

Proyecto Fin de Carrera Ingeniería Aeronáutica

Modelización de un Manipulador Aéreo

Autor: Cristina Ayuso Martínez

Tutor: José Ángel Acosta Rodríguez

**Dep. Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016



Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Aeronáutica

Modelización de un Manipulador Aéreo

Autor:

Cristina Ayuso Martínez

Tutor:

José Ángel Acosta Rodríguez

Profesor Titular

Dep. Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Proyecto Fin de Carrera: Modelización de un Manipulador Aéreo

Autor: Cristina Ayuso Martínez
Tutor: José Ángel Acosta Rodríguez

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

*A mi padre, allá donde esté
A mi madre y mi hermana por su enorme apoyo en todo momento*

A mi tutor por su comprensión

Índice

1. Introducción	1
1.1. Motivación del proyecto	1
1.2. Objetivo del proyecto	1
1.3. Estructura del documento	2
2. Modelización de un Sistema 2D	3
2.1. Ecs. Dinámicas de un cuerpo rígido articulado en un sistema 2D	3
2.1.1. <i>Método de Euler-Newton</i>	3
2.1.2. <i>Método de Lagrange</i>	10
2.2. Simulación	13
2.2.1. <i>Gráficas</i>	14
3. Modelización de un Sistema 3D	19
3.1. Ecs. Dinámicas de un cuerpo rígido articulado en un sistema 3D	19
3.1.1. <i>Formulación Euler-Newton</i>	20
3.1.2. <i>Formulación Lagrange</i>	22
3.1.3. <i>Generalización de las ecuaciones dinámicas a cuerpos rígidos articulados</i>	24
4. Particularización al Sistema Robot	29
4.1. Caracterización del rotor coaxial	29
4.1.1. Fuerzas aerodinámicas	29
4.1.2. Uniones esféricas. Fuerzas de fricción	31
4.1.3. Dinámica de partes activas	31
4.2. Ecuaciones cinemáticas y dinámicas del <i>Sistema Robot</i>	32
5. Reducción a sólido rígido general. Tensor de inercia	39
5.1. Centro de masas, X_G	39
5.2. Tensor de inercia en X_G	40
5.3. Expresiones del cuerpo equivalente al Brazo Robot. X_G y $I_{ij}^{sol}(G)$	43
5.4. Ecuaciones cinemáticas y dinámicas del <i>Sistema Robot</i> equivalente	51
6. Simulador	55
6.1. Estructura de las funciones	55
Apéndice A. Función <i>SimulacionRotor3D_3links.m</i>	57
Apéndice B. Función <i>rotor3D_3links.m</i>. Función anidada <i>fun.m</i>	61
B.1. Función <i>jacobianoYR_3link.m</i>	73
<i>Índice de Figuras</i>	83
<i>Índice de Tablas</i>	85
<i>Bibliografía</i>	87

1 Introducción

1.1 Motivación del proyecto

Los Vehículos Aéreos No Tripulados (UAVs, en sus siglas en inglés) han tomado un papel relevante en la última década. La versatilidad funcional que proporcionan estas aeronaves frente a las aeronaves tripuladas han hecho que los proyectos e investigaciones en este campo hayan aumentado exponencialmente. Existen una gran variedad de configuraciones de UAVs como rotor coaxial, quadrotor, hexarotor, octorotor del tipo helicóptero así como UAVs de tipo avión.

Hay numerosos proyectos desarrollados en la literatura relacionados con la configuración quadrotor debido a su sencillez estructural y la realización del control dada directamente por la modificación de la velocidad angular en los distintos rotores que conforman el quadrotor en vez del ángulo de paso de las palas utilizada usualmente en los rotores de helicópteros proporcionando una gran simplificación en los modelos de control.

La configuración de rotor coaxial ha sido también de gran interés por la capacidad de aumentar la tracción respecto al rotor aislado proporcionando una mayor estabilidad y control. En este punto destaca el rotor coaxial pues la simetría proporcionada por los dos rotores que deriva en la anulación de los pares torsores que provocarían un movimiento de guiñada queda eliminado en esta configuración. Esto proporciona una gran estabilidad tanto en el ascenso como en el avance sin necesidad de introducir más mecanismos adicionales para lograr la estabilización del sistema.

1.2 Objetivo del proyecto

El objetivo del proyecto consiste en modelizar las ecuaciones cinemáticas y dinámicas de un UAV de rotor coaxial. Al sistema de tracción coaxial estará unido un brazo robótico formado por una serie de articulaciones conectadas mediante uniones esféricas que permitirán un movimiento rotacional en cualquier dirección.

Se utilizará para ello varios métodos que caracterizarán las ecuaciones cinemáticas y dinámicas de sistemas de cuerpos rígidos articulados como la *Formulación Euler-Newton* y la *Formulación de Lagrange*. Una vez

planteadas las ecuaciones dinámicas, se desarrolla como obtener el sólido rígido genérico del *Brazo Robot* compuesto por tres articulaciones calculando las expresiones de centro de masa y tensor de inercia.

Así el objetivo final de este Proyecto Fin de Carrera es obtener **el centro de masas y tensor de inercia** en cada instante del sólido rígido conformado por el brazo robótico al completo como un único sólido rígido al introducir pares torsores en las articulaciones. Se reducirá por tanto el *Sistema Robot* a dos sólidos rígidos enlazados, el cuerpo del conjunto del rotor coaxial y el sólido rígido genérico a obtener para producir una reducción del número de ecuaciones dinámicas a simular para un futuro control del *Sistema Robot*.

1.3 Estructura del documento

El documento se compone de 5 Capítulos y dos Apéndices. En el Capítulo 2, se desarrolla el modelo simplificado en 2D de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas dando un primer acercamiento a la construcción del modelo 3D.

A continuación, en el Capítulo 3, se extiende el modelo de ecuaciones cinemáticas y dinámicas a un conjunto de sólidos rígidos o 'links genérico y se contruye el procedimiento a seguir en el modelo 3D. La definición del *Sistema Robot* se desarrolla en el Capítulo 4, en primer lugar la caracterización del rotor coaxial y a continuación la implementación del modelo de ecuaciones cinemáticas y dinámicas al conjunto *Sistema Robot*.

En el Capítulo 5, se explica por último el desarrollo para la obtención de la reducción a un sólido rígido general del *Brazo Robot* y se exponen las expresiones necesarias para su implementación como sólido equivalente.

En el Capítulo 6 y Apéndices se muestra el simulador desarrollado para implementar el conjunto *Sistema Robot*.

2 Modelización de un Sistema 2D

2.1 Ecs. Dinámicas de un cuerpo rígido articulado en un sistema 2D

Como un primer acercamiento a las ecuaciones dinámicas de un cuerpo rígido articulado se estudia en primer lugar estas ecuaciones en un sistema 2D. El cuerpo rígido se compone de tres 'links', el primero de ellos modela el rotor donde se aplican las fuerzas externas generadas por la aerodinámica del rotor coaxial, tracción y pares giroscópicos (o de resistencia). Los dos 'links' restantes de forma prismática (lineal para la simplificación en 2D) estarán actuados por sendos pares externos en sus uniones.

Se consideran las variables x y z del *Sistema de Referencia Inercial* donde la variable z tiene la misma dirección y sentido opuesto a la gravedad y x representa la variable horizontal paralela a 'Tierra'. Se añadirá un sistema de referencia local ligado a la unión entre el rotor y la carga de pago para facilitar el manejo de ecuaciones al que llamaremos *Sistema de Referencia A*.

2.1.1 Método de Euler-Newton

Las ecuaciones de Euler-Newton para un único sólido rígido en un sistema de variables 3D son

$$f = m \dot{v}_c$$

$$t = I_c \dot{\omega} + \omega \wedge I_c \omega$$

v_c es la velocidad lineal del centro de masas (c.d.m) del sólido rígido
 ω es la velocidad angular del sólido rígido
 I_c es la matriz de inercia 3x3 del sólido rígido calculada en su centro de masa y expresada en el *Sistema de Referencia Inercial*

Estas ecuaciones son fácilmente generalizables a cada 'link' de un cuerpo rígido articulado.

$$\begin{bmatrix} f_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_i I & 0 \\ 0 & I_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{\omega}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \wedge I_i \omega_i \end{bmatrix}$$

Si se construye una matriz general para un número genérico de 'links'

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ t_1 \\ \vdots \\ f_i \\ t_i \\ \vdots \\ f_n \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 I & 0 & & & & & \\ & 0 & I_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & m_i I & 0 & \\ & & & & 0 & I_i & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & m_n I & 0 \\ & & & & & & & 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \vdots \\ \dot{v}_i \\ \dot{\omega}_i \\ \vdots \\ \dot{v}_n \\ \dot{\omega}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \wedge I_1 \omega_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega_i \wedge I_i \omega_i \\ \vdots \\ 0 \\ \omega_n \wedge I_n \omega_n \end{bmatrix}$$

Todos los vectores están expresados en el *Sistema de Referencia Inercial*

El hecho de que la matriz de masas sea diagonal indica que cada ‘link’ es independiente de los otros ‘links’. Pero puesto que los ‘links’ están interconectados se necesita establecer unas restricciones que se harán mediante las ecuaciones cinéticas de éstos.

Es necesario en este punto definir tanto el sistema simplificado a un sistema 2D como los sistemas de referencias y variables generalizadas que se van a utilizar para el desarrollo de las ecuaciones cinéticas.

