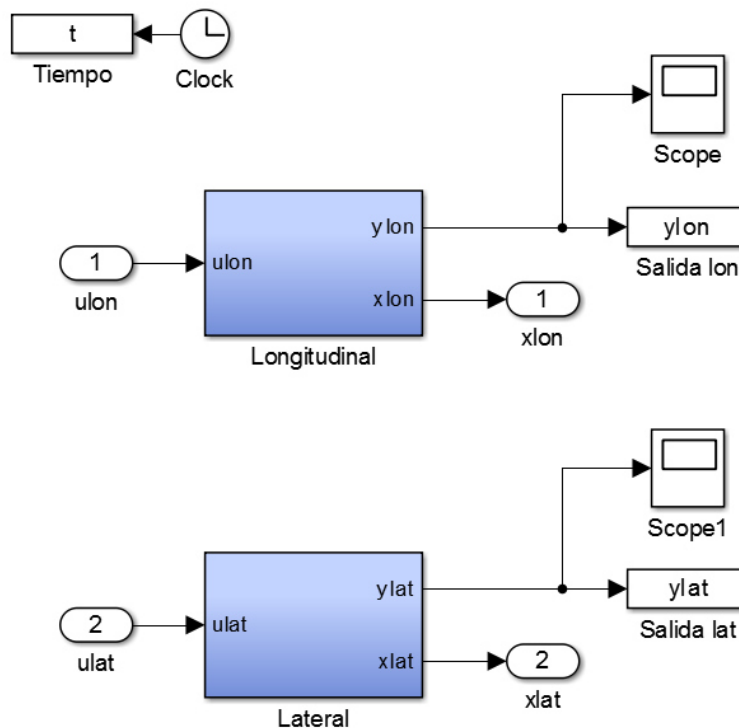


Figura 5.8 Diagrama de bloques del modelo lineal.

Además de los bloques que definen el modelo con sus entradas, salidas y vector de estados, por cada una de dinámicas se han añadido un bloque *Scope* que muestra las salidas, un bloque *To Workspace* que las guarda en el espacio de trabajo y un reloj con un bloque *To Workspace* para el tiempo.

5.3.2 Estabilidad dinámica

Para estudiar la estabilidad dinámica del sistema, se obtienen los autovalores de las matrices de estado A_{lon} y A_{lat} . Para ello se usa la función de Matlab *eig* que se ha implementado en el archivo *trimado.m*.

5.3.2.1 Identificación de los modos de la dinámica longitudinal

Para la dinámica longitudinal se obtienen los siguientes autovalores:

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1 = -1.3269 \pm 3.6593i \quad (5.12)$$

$$\lambda_2, \bar{\lambda}_2 = -0.2450 \pm 0.4105i \quad (5.13)$$

$$\lambda_3 = 0.0024 \quad (5.14)$$

El primer par de autovalores complejos conjugados $(\lambda_1, \bar{\lambda}_1)$ se corresponde con el modo de corto periodo, el segundo par $(\lambda_2, \bar{\lambda}_2)$ con el modo fugoide y el último autovalor real (λ_3) es el correspondiente a la altura. Se representan en la siguiente figura:

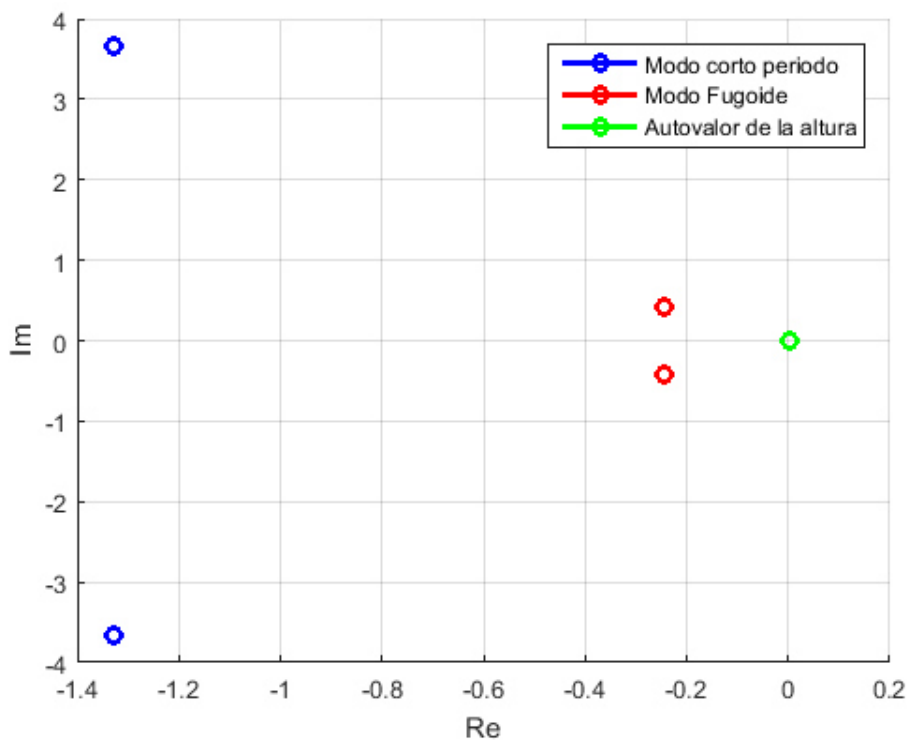


Figura 5.9 Autovalores de la dinámica longitudinal.

5.3.2.2 Identificación de los modos de la dinámica lateral

Para la dinámica lateral se obtienen los siguientes autovalores:

$$\lambda_1 = 0 \quad (5.15)$$

$$\lambda_2 = -10.6349 \quad (5.16)$$

$$\lambda_3 = -0.0033 \quad (5.17)$$

$$\lambda_4, \bar{\lambda}_4 = -3.7349 \pm 9.1854i \quad (5.18)$$

El primer autovalor real (λ_1) es el correspondiente al ángulo de guiñada ψ (cuya ecuación está desacoplada del resto), el segundo (λ_2) se corresponde con el modo de convergencia en balance, el tercero (λ_3) con el modo espiral, y el último par de autovalores complejos conjugados ($\lambda_4, \bar{\lambda}_4$) se corresponde con el modo balanceo holandés. Se representan en la siguiente figura:

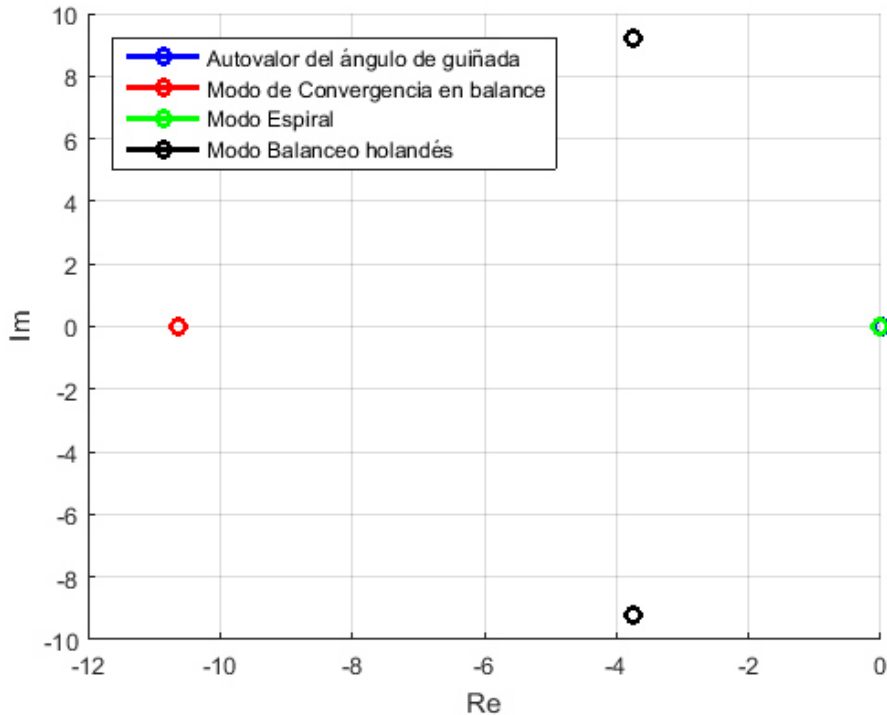


Figura 5.10 Autovalores de la dinámica lateral.

5.3.3 Sistema de Aumento de Estabilidad

En primer lugar, hay que verificar que el sistema es controlable hallando la matriz de controlabilidad U y comprobando que tiene rango máximo. Esta matriz será diferente para cada una de las dinámicas:

$$U_{lon} = [B_{lon} \quad A_{lon}B_{lon} \quad A_{lon}^2B_{lon} \quad A_{lon}^3B_{lon} \quad A_{lon}^4B_{lon}] \quad (5.19)$$

$$U_{lat} = [B_{lat} \quad A_{lat}B_{lat} \quad A_{lat}^2B_{lat} \quad A_{lat}^3B_{lat} \quad A_{lat}^4B_{lat}] \quad (5.20)$$

Para calcular el rango, se utiliza la función *rank* de Matlab. Esto se ha implementado de nuevo en el archivo *trimado.m*. Una vez comprobado que el rango es 5, el sistema es controlable y se puede continuar con el siguiente paso.

Con el objetivo de disminuir las oscilaciones y las divergencias debidas a los autovalores, se va a diseñar un sistema de aumento de estabilidad. Para ello se modifican los autovalores de forma que no tengan parte imaginaria, sino que sean reales para eliminar las oscilaciones, y que sean negativos para tener convergencia. Además el módulo será similar al de los autovalores originales para no modificar demasiado la rapidez del sistema. Esto se realiza hallando, en cada una de las dinámicas, la matriz de ganancias K para que la nueva matriz de estados sea $A - KB$ y tenga los autovalores deseados. Para obtener K se usa la función *place* de Matlab que recibe como entradas las matrices A , B y el vector

con los nuevos autovalores. Esto se ha implementado en la función *SAS.m* que se adjunta en el Anexo. Los valores de los autovalores originales con su módulo y los autovalores deseados para la dinámica longitudinal se muestran en la siguiente tabla:

Autovalor	Módulo	Autovalor deseado
$-1.3269 + 3.6593i$	3.8924	-4
$-1.3269 - 3.6593i$	3.8924	-3.9
$-0.2450 + 0.4105i$	0.4780	-0.5
$-0.2450 - 0.4105i$	0.4780	-0.48
0.0024	0.0024	-0.1

Tabla 5.9 Autovalores originales y deseados de la dinámica longitudinal.

La matriz K correspondiente es:

$$K_{lon} = \begin{bmatrix} -0.0278 & 0.3245 & -2.5210 & -0.9649 & -0.0024 \\ 0.0982 & -0.0468 & 0.3973 & 2.2431 & -0.0067 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Para la dinámica lateral, los autovalores originales con su módulo y los autovalores deseados se muestran en la siguiente tabla:

Autovalor	Módulo	Autovalor deseado
0	0	-0.1
-10.6349	10.6349	-10.6
-0.0033	0.0033	-0.3
$-3.7349 + 9.1854i$	9.9157	-9.9
$-3.7349 - 9.1854i$	9.9157	-9.92

Tabla 5.10 Autovalores originales y deseados de la dinámica lateral.

La matriz K correspondiente es:

$$K_{lat} = \begin{bmatrix} -0.0262 & -0.0342 & 0.3196 & -0.0663 & 0.0384 \\ 0.0208 & -0.0191 & 0.1840 & -0.1027 & 0.0204 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

El modelo de bloques de Simulink se muestra en la siguiente imagen:

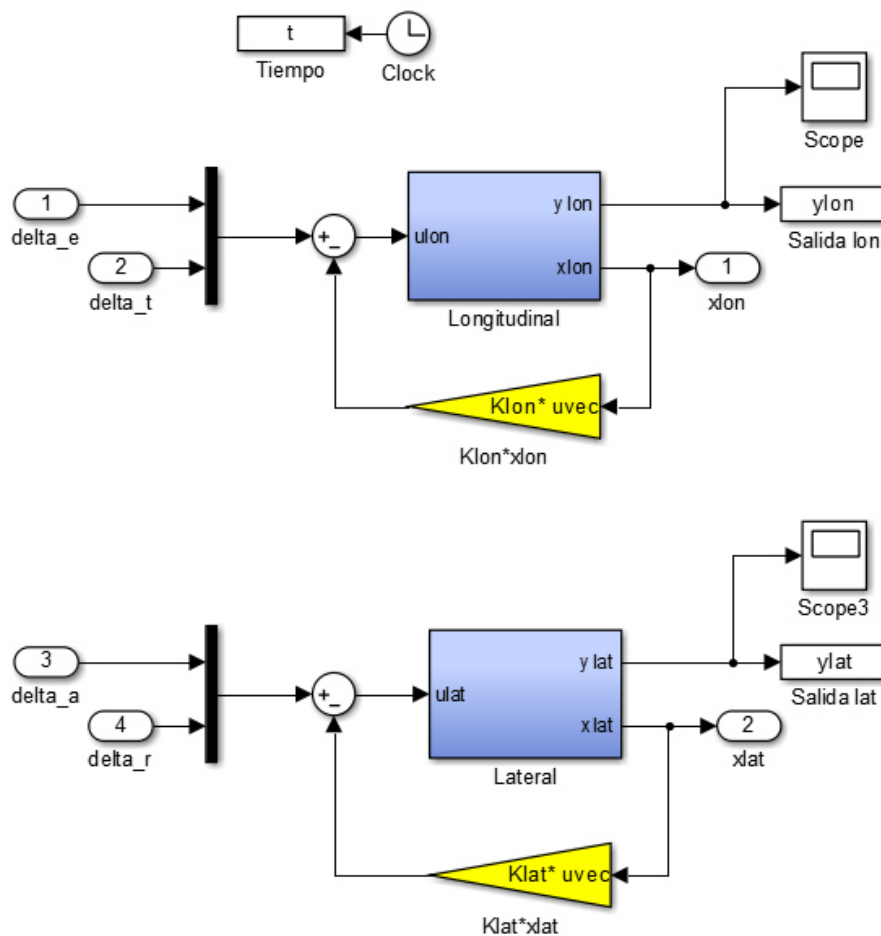


Figura 5.11 Modelo lineal con sistema de aumento de estabilidad.

Donde se han añadido los bloques amarillos que multiplican las entradas x_{lon} y x_{lat} por la matrices correspondientes K_{lon} y K_{lat} y el resultado se lo restan a las señales de entrada.

5.3.4 Control de actitud

Por último, se va a diseñar un sistema control de actitud basado en controladores PID. El control de ángulo de balance (ϕ) se hará con el parámetro de deflexión de los alerones (δ_a), el ángulo de cabeceo (θ) se controlará con el parámetro de deflexión del elevador (δ_e) y el control del ángulo de guiñada (ψ) se realizará con el parámetro de deflexión del timón de dirección (δ_r). Puesto que no se va a controlar la velocidad, la señal de control del empuje se mantendrá en cero.

El ajuste de los controladores PID se hará nuevamente mediante prueba y error, ajustando en primer lugar el término proporcional, luego el integral y por último el derivativo si fuera necesario. Los valores ajustados en este caso se muestran en la siguiente tabla:

Parámetro	Control de ϕ	Control de θ	Control de ψ
k_P	0.9	-1.5	0.8
k_I	1.2	-0.7	0.3
k_D	0	-0.5	0

Tabla 5.11 Controladores PID del modelo lineal.

El diagrama de bloques de Simulink se muestra en la siguiente imagen:

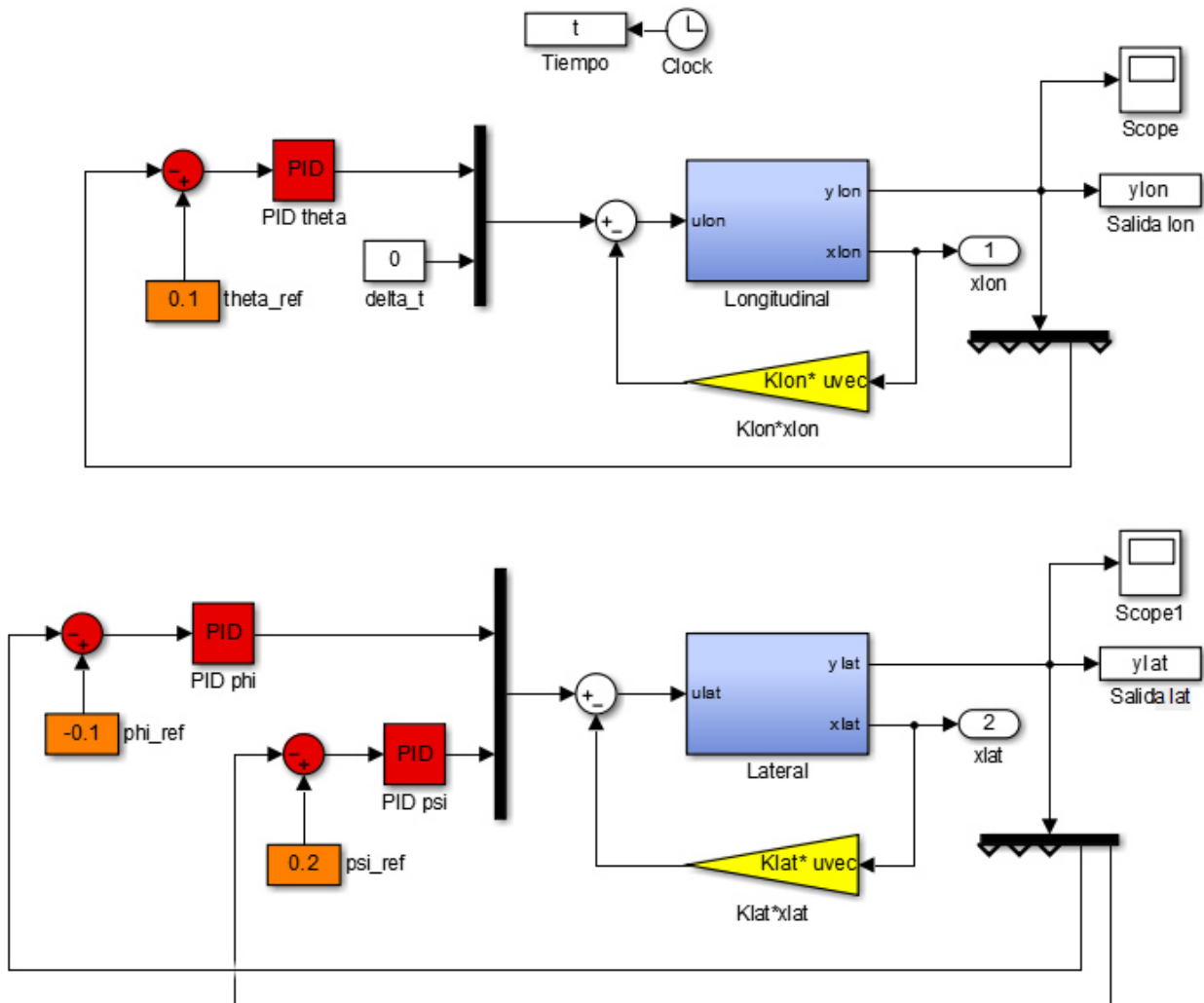


Figura 5.12 Control de actitud en el modelo lineal.

Los bloques en rojo corresponden a la parte de control y los bloques naranjas marcan las referencias a seguir. Estas referencias (ϕ_{ref} , θ_{ref} , ψ_{ref}) se comparan con el valor correspondiente que lleva la aeronave (ϕ , θ , ψ) y su diferencia se hace pasar por los controladores PID, lo que le permite al UAV alcanzar los valores deseados.

5.4 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado el modelo de aeronave implementado con sus parámetros y coeficientes característicos. A continuación se ha introducido el conjunto de ecuaciones generales de

la aeronave en Simulink. Después se ha procedido a realizar un sistema de control de actitud y velocidad para finalmente realizar un sistema de guiado básico que permita alcanzar blancos fijos. Por último, se ha obtenido el modelo linealizado, se ha realizado un sistema de aumento de estabilidad y un sistema de control de actitud que permite a la aeronave alcanzar unas referencias marcadas.

Con todas estas herramientas, se han diseñado finalmente tres aplicaciones: la primera de ellas consiste en un control de velocidad y actitud con el modelo no lineal, la segunda consiste en realizar un sistema de control de actitud con SAS con el modelo lineal, y la tercera consiste en implementar en el modelo no lineal los resultados del sistema de control de actitud con SAS obtenidos para el modelo lineal. Cada una de estas aplicaciones y cómo hacer uso de ellas se indican en el siguiente capítulo.

6 APLICACIONES

En el capítulo 5 se ha explicado cómo implementar los modelos y el control en Simulink. Con ello se han elaborado tres aplicaciones distintas:

- **Aplicación 1:** *UAVnl_control.slx* en el que se ha implementado el modelo no lineal y un sistema de control y guiado a un punto fijo.
- **Aplicación 2:** *UAVsl_controlSAS.slx* en el que se ha implementado en el modelo lineal, un sistema de aumento de estabilidad y un sistema de control de actitud.
- **Aplicación 3:** *UAVnl_controlSAS.slx* en el que se han implementado el sistema de aumento de estabilidad y el control de actitud obtenidos para el modelo lineal en el modelo no lineal.

En este capítulo explicará cómo hacer uso de estos archivos y se verán las posibilidades que tienen cada uno de ellos.

En el apartado 6.1 se abordará la primera aplicación que contiene un sistema de control y guiado a un punto fijo con el modelo no lineal. En el apartado 6.2 se verá la segunda aplicación que contiene un sistema de control de actitud con sistema de aumento de estabilidad obtenido para el modelo lineal. En el apartado 6.3 se verá la tercera aplicación que contiene el control de actitud con el sistema de aumento de estabilidad hallado para el modelo lineal implementado en el modelo no lineal.

6.1 Aplicación 1

En esta aplicación se ha desarrollado el sistema de control y guiado a un punto fijo. Abriendo el archivo *UAVnl_control.slx* se llega a:

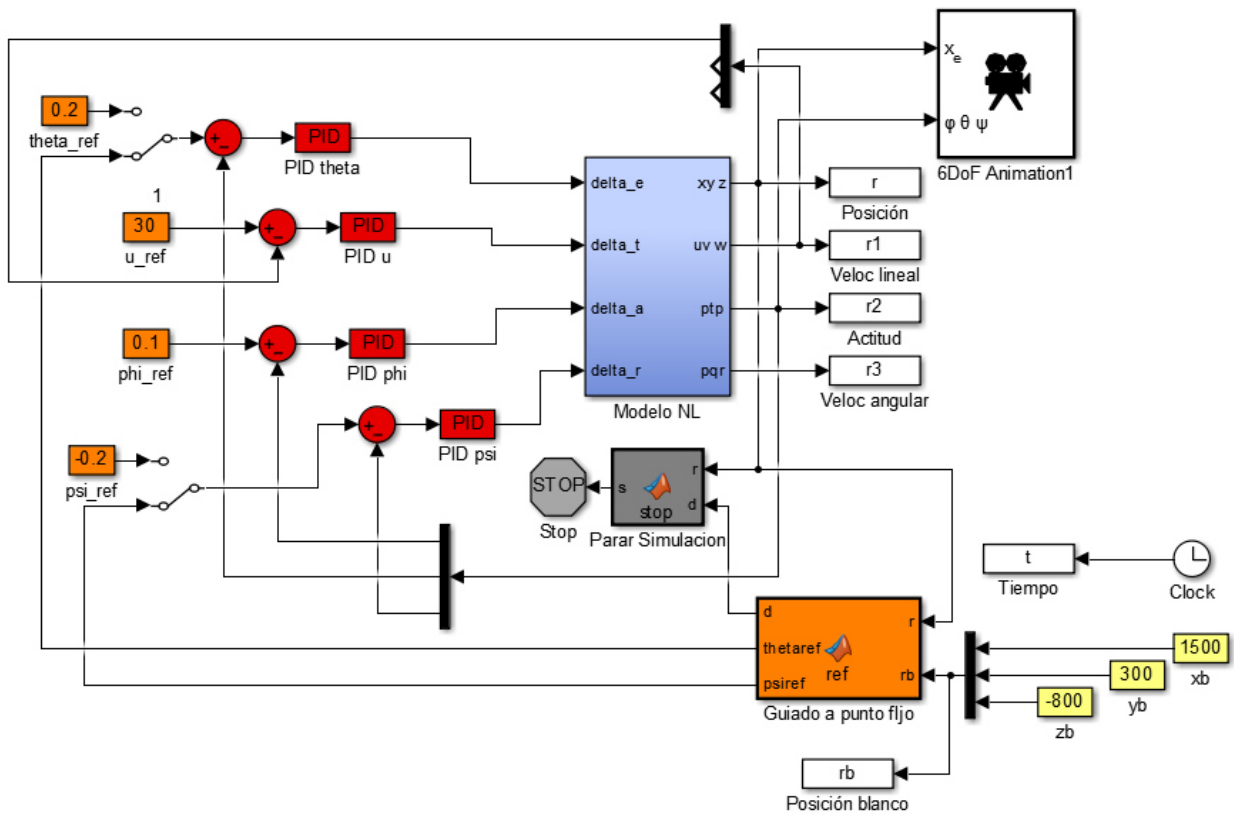


Figura 6.1 Sistema de control y guiado a un punto fijo del modelo no lineal.