El sistema compuesto por tres ‘links’ que modela el rotor y dos barras pertenecientes al plano se muestra en el siguiente dibujo

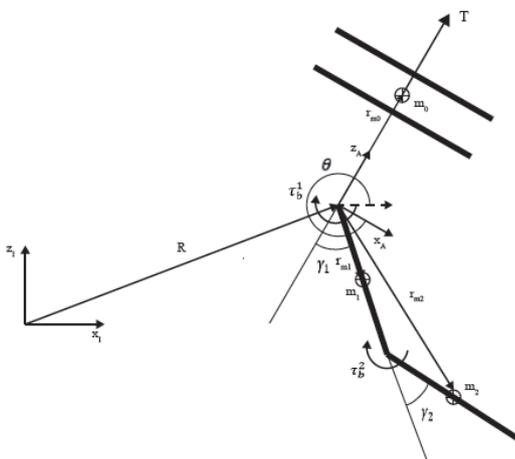


Figura 2.1 Representación del *Sistema 2D*.

El *Sistema de Referencia A* se define con la coordenada z_A en la misma dirección y sentido que el vector *Tracción* proporcionado por el rotor y la coordenada x_A perpendicular a z_A y en el mismo sentido a derechas que la coordenada x del *Sistema de Referencia Inercial*. Los vectores de posición de los centros de masas referidos al *Sistema de Referencia Inercial* y al *Sistema de Referencia A* vienen dado por

$$R = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}_I \quad r_{m0} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_0 \end{bmatrix}_A \quad r_{m1} = \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} \sin \gamma_1 \\ \cos \gamma_1 \end{bmatrix}_A \quad r_{m2} = \begin{bmatrix} l_1 \sin \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \sin (\gamma_1 + \gamma_2) \\ -l_1 \cos \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \cos (\gamma_1 + \gamma_2) \end{bmatrix}_A$$

Se definirán por tanto el vector de coordenadas generalizadas $q = [X \ Z \ \theta \ \gamma_1 \ \gamma_2]'$

También se puede observar que se han definido las fuerzas y pares externos que actúan en este sistema 2D. Por un lado está el vector T que es la tracción proporcionada por el rotor que se aplica en el c.d.m del 'link' 0 que modela al rotor y por otro se tiene los pares externos τ_b^1, τ_b^2 aplicados en las uniones entre los 'links' que permiten el movimiento relativo de cada 'link' respecto al 'link' al que está unido. Hay que destacar que se ha despreciado la contribución de la resistencia creada por el rotor al ser éste una primera aproximación al modelo del *Sistema Robot* como llamaremos de aquí en adelante al sistema completo. Una vez se ha descrito el sistema 2D y sus variables se establecen las velocidades lineales y angulares de los centros de masas de los sólidos rígidos (o 'links').

Al estar ligado el *Sistema de Referencia A* a un sólido en rotación éste será un sistema de referencia No Inercial y habrá que considerar las fuerzas ficticias que se introducen en estos sistemas de referencia. Sean dos sistemas de referencia S y S' uno inercial y otro en rotación respectivamente, se tiene que las derivadas temporales de un vector a cualquiera respecto a los sistemas de referencia S y S' se relacionan según la mecánica newtoniana a través de

$$\left(\frac{d(a)}{dt}\right)_S = \left(\frac{d(a)}{dt}\right)_{S'} + \omega_{S/S'} \wedge a \quad (2.1)$$

Las velocidades lineales de cada 'link' vendrán dada por la siguiente composición de velocidades

$$(v_k)_I = (\dot{R})_I + (\dot{r}_{m_k})_I$$

para el vector $(\dot{r}_{m_k})_I$ será necesario utilizar la ecuación 2.1. Se tienen por tanto las siguientes velocidades lineales

$$v_0 = \dot{R} + \dot{r}_{m_0} + \Omega_{rotor} \wedge r_{m_0} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} l_0 \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

$$v_1 = \dot{R} + \dot{r}_{m_1} + \Omega_{rotor} \wedge r_{m_1} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 \\ \frac{l_1}{2} \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 \end{bmatrix}_A - \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \dot{\theta} \cos \gamma_1 \\ \frac{l_1}{2} \dot{\theta} \sin \gamma_1 \end{bmatrix}_A$$

$$v_2 = \dot{R} + \dot{r}_{m_2} + \Omega_{rotor} \wedge r_{m_2} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} l_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 + \frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \cos (\gamma_1 + \gamma_2) \\ l_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 + \frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin (\gamma_1 + \gamma_2) \end{bmatrix}_A - \begin{bmatrix} \dot{\theta} (l_1 \cos \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \cos (\gamma_1 + \gamma_2)) \\ \dot{\theta} (l_1 \sin \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \sin (\gamma_1 + \gamma_2)) \end{bmatrix}_A$$

Y las velocidades angulares son

$$\omega_0 = \dot{\theta}$$

$$\omega_1 = \dot{\theta} + \dot{\gamma}_1$$

$$\omega_2 = \dot{\theta} + \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2$$

La indicación I o A tras los vectores dice en qué sistema de referencia están expresados. Como no están expresados en el mismo sistema de referencia se utiliza la matriz de rotación que transforma cualquier vector del *Sistema de referencia Inercial* al *sdr A*.

$$C_A^I = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Con esto las expresiones de las velocidades lineales quedan de la siguiente forma

$$v_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta \dot{X} + \sin \theta \dot{Z} \\ -\sin \theta \dot{X} + \cos \theta \dot{Z} \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} l_0 \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \dot{X} + \sin \theta \dot{Z} \\ -\sin \theta \dot{X} + \cos \theta \dot{Z} \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 \\ \frac{l_1}{2} \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 \end{bmatrix}_A - \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \dot{\theta} \cos \gamma_1 \\ \frac{l_1}{2} \dot{\theta} \sin \gamma_1 \end{bmatrix}_A$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta \dot{X} + \sin \theta \dot{Z} \\ -\sin \theta \dot{X} + \cos \theta \dot{Z} \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} l_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 + \frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \cos (\gamma_1 + \gamma_2) \\ l_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 + \frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin (\gamma_1 + \gamma_2) \end{bmatrix}_A - \begin{bmatrix} \dot{\theta} (l_1 \cos \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \cos (\gamma_1 + \gamma_2)) \\ \dot{\theta} (l_1 \sin \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \sin (\gamma_1 + \gamma_2)) \end{bmatrix}_A$$

Se han escrito todas las velocidades en el *Sistema de Referencia A* por comodidad pues quedan así expresiones más simplificadas que si las hubiéramos escrito en el *Sistema de Referencia Inercial*. Para la resolución de las ecuaciones dinámicas se utilizarán las coordenadas generalizadas para reducir el número de ecuaciones al número de ecuaciones independientes que expresan inequívocamente el movimiento del sistema. Como ya se comentó anteriormente las coordenadas generalizadas son $q = [X \ Z \ \theta \ \gamma_1 \ \gamma_2]'$. Así las velocidades lineales y angulares de cada 'link' se pueden expresar como

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = J_i \dot{q}$$

Tras haber obtenido las expresiones de las velocidades, los jacobianos de los diferentes 'links' se obtienen fácilmente

$$J_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & l_0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -\frac{l_1}{2} \cos \gamma_1 & \frac{l_1}{2} \cos \gamma_1 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & \frac{l_1}{2} \sin \gamma_1 & \frac{l_1}{2} \sin \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -\left(l_1 \cos \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \cos (\gamma_1 + \gamma_2)\right) & l_1 \cos \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \cos (\gamma_1 + \gamma_2) & \frac{l_2}{2} \cos (\gamma_1 + \gamma_2) \\ -\sin \theta & \cos \theta & -\left(l_1 \sin \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \sin (\gamma_1 + \gamma_2)\right) & l_1 \sin \gamma_1 + \frac{l_2}{2} \sin (\gamma_1 + \gamma_2) & \frac{l_2}{2} \sin (\gamma_1 + \gamma_2) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La derivada temporal de los jacobianos se expresan a continuación

$$\dot{J}_1 = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{J}_2 = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta & -\frac{l_1}{2} \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 & -\frac{l_1}{2} \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 & 0 \\ -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & \frac{l_1}{2} \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 & \frac{l_1}{2} \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{J}_3 = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta & -l_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 - \frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin (\gamma_1 + \gamma_2) & -l_1 \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_1 - \frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin (\gamma_1 + \gamma_2) & -\frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \sin (\gamma_1 + \gamma_2) \\ -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & l_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 + \frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \cos (\gamma_1 + \gamma_2) & l_1 \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_1 + \frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \cos (\gamma_1 + \gamma_2) & \frac{l_2}{2} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \cos (\gamma_1 + \gamma_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones dinámicas en función de las coordenadas generalizadas utilizando los jacobianos para su transformación quedan

$$\sum_{i=1}^3 (J_i^T M_i J_i \ddot{q} + J_i^T M_i \dot{J}_i \dot{q}) = \sum_{i=1}^3 J_i^T F_i$$

donde la matriz de masas de cada 'link'

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}_A$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}_A$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

y el vector de fuerzas

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ T \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} -m_0 g \sin \theta \\ -m_0 g \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_b^1 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} -m_1 g \sin \theta \\ -m_1 g \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_b^2 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} -m_2 g \sin \theta \\ -m_2 g \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

Finalmente, si identificamos las matrices de masas generalizadas y de Coriolis que multiplican a la aceleración y velocidad generalizada como

$$M = \sum_{i=1}^3 (J_i^T M_i J_i)$$

$$C = \sum_{i=1}^3 (J_i^T M_i \dot{J}_i)$$

Con todo esto, resolviendo el sistema quedan las matrices

$$M_{11} = m_0 + m_1 + m_2$$

$$M_{12} = 0$$

$$M_{13} = m_0 l_0 \cos \theta - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \cos(\theta + \gamma_1) - m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{14} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \cos(\theta + \gamma_1) + m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{15} = m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{21} = 0$$

$$M_{22} = m_0 + m_1 + m_2$$

$$M_{23} = m_0 l_0 \sin \theta - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \sin(\theta + \gamma_1) - m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{24} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \sin(\theta + \gamma_1) + m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{25} = m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{31} = m_0 l_0 \cos \theta - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \cos(\theta + \gamma_1) - m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{32} = m_0 l_0 \sin \theta - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \sin(\theta + \gamma_1) - m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{33} = m_0 l_0^2 + m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \gamma_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_0 + I_1 + I_2$$

$$M_{34} = -m_0 l_0^2 - m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 - m_2 l_1 l_2 \cos \gamma_2 - m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_1 + I_2$$

$$M_{35} = -m_2 l_1 l_2 \cos \gamma_2 - m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_2$$

$$M_{41} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \cos(\theta + \gamma_1) + m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{42} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \sin(\theta + \gamma_1) + m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{43} = -m_0 l_0^2 - m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 - m_2 l_1 l_2 \cos \gamma_2 - m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_1 + I_2$$

$$M_{44} = m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \gamma_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_1 + I_2$$

$$M_{45} = m_2 l_1 l_2 \cos \gamma_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_2$$

$$M_{51} = m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{52} = m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2)$$

$$M_{53} = -m_2 l_1 l_2 \cos \gamma_2 - m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_2$$

$$M_{54} = m_2 l_1 l_2 \cos \gamma_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_2$$

$$M_{55} = m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_2$$

$$C_{11} = 0$$

$$C_{12} = (m_0 + m_1 + m_2) \dot{\theta}$$

$$C_{13} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \sin(\theta + \gamma_1) \dot{\gamma}_1 - m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$

$$C_{14} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \sin(\theta + \gamma_1) \dot{\gamma}_1 - m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$

$$C_{15} = -m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$

$$C_{21} = -(m_0 + m_1 + m_2) \dot{\theta}$$

$$C_{22} = 0$$

$$C_{23} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \cos(\theta + \gamma_1) \dot{\gamma}_1 + m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$

$$C_{24} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \cos(\theta + \gamma_1) \dot{\gamma}_1 - m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$

$$C_{25} = m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$

$$C_{31} = m_0 l_0 \sin(\theta) \dot{\theta} - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \sin(\theta + \gamma_1) \dot{\theta} - m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) \dot{\theta}$$

$$C_{32} = -m_0 l_0 \cos(\theta) \dot{\theta} + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \cos(\theta + \gamma_1) \dot{\theta} + m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) \dot{\theta}$$

$$C_{33} = -m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \sin \gamma_2 \dot{\gamma}_2$$

$$C_{34} = m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \sin \gamma_2 \dot{\gamma}_2$$

$$C_{35} = m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \sin \gamma_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$

$$C_{41} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \sin(\theta + \gamma_1) \dot{\theta} - m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) \dot{\theta}$$

$$C_{42} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l_1 \cos(\theta + \gamma_1) \dot{\theta} + m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) \dot{\theta}$$

$$C_{43} = -m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \sin \gamma_2 \dot{\gamma}_2$$

$$C_{44} = -m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \sin \gamma_2 \dot{\gamma}_2$$

$$C_{45} = -m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \sin \gamma_2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$

$$C_{51} = -m_2 \frac{l_2}{2} \sin(\dot{\theta} + \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \dot{\theta}$$

$$C_{52} = m_2 \frac{l_2}{2} \cos(\dot{\theta} + \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \dot{\theta}$$

$$C_{53} = -m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \sin \gamma_2 \dot{\gamma}_1$$

$$C_{54} = m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \sin \gamma_2 \dot{\gamma}_1$$

$$C_{55} = 0$$

Y el vector de fuerza generalizada $Q = \sum_{i=1}^3 J_i^T F_i$

$$Q_1 = -T \sin \theta$$

$$Q_2 = T \cos \theta - (m_0 + m_1 + m_2)g$$

$$Q_3 = m_0 g l_0 \sin \theta - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l_1 \sin(\theta + \gamma_1) - m_2 g \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) + \tau_1 + \tau_2$$

$$Q_4 = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l_1 \sin(\theta + \gamma_1) - m_2 g \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) + \tau_1 + \tau_2$$

$$Q_5 = -m_2 g \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) + \tau_2$$

2.1.2 Método de Lagrange

El método de Lagrange utiliza la energía cinética y la energía potencial para construir las ecuaciones dinámicas de movimiento del sistema. Para ello se define el lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

Y las ecuaciones dinámicas se obtienen mediante la siguiente formulación

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_j} \right) = Q_j \quad \text{con } j = 1 : 5$$

La energía cinética del sistema vendrá expresada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$$

Sustituyendo con las expresiones ya obtenidas para las velocidades lineales y angulares

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} = & \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}(m_0 l_0^2 + I_0)\dot{\theta}^2 \\
 & + m_0 l_0 \cos \theta \dot{X} \dot{\theta} + m_0 l_0 \sin \theta \dot{Z} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 (\dot{\gamma}_1 - \dot{\theta})^2 + \\
 & \frac{1}{2} m_1 l_1 \cos(\theta + \gamma_1) \dot{X} (\dot{\gamma}_1 - \dot{\theta}) + \frac{1}{2} m_1 l_1 \sin(\theta + \gamma_1) \dot{Z} (\dot{\gamma}_1 - \dot{\theta}) + \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta} + \dot{\gamma}_1)^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 (\dot{\gamma}_1 - \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\theta})^2 \\
 & m_2 l_1 \cos(\theta + \gamma_1) \dot{X} (\dot{\gamma}_1 - \dot{\theta}) + \frac{1}{2} m_2 l_2 \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) \dot{X} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 - \dot{\theta}) + \\
 & m_2 l_1 \sin(\theta + \gamma_1) \dot{Z} (\dot{\gamma}_1 - \dot{\theta}) + \frac{1}{2} m_2 l_2 \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) \dot{Z} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 - \dot{\theta}) + \\
 & \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \gamma_2 (\dot{\gamma}_1 - \dot{\theta}) (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 - \dot{\theta})
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la energía potencial se expresa como

$$\mathcal{U} = 0$$

La energía potencial es nula pues se ha considerado la gravedad como una fuerza externa y se tendrá en cuenta a continuación para calcular las fuerzas generalizadas. Se tiene así calculado el Lagrangiano como $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ del conjunto y las ecuaciones dinámicas seguirá la forma $\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_j} \right) + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_j} \right) = Q_j$.

Para completar el sistema de ecuaciones se necesita calcular las fuerzas generalizadas Q_j . Se hará mediante el teorema de los trabajos virtuales que iguala los trabajos virtuales al producto de fuerzas generalizadas por desplazamiento virtual de la coordenada generalizada.

$$\delta W = \sum \delta W_i = \sum F_i \cdot \delta r_i = \sum Q_j \delta q_j$$

En el primer 'link', el que modela al rotor, están aplicadas la tracción y la gravedad en el centro de masas. El desplazamiento virtual del centro de masas del 'link' 0 se obtiene

$$r_{m_0} = \begin{bmatrix} X - l_0 \sin \theta \\ Z + l_0 \cos \theta \end{bmatrix}_I \Rightarrow \delta r_{m_0} = \begin{bmatrix} \delta X - l_0 \sin \theta \delta \theta \\ \delta Z + l_0 \cos \theta \delta \theta \end{bmatrix}_I$$

Los trabajos virtuales de la tracción y la gravedad en el 'link' 0 queda

$$\delta W_T = T \cdot \delta r_{m_0} = \begin{bmatrix} -T \sin \theta \\ T \cos \theta \end{bmatrix}_I \cdot \begin{bmatrix} \delta X - l_0 \sin \theta \delta \theta \\ \delta Z + l_0 \cos \theta \delta \theta \end{bmatrix}_I$$

$$\delta W_{m_0 g} = m_0 g \cdot \delta r_{m_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_0 g \end{bmatrix}_I \cdot \begin{bmatrix} \delta X - l_0 \sin \theta \delta \theta \\ \delta Z + l_0 \cos \theta \delta \theta \end{bmatrix}_I$$

Para los 'links' 1 y 2 se tiene los siguientes desplazamientos y trabajos virtuales

$$r_{m_1} = \begin{bmatrix} X + \frac{l_1}{2} \sin(\gamma_1 + \theta) \\ Z - \frac{l_1}{2} \cos(\gamma_1 + \theta) \end{bmatrix}_I \Rightarrow \delta r_{m_1} = \begin{bmatrix} \delta X + \frac{l_1}{2} \cos(\gamma_1 + \theta) \delta \gamma_1 + \frac{l_1}{2} \cos(\gamma_1 + \theta) \delta \theta \\ \delta Z + \frac{l_1}{2} \sin(\gamma_1 + \theta) \delta \gamma_1 + \frac{l_1}{2} \sin(\gamma_1 + \theta) \delta \theta \end{bmatrix}_I$$

$$\varphi_{\tau_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta + \gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix}_I \Rightarrow \delta \varphi_{\tau_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \theta + \delta \gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix}_I$$

$$\delta W_{m_1 g} = m_1 g \cdot \delta r_{m_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g \end{bmatrix}_I \cdot \begin{bmatrix} \delta X + \frac{l_1}{2} \cos(\gamma_1 + \theta) \delta \gamma_1 + \frac{l_1}{2} \cos(\gamma_1 + \theta) \delta \theta \\ \delta Z + \frac{l_1}{2} \sin(\gamma_1 + \theta) \delta \gamma_1 + \frac{l_1}{2} \sin(\gamma_1 + \theta) \delta \theta \end{bmatrix}_I$$

$$\delta W_{\tau_1} = \tau_1 \cdot \delta \varphi_{\tau_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}_I \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \theta + \delta \gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix}_I$$