A continuación se va a explicar cómo realizar simulaciones con las distintas partes (modelo, control y guiado). En primer lugar se verá el funcionamiento del modelo desconectando el control y guiado, a continuación se añadirá la parte de control y por último se verá el sistema completo conectando la parte de guiado a lo anterior.

6.1.1 Funcionamiento del modelo no lineal

Para familiarizarse con el modelo y comprobar su funcionamiento se pueden realizar algunas simulaciones. Desconectando las entradas tal y como se muestra en la imagen:

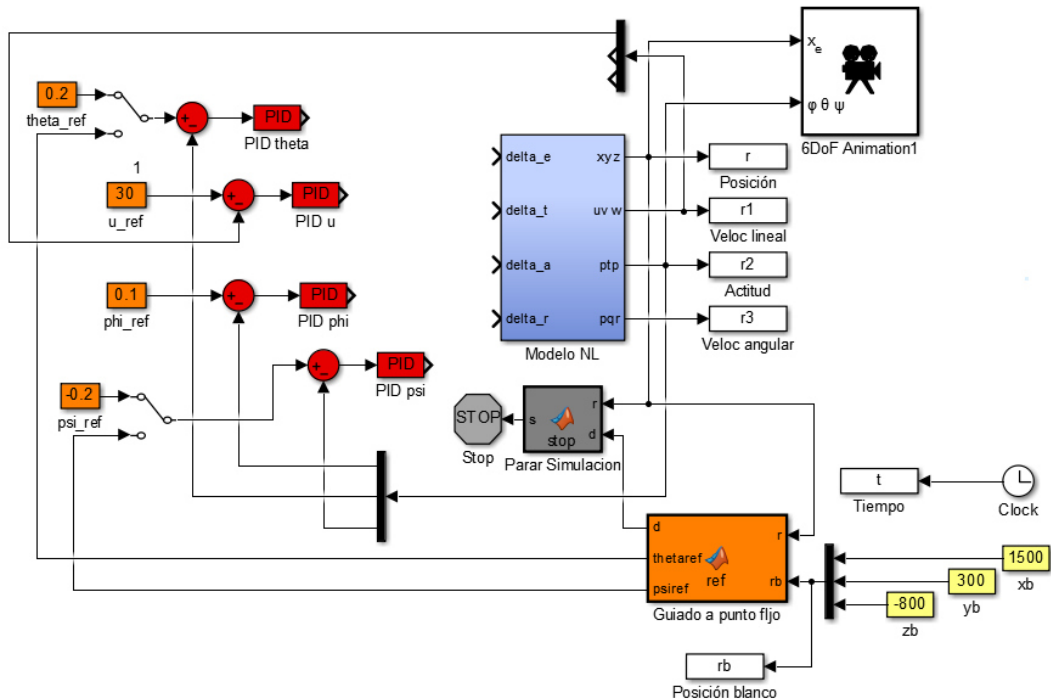


Figura 6.2 Modelo no lineal con entradas desconectadas.

De modo que se elimina así la parte de control y guiado y queda solo el modelo. Introduciendo diferentes valores en las señales de control o entrando en el modelo y cambiando las condiciones iniciales se pueden simular distintos movimientos. En este caso se probarán tres: caída libre, trayectoria parabólica y despegue.

6.1.1.1 Caída libre

Para simular el movimiento de caída libre, se deben cancelar las fuerzas aerodinámicas y de empuje (dejando actuar solamente la gravedad), cancelar los momentos y poner las condiciones iniciales nulas excepto la altura, que se fijará, por ejemplo, en 50 m ($p_{z_0} = -50$). Haciendo doble clic en el bloque azul se entra en el modelo:

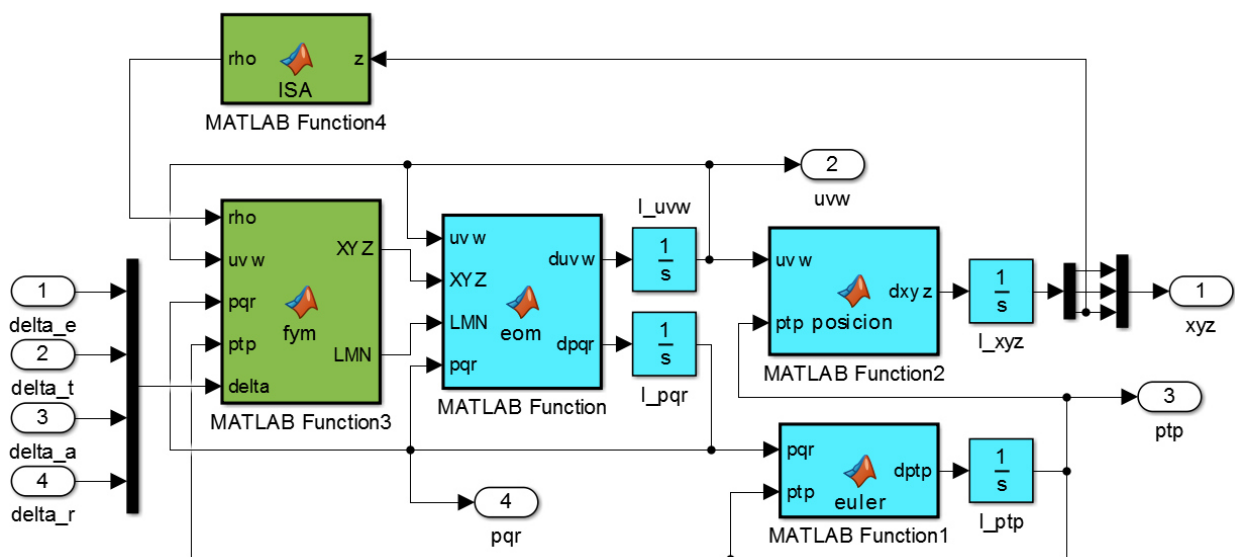


Figura 6.3 Modelo no lineal.

Para modificar las fuerzas y momentos, se entra en el bloque *fym* haciendo doble clic, y en las últimas líneas de la función se hace:

$$XYZ = [X_g, Y_g, Z_g] \quad (6.1)$$

$$LMN = [0, 0, 0] \quad (6.2)$$

Para fijar las condiciones iniciales habrá que entrar en cada uno de los bloques integradores

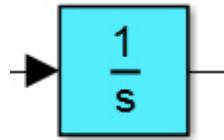


Figura 6.4 Bloque integrador.

Las condiciones iniciales a implementar son:

$$\begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} [m] \quad (6.3)$$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.4)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [rad] \quad (6.5)$$

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (6.6)$$

Una vez configuradas las condiciones del movimiento, se ejecuta la simulación y se representan los resultados de la posición de la aeronave con la función *salida.m* que se adjunta en el anexo. Esta función recibe como entradas las salidas del modelo (posición, velocidad lineal, actitud y velocidad angular) y el tiempo de simulación, y representa distintas gráficas con estos datos. Para ejecutarla, basta con escribir en la ventana de comandos de Matlab la siguiente línea:

```
salida(r,r1,r2,r3,t)
```

En este caso nos quedamos solo con las gráficas de la posición obteniendo los siguientes resultados:

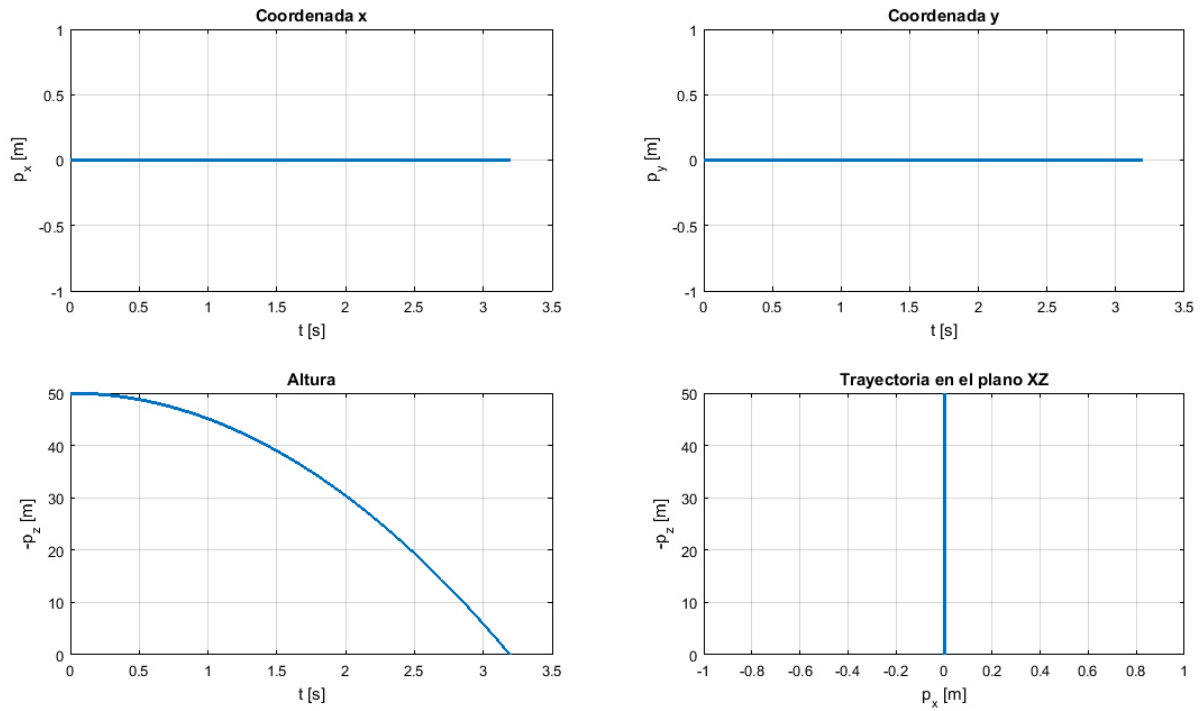


Figura 6.5 Caída libre.

Como se observa en las gráficas, las coordenadas x e y no varían mientras que la altura disminuye del valor inicial hasta cero, describiendo así un movimiento de caída libre tal y como se pretendía.

6.1.1.2 Movimiento parabólico

Para simular una trayectoria parabólica, se consideran las fuerzas y momentos totales. Además, se fijan las condiciones iniciales en cero, excepto la velocidad y el ángulo de cabeceo inicial. Entrando en el bloque *fym* se hace:

$$XYZ = [X, Y, Z] \quad (6.7)$$

$$LMN = [L, M, N] \quad (6.8)$$

Por otro lado, se introducen las siguientes condiciones iniciales en los bloques integradores correspondientes:

$$\begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [m] \quad (6.9)$$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.10)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix} [rad] \quad (6.11)$$

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (6.12)$$

Tras realizar la simulación con las condiciones descritas, se obtienen las siguientes gráficas que describen el movimiento de la aeronave con la función *salida.m*:

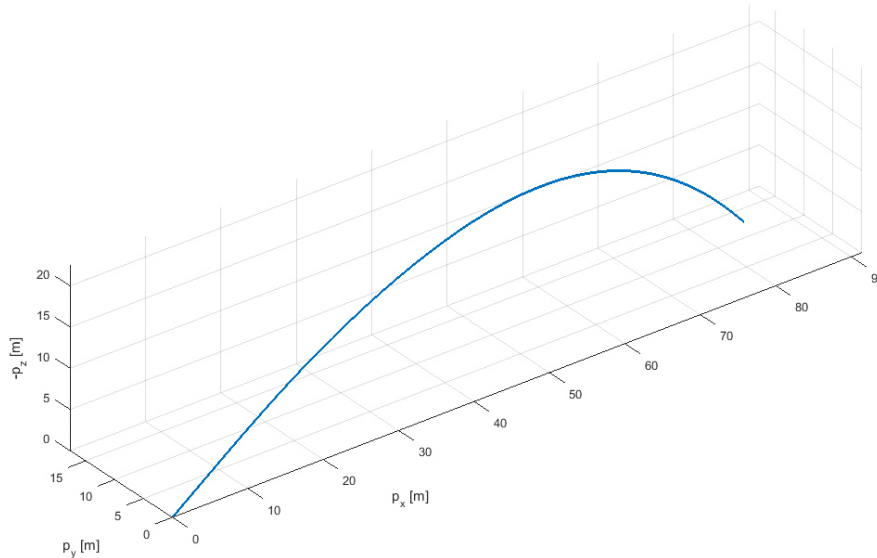


Figura 6.6 Trayectoria parabólica.

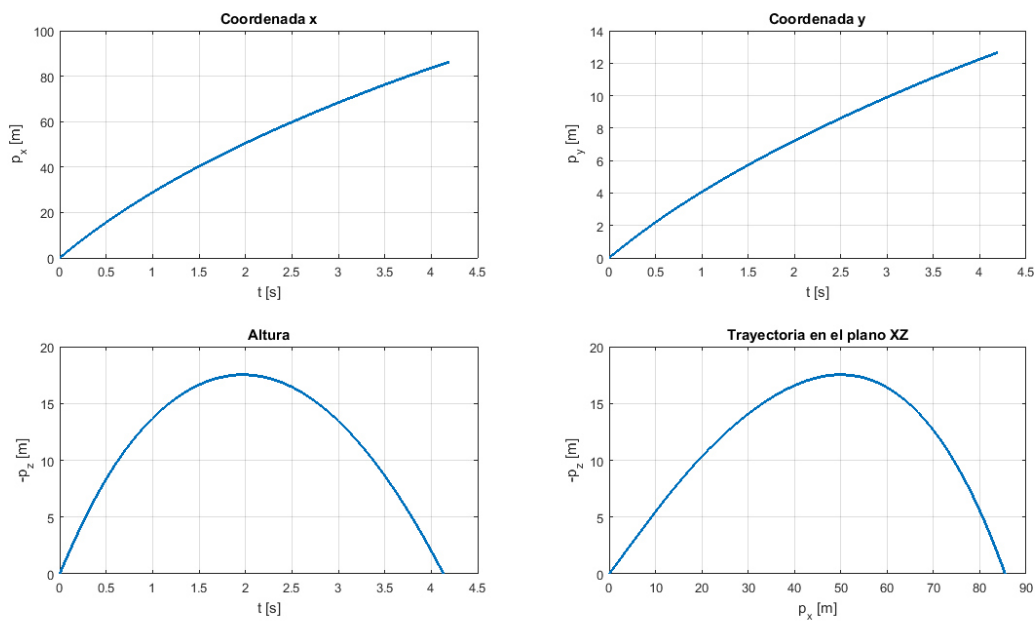


Figura 6.7 Movimiento parabólico.

Como se observa en la gráfica de la altura, la aeronave comienza en cero, asciende hasta una altura máxima y luego desciende de nuevo hasta cero, describiendo una parábola.

6.1.1.3 Movimiento ascendente

Por último, se simulará un movimiento de ascenso. Para ello se fijan las condiciones iniciales nulas excepto la velocidad y el ángulo de cabeceo, y se fija el parámetro de control de empuje en su máximo valor, esto es $\delta_t = 1$. Por tanto, entrando en los bloques integradores, se introducen las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [m] \quad (6.13)$$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right] \quad (6.14)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} [rad] \quad (6.15)$$

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right] \quad (6.16)$$

Para introducir el valor del control de empuje, se añade un bloque constante con el valor deseado en la entrada δ_t , tal y como se indica en la siguiente imagen

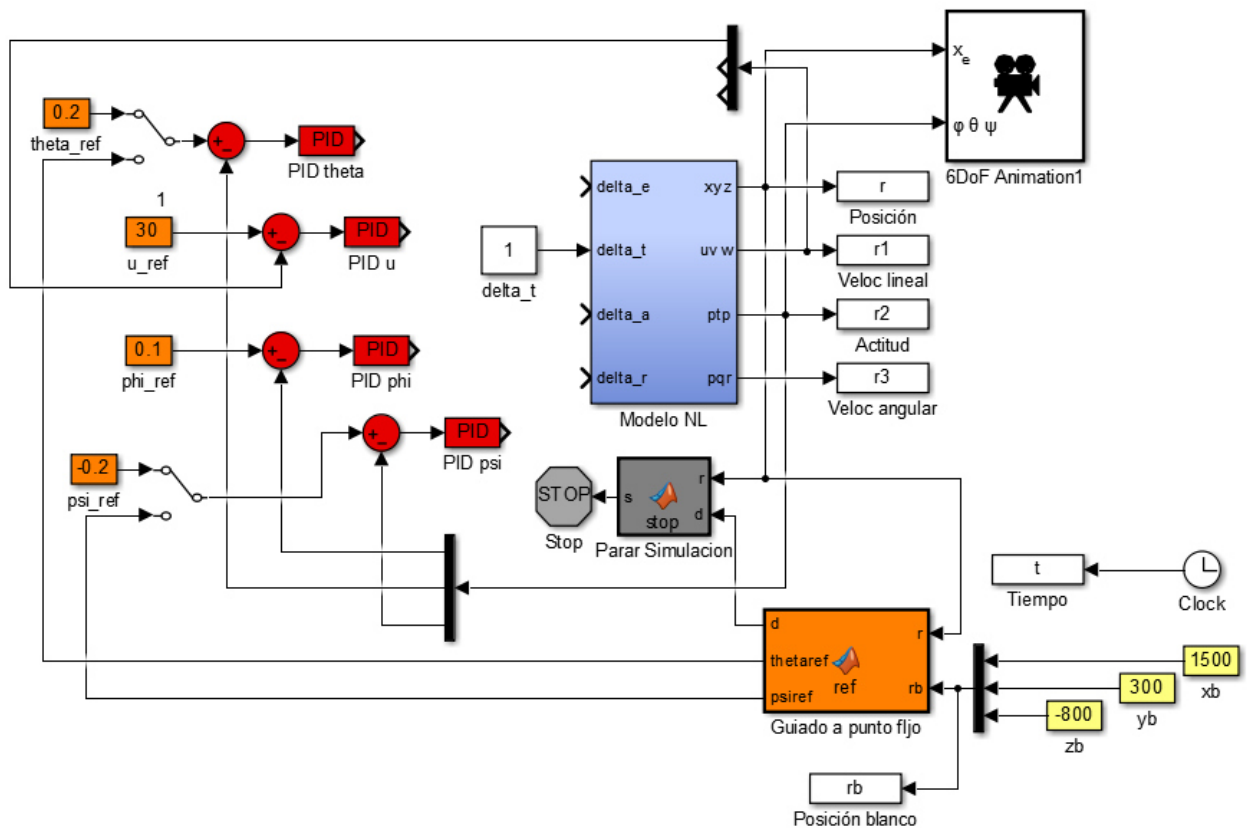


Figura 6.8 Modelo NL con entrada constante en la señal de empuje.

Tras la simulación, se representa el movimiento descrito por la aeronave con la función *salida.m*,

obteniendo:

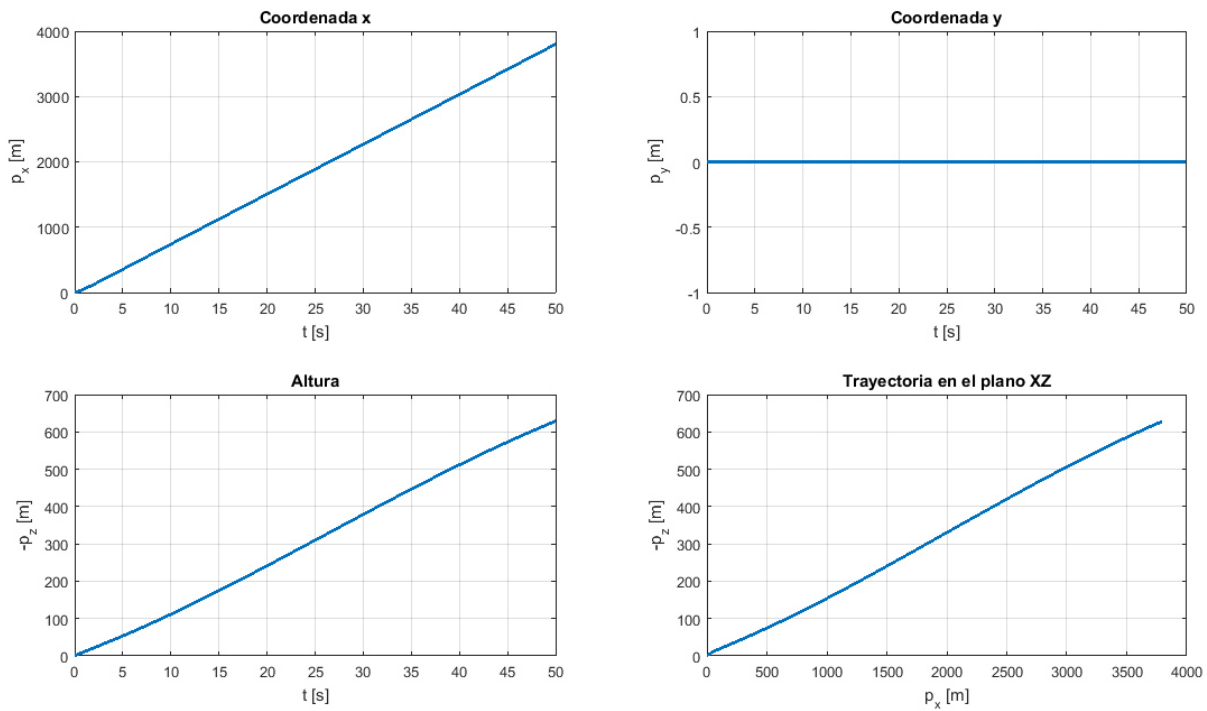


Figura 6.9 Ascenso.

Tal y como se observa en las gráficas, la aeronave describe el movimiento de ascenso deseado.

6.1.2 Control de velocidad y actitud

Se va a probar la parte de control para comprobar su funcionamiento. Para ello, se conectan de nuevo las entradas del modelo y, con los interruptores, se desconecta la parte de guiado, dejando como entradas las referencias constantes de los bloques naranjas de la izquierda tal y como se muestra en la siguiente imagen:

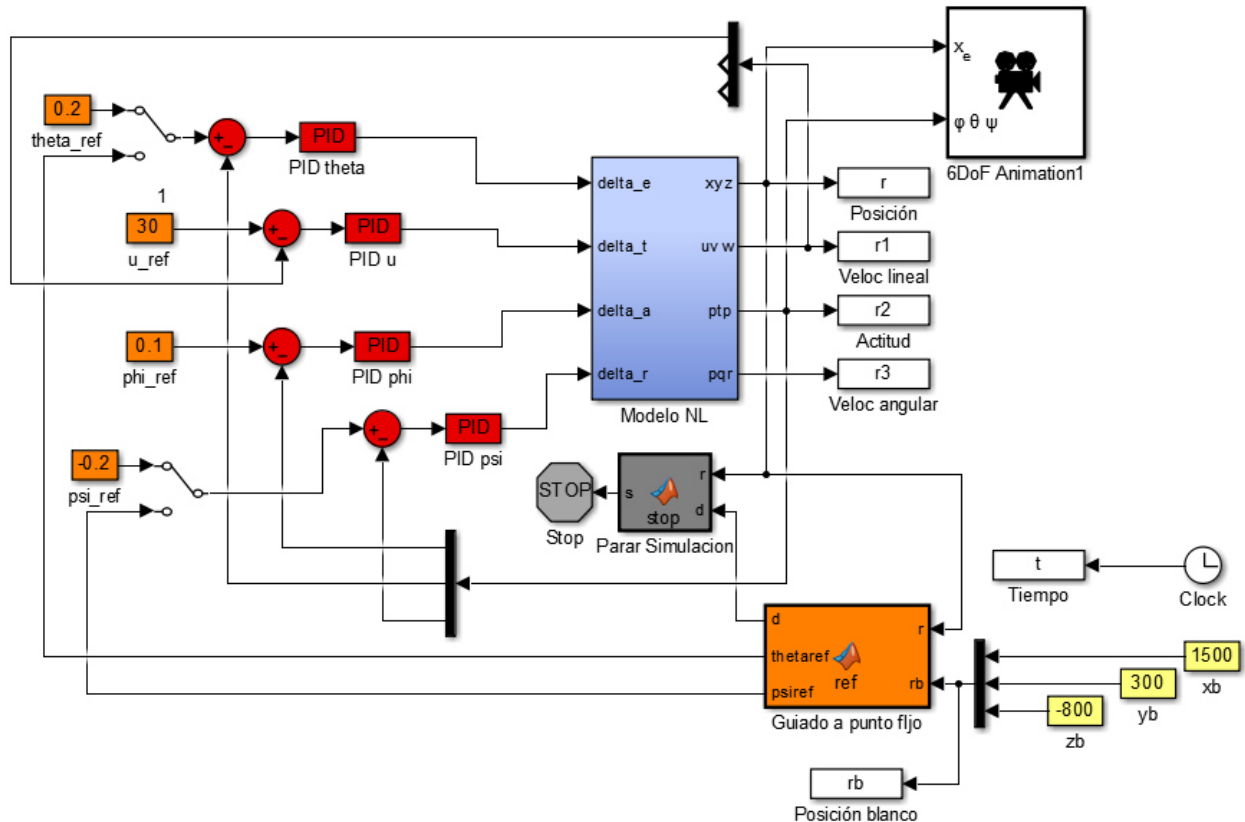


Figura 6.10 Modelo no lineal con control de actitud y velocidad.

Así, se deja el modelo con la parte de control hacia unas referencias constantes, eliminando la parte de guiado. Los valores que se quiere que alcance cada variable pueden introducirse haciendo doble clic en cada uno de los bloques naranjas de la izquierda e introduciendo el valor deseado. En este caso, para la velocidad se ha marcado una referencia de 30 m/s , para el ángulo de balance 0.1 rad , para el ángulo de cabeceo 0.2 rad y para el ángulo de guiñada -0.2 . Las condiciones iniciales de las variables se han fijado nulas excepto la velocidad en el eje longitudinal u_0 que se ha fijado en 15 m/s y el ángulo de cabeceo θ_0 que se ha fijado en 0.05 rad . Estas condiciones se introducen en los bloques integradores correspondientes.

Tras realizar las configuraciones descritas se ejecuta la simulación. Los resultados se pueden representar con el archivo *salidacontrol.m* que se adjunta en el Anexo. Esta función recibe como entradas la velocidad, la actitud y el tiempo guardados en el espacio de trabajo desde la simulación con los bloques *To Workspace* correspondientes, y además requiere de un vector que indique las referencias de las variables: $ref = [u_{ref}, \phi_{ref}, \theta_{ref}, \psi_{ref}]$. De modo que, creando este vector con los valores correspondientes e introduciendo en la ventana de comando la siguiente línea:

```
salidacontrol(r1,r2,t,ref)
```

se obtienen los siguientes resultados:

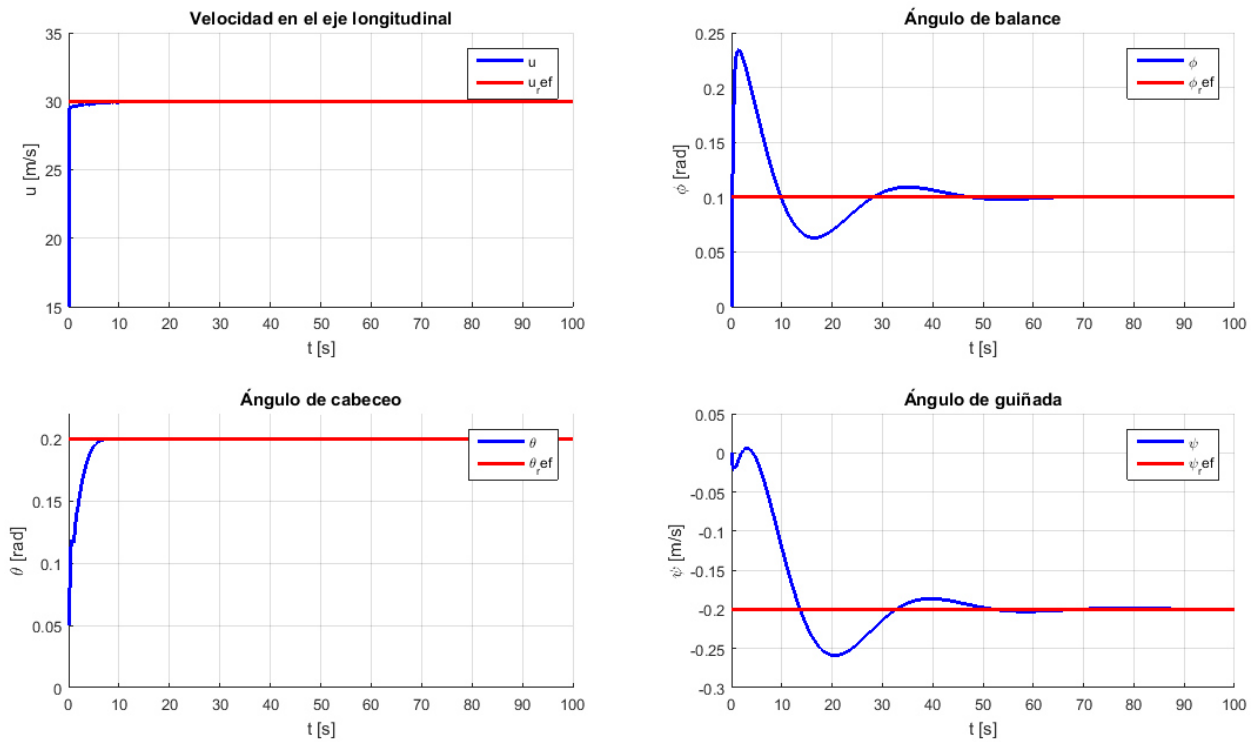


Figura 6.11 Variables controladas y referencias del modelo no lineal.

En la imagen se puede ver como la velocidad y el ángulo de cabeceo alcanzan rápidamente la referencia, mientras que los ángulos de balance y guiñada oscilan antes de alcanzarla.

6.1.3 Guiado a blanco fijo

Por último, se va a explicar cómo hacer que la aeronave vaya al punto fijo que se escoja. Para ello se conecta la parte de guiado al modelo con los interruptores, tal y como se muestra en la siguiente imagen:

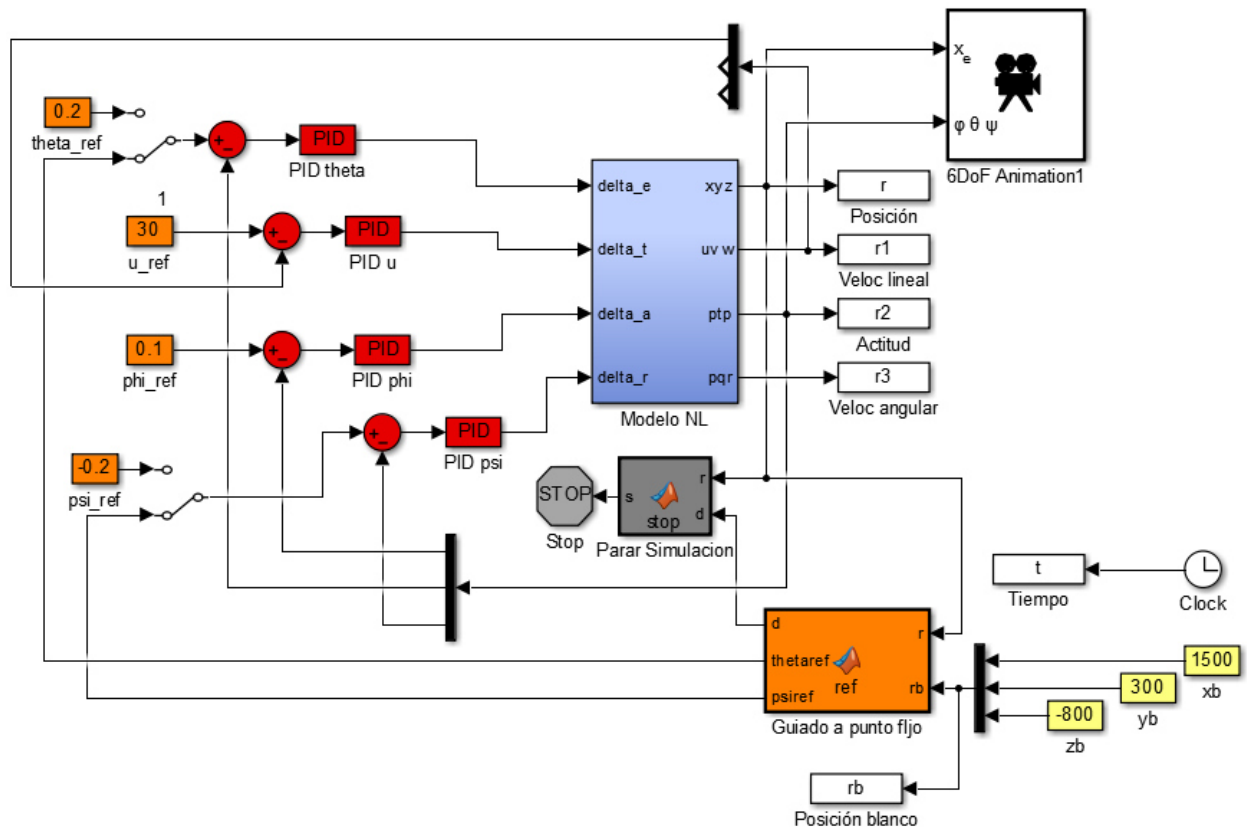


Figura 6.12 Sistema de control y guiado del modelo no lineal.

Así, tenemos el sistema de control y guiado completo, de modo que ahora las referencias para el ángulo de cabeceo y guiñada no se introducen con constantes sino que son las salidas del bloque naranja de la parte inferior, y se calculan a partir de la posición de la aeronave respecto a la del punto fijo al que se quiere llegar. Las coordenadas de dicho punto pueden introducirse en los bloques amarillos de la derecha haciendo doble clic en cada uno de ellos e introduciendo el valor deseado. En este caso, este punto se ha escogido con las siguientes coordenadas:

$$x_b = 1500 \quad (6.17)$$

$$y_b = 300 \quad (6.18)$$

$$z_b = -800 \quad (6.19)$$

Las condiciones iniciales de la aeronave se han fijado nulas excepto en la velocidad longitudinal u_0 que se ha fijado en 25 m/s y el ángulo de cabeceo θ_0 que se ha fijado en 0.25 rad . Estos valores se introducen en los bloques integradores correspondientes.

Tras realizar estas configuraciones, se ejecuta la simulación y se representan los resultados con la función *salidaguiado.m* que se adjunta en el Anexo. Esta función recibe como entradas la posición de la aeronave, la posición del blanco y el tiempo de simulación y representa distintas gráficas con estos datos. Para ejecutarla, se escribe la siguiente línea en la ventana de comandos de Matlab:

salidaguiado(r,rb,t)

Se obtienen así las siguientes gráficas:

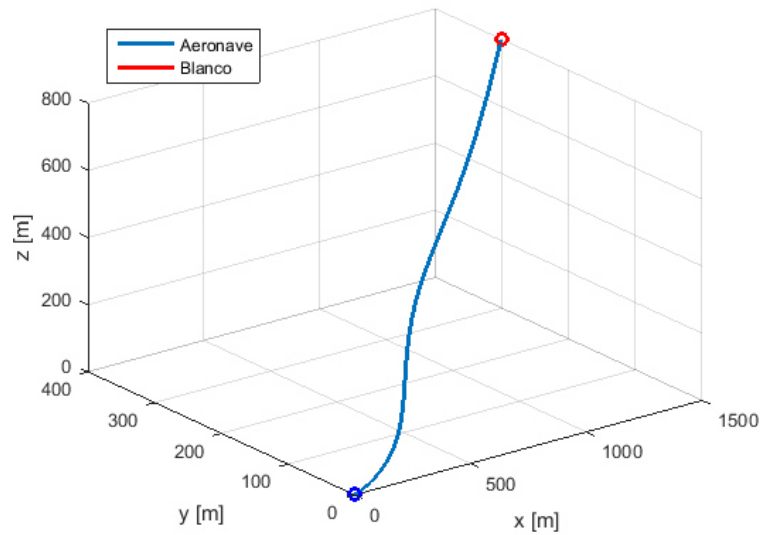


Figura 6.13 Trayectoria de la aeronave y blanco fijo.

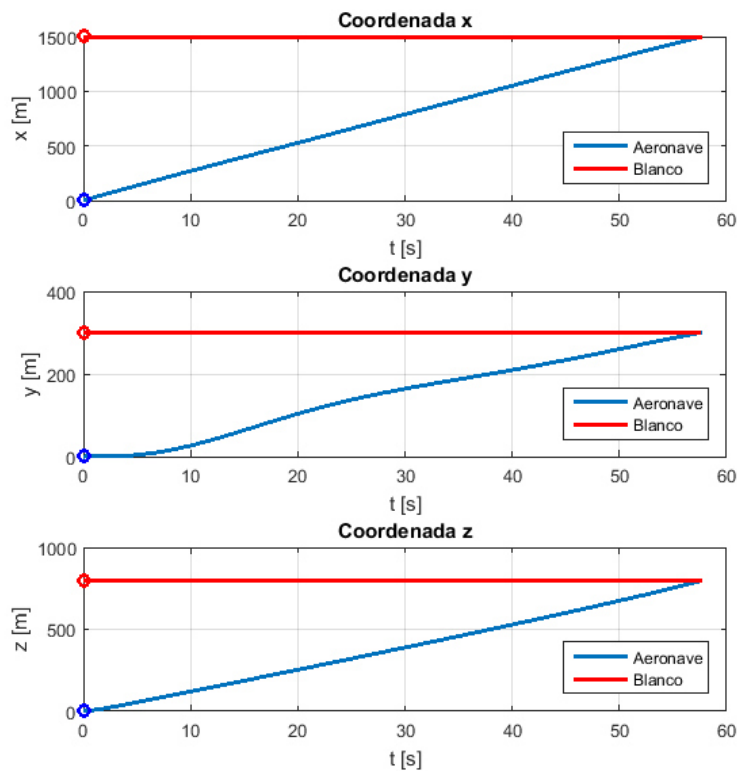


Figura 6.14 Coordenadas de la aeronave y del blanco fijo.

En las imágenes se observa que la aeronave alcanza el objetivo de manera satisfactoria.

6.2 Aplicación 2

En esta segunda aplicación se ha realizado un sistema de control de actitud con sistema de aumento de estabilidad en el modelo lineal. Abriendo el archivo correspondiente *UAVsl_controlSAS.slx* se llega a:

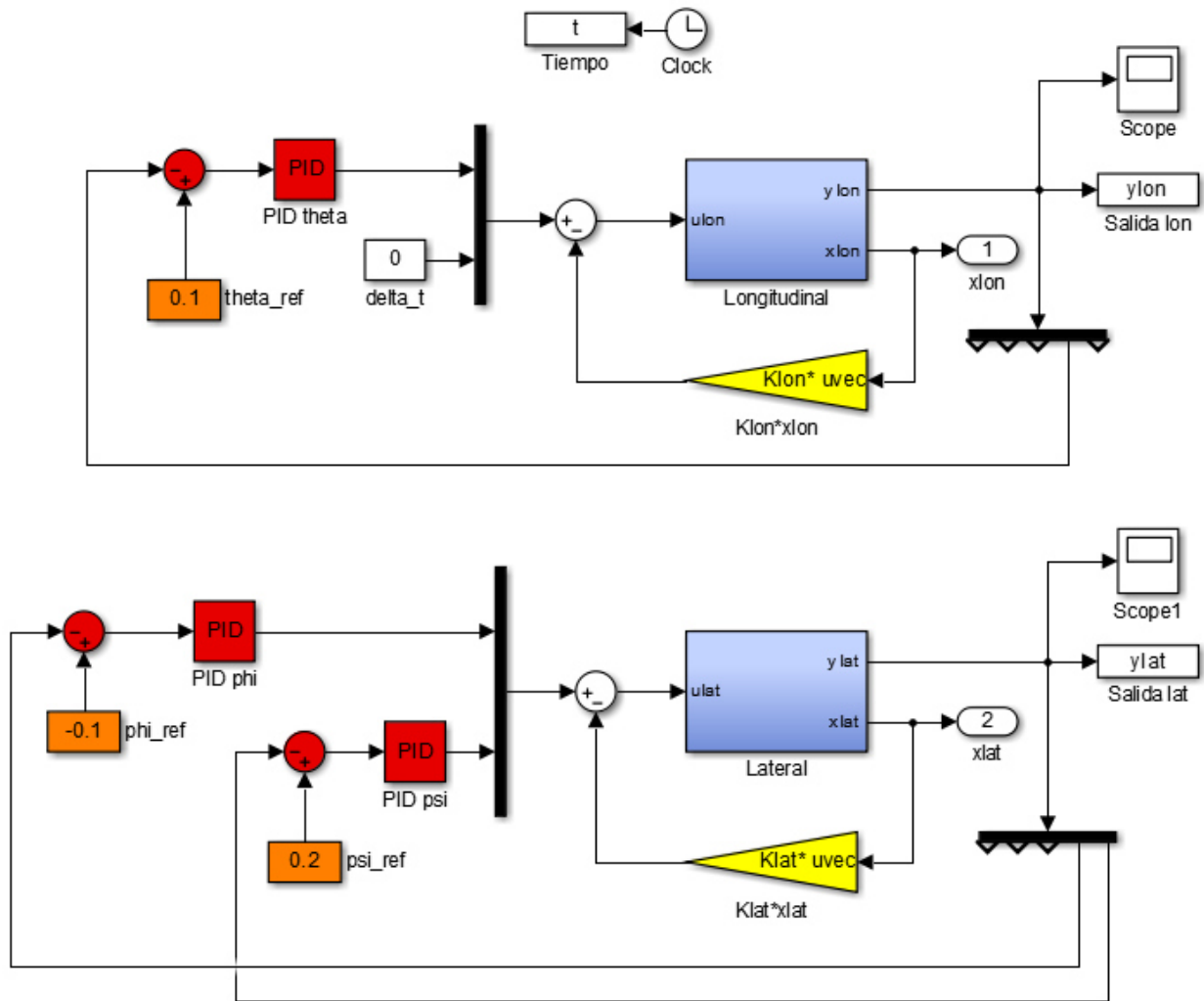


Figura 6.15 Control con sistema de aumento de estabilidad del modelo lineal.

Para poder realizar simulaciones con esta aplicación primero es necesario calcular las matrices dinámicas, y para ello hay que calcular un punto de equilibrio. En este caso, para el punto de equilibrio se ha impuesto la velocidad en 27 m/s , la altura en 1000 m y el ángulo de balance en cero. Para imponer otras condiciones diferentes, se entra en la función *trimado.m* y se introducen las condiciones deseadas en A_{eq} y b_{eq} para las restricciones lineales, y en la subfunción *restriccionesnl* para las no lineales. Una vez introducidos las condiciones deseadas, se ejecuta la función escribiendo la siguiente línea en la ventana de comandos de Matlab:

```
[xu_E,derivadas,xlon_E,ulon_E,xlat_E,ulat_E,Alon,Blon,Clon,Alat,Blat,Clat,avlon,avlat,normalon,normalat,rUlon,rUlat] = trimado
```

Esto devuelve los valores de equilibrio de las variables de estado y de control en el vector xu_E , las derivadas evaluadas en dicho punto en *derivadas*, los vectores de estado y de control separados para cada una de las dinámicas en $xlon_E, ulon_E, xlat_E, ulat_E$, las matrices de estado, control y entradas en $Alon, Blon, Clon, Alat, Blat, Clat$, los autovalores de cada una de las dinámicas y su módulo en $avlon, avlat, normalon, normalat$ y por último, el rango de las matrices de controlabilidad en $rUlon, rUlat$.

El punto de equilibrio se puede comprobar con el modelo no lineal de la aplicación 1. Para ello, se abre el archivo *UAVnl_control.slx*, se desconecta la parte de control y guiado y se introducen los

valores de las variables de estado obtenidos como condiciones iniciales en los bloques integradores, y los valores de las variables de control como entradas. Si se representan los resultados de la simulación, usando la función *salida.m*, se tiene:

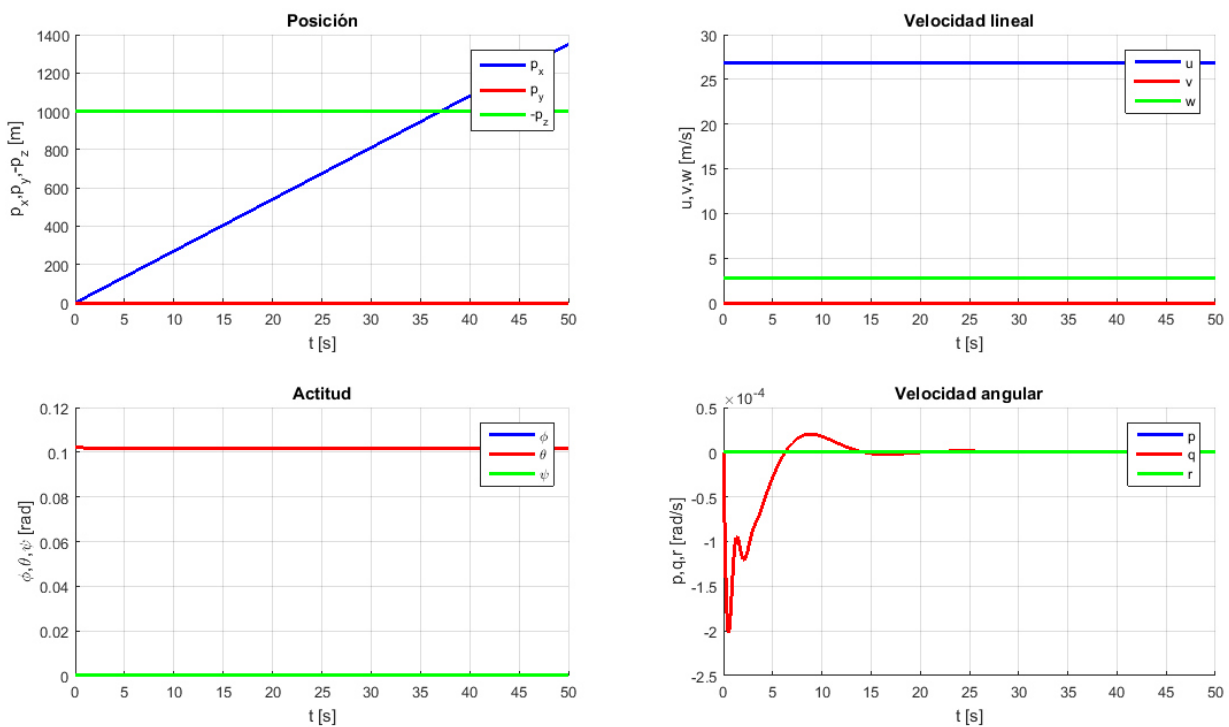


Figura 6.16 Variables de estado en el punto de equilibrio

Se puede comprobar que las variables se mantienen en el valor de equilibrio, por lo que es un punto válido.

Una vez obtenido el punto de equilibrio, se obtienen las matrices del sistema de aumento de estabilidad. Para ello, se ejecuta la función *SAS.m* escribiendo la siguiente línea en la ventana de comandos:

```
[Klon , Klat]=SAS(Alon , Alat , Blon , Blat)
```

Los valores de los autovalores deseados escogidos en este caso se indicaron en la Tabla 5.9 y la Tabla 5.10. Si se quieren escoger autovalores distintos, se entra en la función *SAS.m* y se cambian los valores en los vectores *plon* y *plat*. Por otro lado, si se cambia del punto de equilibrio, habrá que cambiar los autovalores, ya que las matrices del sistema de aumento de estabilidad dependen de las matrices de entrada y de estados, y éstas a su vez del punto de equilibrio.

A continuación se va a explicar cómo realizar simulaciones con las distintas partes de la aplicación: en primer lugar se comprobará el modelo, a continuación se conectará el sistema de aumento de estabilidad y por último se conectará el sistema de control de actitud.