$$r_{m_2} = \begin{bmatrix} X + \frac{l_1}{2} \sin(\gamma_1 + \theta) + \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) \\ Z - \frac{l_1}{2} \cos(\gamma_1 + \theta) - \frac{l_2}{2} \cos(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) \end{bmatrix}_I \Rightarrow$$

$$\delta r_{m_2} = \begin{bmatrix} \delta X + l_1 \cos(\gamma_1 + \theta) (\delta \gamma_1 + \delta \theta) + \frac{l_2}{2} \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \theta) (\delta \theta + \delta \gamma_1 + \delta \gamma_2) \\ \delta Z + l_1 \sin(\gamma_1 + \theta) (\delta \gamma_1 + \delta \theta) + \frac{l_2}{2} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \theta) (\delta \theta + \delta \gamma_1 + \delta \gamma_2) \end{bmatrix}_I$$

$$\varphi_{\tau_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta + \gamma_1 + \gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix}_I \Rightarrow \delta \varphi_{\tau_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \theta + \delta \gamma_1 + \delta \gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix}_I$$

$$\delta W_{m_2 g} = m_2 g \cdot \delta r_{m_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix}_I \cdot \begin{bmatrix} \delta X + l_1 \cos(\gamma_1 + \theta) (\delta \gamma_1 + \delta \theta) + \frac{l_2}{2} \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \theta) (\delta \theta + \delta \gamma_1 + \delta \gamma_2) \\ \delta Z + l_1 \sin(\gamma_1 + \theta) (\delta \gamma_1 + \delta \theta) + \frac{l_2}{2} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \theta) (\delta \theta + \delta \gamma_1 + \delta \gamma_2) \end{bmatrix}_I$$

$$\delta W_{\tau_2} = \tau_2 \cdot \delta \varphi_{\tau_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix}_I \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \theta + \delta \gamma_1 + \delta \gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix}_I$$

Sumando todos estos trabajos virtuales y sacando factor común al vector de desplazamientos virtuales generalizados δq se tiene el vector de fuerzas generalizadas del sistema

$$Q = \begin{bmatrix} -T \sin \theta \\ T \cos \theta - (m_0 + m_1 + m_2) \\ m_0 g l_0 \sin \theta - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l_1 \sin(\theta + \gamma_1) - m_2 g \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) + \tau_1 + \tau_2 \\ - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l_1 \sin(\theta + \gamma_1) - m_2 g \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) + \tau_1 + \tau_2 \\ - m_2 g \frac{l_2}{2} \sin(\theta + \gamma_1 + \gamma_2) + \tau_2 \end{bmatrix}$$

Con todo esto se puede ya componer las ecuaciones dinámicas del sistema mediante el método de Lagrange resolviendo la ecuación diferencial $\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_j} \right) + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_j} \right) = Q_j$ que sigue el patrón $M\ddot{q} + C\dot{q} = Q$

Se llega a los mismos términos de las matrices M y C que el método de Euler-Newton, como era de esperar.

2.2 Simulación

Para una mejor comprensión de las ecuaciones dinámicas y su evolución, se realizan una serie de simulaciones en *Matlab*. Los distintos casos que se han contemplado se describen en la siguiente tabla

Tabla 2.1 Condiciones iniciales de posición y fuerzas externas.

Simulación	$X_0 [m]$	$Z_0 [m]$	$\dot{X}_0 [m/s]$	$\dot{Z}_0 [m/s]$	$T [N]$	$\tau_1 [Nm]$	$\tau_2 [Nm]$
Vuelo en Punto Fijo*	1	0	0	0	21.582	0	0
Ascenso	1	0	0	0	22	0	0
Par motor	0	0	0	0	25	0	2
c.i no nulas-giros	0	0	0	0	25	0	0
c.i no nulas-v.angulares	0	0	0	0	25	0	0

*Se ha calculado una tracción igual peso del conjunto siendo $m_0 = 1$ kg, $m_1 = 0.6$ kg, $m_2 = 0.6$ kg

Tabla 2.2 Condiciones iniciales de giros.

Simulación	$\theta [rad]$	$\gamma_1 [rad]$	$\gamma_2 [rad]$	$\dot{\theta} [rad/s]$	$\dot{\gamma}_1 [rad/s]$	$\dot{\gamma}_2 [rad/s]$
Vuelo en Punto Fijo	0	0	0	0	0	0
Ascenso	0	0	0	0	0	0
Par motor	0	0	0	0	0	0
c.i no nulas-giros	0	-1	-0.5	0	0	0
c.i no nulas-v.angulares	0	0	0	-1.5	0	0

2.2.1 Gráficas

A continuación, se muestran una serie de gráficas donde se representa cada variable generalizada así como la velocidad generalizada correspondiente.

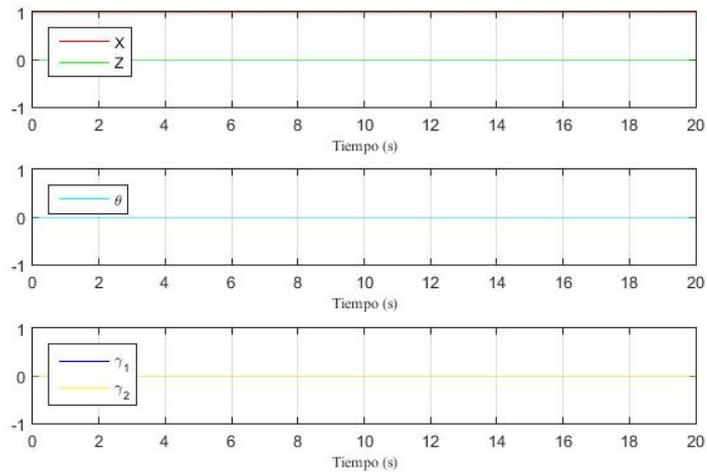


Figura 2.2 Vuelo en Punto Fijo - x .

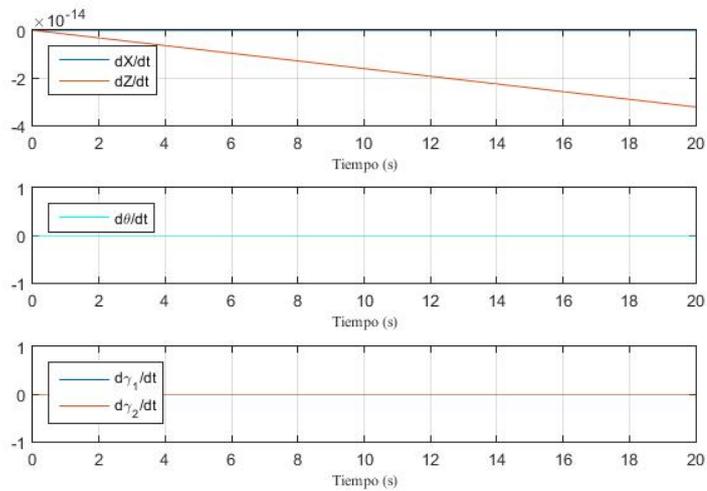


Figura 2.3 Vuelo en Punto Fijo - v .

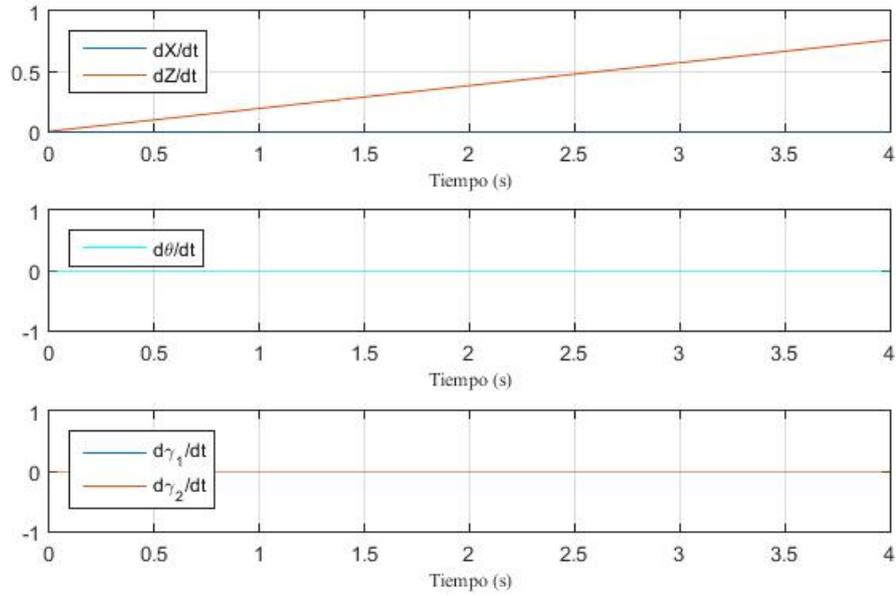


Figura 2.4 Ascenso - x .