6.2.1 Funcionamiento del modelo lineal

Para comprobar el funcionamiento del modelo, se desconectan las entradas tal y como se muestra en la imagen:

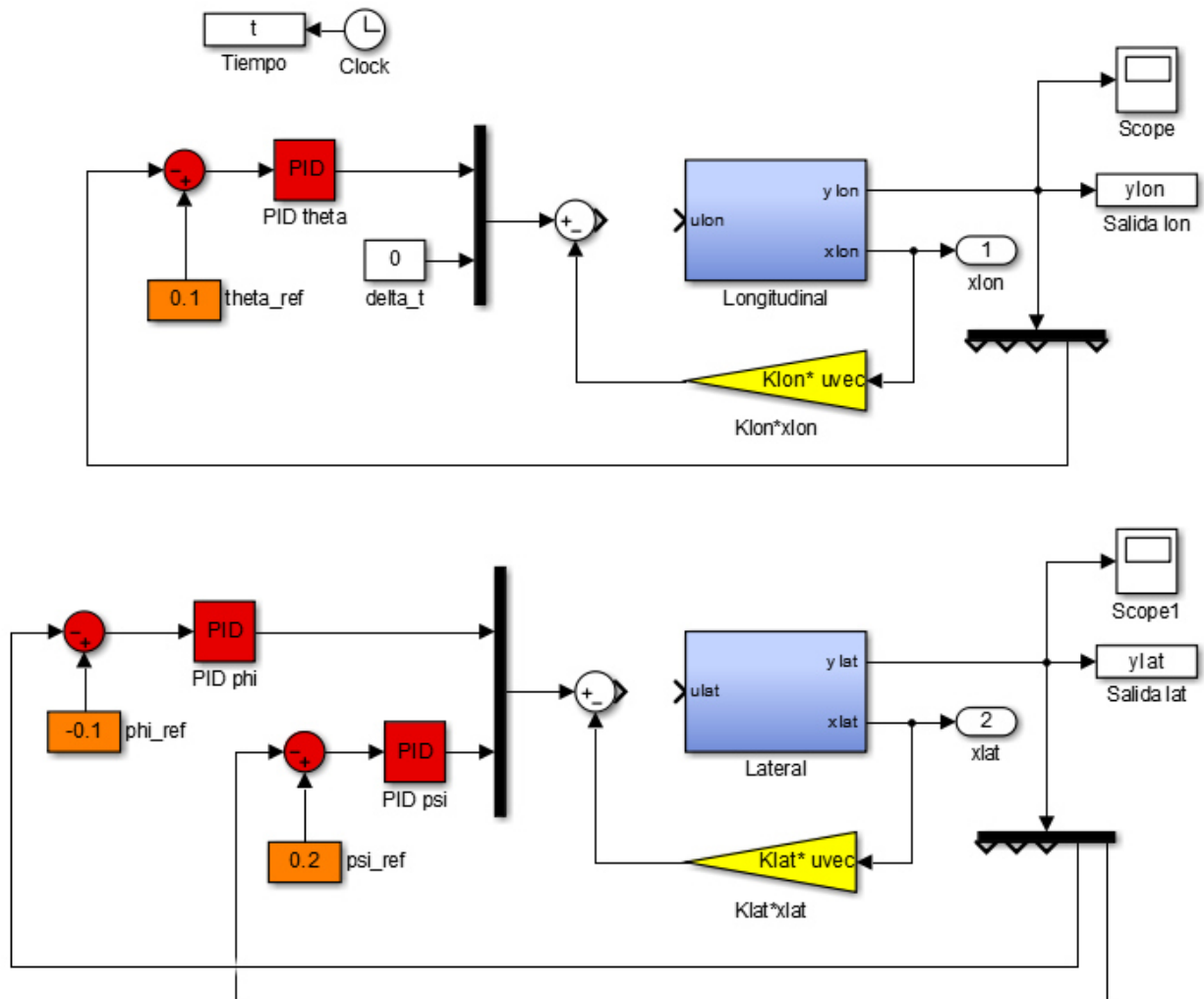


Figura 6.17 Modelo lineal con las entradas desconectadas.

Así se cancela la parte del sistema de aumento de estabilidad y de control, de modo que se pueden realizar simulaciones solo con el modelo. Si se ejecuta la simulación tal y como está, sin perturbación en las entradas, puesto que la dinámica se ha obtenido para el punto de equilibrio, las salidas del sistema se mantienen en cero. Cabe recordar que para poder simular en el modelo lineal es necesario haber ejecutado antes las funciones *trimado.m* y *SAS.m*.

Se pueden introducir distintas señales en las entradas. En este caso se va a someter el sistema y analizar la respuesta ante una señal escalón en cada una de las entradas.

6.2.1.1 Escalón en el elevador

Se introducirá una señal escalón de amplitud 0.1 en la variable de la deflexión del elevador, manteniendo en cero el resto de variables de control. Puesto que las dinámicas están desacopladas, el elevador solo afecta a la dinámica longitudinal, así que solo se tendrá esta en cuenta.

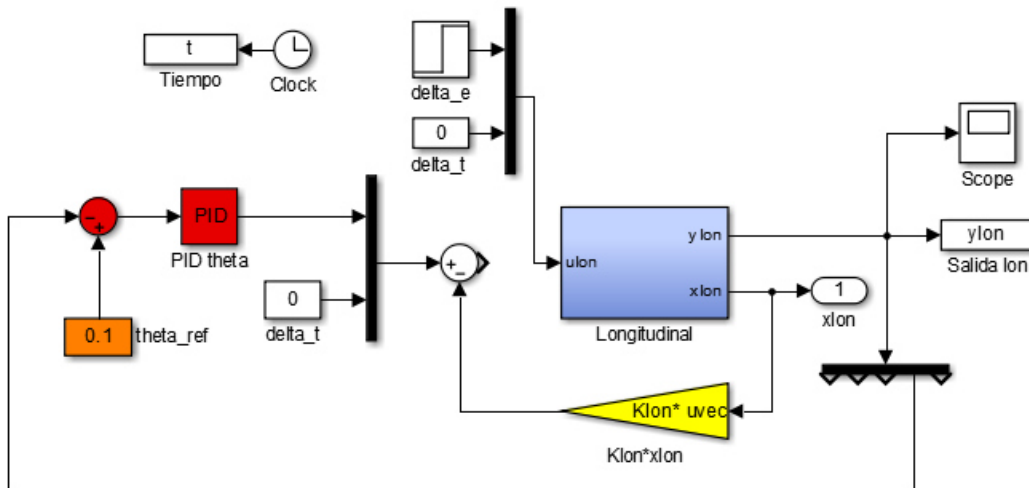


Figura 6.18 Modelo lineal con escalón en el elevador.

Para representar las salidas, se usa la función *salidalineal.m* descrita en el Anexo, que representa las distintas variables de las dinámicas longitudinal y lateral. Esta función recibe como entradas las salidas del sistema y el tiempo de simulación. Para ejecutarla, se escribe en la ventana de comandos:

```
salidalineal(y lon, y lat, t)
```

Se obtienen los siguientes resultados:

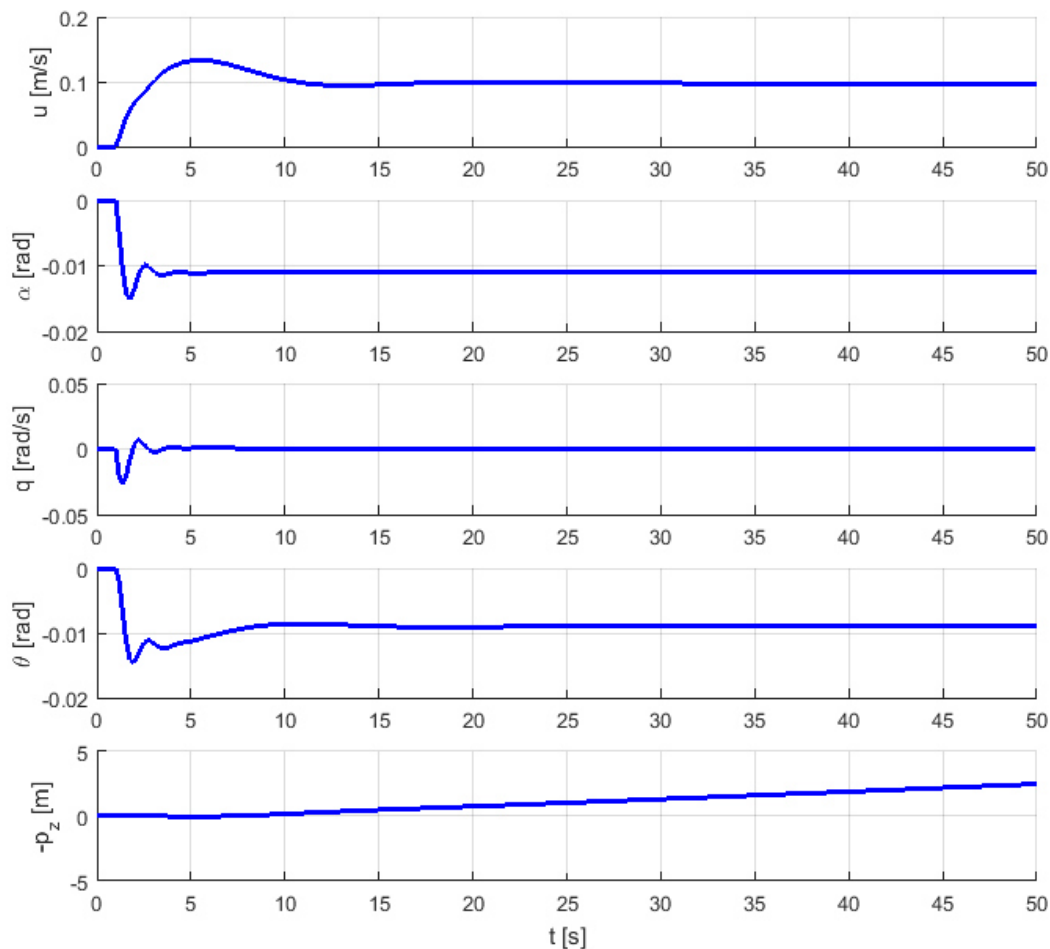


Figura 6.19 Respuesta a un escalón en el elevador.

Se observa como las variables oscilan inicialmente y luego se estabilizan en torno a un valor, excepto en el caso de la altura que diverge, esto es debido a su autovalor positivo.

Fijándose en las variables α y q , puede observarse el modo de corto periodo como una oscilación rápida al inicio de la simulación:

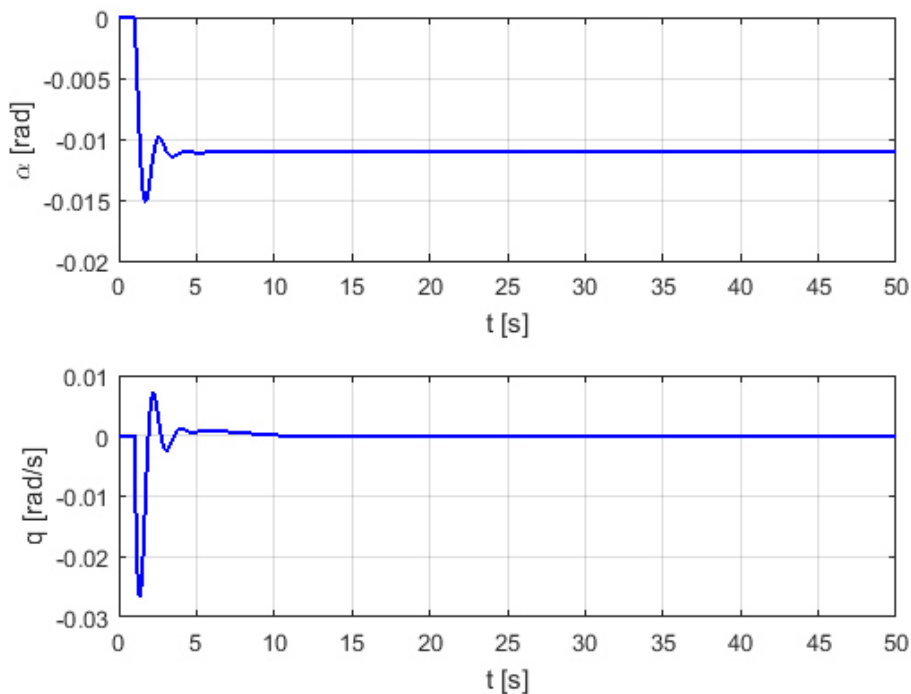


Figura 6.20 Modo de corto periodo

El modo fugoide puede observarse en las variables u y θ como una oscilación más lenta:

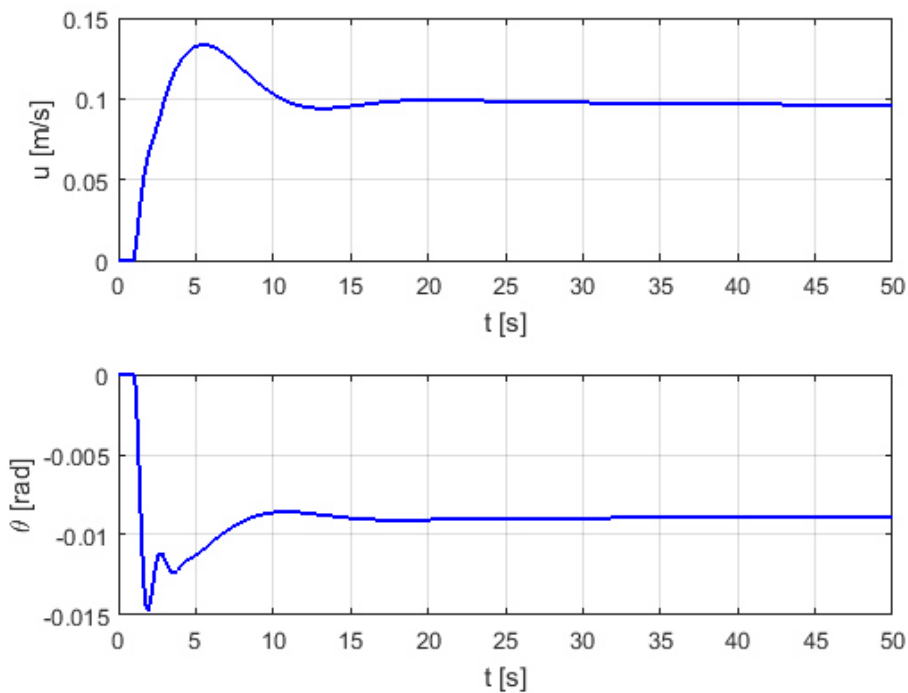


Figura 6.21 Modo fugoide

En la variable θ puede verse también la oscilación rápida correspondiente al modo de corto periodo.

6.2.1.2 Escalón en la señal de empuje

Se introducirá un escalón de amplitud 0.1 en el parámetro de control de empuje manteniendo en cero el resto de variables de control, tal y como se muestra en la imagen. Puesto que las dinámicas están desacopladas, este parámetro solo afecta a la dinámica longitudinal, así que solo se tendrá esta en cuenta.

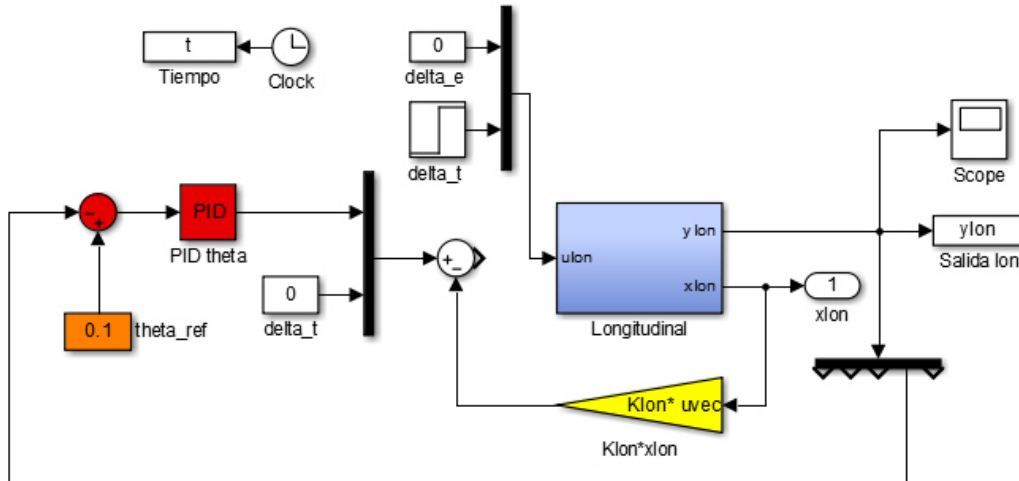


Figura 6.22 Modelo lineal con escalón en el empuje.

Representando las variables de salida con la función *salidalineal.m* se obtiene:

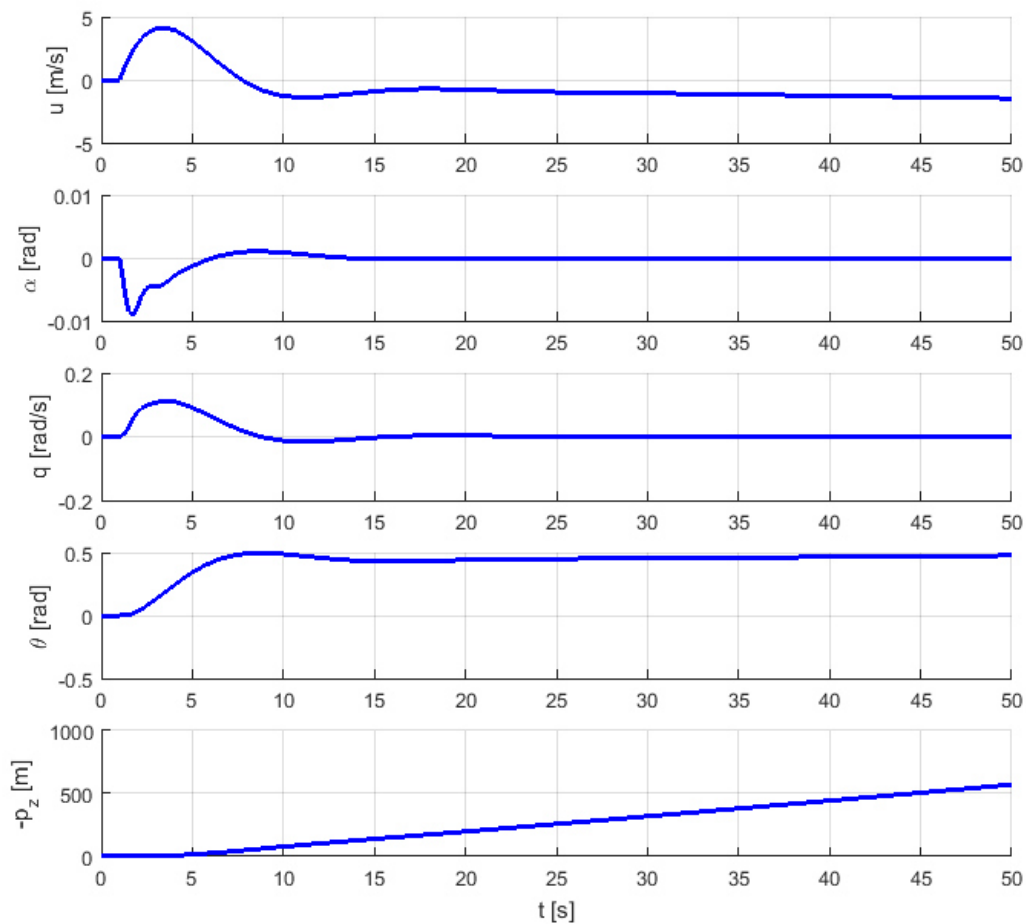


Figura 6.23 Respuesta a un escalón en el empuje.

De nuevo, las variables oscilan inicialmente y luego se estabilizan menos la altura, que muestra el mismo comportamiento divergente.

6.2.1.3 Escalón en el alerón

Se introducirá un escalón de amplitud 0.1 en la variable de la deflexión de los alerones manteniendo en cero el resto de variables de control. Puesto que las dinámicas están desacopladas, los alerones solo afectan a la dinámica lateral, así que solo se tendrá esta en cuenta.

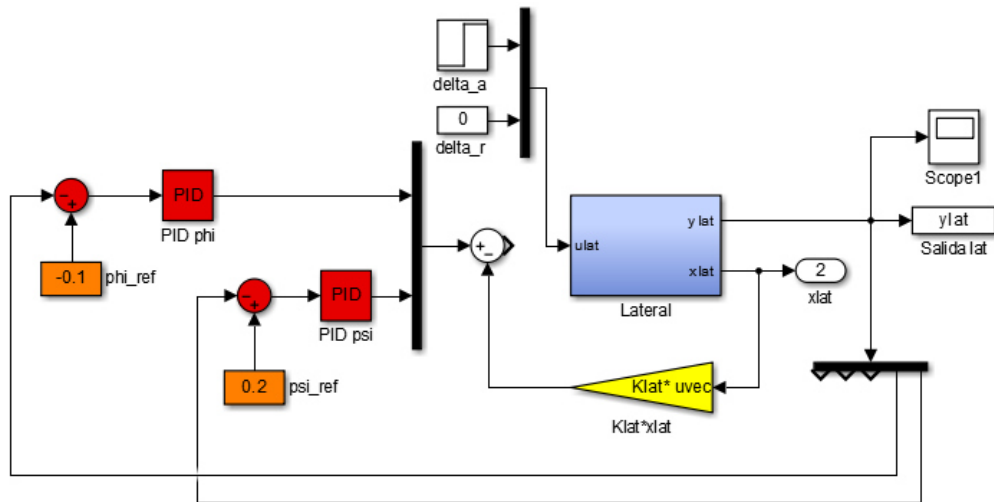


Figura 6.24 Modelo lineal con escalón en los alerones.

Al representar las salidas con la función *salidalineal.m* se obtiene:

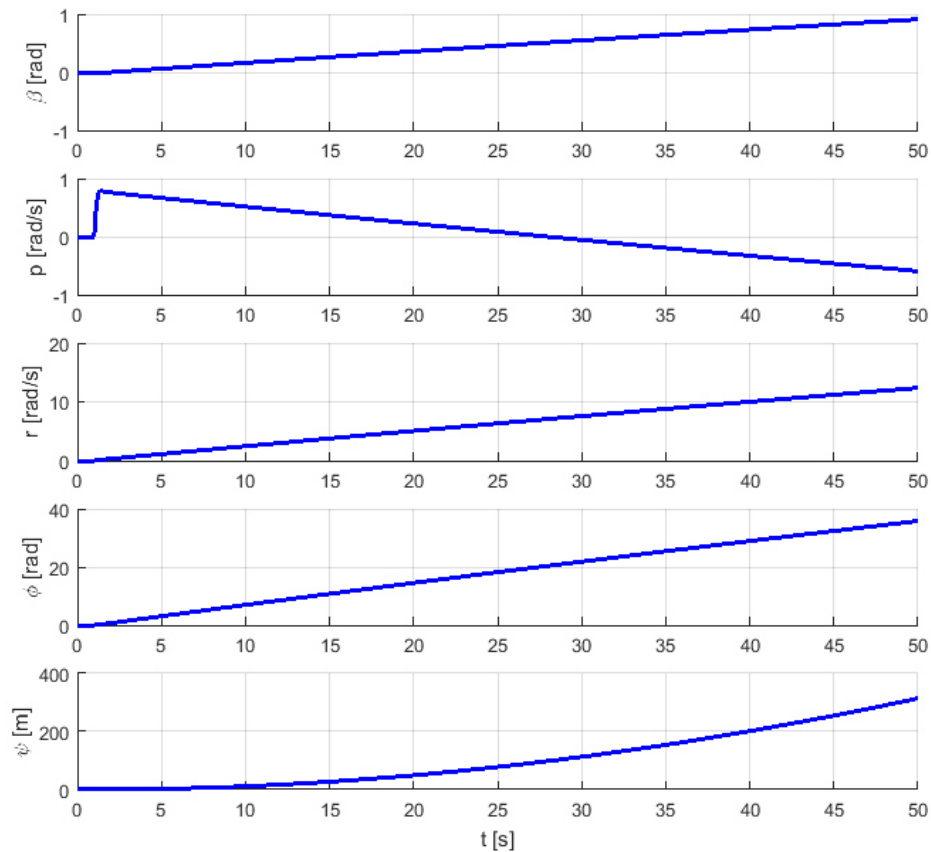


Figura 6.25 Respuesta a un escalón en los alerones.

Se puede observar que todas las variables divergen, especialmente el ángulo de guiñada.

6.2.1.4 Escalón en el timón de dirección

Se introducirá un escalón de amplitud 0.1 en la variable de la deflexión del timón de dirección manteniendo en cero el resto de variables de control. Puesto que las dinámicas están desacopladas, el timón de dirección solo afecta a la dinámica lateral, así que solo se tendrá esta en cuenta.

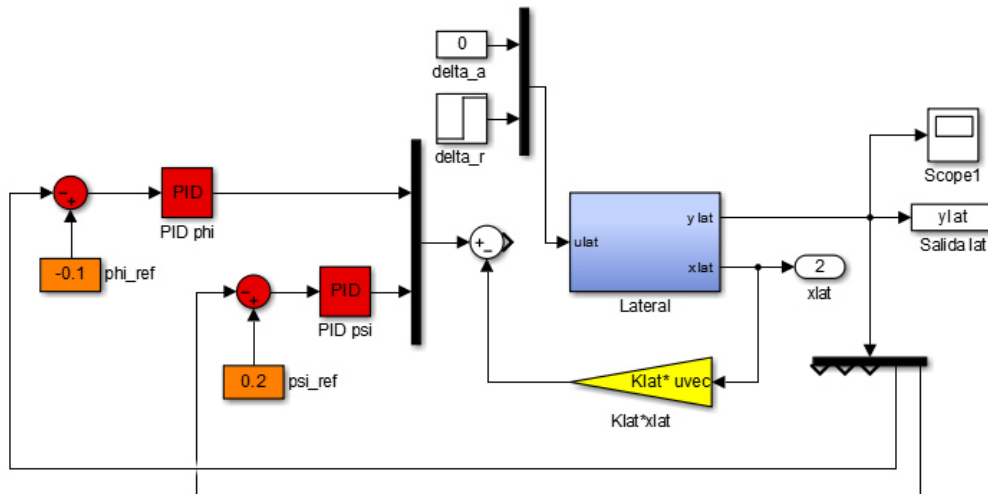


Figura 6.26 Modelo lineal con escalón en el timón de dirección.

Se representan los valores de la salida con la función *salidalineal.m* obteniendo:

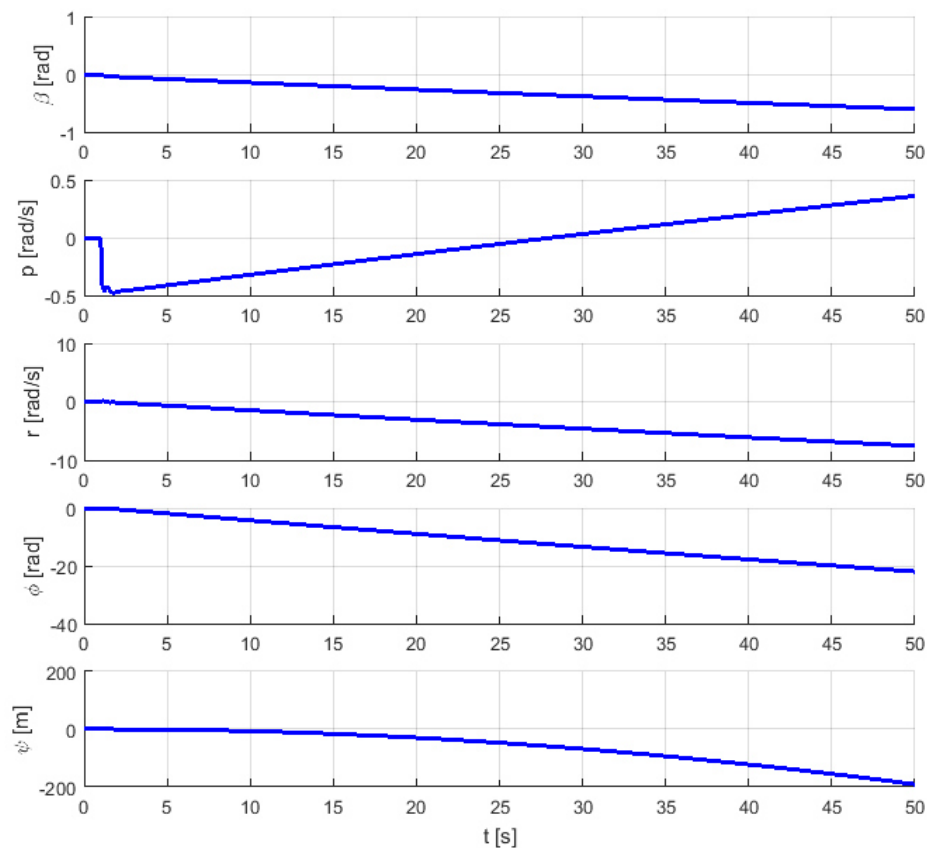


Figura 6.27 Respuesta a un escalón en el timón de dirección.

De nuevo se observa el carácter divergente de las variables.

6.2.2 Sistema de aumento de estabilidad

Para probar el sistema de aumento de estabilidad diseñado, se conectan de nuevo las entradas y se desconecta la parte de control, tal y como se muestra en la figura:

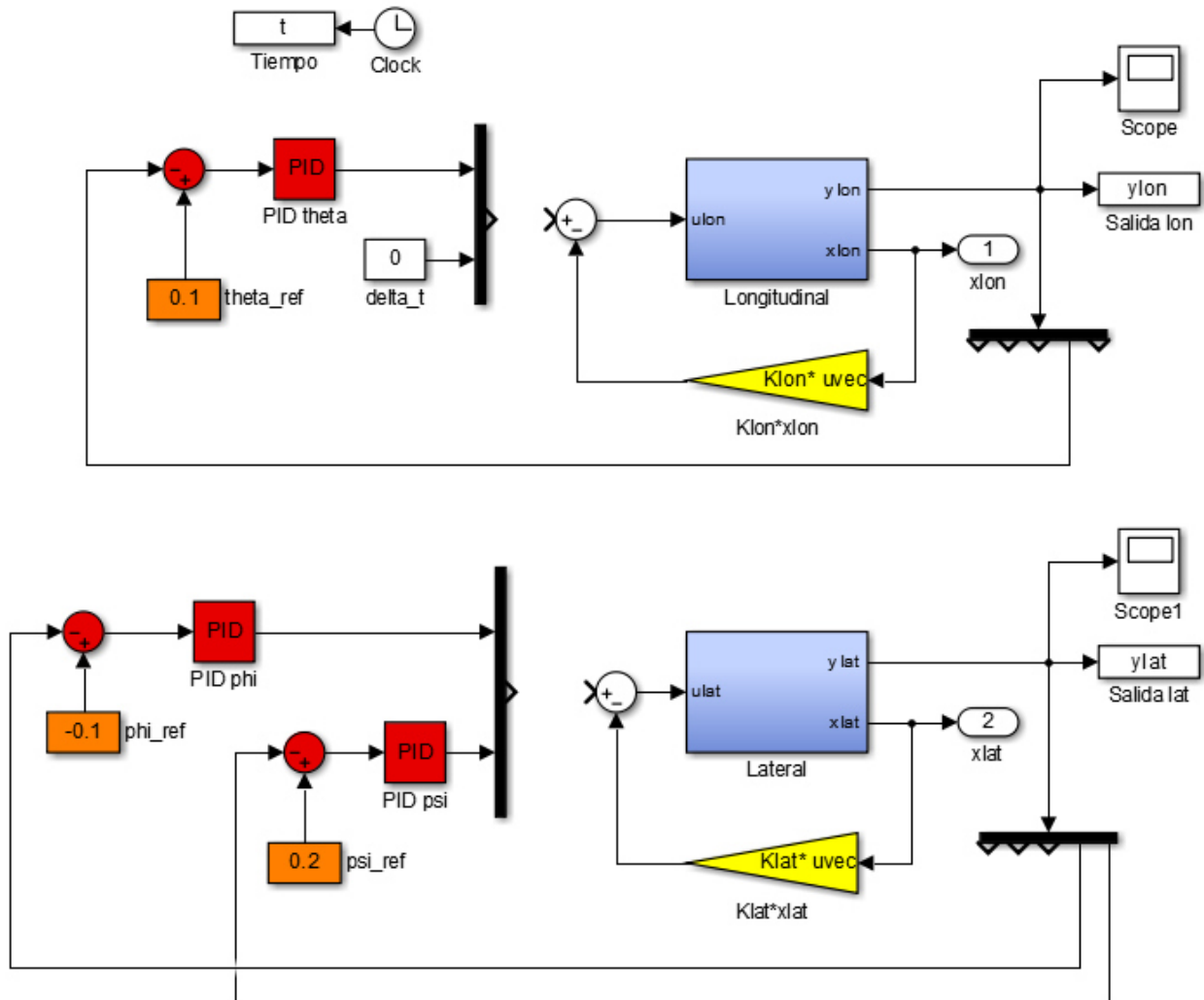


Figura 6.28 Modelo lineal con el sistema de aumento de estabilidad conectado.

Para probar su funcionamiento, se pueden introducir distintas señales en cada una de las entradas. En este caso se usarán señales tipo escalón.

6.2.2.1 Escalón en el elevador

Se introduce una señal escalón de amplitud 0.1 en el elevador tal y como se muestra en la imagen:

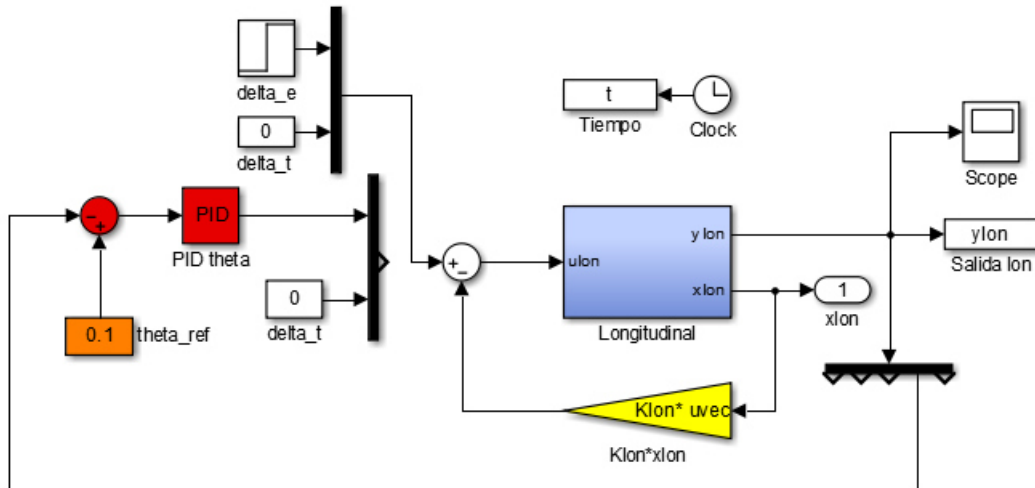


Figura 6.29 Modelo lineal y SAS con escalón en el elevador.

Los resultados se representan con la función *salidalineal.m* obteniendo:

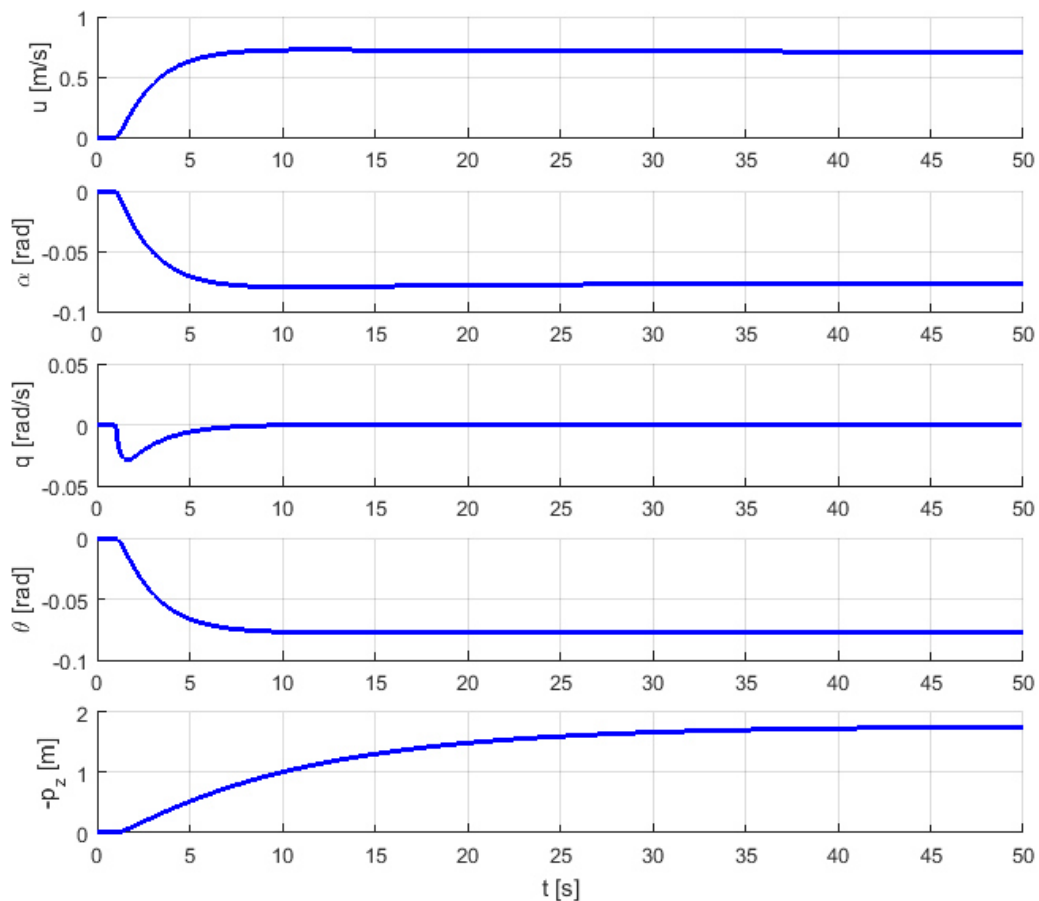


Figura 6.30 Respuesta del sistema con SAS ante un escalón en el elevador.

Se observa cómo las respuestas se han suavizado eliminando las oscilaciones respecto a las que se obtuvieron sin el SAS conectado y, además, la altura ahora es convergente.

6.2.2.2 Escalón en el empuje

Si se alimenta el sistema con un escalón de amplitud 0.1 en la señal de empuje:

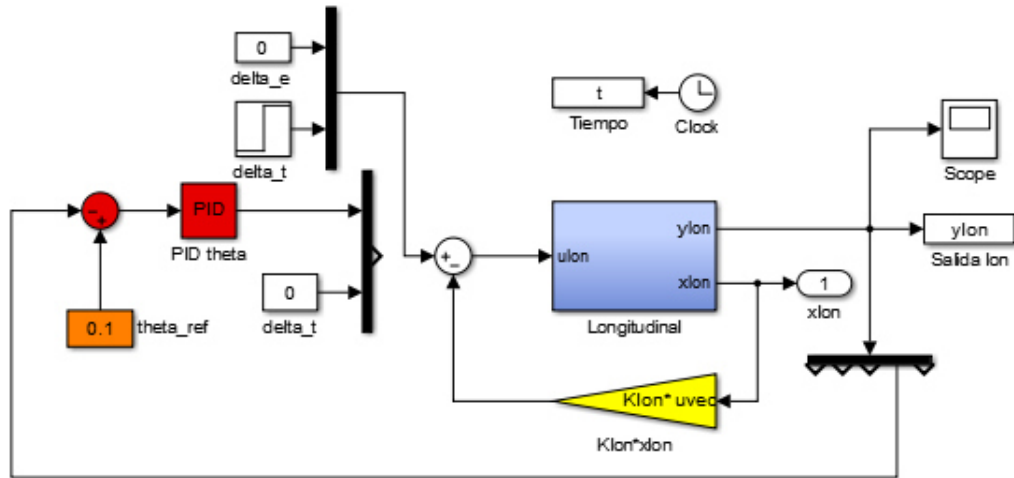


Figura 6.31 Modelo lineal y SAS con escalón en el empuje.

Representando las salidas con la función *salidalineal.m*:

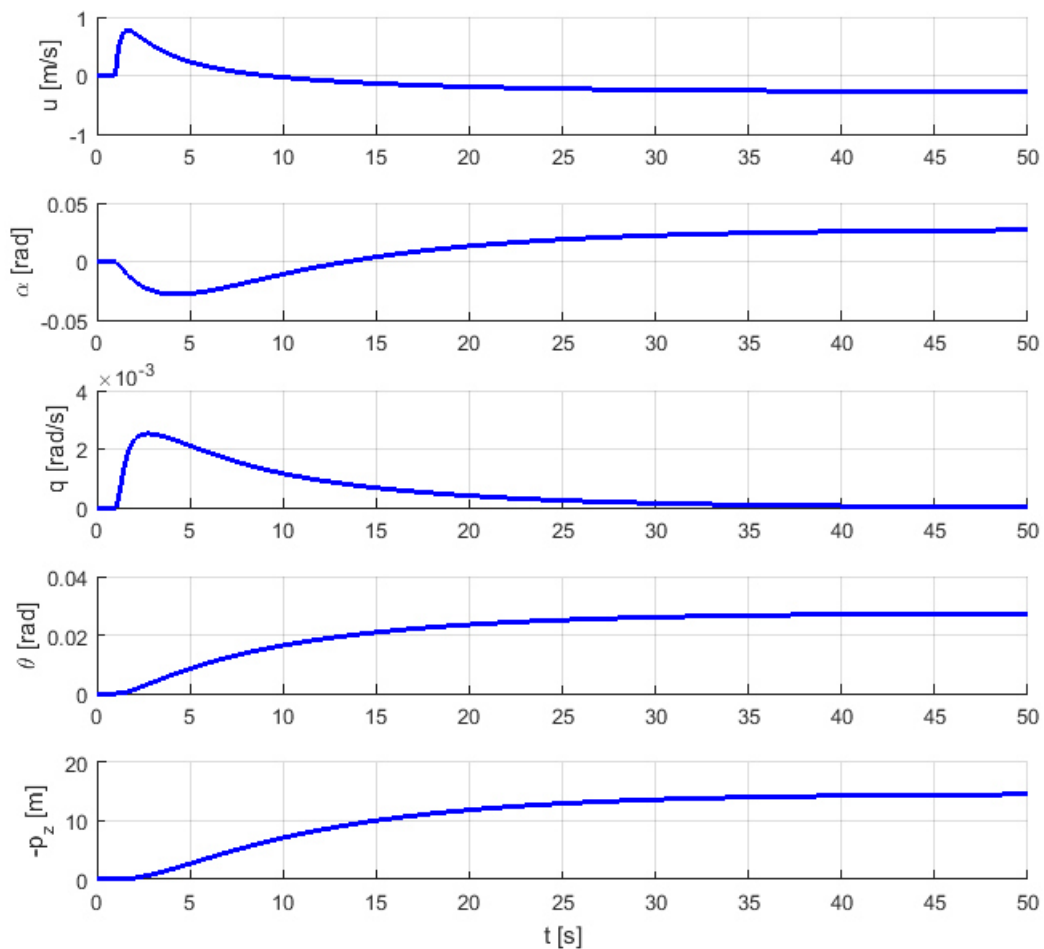


Figura 6.32 Respuesta del sistema con SAS ante un escalón en el empuje.

De nuevo las respuestas se han suavizado respecto a las que se obtuvieron sin el sistema de aumento de estabilidad y la altura converge.

6.2.2.3 Escalón en el alerón

En el caso de la dinámica lateral, si se alimenta ahora el sistema con un escalón de amplitud 0.1 en los alerones se tiene:

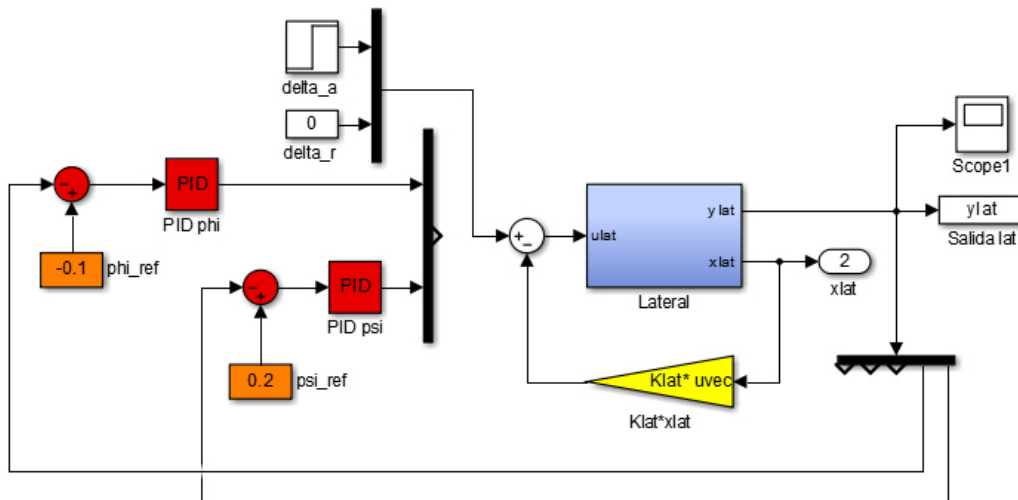


Figura 6.33 Modelo lineal y SAS con escalón en el alerón.

Representando las salidas con la función *salidalineal.m*:

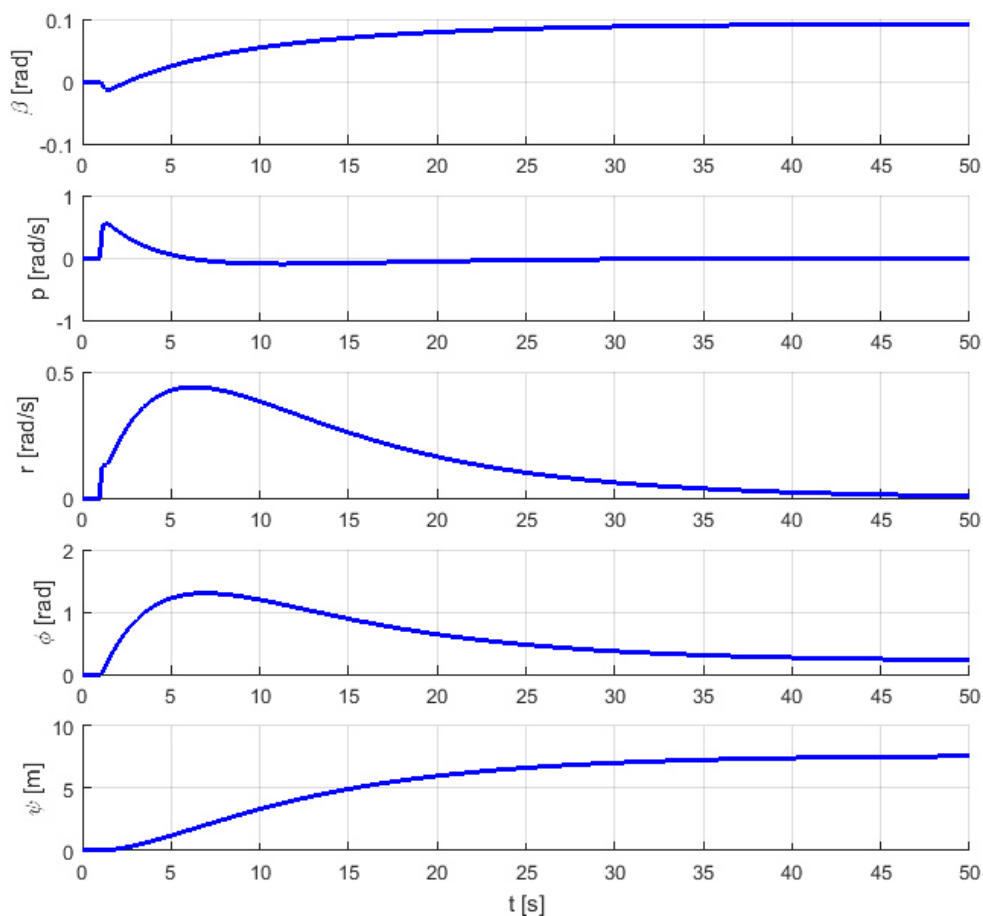


Figura 6.34 Respuesta del sistema con SAS ante un escalón en el alerón.

Puede observarse que las salidas ahora convergen, al contrario de lo que pasaba sin el sistema de aumento de estabilidad, por lo que éste resulta positivo para el sistema.