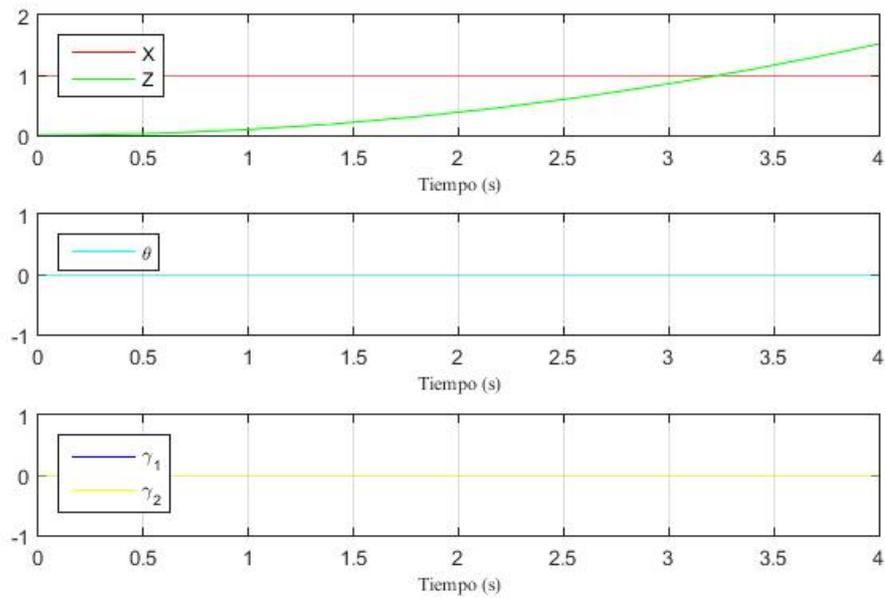


Figura 2.5 Ascenso - v .

En primer lugar se tiene la simulación de *Vuelo en Punto Fijo*. Se aprecia que todas las variables son nulas.

Como segunda alternativa se simula un ascenso vertical con el valor de la tracción indicado en la Tabla 2.1. Las curvas de Z y \dot{Z} indican un ascenso uniformemente acelerado manteniéndose las demás variables a cero.

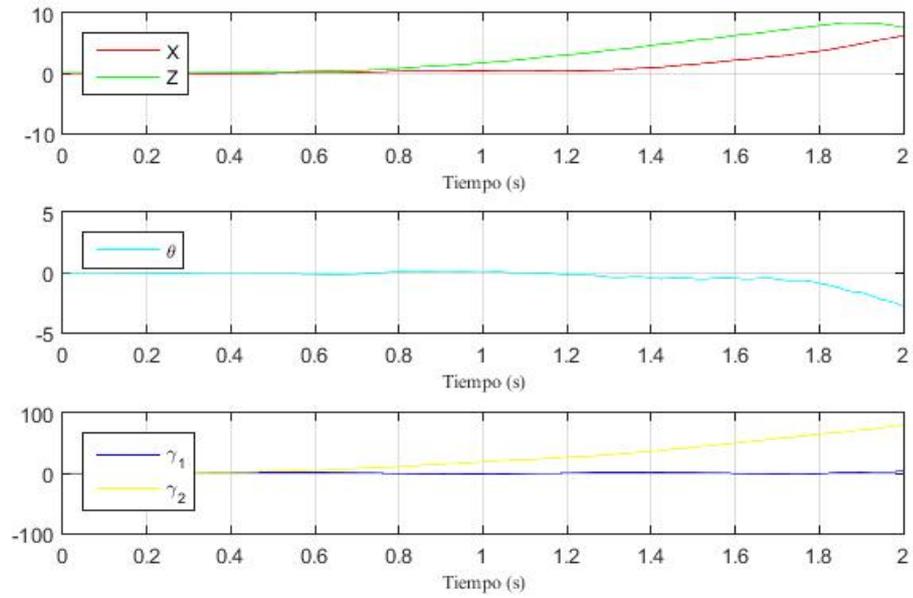


Figura 2.6 Par Motor - x.

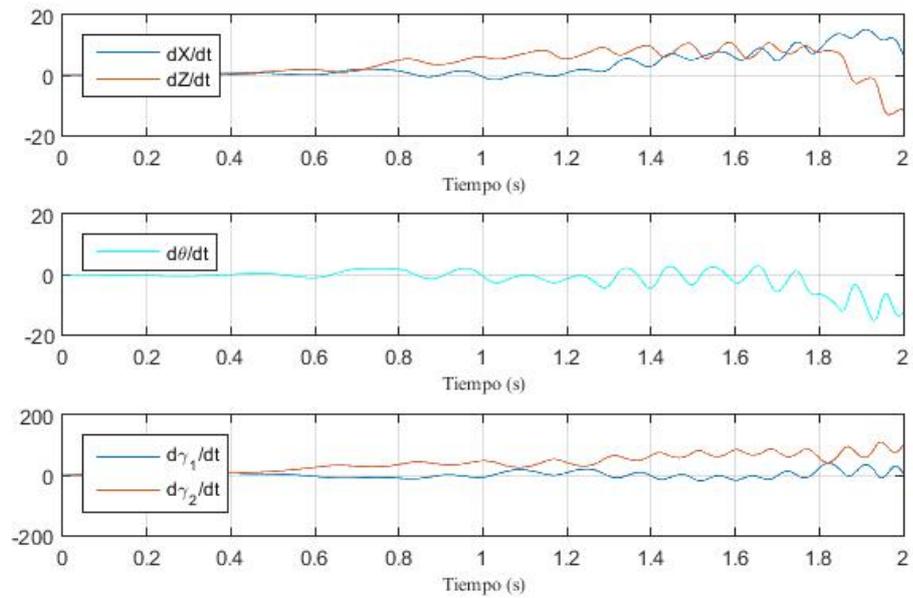


Figura 2.7 Par Motor - v.

En el siguiente caso se representa las curvas obtenidas al introducir un par motor relativo a la unión entre los 'links' 1 y 2. El par motor de valor constante $\tau_2 = 2 Nm$ produce un movimiento de péndulo en el 'link' 1 y éste a su vez provoca otro movimiento en forma de péndulo más atenuado sobre el rotor. No es hasta que $\gamma_1 \simeq \frac{\pi}{2}$ que el 'link' 1 provoca un giro en el rotor $\theta > 0.26 \simeq 15^\circ$ que hace que se pierda "el control" del conjunto pues la componente de la tracción en el eje x_1 se hace relevante.

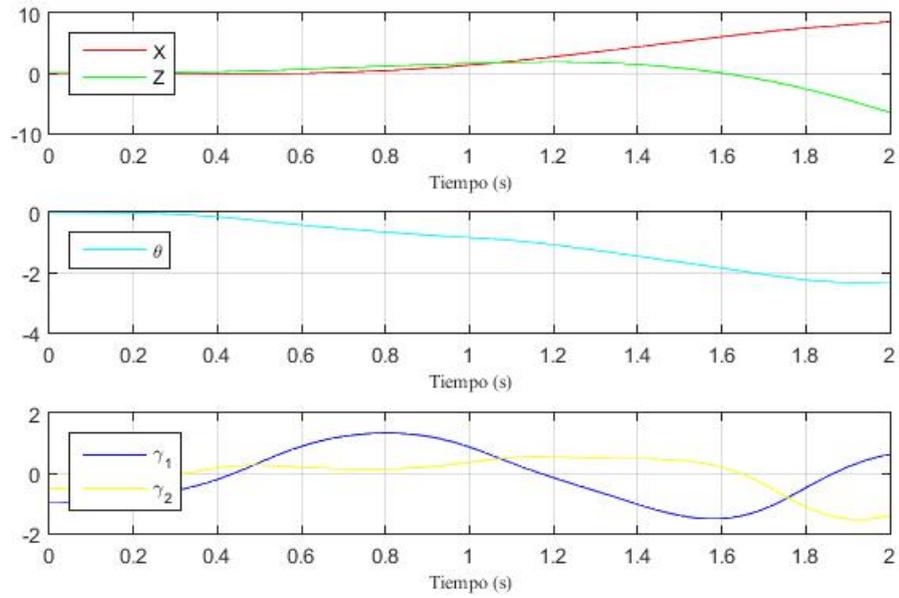


Figura 2.8 Condiciones iniciales no nulas (giros) - x.

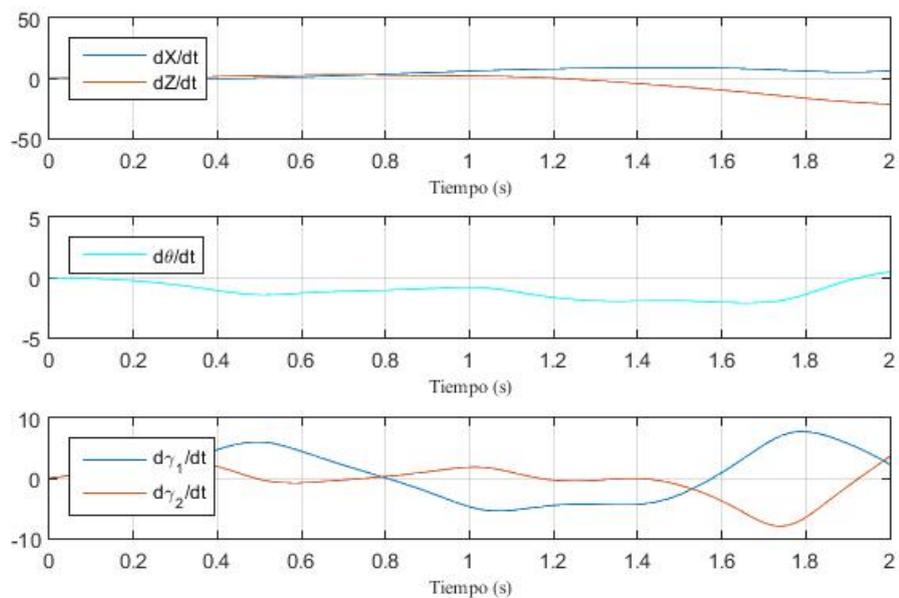


Figura 2.9 Condiciones iniciales no nulas (giros) - v.

En las dos últimas simulaciones se ha mantenido el valor de la tracción proporcionada por el rotor $T = 25 \text{ N}$. Se han dado valores iniciales a las coordenadas generalizadas que establecen giros y en último lugar se han tomado como no nulos alguno de los valores iniciales de las velocidades angulares.