6.2.2.4 Escalón en el timón de dirección

Para un escalón de amplitud 0.1 en el timón de dirección:

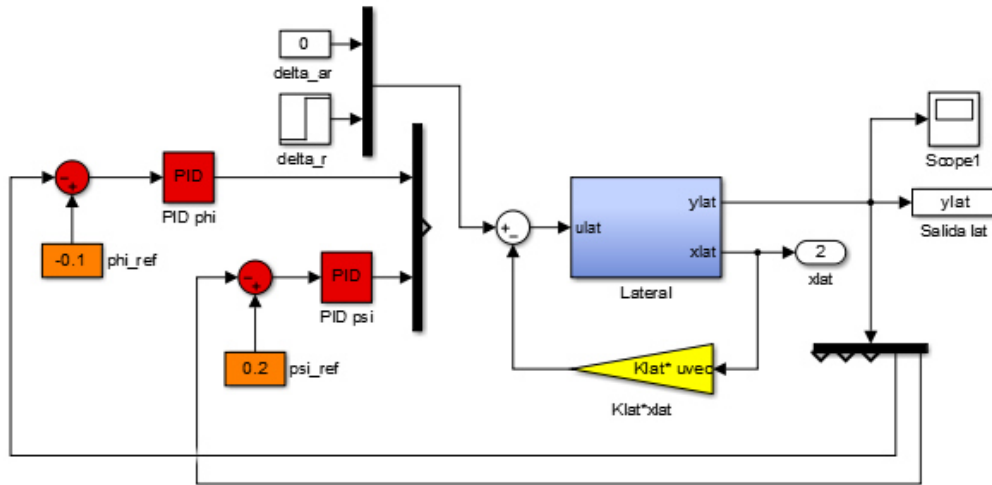


Figura 6.35 Modelo lineal y SAS con escalón en el timón de dirección.

Representando las salidas con la función *salidalineal.m* se obtiene:

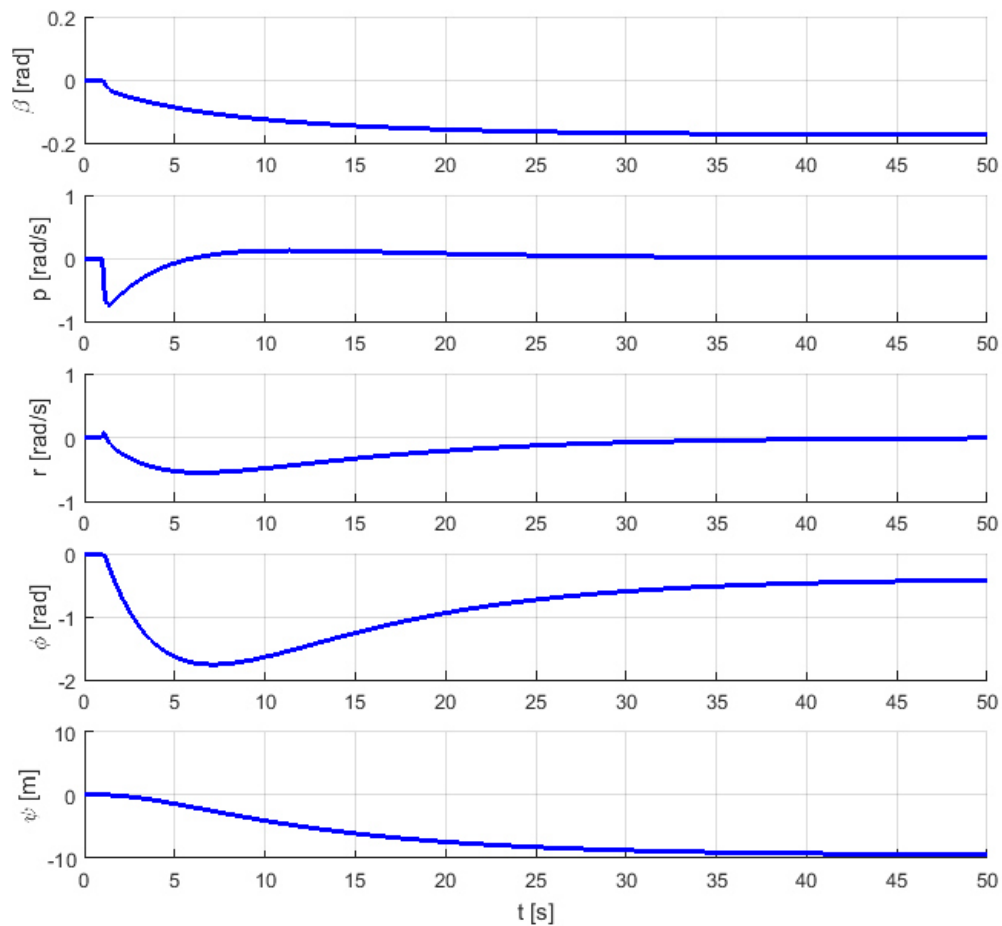


Figura 6.36 Respuesta del sistema con SAS ante un escalón en el timón de dirección.

De nuevo puede observarse que con el sistema de aumento de estabilidad las respuestas convergen.

6.2.3 Control de actitud con SAS

Por último, se va a conectar la parte de control tal y como se muestra en la imagen:

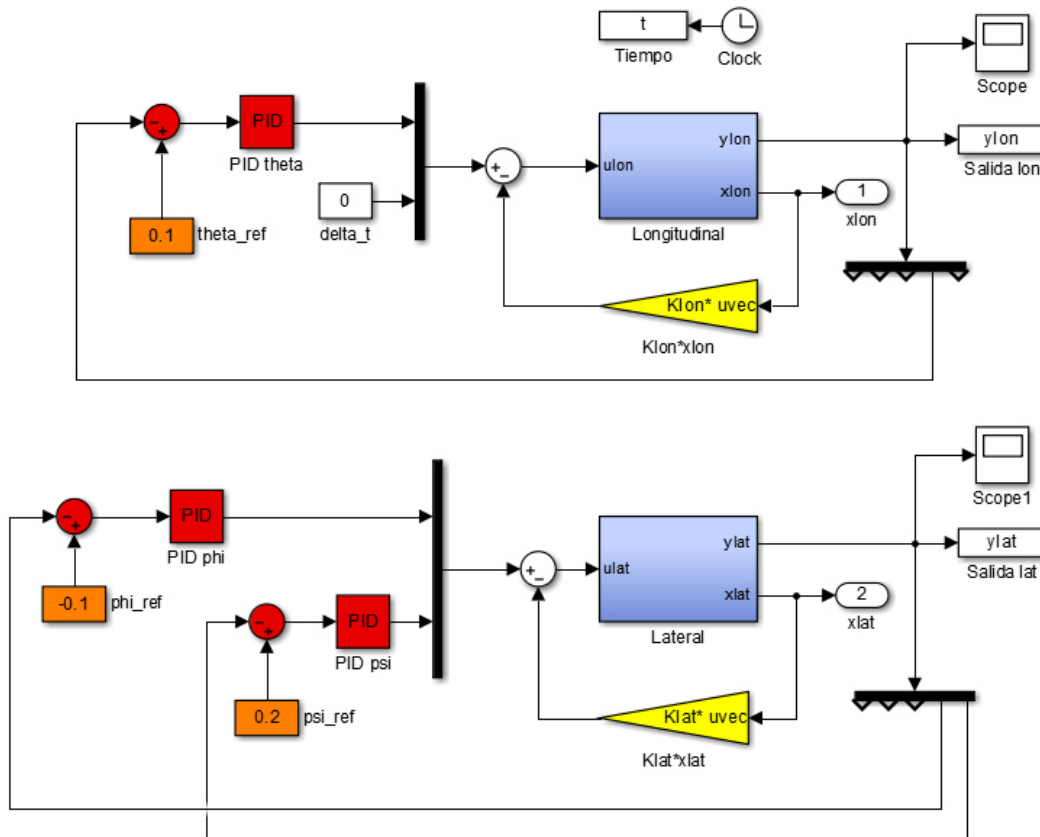


Figura 6.37 Control de actitud con SAS en el modelo lineal.

Los bloques naranjas permiten introducir las referencias que se quiere que alcancen los ángulos. Para cambiarlos, basta con hacer doble clic en el bloque e introducir el valor deseado. En este caso, para el ángulo de balance se ha marcado una referencia -0.1 rad , para el ángulo de cabeceo 0.1 rad y para el ángulo de guiñada 0.2 . Tras realizar la simulación, se pueden representar los resultados con el archivo *salidalinealcontrol.m* que se adjunta en el Anexo. Esta función recibe como entradas las salidas de las dinámicas longitudinal y lateral y el tiempo guardados en el espacio de trabajo desde la simulación con los bloques *To Workspace* correspondientes, y además, requiere de un vector que indique las referencias de las variables a seguir: $ref = [\phi_{ref}, \theta_{ref}, \psi_{ref}]$. De modo que, creando este vector con los valores correspondientes e introduciendo en la ventana de comando la siguiente línea:

```
salidalinealcontrol(yлон,yлат,t,ref)
```

se obtienen los resultados que se muestran a continuación:

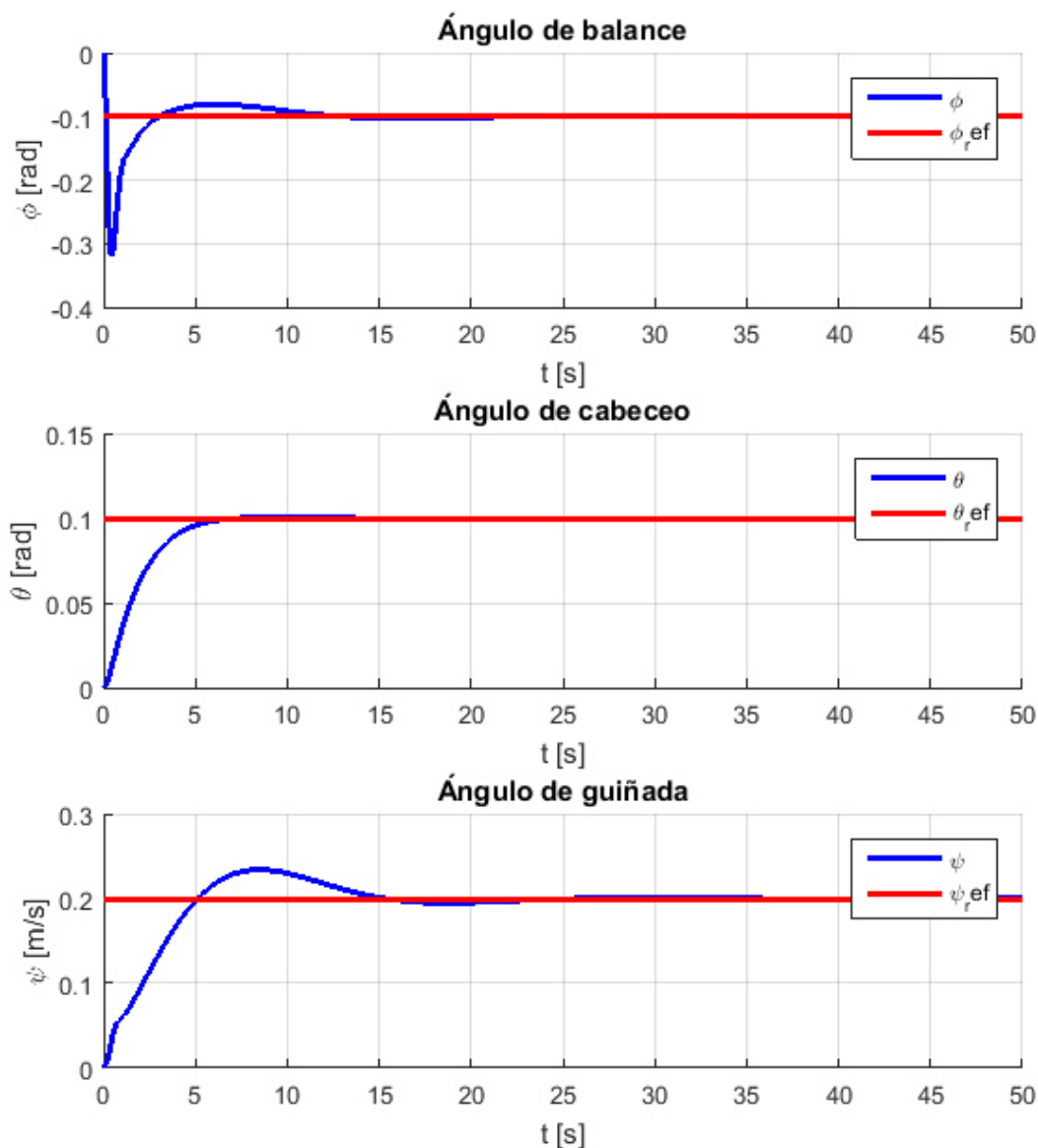


Figura 6.38 Variables controladas y referencias del modelo lineal.

Se puede ver como se alcanzan las referencias deseadas de manera satisfactoria.

6.3 Aplicación 3

En esta última aplicación se han implementado los resultados del sistema de aumento de estabilidad y control de actitud obtenidos para el modelo lineal en el modelo no lineal. Para ello, hay que tener en cuenta que el sistema de aumento de estabilidad y control obtenidos del modelo lineal trabaja con incrementos de las variables respecto del punto de equilibrio, mientras que las variables que entran y salen del modelo no lineal son las variables totales, por lo que para pasar de unas a otras habrá que sumar o restar los valores de equilibrio ($x = \bar{x} + x_E, u = \bar{u} + u_E$). Además, habrá que separar las variables para trabajar con la parte longitudinal por un lado y la lateral por otro (ya que así se ha trabajado en el modelo lineal). Por otro lado, al trabajar con perturbaciones respecto al punto de equilibrio, en las condiciones iniciales del modelo no lineal deben introducirse los valores correspondientes a dicho punto. Habiendo tenido todo esto en cuenta, al abrir el archivo

UAVnl_controlSAS.slx se llega a:

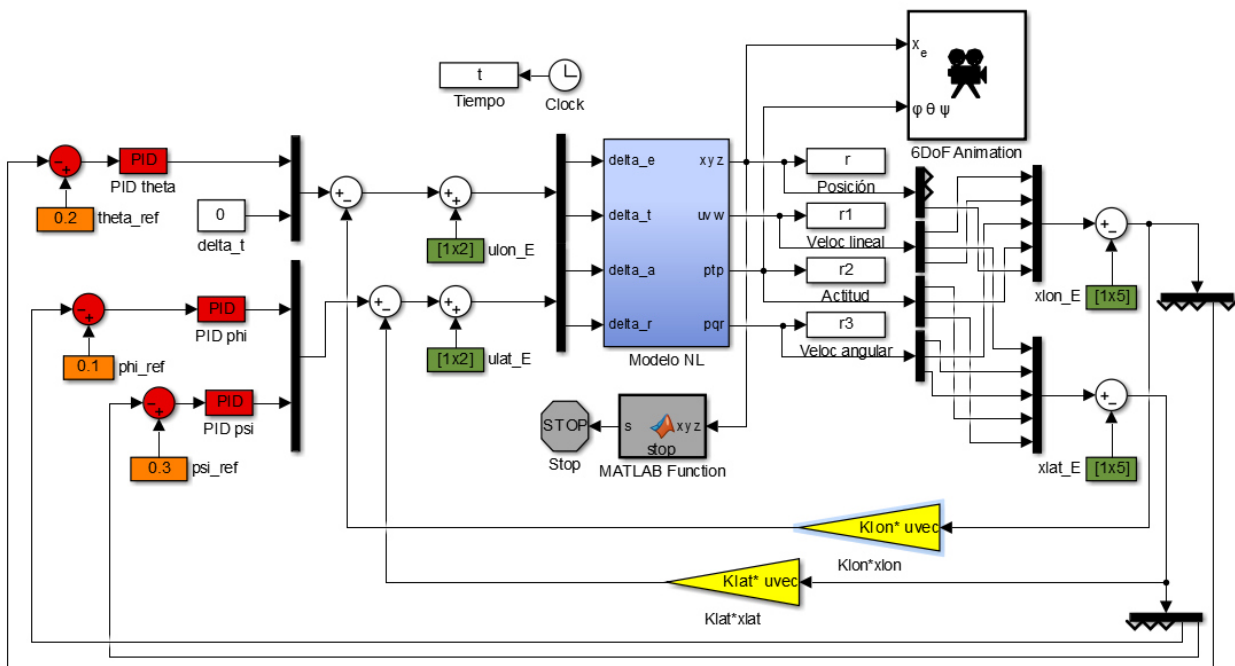


Figura 6.39 Control de actitud con SAS en el modelo no lineal.

Los bloques naranjas permiten introducir los valores de referencia que se desea que alcance cada variable. Dichos valores son perturbaciones respecto al punto de equilibrio, por lo que el valor al que llegará será al de la referencia indicada sumada al valor de equilibrio. Las referencias pueden cambiarse haciendo doble clic en cada bloque e introduciendo el valor deseado. En este caso, para el ángulo de balance se ha introducido una referencia de $\phi_{ref} = 0.1$, para el ángulo de cabeceo $\theta_{ref} = 0.2$ y para el ángulo de guiñada $\psi_{ref} = 0.3$. Para poder simular el programa, es necesario ejecutar antes las funciones *trimado.m* y *SAS.m* para obtener las matrices del sistema de aumento de estabilidad. Tras ejecutar el programa, se pueden representar los resultados con la función *salidacontrolSAS.m* adjunta en el Anexo. Esta función recibe como entradas la actitud de la aeronave y el tiempo de simulación guardados en el espacio de trabajo gracias a los bloques *To Workspace* correspondientes, además, requiere de un vector con las referencias introducidas en el diagrama de bloques: $ref = [\phi_{ref}, \theta_{ref}, \psi_{ref}]$, y los valores de equilibrio para sumarlos a la referencias a la hora de representarlas. Tras crear dicho vector con las referencias correspondientes, se escribe la siguiente línea en la ventana de comandos:

```
salidacontrolSAS(r2,t,ref,xu_E)
```

Las gráficas resultantes se muestran a continuación:

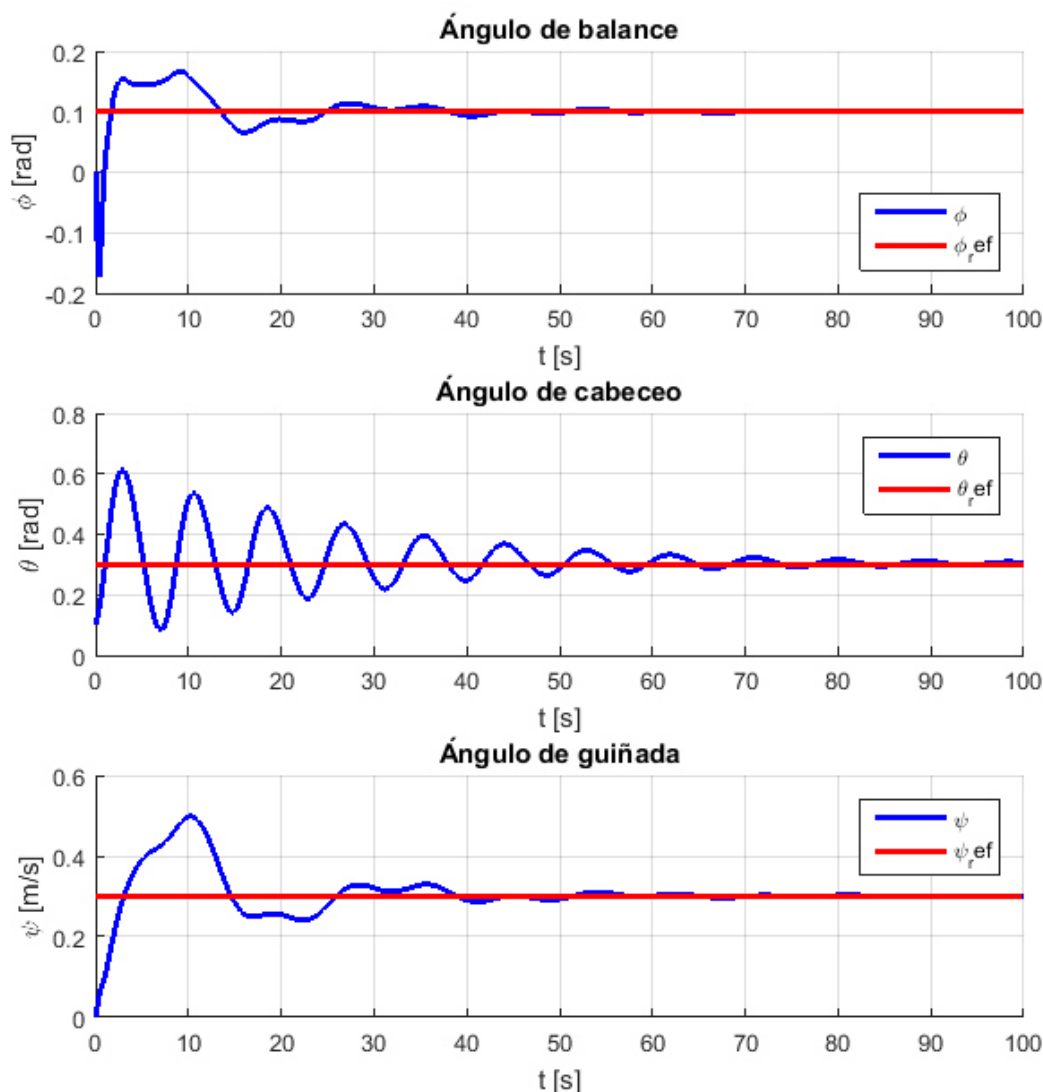


Figura 6.40 Variables controladas y referencias del modelo no lineal con SAS. Simulación 1.

Como puede observarse, el sistema de control con sistema de aumento de estabilidad obtenido para el modelo lineal funciona en el modelo no lineal. Las oscilaciones pueden deberse a las simplificaciones realizadas para obtener el modelo lineal, lo que haga que los modos del sistema no lineal no sean exactamente los mismos que los del modelo lineal, además, en el modelo no lineal existe un alto acoplamiento entre todas las variables mientras que para obtener los resultados del modelo lineal se han separado las dinámicas longitudinal y lateral.

Se va a realizar una nueva simulación cambiando las referencias. En este caso se va a escoger una perturbación en el ángulo de balance nula $\phi_{ref} = 0$, en el ángulo de cabeceo $\theta_{ref} = 0.15$ y en el ángulo de guiñada $\psi_{ref} = 0.3$. Se introducen estos valores haciendo doble clic en los bloques naranjas, se ejecuta la simulación y se representan los resultados con la función *salidacontrolSAS.m* obteniendo:

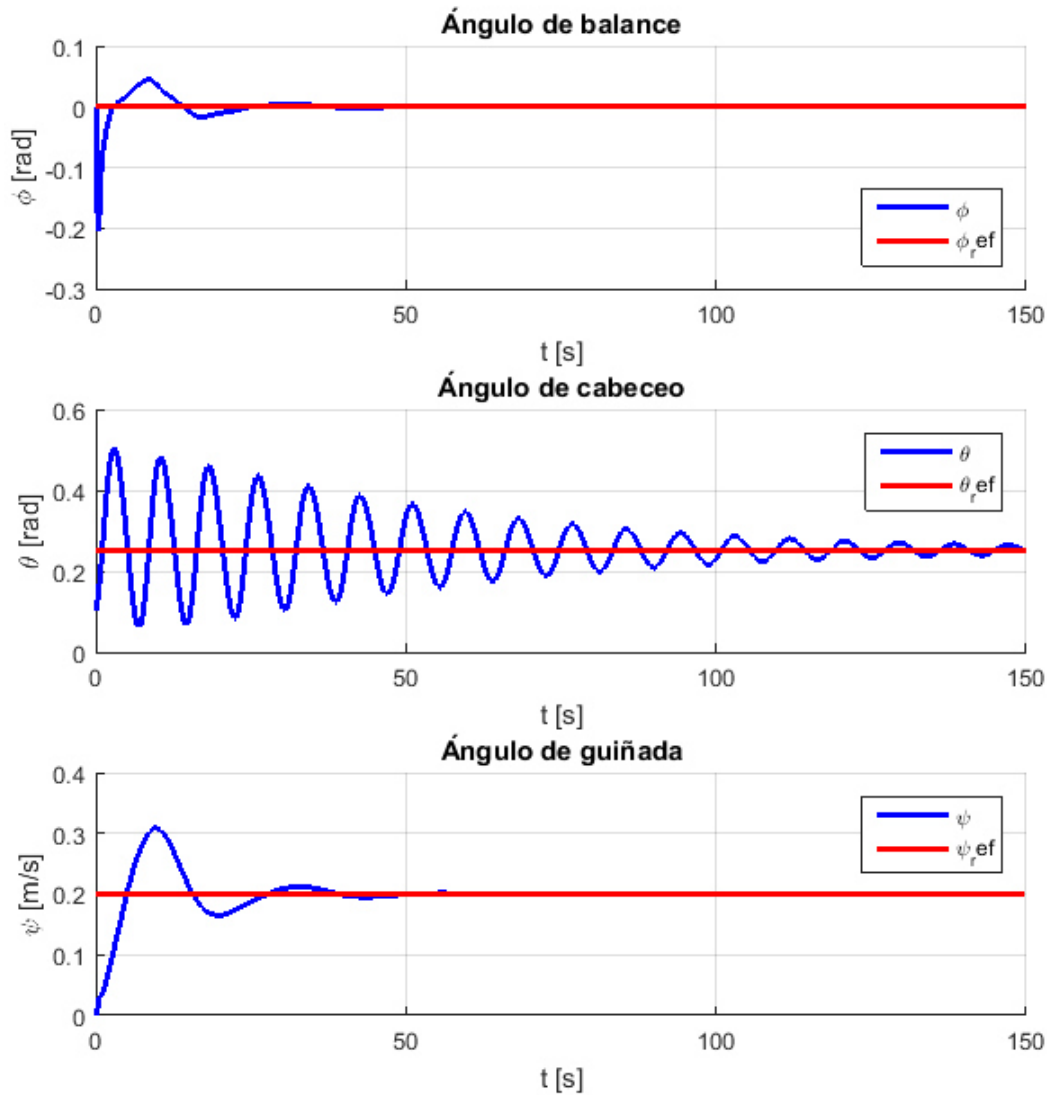


Figura 6.41 Variables controladas y referencias del modelo no lineal con SAS. Simulación 2.

En este caso, el ángulo de cabeceo presenta más oscilaciones y tarda más en alcanzar el valor de referencia, mientras que el ángulo de guiñada se estabiliza antes.

6.4 Conclusiones

En este capítulo se han desarrollado diversas aplicaciones de control de la aeronave y se ha explicado su funcionamiento para poder realizar simulaciones con ellas en distintas condiciones. La primera aplicación incluye un sistema de control y guiado de la aeronave con el modelo no lineal, y se han realizado simulaciones a distintos niveles: modelo, control de actitud y velocidad, y guiado a un punto fijo. La segunda aplicación incluye un sistema de control de actitud con SAS en el modelo lineal, y de nuevo se han realizado simulaciones a distintos niveles: modelo, SAS y control de actitud. Por último, la tercera aplicación corresponde con la implementación del sistema de control de actitud con SAS obtenido para el modelo lineal en el modelo no lineal, y se han realizado simulaciones con distintas referencias para comprobar que funciona correctamente.

7 CONCLUSIONES FINALES

El proyecto ha consistido en la elaboración de herramientas útiles para las prácticas de alumnos de asignaturas de control y guiado de aeronaves.

En cualquier problema de control, es necesario disponer de un modelo que permita traducir la realidad a elementos matemáticos, por ello, en el capítulo 2, se han obtenido las ecuaciones generales de la aeronave que recogen el comportamiento físico. Al tratarse de ecuaciones no lineales y acopladas resulta un modelo muy complejo, por lo que es necesario simplificarlo. Para ello, se han linealizado las ecuaciones y desacoplado las dinámicas longitudinal y lateral en el capítulo 3. Se podrían realizar mejoras en los modelos para que fuese más realista, por ejemplo, incluyendo las dependencias de parámetros y coeficientes aerodinámicos con el Mach de vuelo, o incluyendo algún modelo de viento.

En el capítulo 4, se ha introducido a la estabilidad dinámica y cómo realizar un sistema de aumento de estabilidad para mejorarla. Además, se ha introducido el controlador PID y se ha explicado el método empleado para el de ajuste de sus términos.

En el capítulo 5, se ha explicado cómo implementar todo lo explicado en los capítulos 2, 3 y 4 en Simulink.

Por último, en el capítulo 6, con las herramientas descritas en el capítulo 5, se han desarrollado tres aplicaciones distintas y se ha explicado cómo hacer uso de ellas. La primera aplicación consiste en un sistema de control y guiado a un punto fijo con el modelo no lineal. La segunda aplicación consiste en un sistema de control de actitud con sistema de aumento de estabilidad en el modelo lineal. La tercera aplicación consiste en implementar los resultados de control de actitud y SAS obtenidos para el modelo lineal en el no lineal. En cada una de las aplicaciones se han ido realizando distintas simulaciones a distintos niveles para probar las partes de cada aplicación. Así, en la primera aplicación se han realizado simulaciones solo con el modelo de aeronave implementado, simulaciones con el modelo y la parte de control y, por último, simulaciones con el modelo, el control y el guiado activos. En la segunda aplicación se han realizado simulaciones solo con el modelo linealizado, simulaciones con el modelo lineal con SAS y, por último, simulaciones con el modelo, el SAS y el control de actitud. En la tercera aplicación se han realizado simulaciones con el modelo no lineal, y el SAS y control de actitud obtenidos del modelo lineal. En el capítulo 6 también se explica cómo modificar los parámetros para realizar simulaciones diferentes a las recogidas en el proyecto (por ejemplo, en el guiado cambiar las coordenadas del punto fijo que se quiere alcanzar, o en el control cambiar las referencias que se quiere que alcancen las variables). Además, para el modelo linealizado se explica cómo utilizar las funciones y herramientas para linealizar en torno a un punto de equilibrio diferente al que se ha escogido, o cómo introducir autovalores deseados distintos en el SAS a los implementados en este caso.

Tras realizar las distintas simulaciones, se pueden extraer las siguientes conclusiones generales:

- El sistema de guiado implementado en el modelo no lineal proporciona un guiado básico bastante sencillo pero suficiente para el alcance de este proyecto. Se ha realizado únicamente el guiado a un punto fijo, pero se podría implementar también el guiado a distintos tipos de trayectorias.

- El sistema de aumento de estabilidad desarrollado se ha llevado a cabo mediante la modificación de los autovalores. Esto ha resultado muy útil ya que se ha conseguido con ello obtener un sistema estable con menos oscilaciones.
- Los controladores que se han empleado son de tipo PID. Estos controladores son sencillos de implementar y, a su vez, ofrecen buenos resultados como ha podido comprobarse. El ajuste de los parámetros se ha hecho mediante prueba y error y ha funcionado correctamente, pero para ello se han tenido que realizar múltiples simulaciones hasta conseguir las especificaciones deseadas.

Debido a las simplificaciones que conlleva el linealizar el modelo, los modos del modelo no lineal y el lineal no tienen por qué coincidir. Además, en el modelo no lineal, todas las variables están altamente acopladas, mientras que en el modelo lineal se separa la parte longitudinal de la lateral. Todo esto explica que, cuando se implementa el sistema de control de actitud con SAS del modelo lineal en el no lineal, existan oscilaciones.

REFERENCIAS

- [1] Beard, R. W., & McLain, T. W. *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. Princeton: Princeton University and Pres, 2012.
- [2] Etkin, B., Duff Reid, L. *Dynamics of Flight: Stability and Control*. New York: John Wiley & Sons, 3er ed., 1996.
- [3] Fernández Camacho, E. *Stabilization Augmentation Systems*. Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, 2016.
- [4] Fernández Camacho, E. *Attitude Control and Autopilots..* Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, 2016.
- [5] Nelson, R. *Flight Stability and Automatic Control*. New York: McGraw-Hill, 1989.
- [6] Gavilán Jiménez, F. *Mecánica del vuelo II: Ecuaciones Generales de la Dinámica del Avión*. Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, 2013.
- [7] Gavilán Jiménez, F. *Resumen de Estabilidad Dinámica de Aviones*. Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, 2013.
- [8] Raol, J. R., Singh, J. *Flight Mechanics Modeling and Analysis*. New York: CRC Press, 2009.
- [9] Stevens, B. L. & Lewis, F. L. *Aircraft Control and Simulation*. New Jersey: John Wiley, 2016.

ANEXO A: FUNCIONES DE MATLAB

A.1 Trim

```
%% Este archivo permite calcular el punto de equilibrio, las matrices
dinámicas asociadas a dicho punto y los autovalores de las matrices de
estado
function
[xu_E, derivadas, xlon_E, ulon_E, xlat_E, ulat_E, Alon, Blon, Clon, Alat, Blat, Clat, av
lon, avlat, normalon, normalat, rUlon, rUlat] = trimado
% Vbles: u_E , v_E , w_E , phi_E , theta_E , p_E , q_E , r_E , z_E ,
delta_e_E , delta_t_E , delta_a_E , delta_r_E
x0 = [ 25 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , -1000 , 0
, 0 , 0 , 0 ] ;
xmin = [ -40 , -40 , -40 , -pi , -pi/2 , -1 , -1 , -1 , -4500 , -
pi/6 , -1 , -pi/6 , -pi/6 ] ;
xmax = [ 40 , 40 , 40 , pi , pi/2 , 1 , 1 , 1 , 0 ,
pi/6 , 1 , pi/6 , pi/6 ] ;

% Restricciones de igualdad
% Fijando phi_E=0 y altura h_E=100 (z_E=-100) (y Va_E=25 m/s en la funcion
sa)
Aeq = [ 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ,
0 , 0 , 0 , 0 , 0 ;
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 ,
0 , 0 , 0 , 0 , 0 ] ;
beq = [ 0 , -1000 ] ;

options = optimoptions('fmincon' , 'MaxFunEvals' , 10000 ) ;
global derivadas
xu_E = fmincon ( @fobj , x0 , [] , [] , Aeq , beq , xmin , xmax ,
@restriccionesnl ) ;

xlon_E = [xu_E(1) ; xu_E(3) ; xu_E(7) ; xu_E(5) ; xu_E(9)] ; % u_E ,
v_E , q_E , theta_E , z_E
ulon_E = [xu_E(10) ; xu_E(11)] ; %
delta_e_E , delta_t_E
xlat_E = [xu_E(2) ; xu_E(6) ; xu_E(8) ; xu_E(4) ; 0] ; % v_E ,
p_E , r_E , phi_E , psi_E
ulat_e = [xu_E(12) ; xu_E(13)] ; %
delta_a_E , delta_r_E

% Calculo de las matrices dinámicas
[Alon , Blon , Clon , Alat , Blat , Clat] = matrices(xu_E) ;

% Cálculo de autovalores
avlon = eig(Alon) ; % Autovalores de la matriz A de la parte
longitudinal
avlat = eig(Alat) ; % Autovalores de la matriz A de la parte lateral
```

```

% Gráfica de autovalores
figure(1)
set(gcf,'Color','white')
hold on
plot(real(avlon(1)),imag(avlon(1)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','b')
plot(real(avlon(3)),imag(avlon(3)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','r')
plot(real(avlon(5)),imag(avlon(5)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','g')
plot(real(avlon(2)),imag(avlon(2)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','b')
plot(real(avlon(4)),imag(avlon(4)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','r')
xlabel('Re')
ylabel('Im')
legend('Modo corto periodo','Modo Fugoide','Autovalor de la
altura','location','best')
grid on

figure(2)
set(gcf,'Color','white')
hold on
plot(real(avlat(1)),imag(avlat(1)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','b')
plot(real(avlat(2)),imag(avlat(2)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','r')
plot(real(avlat(3)),imag(avlat(3)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','g')
plot(real(avlat(4)),imag(avlat(4)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','k')
plot(real(avlat(5)),imag(avlat(5)),'Marker','o','LineWidth',2,'Color','k')
xlabel('Re')
ylabel('Im')
legend('Autovalor del ángulo de guiñada','Modo de Convergencia en
balance','Modo Espiral','Modo Balanceo holandés','location','northwest')
grid on

% Módulo de los autovalores
for i=1:5
normalon(i) = norm(avlon(i)) ;
end
for i=1:5
normalat(i) = norm(avlat(i)) ;
end

% Matrices de controlabilidad
Ulon = [Blon Alon*Blon Alon^2*Blon Alon^3*Blon Alon^4*Blon] ;
Ulat = [Blat Alat*Blat Alat^2*Blat Alat^3*Blat Alat^4*Blat] ;
% Rango de las matrices de controlabilidad
rUlon = rank(Ulon) ;
rUlat = rank(Ulat) ;

function J = fobj( vbles )
% Función objetivo a minimizar para alcanzar el punto de equilibrio
%% ENTRADAS
u_E      = vbles(1) ;
v_E      = vbles(2) ;
w_E      = vbles(3) ;
phi_E    = vbles(4) ;
theta_E  = vbles(5) ;
p_E      = vbles(6) ;
q_E      = vbles(7) ;
r_E      = vbles(8) ;
z_E      = vbles(9) ;
delta_e_E = vbles(10) ;
delta_t_E = vbles(11) ;
delta_a_E = vbles(12) ;
delta_r_E = vbles(13) ;

```

```

Va_E = sqrt( u_E^2 + v_E^2 + w_E^2 ) ;
alpha_E = atan( w_E / u_E ) ;
beta_E = asin( v_E / Va_E ) ;

%% ATMÓSFERA ISA
g = 9.8; %Gravedad
Rg = 287; %Constante del aire
lambda = -6.5*10^(-3); %Gradiente térmico
T0 = 288.15; %Temperatura a 0 m
rho0 = 1.225; %Densidad a 0 m
rho_E = rho0 * ((T0 - lambda * z_E) / T0).^( ( - g / (Rg * lambda) ) - 1);
%Densidad

%% DATOS
m = 13.5 ; % kg

Ix = 0.8244 ; % kg*m^2
Iy = 1.135 ; % kg*m^2
Iz = 1.759 ; % kg*m^2
Ixz = 0.1204 ; % kg*m^2

Gamma = Ix * Iz - Ixz^2 ;
Gamma1 = Ixz * (Ix - Iy + Iz) / Gamma ;
Gamma2 = (Iz * (Iz - Iy) + Ixz^2) / Gamma ;
Gamma3 = Iz / Gamma ;
Gamma4 = Ixz / Gamma ;
Gamma5 = (Iz - Ix) / Iy ;
Gamma6 = Ixz / Iy ;
Gamma7 = (Ix * (Ix - Iy) + Ixz^2) / Gamma ;
Gamma8 = Ix / Gamma ;

S = 0.55 ; % m^2
b = 2.8956 ; % m
c = 0.18994 ; % m

Sprop = 0.2027 ; % m^2
kmotor = 80 ;

%% COEFICIENTES LONGITUDINALES
CL0 = 0.28 ;
CLalpha = 3.45 ;
CLq = 0 ;
CLdelta_e = 0.36 ;

CD0 = 0.03 ;
CDalpha = 0.3 ;
CDq = 0 ;
CDdelta_e = 0 ;

Cm0 = - 0.02338 ;
Cmalpha = -0.38 ;
Cmq = - 3.6 ;
Cmdelta_e = - 0.5 ;

Cprop = 1 ;

%% COEFICIENTES LATERALES
CY0 = 0 ;

```

```

CYbeta = - 0.98;
CYp = 0 ;
CYr = 0 ;
CYdelta_a = 0 ;
CYdelta_r = 0.17 ;

Cl0 = 0 ;
Clbeta = - 0.12 ;
Clp = - 0.26 ;
Clr = 0.14 ;
Cldelta_a = 0.08 ;
Cldelta_r = - 0.105 ;

Cn0 = 0 ;
Cnbeta = 0.25 ;
Cnp = 0.022 ;
Cnr = - 0.35 ;
Cndelta_a = 0.06 ;
Cndelta_r = 0.032 ;

%% FUERZAS Y MOMENTOS
% FUERZAS GRAVITATORIAS
Xg_E = - m * g * sin(theta_E) ;
Yg_E = m * g * cos(theta_E) * sin(phi_E) ;
Zg_E = m * g * cos(theta_E) * cos(phi_E) ;

% FUERZAS AERODINÁMICAS
CL_E = CL0 + CLalpha * alpha_E + CLq * c / 2 / Va_E * q_E + CLdelta_e *
delta_e_E ;
CD_E = CD0 + CDalpha * alpha_E + CDq * c / 2 / Va_E * q_E + CDdelta_e *
delta_e_E ;
CY_E = CY0 + CYbeta * beta_E + CYp * b / 2 / Va_E * p_E + CYr * b / 2 /
Va_E * r_E + CYdelta_a * delta_a_E + CYdelta_r * delta_r_E ;

Xa_E = 1 / 2 * rho_E * Va_E^2 * S * (- CD_E * cos(alpha_E) + CL_E *
sin(alpha_E) ) ;
Ya_E = 1 / 2 * rho_E * Va_E^2 * S * CY_E ;
Za_E = 1 / 2 * rho_E * Va_E^2 * S * (- CD_E * sin(alpha_E) - CL_E *
cos(alpha_E) ) ;

% FUERZAS DE PROPULSIÓN
Xp_E = 1 / 2 * rho_E * Sprop * Cprop * ((kmotor * delta_t_E)^2 - Va_E^2) ;

%% MOMENTOS
% MOMENTOS AERODINÁMICOS
L_E = 1 / 2 * rho_E * Va_E^2 * S * b * (Cl0 + Clbeta * beta_E + Clp *
p_E * b / 2 / Va_E + Clr * r_E * b / 2 / Va_E + Cldelta_a * delta_a_E +
Cldelta_r * delta_r_E) ;
M_E = 1 / 2 * rho_E * Va_E^2 * S * c * (Cm0 + Cmalpha * alpha_E + Cm q *
q_E * c / 2 / Va_E + Cmdelta_e * delta_e_E) ;
N_E = 1 / 2 * rho_E * Va_E^2 * S * b * (Cn0 + Cnbeta * beta_E + Cnp *
p_E * b / 2 / Va_E + Cnr * r_E * b / 2 / Va_E + Cndelta_a * delta_a_E +
Cndelta_r * delta_r_E) ;

%% ECUACIONES
du_E = r_E * v_E - q_E * w_E + (Xg_E + Xa_E + Xp_E) / m ;
dv_E = p_E * w_E - r_E * u_E + (Yg_E + Ya_E) / m ;
dw_E = q_E * u_E - p_E * v_E + (Zg_E + Za_E) / m ;

```

```

dphi_E = p_E + q_E * sin(phi_E) * tan(theta_E) + r_E * cos(phi_E) *
tan(theta_E) ;
dtheta_E = q_E * cos(phi_E) - r_E * sin(phi_E) ;
dpsi_E = ( q_E * sin(phi_E) + r_E * cos(phi_E) ) * sec(theta_E) ;

dp_E = Gamma1 * p_E * q_E - Gamma2 * q_E * r_E + Gamma3 * L_E + Gamma4 *
N_E ;
dq_E = Gamma5 * p_E * r_E - Gamma6 * (p_E^2 - r_E^2) + M_E / Iy ;
dr_E = Gamma7 * p_E * q_E - Gamma1 * q_E * r_E + Gamma4 * L_E + Gamma8 *
N_E ;

dz_E = - u_E * sin(theta_E) + v_E * sin(phi_E) * cos(theta_E) + w_E *
cos(phi_E) * cos(theta_E) ;

%% FUNCIÓN OBJETIVO
J = du_E^2 + dv_E^2 + dw_E^2 + dphi_E^2 + dtheta_E^2 + dpsi_E^2 + dp_E^2 +
dq_E^2 + dr_E^2 + dz_E^2 ;
derivadas = [du_E , dv_E , dw_E , dphi_E , dtheta_E , dpsi_E , dp_E , dq_E
, dr_E , dz_E] ;
end

```

```

function [ c , ceq ] = restriccionesnl(entradas)
% Restricción de velocidad, imponemos valor de velocidad absoluta en el
equilibrio
u_E = entradas(1) ;
v_E = entradas(2) ;
w_E = entradas(3) ;

Va_E = 27 ; % Valor de velocidad absoluta impuesto

ceq = [ u_E^2 + v_E^2 + w_E^2 - Va_E^2 ] ; % Restricción de igualdad no
lineal
c=[] ; % Restricción de desigualdad
end

```

```

function [Alon , Blon , Clon , Alat , Blat , Clat] = matrices(vbles)
%% MATRICES Alon, Blon, Alat, Blan
%% Entrdas
u_E = vbles(1) ;
v_E = vbles(2) ;
w_E = vbles(3) ;
phi_E = vbles(4) ;
theta_E = vbles(5) ;
p_E = vbles(6) ;
q_E = vbles(7) ;
r_E = vbles(8) ;
z_E = vbles(9) ;
delta_e_E = vbles(10) ;
delta_t_E = vbles(11) ;
delta_a_E = vbles(12) ;
delta_r_E = vbles(13) ;

Va_E = sqrt( u_E^2 + v_E^2 + w_E^2 ) ;
alpha_E = atan( w_E / u_E ) ;
beta_E = asin( v_E / Va_E ) ;

%% ATMÓSFERA ISA
g = 9.8; %Gravedad
Rg = 287; %Constante del aire
lambda = -6.5*10^(-3); %Gradiente térmico

```

```

T0      = 288.15;           %Temperatura a 0 m
rho0    = 1.225;           %Densidad a 0 m
rho_zE  = rho0 * ((T0 - lambda * z_E) / T0).^( ( - g / (Rg * lambda) ) -
1); %Densidad

%% DATOS
m       = 13.5 ;           % kg
S       = 0.55 ;           % m^2
b       = 2.8956 ;         % m
c       = 0.18994 ;        % m
Sprop   = 0.2027 ;         % m^2
kmotor  = 80 ;

Ix      = 0.8244 ;         % kg*m^2
Iy      = 1.135 ;          % kg*m^2
Iz      = 1.759 ;          % kg*m^2
Ixz     = 0.1204 ;        % kg*m^2

Gamma   = Ix * Iz - Ixz^2 ;
Gamma1  = Ixz * (Ix - Iy + Iz) / Gamma ;
Gamma2  = (Iz * (Iz - Iy) + Ixz^2) / Gamma ;
Gamma3  = Iz / Gamma ;
Gamma4  = Ixz / Gamma ;
Gamma5  = (Iz - Ix) / Iy ;
Gamma6  = Ixz / Iy ;
Gamma7  = (Ix * (Ix - Iy) + Ixz^2) / Gamma ;
Gamma8  = Ix / Gamma ;

%% COEFICIENTES LONGITUDINALES
CL0     = 0.28 ;
CLalpha = 3.45 ;
CLq     = 0 ;
CLdelta_e = 0.36 ;
CL      = CL0 + CLalpha * alpha_E + CLq * c / 2 / Va_E * q_E + CLdelta_e
* delta_e_E ;

CD0     = 0.03 ;
CDalpha = 0.3 ;
CDq     = 0 ;
CDdelta_e = 0 ;
CD      = CD0 + CDalpha * alpha_E + CDq * c / 2 / Va_E * q_E + CDdelta_e
* delta_e_E ;

Cm0     = - 0.02338 ;
Cmalpha = -0.38 ;
Cmq     = - 3.6 ;
Cmdelta_e = - 0.5 ;
Cm      = Cm0 + Cmalpha * alpha_E + Cmq * c / 2 / Va_E * q_E + Cmdelta_e
* delta_e_E ;

Cprop   = 1 ;

CX      = - CD      * cos(alpha_E) + CL      * sin(alpha_E) ;
CZ      = - CD      * sin(alpha_E) - CL      * cos(alpha_E) ;
CXalpha = - CDalpha * cos(alpha_E) + CLalpha * sin(alpha_E) ;
CZalpha = - CDalpha * sin(alpha_E) - CLalpha * cos(alpha_E) ;
CXq     = - CDq     * cos(alpha_E) + CLq     * sin(alpha_E) ;
CZq     = - CDq     * sin(alpha_E) - CLq     * cos(alpha_E) ;
CXdelta_e = - CDdelta_e * cos(alpha_E) + CLdelta_e * sin(alpha_E) ;