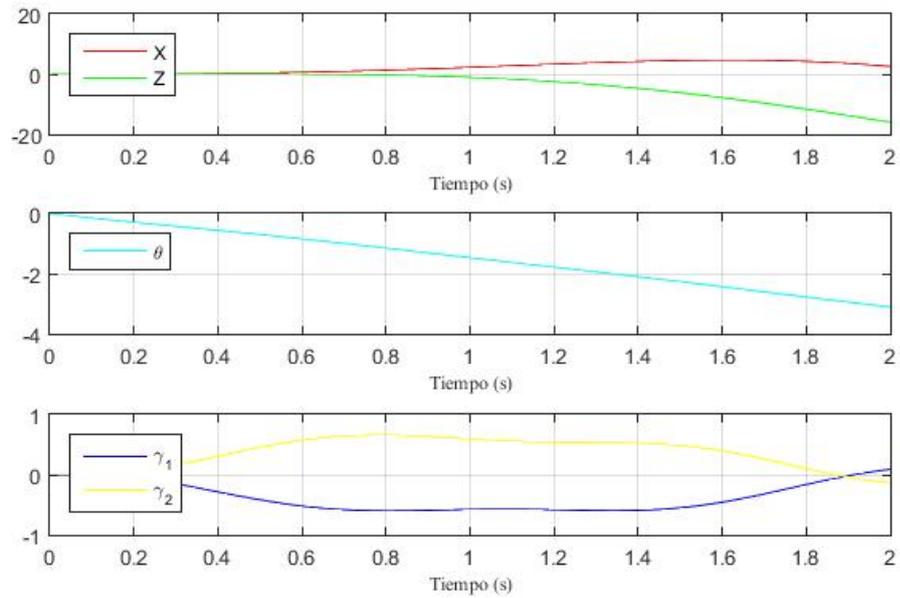


Figura 2.10 Condiciones iniciales no nulas (vel. angulares) - x.

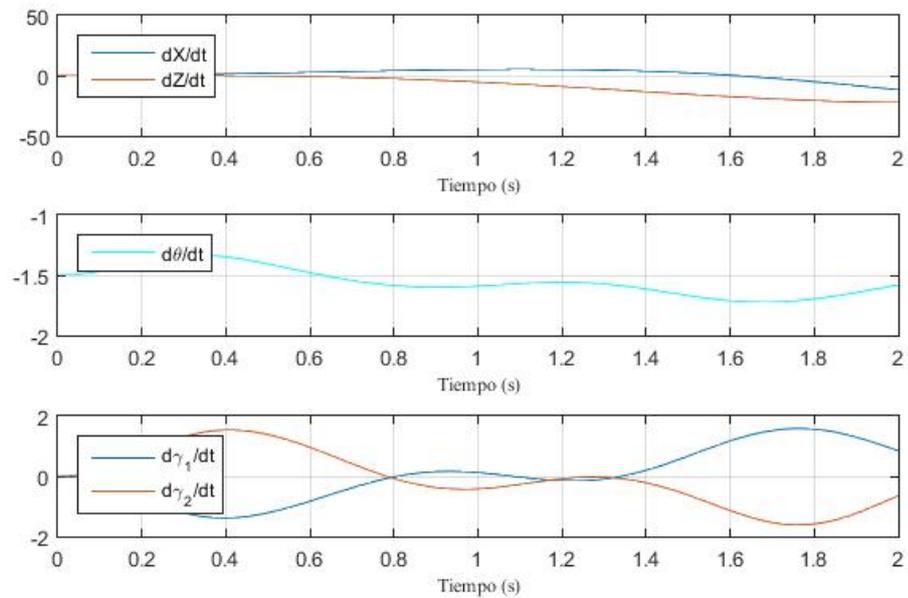


Figura 2.11 Condiciones iniciales no nulas (vel. angulares) - v.

3 Modelización de un Sistema 3D

En este capítulo se desarrollarán las ecuaciones dinámicas para un conjunto de cuerpos rígidos a los que llamamos 'links' en forma de árbol unidos por articulaciones esféricas permitiendo únicamente los grados de libertad de los giros. Sin embargo, primero se expresará el conjunto en una estructura de 'árbol' para un número de grados de libertad general, se definirán las variables para definir unívocamente el estado del conjunto, los sistemas de referencia necesarios así como los grados de libertad del *Sistema Robot*. Finalmente, se verá cómo a través de los métodos de Newton-Euler y Lagrange se llega a una formulación del tipo $M\ddot{q} + C\dot{q} = Q$

3.1 Ecs. Dinámicas de un cuerpo rígido articulado en un sistema 3D

Nuestro *Sistema Robot* sigue una estructura en forma de 'árbol' que une una serie de cuerpos rígidos a través de diferentes uniones. Cada 'link' tiene exactamente un único 'link' padre. El 'link' raíz el cual no está unido a ningún 'link' padre tiene un comportamiento especial y sus grados de libertad representan los grados de libertad de traslación y rotación universal respecto al *Sistema de Referencia Inercial*. El conjunto de grados de libertad estará formado por tanto por estos grados de libertad del 'link' raíz y los grados de libertad permitidos en las uniones entre los cuerpos rígidos.

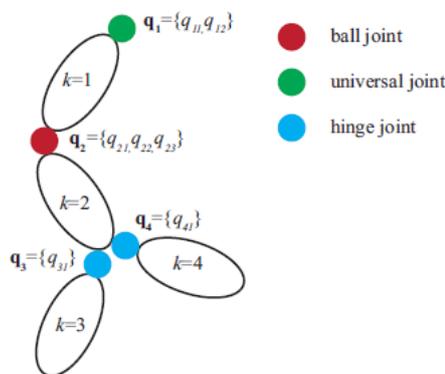


Figura 3.1 Cuerpo rígido articulado en estructura de árbol.

Así, al igual que en la modelización del sistema 2D, se tiene un *Sistema de Referencia Inercial* ligado a 'Tierra', se añade una componente y_l que corresponderá a la dirección y sentido de un triedro a derechas. El 'link' raíz tendrá ligado a su centro de masa el *Sistema de Referencia 1* con sus ejes en las direcciones principales del 'link' raíz. Los sistemas de referencia de los 'links' hijos estarán centrados en la unión con su 'link' padre y cada *Sistema de Referencia k*, con $k \neq 1$, tendrá los ejes según las direcciones principales de cada 'link' k .

Cada cuerpo rígido vendrá definido por el sistema de variables $(x_k, R_k, v_k, \omega_k)$. Las estructuras x_k y R_k representan la posición y la orientación del 'link' k , respectivamente. Las velocidades lineales v_k y angulares ω_k están expresadas en el *Sistema de Referencia Inercial*. Del mismo modo las fuerzas y pares externos aplicados en cada cuerpo rígido se expresa como f_k, τ_k en el *Sistema de Referencia Inercial*.

En las siguientes secciones 3.1.1 *Formulación Euler-Newton* y 3.1.2 *Formulación Lagrange* se va a desarrollar cómo a través de los métodos de Euler-Newton y Lagrange se llega a una única formulación de las ecuaciones dinámicas que será la que utilizemos en lo que sigue.

3.1.1 Formulación Euler-Newton

La forma de las ecuaciones dinámicas a través del método de Euler-Newton ya se formularon en la página 3.

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_c \mathbf{I} & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \wedge I \omega \end{bmatrix}$$

Para la simplificación de la escritura y la resolución del sistema se utilizan las siguientes definiciones.

$$M_c = \begin{bmatrix} m_c \mathbf{I} & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix}$$

M_c es la matriz de masa de un cuerpo rígido expresado en *Sistema de Referencia Inercial*. Entonces I_c se expresa como $I_c = R I_0 R^T$ donde R es la matriz de rotación del cuerpo correspondiente a la orientación de éste respecto de el *Sistema de Referencia Inercial* y I_0 es el tensor de inercia (constante) en los ejes de inercia principales del cuerpo rígido.

Definamos ahora las velocidades lineales y angulares en función de las velocidades generalizas. Sean $x(q)$ y $R(q)$ la posición y la orientación del centro de masas del cuerpo en función de las coordenadas generalizadas, la velocidad lineal del cdm se expresa como

$$v = \dot{x}(q) = \frac{\partial x(q)}{\partial q} \dot{q} \equiv J_v(q) \dot{q}$$

Y la velocidad angular se puede formular como

$$[\omega] = \dot{R}(q)R^T(q) = \sum_j \frac{\partial R(q)}{\partial q_j} R^T(q) \dot{q}_j$$

La nomenclatura $[a]$ corresponde a una matriz antisimétrica con su diagonal principal llena de ceros con esto podemos transformar cualquier vector en una matriz con la que podemos operar más fácilmente. Es decir,

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, podemos expresar la velocidad angular como

$$\omega = J_\omega(q) \dot{q}$$

Se construye un vector de velocidades que relaciona éstas con las velocidades generalizadas a través las matrices $J_v(q)$ y $J_\omega(q)$ denominadas jacobianos.

$$V = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_v \\ J_\omega \end{pmatrix} \dot{q} \equiv J(q) \dot{q}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuaciones dinámicas de la página 20

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} &= M_c(J\dot{q}) + \begin{bmatrix} 0 \\ (J_\omega\dot{q}) \wedge I_c J_\omega\dot{q} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} &= M_c J \ddot{q} + M_c \dot{J} \dot{q} + [\tilde{\omega}] M_c J \dot{q} \end{aligned}$$

donde la matriz $[\tilde{\omega}]$ se expresa como

$$[\tilde{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [J_\omega\dot{q}] \end{pmatrix}$$

Utilizando el teorema de los trabajos virtuales transformamos el término de fuerzas usando los jacobianos y obtenemos la formulación final a la que queremos llegar

$$(J^T M_c J) \ddot{q} + (J^T M_c \dot{J} + J^T [\tilde{\omega}] M_c J) \dot{q} = J_v^T f + J_\omega^T \tau \quad (3.1)$$

donde indentificamos las siguientes matrices de masa, de Coriolis y fuerza generalizada

$$M(q) = J^T M_c J$$

$$C(q, \dot{q}) = J^T M_c \dot{J} + J^T [\tilde{\omega}] M_c J$$

$$Q = J_v^T f + J_\omega^T \tau$$

3.1.2 Formulación Lagrange

La energía cinética de un cuerpo rígido puede ser escrito en forma de vector como sigue

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} (v^T \omega^T) \begin{bmatrix} m_c I & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} V^T M_c V$$

Sustituyendo V con la forma expresada en la pág.21 tenemos

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{q}^T J^T M_c J \dot{q}$$

Se utilizará la formulación Lagrangiana para las ecuaciones dinámicas con $\mathcal{U} = 0$ pues se considerará la gravedad como fuerza externa en vez computarla como energía potencial. A continuación, se desarrollará cada término para llegar a la formulación obtenida en 3.1.1 *Formulación Newton-Euler*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \dot{q}^T J^T M_c (J)_j + \frac{1}{2} (J)_j^T M_c J \dot{q} = (J)_j^T M_c J \dot{q}$$

donde la notación $(A)_j$ denota la columna j -ésima de la matriz A .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) = (J)_j^T M_c J \ddot{q} + (J)_j^T M_c J \dot{q} + (J)_j^T \dot{M}_c J \dot{q} + (J)_j^T M_c J \dot{q}$$

Desarrollemos ahora el segundo término

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \dot{q}^T J^T M_c \frac{\partial J}{\partial q_j} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T J^T \frac{\partial M_c}{\partial q_j} J \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial J^T}{\partial q_j} M_c J \dot{q} = \dot{q}^T \frac{\partial J^T}{\partial q_j} M_c J \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T J^T \frac{\partial M_c}{\partial q_j} J \dot{q}$$

Reorganizando ambos términos obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} = (J)_j^T M_c J \ddot{q} + (J)_j^T M_c J \dot{q} + (J)_j^T \dot{M}_c J \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T J^T \frac{\partial M_c}{\partial q_j} J \dot{q} + \left((J)_j^T M_c J \dot{q} - \left(\frac{\partial J}{\partial q_j} \right)^T M_c J \dot{q} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} &= (J)_j^T M_c J \ddot{q} + (J)_j^T M_c J \dot{q} + (J)_j^T \dot{M}_c J \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T J^T \frac{\partial M_c}{\partial q_j} J \dot{q} + \\ &\quad \left((J)_j^T M_c J \dot{q} - \left(\frac{\partial J}{\partial q_j} \right)^T M_c J \dot{q} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Comparando la ecuaciones 3.2 y la ecuación 3.1 podemos observar que los términos multiplicados por \ddot{q} ejerce como la matriz de masa y el resto de términos como los de Coriolis y fuerzas centrífugas. Sin embargo, se pueden reducir significativamente los términos tercero, cuarto y quinto de la ecuación 3.2.

Tercer término:

$$\begin{aligned} (J)_j^T \dot{M}_c J \dot{q} &= (J_\omega)_j^T I_c J_\omega \dot{q} && \text{El término lineal en } M_c \text{ es constante y por tanto se anula} \\ &= (J_\omega)_j^T (R I_0 R^T) \omega \\ \text{término 3} &= (J_\omega)_j^T [\omega] I_c \omega \end{aligned}$$

En el último paso se ha incluido la siguiente igualdad $(R I_0 R^T) \omega = \dot{R} I_0 R^T \omega + R I_0 \dot{R}^T \omega = \dot{R} R^T I_c \omega + I_c (\dot{R} R^T)^T \omega = [\omega] I_c \omega - I_c [\omega] \omega$ dado que se cumple que $[\omega] = -[\omega]^T$ y puesto que $[\omega] \omega \equiv \omega \wedge \omega = 0$ el resultado que obtenemos es $(R I_0 R^T) \omega = [\omega] I_c \omega$ como unas líneas más arriba.

Cuarto término:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{q}^T J^T \frac{\partial M_c}{\partial q_j} J \dot{q} &= \frac{1}{2} (J_\omega \dot{q})^T \frac{\partial I_c}{\partial q_j} J \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} \omega^T \left(\frac{\partial R}{\partial q_j} I_0 R^T + R I_0 \frac{\partial R^T}{\partial q_j} \right) \omega = \omega^T \left(\frac{\partial R}{\partial q_j} I_0 R^T \right) \omega \\ &= \omega^T \left(\frac{\partial R}{\partial q_j} R^T I_c \right) \omega \\ &= \omega^T [J_\omega]_j^T I_c \omega \\ \text{término 4} &= -J_\omega^T [\omega] I_c \omega \end{aligned}$$

Se puede comprobar que los términos 3 y 4 se anulan mutuamente. Para el quinto término $(J)_j^T M_c J \dot{q} - \left(\frac{\partial J}{\partial q_j} \right)^T M_c J \dot{q}$ se descompondrá en los términos lineales y angulares dando como resultado nulo el término lineal y el término angular vendrá dado por

Quinto término

$$\begin{aligned} (J)_j^T M_c J \dot{q} - \left(\frac{\partial J}{\partial q_j} \right)^T M_c J \dot{q} &\equiv \left((J_\omega)_j - \left(\frac{\partial J_\omega}{\partial q_j} \dot{q} \right) \right)^T I_c J_\omega \dot{q} \\ \text{término 5 (angular)} &= -(J_\omega)_j^T [\omega] I_c \omega \end{aligned}$$

A estos resultados se ha llegado a través de unos desarrollos que se pueden seguir en el artículo [3] C.Karen Liu, *A quick tutorial on multibody dynamics*. Si agrupamos todos los elementos nos queda la siguiente ecuación dinámica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} &= (J)_j^T M_c J \ddot{q} + (J)_j^T M_c J \dot{q} + (J_\omega)_j^T [\omega] I_c \omega \\ &= (J)_j^T M_c J \ddot{q} + \left((J)_j^T M_c J + (J)_j^T [\tilde{\omega}] M_c J \right) \dot{q} \\ \text{donde } [\tilde{\omega}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [J_\omega \dot{q}] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si escribimos ahora esta misma ecuación para todas las variables generalizadas existentes en forma de vector

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} = (J)^T M_c J \ddot{q} + \left((J)^T M_c \dot{J} + (J)^T [\tilde{\omega}] M_c J \right) \dot{q}$$

Del mismo modo que en 2.1.1 *Formulación Euler-Newton* se utilizará el teorema de los trabajos virtuales para obtener las fuerzas generalizadas. Así, se llega a la formulación deseada

$$(J)^T M_c J \ddot{q} + \left((J)^T M_c \dot{J} + (J)^T [\tilde{\omega}] M_c J \right) \dot{q} = (J_v)^T f + (J_\omega)^T \tau \quad (3.3)$$

3.1.3 Generalización de las ecuaciones dinámicas a cuerpos rígidos articulados

A continuación se verá cómo son las ecuaciones dinámicas y cinemáticas para una serie de cuerpos articulados. Las ecuaciones dinámicas se obtienen sencillamente de la siguiente forma

$$\sum_k \left((J_k)^T M_{ck} J_k \right) \ddot{q} + \sum_k \left((J_k)^T M_{ck} \dot{J}_k + (J_k)^T [\tilde{\omega}_k] M_{ck} J_k \right) \dot{q} = \sum_k \left((J'_{vk})^T f_k + (J_{\omega k})^T \tau'_k \right)$$

Recordar que todos los términos están expresados en el *Sistema de Referencia Inercial*.

Para obtener los jacobianos de cada 'link' se necesitarán las matrices de rotación R y las matrices de transformación homogénea W que transforman cualquier vector de un sistema de referencia a cualquier otro sistema de referencia. La nomenclatura general que se utilizará para relacionar dos sistemas de referencia es la siguiente

R_k^l donde l denomina el sistema de referencia asociado al 'link' padre y k el sistema de referencia asociado al 'link' hijo. Del mismo modo la transformación homogénea entre el sistema de referencia del 'link' k y el sistema de referencia del 'link' padre l se representa como W_k^l .

Las ecuaciones cinéticas de las velocidades lineales de cada 'link' se formula

$$v_k = J_{vk} \dot{q} \quad \text{donde} \quad J_{vk} = \frac{\partial x_k}{\partial q} = \frac{\partial W_k^l c_k}{\partial q}$$

El vector c_k representa el vector del centro de masas del cuerpo con origen en el *Sistema de Referencia* k . Definimos el vector p_k^{k-1} como el vector con origen en el origen del *Sistema de Referencia* $k-1$ y final en el *Sistema de Referencia* k expresado en el *Sistema de Referencia* $k-1$. La transformación homogénea del vector de posición entre dos sistemas de referencia sigue la estructura

$$\begin{bmatrix} (x_k)_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_a^b)_a & (p_a^b)_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (c_k)_b \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (R_a^b)_a (c_k)_b + (p_a^b)_a \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que la estructura corresponde a una simple composición de vectores en distintos sistemas de referencia como se ilustra en la Figura 3.2.

Pongamos como ejemplo el vector de posición de 'link' x_2 asociado al *Sistema de Referencia Inercial* con un vector de centro de masas referenciado al *Sistema de Referencia* 2, c_2 .