```

```

CZdelta_e = - CDdelta_e * sin(alpha_E) - CLdelta_e * cos(alpha_E) ;

%% COEFICIENTES LATERALES
CY0      = 0 ;
CYbeta   = - 0.98;
CYp      = 0 ;
CYr      = 0 ;
CYdelta_a = 0 ;
CYdelta_r = 0.17 ;
CY       = CY0 + CYbeta * beta_E + CYp * b / 2 / Va_E * p_E + CYr * b / 2
/ Va_E * r_E + CYdelta_a * delta_a_E + CYdelta_r * delta_r_E ;

Cl0      = 0 ;
Clbeta   = - 0.12 ;
Clp      = - 0.26 ;
Clr      = 0.14 ;
Cldelta_a = 0.08 ;
Cldelta_r = - 0.105 ;
Cl       = Cl0 + Clbeta * beta_E + Clp * b / 2 / Va_E * p_E + Clr * b / 2
/ Va_E * r_E + Cldelta_a * delta_a_E + Cldelta_r * delta_r_E ;

Cn0      = 0 ;
Cnbeta   = 0.25 ;
Cnp      = 0.022 ;
Cnr      = - 0.35 ;
Cndelta_a = 0.06 ;
Cndelta_r = 0.032 ;
Cn       = Cn0 + Cnbeta * beta_E + Cnp * b / 2 / Va_E * p_E + Cnr * b / 2
/ Va_E * r_E + Cndelta_a * delta_a_E + Cndelta_r * delta_r_E ;

%% DERIVADAS DE ESTABILIDAD
drho_zE = rho0 / T0 * lambda * (-g / Rg / lambda - 1) * (1 + lambda * z_E
/ T0)^(-g / Rg / lambda - 2) ;

Xu       = - rho_zE * Sprop * Cprop * u_E + rho_zE * S * CX * u_E - w_E /
(u_E^2 + w_E^2) * Va_E^2 * rho_zE * S * CXalpha / 2 ...
- u_E / Va_E * rho_zE * S * c * q_E * CXq / 4 + w_E / (u_E^2 +
w_E^2) * Va_E^2 * rho_zE * S * CZ / 2 ;
Xw       = - rho_zE * Sprop * Cprop * w_E + rho_zE * S * CX * w_E + u_E /
(u_E^2 + w_E^2) * Va_E^2 * rho_zE * S * CXalpha / 2 ...
- w_E / Va_E * rho_zE * S * c * q_E * CXq / 4 - u_E / (u_E^2 +
w_E^2) * Va_E^2 * rho_zE * S * CZ / 2 ;
Xq       = rho_zE * Va_E * S * c * CXq / 4 ;
Xz       = drho_zE * (Sprop*Cprop/2*( kmotor * delta_t_E)^2 - Va_E^2 ) +
Va_E^2 * S * CX / 2 ) ;
Xdelta_e = rho_zE * Va_E^2 * S * CXdelta_e / 2 ;
Xdelta_t = rho_zE * Sprop * Cprop * kmotor^2 * delta_t_E ;

Zu       = rho_zE * S * CZ * u_E - w_E / (u_E^2 + w_E^2) * Va_E^2 * rho_zE
* S * CZalpha / 2 ...
- u_E / Va_E * rho_zE * S * c * q_E * CZq / 4 - w_E / (u_E^2 +
w_E^2) * Va_E^2 * rho_zE * S * CX / 2 ;
Zw       = rho_zE * S * CZ * w_E + u_E / (u_E^2 + w_E^2) * Va_E^2 * rho_zE
* S * CZalpha / 2 ...
- w_E / Va_E * rho_zE * S * c * q_E * CZq / 4 + u_E / (u_E^2 +
w_E^2) * Va_E^2 * rho_zE * S * CX / 2 ;
Zq       = rho_zE * Va_E * S * c * CZq / 4 ;
Zz       = drho_zE * Va_E^2 * S * CZ / 2 ;
Zdelta_e = rho_zE * Va_E^2 * S * CZdelta_e / 2 ;

```

```

Mu      = rho_zE * S * c * u_E * Cm - w_E / (u_E^2 + w_E^2) * Va_E^2 *
rho_zE * S * c * Cmalpha / 2 ...
        - u_E / Va_E * rho_zE * S * c^2 * q_E * Cm / 4 ;
Mw      = rho_zE * S * c * w_E * Cm + u_E / (u_E^2 + w_E^2) * Va_E^2 *
rho_zE * S * c * Cmalpha / 2 ...
        - w_E / Va_E * rho_zE * S * c^2 * q_E * Cm / 4 ;
Mq      = rho_zE * Va_E * S * c^2 * Cm / 4 ;
Mz      = drho_zE * Va_E^2 * S * c * Cm / 2 ;
Mdelta_e = rho_zE * Va_E^2 * S * c * Cmdelta_e / 2 ;

Yv      = rho_zE * S * v_E * CY + sqrt(u_E^2 + w_E^2) * rho_zE * S *
CYbeta / 2 - v_E / Va_E * rho_zE * S * b * (CYp * p_E + CYr * r_E) / 4 ;
Yp      = rho_zE * Va_E * S * b * CYp / 4 ;
Yr      = rho_zE * Va_E * S * b * CYr / 4 ;
Ydelta_a = rho_zE * Va_E^2 * S * CYdelta_a / 2 ;
Ydelta_r = rho_zE * Va_E^2 * S * CYdelta_r / 2 ;

Lv      = rho_zE * S * b * v_E * Cl + sqrt(u_E^2 + w_E^2) * rho_zE * S *
b * Clbeta / 2 ...
        - v_E / Va_E * rho_zE * S * b^2 * (Clp * p_E + Clr * r_E) / 4 ;
Lp      = rho_zE * Va_E * S * b^2 * Clp / 4 ;
Lr      = rho_zE * Va_E * S * b^2 * Clr / 4 ;
Ldelta_a = rho_zE * Va_E^2 * S * b * Cldelta_a / 2 ;
Ldelta_r = rho_zE * Va_E^2 * S * b * Cldelta_r / 2 ;

Nv      = rho_zE * S * b * v_E * Cn + sqrt(u_E^2 + w_E^2) * rho_zE * S *
b * Cnbeta / 2 ...
        - v_E / Va_E * rho_zE * S * b^2 * (Cnp * p_E + Cnr * r_E) / 4 ;
Np      = rho_zE * Va_E * S * b^2 * Cnp / 4 ;
Nr      = rho_zE * Va_E * S * b^2 * Cnr / 4 ;
Ndelta_a = rho_zE * Va_E^2 * S * b * Cndelta_a / 2 ;
Ndelta_r = rho_zE * Va_E^2 * S * b * Cndelta_r / 2 ;

%% Alon, Blon, Clon
Alon(1,1) = Xu/m ;
Alon(1,2) = -q_E + Xw/m ;
Alon(1,3) = -w_E + Xq/m ;
Alon(1,4) = -g * cos(theta_E) ;
Alon(1,5) = Xz/m ;

Alon(2,1) = q_E + Zu/m ;
Alon(2,2) = Zw/m ;
Alon(2,3) = u_E + Zq/m ;
Alon(2,4) = -g * sin(theta_E) * cos(phi_E) ;
Alon(2,5) = Zz/m ;

Alon(3,1) = Mu/Iy ;
Alon(3,2) = Mw/Iy ;
Alon(3,3) = Mq/Iy ;
Alon(3,4) = 0 ;
Alon(3,5) = Mz/Iy ;

Alon(4,1) = 0 ;
Alon(4,2) = 0 ;
Alon(4,3) = cos(phi_E) ;
Alon(4,4) = 0 ;
Alon(4,5) = 0 ;

Alon(5,1) = - sin(theta_E) ;

```



```

Alon(5,2) = cos(phi_E) * cos(theta_E) ;
Alon(5,3) = 0 ;
Alon(5,4) = - u_E * cos(theta_E) - v_E * sin(phi_E) * sin(theta_E) - w_E *
cos(phi_E) * sin(theta_E) ;
Alon(5,5) = 0 ;

Blon(1,1) = Xdelta_e/m ;
Blon(1,2) = Xdelta_t/m ;

Blon(2,1) = Zdelta_e/m ;
Blon(2,2) = 0 ;

Blon(3,1) = Mdelta_e/m ;
Blon(3,2) = 0 ;

Blon(4,1) = 0 ;
Blon(4,2) = 0 ;
Blon(5,1) = 0 ;
Blon(5,2) = 0 ;

Clon = [
           1           0           0 0 0 ;
      -w_E/(u_E^2 + w_E^2)  u_E/(u_E^2 + w_E^2) 0 0 0 ;
           0           0           1 0 0 ;
           0           0           0 1 0 ;
           0           0           0 0 1 ] ;

%% Alat, Blat, Clat
Alat(1,1) = Yv/m ;
Alat(1,2) = w_E + Yp/m ;
Alat(1,3) = -u_E + Yr/m ;
Alat(1,4) = g * cos(theta_E) * cos(phi_E) ;
Alat(1,5) = 0 ;

Alat(2,1) = Gamma3 * Lv + Gamma4 * Nv ;
Alat(2,2) = Gamma1 * q_E + Gamma3 * Lp + Gamma4 * Np ;
Alat(2,3) = -Gamma2 * q_E + Gamma3 * Lr + Gamma4 * Nr ;
Alat(2,4) = 0 ;
Alat(2,5) = 0 ;

Alat(3,1) = Gamma4 * Lv + Gamma8 * Nv ;
Alat(3,2) = Gamma7 * q_E + Gamma4 * Lp + Gamma8 * Np ;
Alat(3,3) = -Gamma1 * q_E + Gamma4 * Lr + Gamma8 * Nr ;
Alat(3,4) = 0 ;
Alat(3,5) = 0 ;

Alat(4,1) = 0 ;
Alat(4,2) = 1 ;
Alat(4,3) = cos(phi_E) * tan(theta_E) ;
Alat(4,4) = ( q_E * cos(phi_E) - r_E * sin(phi_E) ) * tan(theta_E) ;
Alat(4,5) = 0 ;

Alat(5,1) = 0 ;
Alat(5,2) = 0 ;
Alat(5,3) = cos(phi_E) * sec(theta_E) ;
Alat(5,4) = ( q_E * cos(phi_E) - r_E * sin(phi_E) ) * sec(theta_E) ;
Alat(5,5) = 0 ;

Blat(1,1) = Ydelta_a/m ;
Blat(1,2) = Ydelta_r/m ;

```

```

Blat(2,1) = Gamma3 * Ldelta_a + Gamma4 * Ndelta_a ;
Blat(2,2) = Gamma3 * Ldelta_r + Gamma4 * Ndelta_r ;

Blat(3,1) = Gamma4 * Ldelta_a + Gamma8 * Ndelta_a ;
Blat(3,2) = Gamma4 * Ldelta_a + Gamma8 * Ndelta_a ;

Blat(4,1) = 0 ;
Blat(4,2) = 0 ;
Blat(5,1) = 0 ;
Blat(5,2) = 0 ;

Clat = [ 1/sqrt(Va_E^2 - v_E^2) 0 0 0 0 ;
         0                      1 0 0 0 ;
         0                      0 1 0 0 ;
         0                      0 0 1 0 ;
         0                      0 0 0 1 ] ;

end
end

```

A.2 Sistema de Aumento de Estabilidad

```

%% Esta función permite calcular las matrices del Sistema de Aumento de
Estabilidad para los autovalores deseados dadas las matrices dinámicas
function [Klon , Klat]=SAS(Alon , Alat , Blon , Blat)

plon = [-0.1 , -0.48 , -0.5 , -3.9 , -4] ;      % Autovalores deseados de la
dinámica longitudinal
plat = [-0.1 , -0.3 , -9.9 , -9.92 , -10.6] ;  % Autovalores deseados de la
dinámica lateral

[Klon , Klat] = matricesSAS(Alon , Alat , Blon , Blat , plon , plat) ;
function [Klon , Klat] = matricesSAS(Alon , Alat , Blon , Blat , plon ,
plat)
Klon = place(Alon , Blon , plon) ;
Klat = place(Alat , Blat , plat) ;
end
end

```

A.3 Gráficas de la aplicación 1

Función salida.m

```

function salida(r,r1,r2,r3,t)
clf, close all,
% Entradas
px = r(:,1);
py = r(:,2);
pz = r(:,3);

u = r1(:,1);
v = r1(:,2);
w = r1(:,3);

phi = r2(:,1);
theta = r2(:,2);

```

```

psi = r2(:,3);

p = r3(:,1);
q = r3(:,2);
r = r3(:,3);

%% Representación de la trayectoria
% Gráfica de la posición en 3D
figure(1)
set(gcf, 'Color', 'white')
plot3(px,py,-pz, 'linewidth',2)
xlabel('p_x [m]')
ylabel('p_y [m]')
zlabel('-p_z [m]')
grid on
axis equal
axis([0 max(px)+5 0 max(py)+5 0 max(-pz)+5])

% Gráfica de px
figure(2)
set(gcf, 'Color', 'white')
subplot(2,2,1),plot(t,px, 'LineWidth',2)
xlabel('t [s]')
ylabel('p_x [m]')
title('Coordenada x')
grid on

% Gráfica de py
subplot(2,2,2),plot(t,py, 'LineWidth',2)
xlabel('t [s]')
ylabel('p_y [m]')
title('Coordenada y')
grid on

% Gráfica de la altura h=-pz
subplot(2,2,3),plot(t,-pz, 'LineWidth',2)
xlabel('t [s]')
ylabel('-p_z [m]')
title('Altura')
grid on

% Gráfica de la altura h=-pz frente a px
subplot(2,2,4),plot(px,-pz, 'linewidth',2)
xlabel('p_x [m]')
ylabel('-p_z [m]')
title('Trayectoria en el plano XZ')
grid on

%% Representación de las variables de estado
figure(3)
set(gcf, 'Color', 'white')

% GRÁFICA DE LA POSICIÓN
subplot(2,2,1),hold on
plot(t,px, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
plot(t,py, 'LineWidth',2, 'Color', 'r')
plot(t,-pz, 'LineWidth',2, 'Color', 'g')
xlabel('t [s]')
ylabel('p_x,p_y,-p_z [m]')
title('Posición')

```

```

legend('p_x','p_y','-p_z')
grid on

% GRÁFICA DE LA VELOCIDAD LINEAL
subplot(2,2,2),hold on
plot(t,u,'LineWidth',2,'Color','b')
plot(t,v,'LineWidth',2,'Color','r')
plot(t,w,'LineWidth',2,'Color','g')
xlabel('t [s]')
ylabel('u,v,w [m/s]')
title('Velocidad lineal')
legend('u','v','w')
grid on

% GRÁFICA DE LA ACTITUD
subplot(2,2,3),hold on
plot(t,phi,'LineWidth',2,'Color','b')
plot(t,theta,'LineWidth',2,'Color','r')
plot(t,psi,'LineWidth',2,'Color','g')
xlabel('t [s]')
ylabel('\phi,\theta,\psi [rad]')
title('Actitud')
legend('\phi','\theta','\psi')
grid on

% GRÁFICA DE LA VELOCIDAD ANGULAR
subplot(2,2,4),hold on
plot(t,p,'LineWidth',2,'Color','b')
plot(t,q,'LineWidth',2,'Color','r')
plot(t,r,'LineWidth',2,'Color','g')
xlabel('t [s]')
ylabel('p,q,r [rad/s]')
title('Velocidad angular')
legend('p','q','r')
grid on
end

```

Función *salidacontrol.m*

```

function salidacontrol(r1,r2,t,ref)
clf, close all,
% Entradas
u = r1(:,1);
v = r1(:,2);
w = r1(:,3);

phi = r2(:,1);
theta = r2(:,2);
psi = r2(:,3);

uref = ref(1) ;
phiref = ref(2) ;
thetaref = ref(3) ;
psiref = ref(4) ;

%% Gráficas de las variables controladas y sus referencias
figure(1),set(gcf,'Color','white')
% Gráfica de u y uref
subplot(2,2,1),hold on
plot(t,u,'LineWidth',2,'Color','b')

```

```

urefv(1:length(t)) = uref ;
plot(t,urefv,'LineWidth',2,'Color','r')
xlabel('t [s]')
ylabel('u [m/s]')
legend('u','u_ref')
title('Velocidad en el eje longitudinal')
grid on

% Gráfica de phi y phi_ref
subplot(2,2,2),hold on
plot(t,phi,'LineWidth',2,'Color','b')
phirefv(1:length(t)) = phiref ;
plot(t,phirefv,'LineWidth',2,'Color','r')
xlabel('t [s]')
ylabel('\phi [rad]')
legend('\phi','\phi_ref')
title('Ángulo de balance')
grid on

% Gráfica de theta y theta_ref
subplot(2,2,3),hold on
plot(t,theta,'LineWidth',2,'Color','b')
thetarefv(1:length(t)) = thetaref ;
plot(t,thetarefv,'LineWidth',2,'Color','r')
xlabel('t [s]')
ylabel('\theta [rad]')
legend('\theta','\theta_ref')
title('Ángulo de cabeceo')
grid on

% Gráfica de psi y psi_ref
subplot(2,2,4),hold on
plot(t,psi,'LineWidth',2,'Color','b')
psirefv(1:length(t)) = psiref ;
plot(t,psirefv,'LineWidth',2,'Color','r')
xlabel('t [s]')
ylabel('\psi [m/s]')
legend('\psi','\psi_ref')
title('Ángulo de guiñada')
grid on
end

```

Función salidaguiado.m

```

function salidaguiado(r,rb,t)
clf, close all,
%Posición del UAV
px = r(:,1) ;
py = r(:,2) ;
pz = r(:,3) ;

%Posición del blanco
xb = rb(:,1) ;
yb = rb(:,2) ;
zb = rb(:,3) ;

clf, close all,
% Gráfica de la posición en 3D
figure(1),set(gcf,'Color','white')
plot3(px,py,-pz,'linewidth',2), hold on
plot3(xb,yb,-zb,'r','linewidth',2)

```

```

plot3(xb(1),yb(1),-zb(1),'or','linewidth',2)
plot3(px(1),py(1),-pz(1),'ob','linewidth',2)
xlabel('x [m]')
ylabel('y [m]')
zlabel('z [m]')
legend('Aeronave','Blanco','Location','NorthWest')
grid on

% Gráfica de px
figure(2),set(gcf,'Color','white')
subplot(3,1,1)
plot(t,px,'linewidth',2), hold on
plot(t,xb,'r','linewidth',2)
plot(t(1),xb(1),'or','linewidth',2)
plot(t(1),px(1),'ob','linewidth',2)
xlabel('t [s]')
ylabel('x [m]')
title('Coordenada x')
legend('Aeronave','Blanco','Location','SouthEast')
grid on
% Gráfica de py
subplot(3,1,2)
plot(t,py,'linewidth',2), hold on
plot(t,yb,'r','linewidth',2)
plot(t(1),yb(1),'or','linewidth',2)
plot(t(1),py(1),'ob','linewidth',2)
xlabel('t [s]')
ylabel('y [m]')
title('Coordenada y')
legend('Aeronave','Blanco','Location','SouthEast')
grid on
% Gráfica de la altura h=-pz
subplot(3,1,3)
plot(t,-pz,'linewidth',2), hold on
plot(t,-zb,'r','linewidth',2)
plot(t(1),-zb(1),'or','linewidth',2)
plot(t(1),-pz(1),'ob','linewidth',2)
xlabel('t [s]')
ylabel('z [m]')
title('Coordenada z')
legend('Aeronave','Blanco','Location','SouthEast')
grid on
end

```

A.4 Gráficas de la aplicación 2

Función *salidalineal.m*

```

function salidalineal(ylon,ylat,t)
close all
%% Dinámica longitudinal
%Entradas
u      = ylon(:,1) ;
alpha  = ylon(:,2) ;
q      = ylon(:,3) ;
theta  = ylon(:,4) ;
pz     = ylon(:,5) ;

figure(1)

```

```

set(gcf, 'Color', 'white')
% Gráfica de u
subplot(5,1,1), hold on, grid on
plot(t,u, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
ylabel('u [m/s]')
% Gráfica de alpha
subplot(5,1,2), hold on, grid on
plot(t,alpha, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
ylabel('\alpha [rad]')
% Gráfica de q
subplot(5,1,3), hold on, grid on
plot(t,q, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
ylabel('q [rad/s]')
% Gráfica de theta
subplot(5,1,4), hold on, grid on
plot(t,theta, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
ylabel('\theta [rad]')
% Gráfica de la altura h=-pz
subplot(5,1,5), hold on, grid on
plot(t,-pz, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
xlabel('t [s]')
ylabel('-p_z [m]')

% Modo de Corto periodo
figure(3), set(gcf, 'Color', 'white')
subplot(2,1,1), plot(t,alpha, 'LineWidth',1.85, 'Color', 'b'), grid on
ylabel('\alpha [rad]')
xlabel('t [s]')
subplot(2,1,2), plot(t,q, 'LineWidth',1.85, 'Color', 'b'), grid on
ylabel('q [rad/s]')
xlabel('t [s]')

% Modo Fugoide
figure(4), set(gcf, 'Color', 'white')
subplot(2,1,1)
plot(t,u, 'LineWidth',1.85, 'Color', 'b'), grid on
xlabel('t [s]')
ylabel('u [m/s]')
subplot(2,1,2)
plot(t,theta, 'LineWidth',1.85, 'Color', 'b'), grid on
xlabel('t [s]')
ylabel('\theta [rad]')

%% Dinámica lateral
% Entradas
beta = ylat(:,1) ;
p     = ylat(:,2) ;
r     = ylat(:,3) ;
phi   = ylat(:,4) ;
psi   = ylat(:,5) ;

figure(2), set(gcf, 'Color', 'white')
% Gráfica de beta
subplot(5,1,1), hold on, grid on
plot(t,beta, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
ylabel('\beta [rad]')
% Gráfica de p
subplot(5,1,2), hold on, grid on
plot(t,p, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
ylabel('p [rad/s]')
% Gráfica de r

```

```

subplot(5,1,3), hold on, grid on
plot(t,r,'LineWidth',2,'Color','b')
ylabel('r [rad/s]')
% Gráfica de phi
subplot(5,1,4), hold on, grid on
plot(t,phi,'LineWidth',2,'Color','b')
ylabel('\phi [rad]')
% Gráfica de psi
subplot(5,1,5), hold on, grid on
plot(t,psi,'LineWidth',2,'Color','b')
xlabel('t [s]')
ylabel('\psi [m]')
end

```

Función *salidacontrol.m*

```

function salidacontrol(r1,r2,t,ref)
clf, close all,
% Entradas
u = r1(:,1);
v = r1(:,2);
w = r1(:,3);

phi = r2(:,1);
theta = r2(:,2);
psi = r2(:,3);

uref = ref(1) ;
phiref = ref(2) ;
thetaref = ref(3) ;
psiref = ref(4) ;

%% Gráficas de las variables controladas y sus referencias
figure(1),set(gcf,'Color','white')
% Gráfica de u y uref
subplot(2,2,1),hold on
plot(t,u,'LineWidth',2,'Color','b')
urefv(1:length(t)) = uref ;
plot(t,urefv,'LineWidth',2,'Color','r')
xlabel('t [s]')
ylabel('u [m/s]')
legend('u','u_ref')
title('Velocidad en el eje longitudinal')
grid on

% Gráfica de phi y phi_ref
subplot(2,2,2),hold on
plot(t,phi,'LineWidth',2,'Color','b')
phirefv(1:length(t)) = phiref ;
plot(t,phirefv,'LineWidth',2,'Color','r')
xlabel('t [s]')
ylabel('\phi [rad]')
legend('\phi','\phi_ref')
title('Ángulo de balance')
grid on

% Gráfica de theta y theta_ref
subplot(2,2,3),hold on
plot(t,theta,'LineWidth',2,'Color','b')
thetarefv(1:length(t)) = thetaref ;
plot(t,thetarefv,'LineWidth',2,'Color','r')

```



```

xlabel('t [s]')
ylabel('\theta [rad]')
legend('\theta', '\theta_ref')
title('Ángulo de cabeceo')
grid on

% Gráfica de psi y psi_ref
subplot(2,2,4),hold on
plot(t,psi, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
psirefv(1:length(t)) = psiref ;
plot(t,psirefv, 'LineWidth',2, 'Color', 'r')
xlabel('t [s]')
ylabel('\psi [m/s]')
legend('\psi', '\psi_ref')
title('Ángulo de guiñada')
grid on
end

```

A.5 Gráficas de la aplicación 3

Función *salidacontrolSAS.m*

```

function salidacontrolSAS(r2,t,ref,xu_E)
clf, close all,
% Entradas
phi    = r2(:,1);
theta  = r2(:,2);
psi    = r2(:,3);

phiref  = ref(1) ;
thetaref = ref(2) ;
psiref  = ref(3) ;

phi_E   = xu_E(4);
theta_E = xu_E(5);

%% Gráficas de las variables controladas y sus referencias
figure(1),set(gcf, 'Color', 'white')
% Gráfica de phi y phi_ref
subplot(3,1,1),hold on
plot(t,phi, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
phirefv(1:length(t)) = phiref + phi_E ;
plot(t,phirefv, 'LineWidth',2, 'Color', 'r')
xlabel('t [s]')
ylabel('\phi [rad]')
legend('\phi', '\phi_ref', 'Location', 'SouthEast')
title('Ángulo de balance')
grid on

% Gráfica de theta y theta_ref
subplot(3,1,2),hold on
plot(t,theta, 'LineWidth',2, 'Color', 'b')
thetarefv(1:length(t)) = thetaref + theta_E ;
plot(t,thetarefv, 'LineWidth',2, 'Color', 'r')
xlabel('t [s]')
ylabel('\theta [rad]')
legend('\theta', '\theta_ref')
title('Ángulo de cabeceo')
grid on

```

```
% Gráfica de psi y psi_ref
subplot(3,1,3),hold on
plot(t,psi,'LineWidth',2,'Color','b')
psirefv(1:length(t)) = psiref ;
plot(t,psirefv,'LineWidth',2,'Color','r')
xlabel('t [s]')
ylabel('\psi [m/s]')
legend('\psi','\psi_ref')
title('Ángulo de guiñada')
grid on
end
```