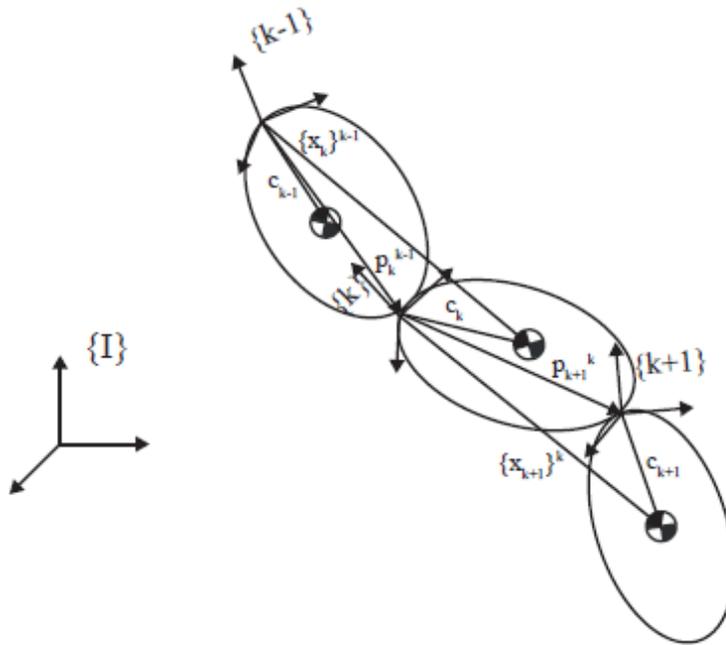


Figura 3.2 Definición de vectores de posición.

$$(x_2)_I = W_2^I c_2 = W_1^I W_2^1 c_2 = \begin{bmatrix} (R_1^I)_I & (p_1^I)_I \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_2^1)_1 & (p_2^1)_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (c_2)_2$$

La matriz W_2^I se calcula a través de composiciones de matrices de transformación homogéneas más sencillas que podemos obtener fácilmente.

Para las ecuaciones diferenciales cinemáticas de la actitud utilizamos el método recursivo, es decir, se utilizan las velocidades angulares para calcular un determinado 'link' en función de las velocidades angulares de los 'links' padres que le preceden. El desarrollo para llegar a esta ecuación se puede consultar en el artículo, [3] C.Karen Liu, *A quick tutorial on multibody dynamics*.

$$\omega_k = \omega_l + R_l^I \hat{J}_{\omega_k} \dot{q}_k \quad \equiv \quad \omega_k = J_{\omega_k} \dot{q}$$

donde el jacobiano \hat{J}_{ω_k} se obtiene de la ecuación cinemática de actitud local, es decir, la que relaciona las velocidades angulares cartesianas con las velocidades angulares generalizadas en el *Sistema de Referencia l*, $\hat{\omega}_k = \hat{J}_{\omega_k} \dot{q}_k$. Con todo esto el jacobiano angular para cualquier 'link' k expresado en el *Sistema de Referencia Inercial* se caracteriza por

$$J_{\omega k} = (\hat{J}_{\omega 1} \cdots R_{m-1}^I \hat{J}_{\omega m} \cdots 0 \cdots)$$

La matriz de ceros corresponde al conjunto de grados de libertad que no pertenecen a la cadena de transformación desde el 'link' raíz hasta el 'link' k . Para obtener los jacobianos angulares locales se van a usar una secuencia de tres ángulos de Euler en ejes no consecutivos. Se conoce que existen 12 posibilidades de secuencias de ángulos de Euler para definir la actitud de un sistema de referencia. Se va a escoger la secuencia típica para sistemas robóticos

$$R_{(\phi)}^x \implies R_{(\theta)}^y \implies R_{(\psi)}^z$$

Con esto podemos construir la matriz de rotación de un *Sistema de Referencia k* que relaciona con el *Sistema de Referencia k-1*

$$R_k = \begin{bmatrix} \cos(\phi_k) \cos(\theta_k) & \cos(\theta_k) \sin(\phi_k) & -\sin(\theta_k) \\ \cos(\phi_k) \sin(\psi_k) \sin(\theta_k) - \cos(\psi_k) \sin(\phi_k) & \cos(\psi_k) \cos(\phi_k) + \sin(\phi_k) \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \sin(\psi_k) \\ \sin(\psi_k) \sin(\phi_k) + \cos(\psi_k) \cos(\phi_k) \sin(\theta_k) & \cos(\psi_k) \sin(\phi_k) \sin(\theta_k) - \cos(\phi_k) \sin(\psi_k) & \cos(\psi_k) \cos(\theta_k) \end{bmatrix}$$

Para poder expresar los jacobianos en el *Sistema de Referencia Inercial* se utiliza la concatenación de matrices de rotación que relaciona el *Sistema de Referencia k* con el *Sistema de Referencia Inercial*, $R_k^I = \prod_{i=1}^{k-1} R_{i-1}^I$. Se construye una matriz de rotación global donde la fila indica el 'link' padre y la columna contiene el 'link' hijo al que se llega.

$$R = \begin{bmatrix} I & R_1^I & \cdots & R_n^I \\ 0 & I & R_2^I & \vdots \\ \vdots & \ddots & I & R_{n-1}^I \\ 0 & \cdots & \cdots & I \end{bmatrix}$$

El jacobiano local asociado al 'link' k se forma gracias a la propiedad de que las velocidades angulares son aditivas siempre expresada en el sistema de referencia relacionado con el eje de giro. Así transformamos cada velocidad angular al *Sistema de Referencia k* utilizando la secuencia de ángulos de Euler antes descrita nos queda

$$\hat{J}_{\omega k} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} R_{(\phi)}^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} R_{(\phi)}^x R_{(\theta)}^y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Por último, los términos que componen las fuerzas y pares generalizados tiene una serie de peculiaridades. El jacobiano J'_{vk} corresponde al punto de aplicación de la fuerza f_k , es decir,

$$J'_{vk} = \frac{\delta r_k}{\delta q}$$

donde r_k es el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza f_k expresado en el *Sistema de Referencia Inercial*. Como los pares externos van a estar aplicados en los ejes locales de los diferentes 'links' los pares externos expresados en el *Sistema de Referencia Inercial* tendrán la forma

$$\tau_k' = R_k^I \hat{\tau}_k - \sum_{i=1}^k (R_i^I \hat{\tau}_i) + [r_k - x_k] f_k$$

Esta expresión indica que el conjunto de pares aplicados en el 'link' k se corresponde con el par positivo para $\hat{\tau}_k$ expresado en el *Sistema de Referencia Inercial* y con un par negativo sobre el 'link' k la suma de los pares aplicados en los 'links' predecesores en la cadena.

4 Particularización al Sistema Robot

Una vez tenemos definidas todas las ecuaciones necesarias para analizar el comportamiento de un sistema articulado, este capítulo se centrará en caracterizar el *Sistema Robot*. Como bien se adelantaba en la 1 *Introducción* el sistema a estudio es un Vehículo Aéreo No Tripulado formado por un brazo robótico constituido por una serie de articulaciones y un sistema de tracción dado por un rotor coaxial.

Se identificará al rotor coaxial como al 'link' raíz del *Sistema Robot* donde se encuentran las variables generalizadas universales del conjunto. Las diferentes articulaciones están conectadas entre sí mediante uniones esféricas que permiten cualquier giro respecto al 'link' padre.

4.1 Caracterización del rotor coaxial

En esta sección se va a modelar las fuerzas y pares que intervienen en el funcionamiento del rotor coaxial. En él se van a encontrar las fuerzas y pares aerodinámicos, las de fricción, las giroscópicas, etc.

4.1.1 Fuerzas aerodinámicas

En primer lugar se tienen las fuerzas y pares aerodinámicos, la tracción proporcionada por ambos rotores que conforman el rotor coaxial se va a considerar en la situación ideal y muy cercana a la realidad de que proporcionan el doble de la tracción de un rotor aislado. También se hace la suposición de considerar el vector tracción total perpendicular al plano rotor, se desprecia así la componente horizontal que se produce cuando hay un movimiento de avance, Figura 4.1. Esta consideración se puede realizar pues el ángulo de ataque del plano rotor va a ser siempre lo suficiente pequeño (en el sistema controlado) para despreciar la componente horizontal generada. La tracción de un rotor se puede modelar de forma sencilla como

$$T = K_T \omega_R^2$$

donde el coeficiente K_T depende los parámetros de la densidad del aire, número de palas del rotor, velocidad relativa del conjunto, superficie y forma de las palas. Se obtiene así la tracción total mediante la suma de ambos rotores

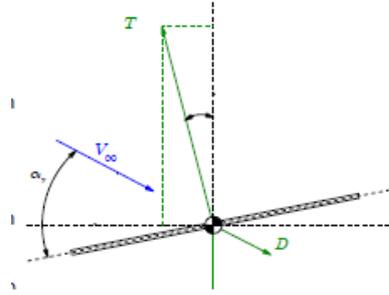


Figura 4.1 Plano rotor en movimiento de avance.

$$T_{up} = K_{T_{up}} \omega_{r_{up}}^2$$

$$T_{dw} = K_{T_{dw}} \omega_{r_{dw}}^2$$

$$T = T_{up} + T_{dw}$$

El rango de velocidades en el que se va a operar el *Sistema Robot* es lo suficiente bajo que la resistencia aerodinámica producida en el movimiento puede despreciarse. Sin embargo, se crea un par torsor debido a la resistencia al aire que no se puede despreciar. Este par tendrá sentido contrario a la velocidad angular a la que gira el rotor.

$$Q_D = K_D \omega_R^2$$

La configuración del rotor coaxial se establece con el rotor inferior girando según las agujas del reloj y el rotor superior girando en contra de las agujas del reloj. Esto provoca que si ambos rotores giran a la misma velocidad angular nominal los pares torsores se anulen entre sí, Figura 4.2. Por contra si se diera la situación de proporcionar diferentes velocidades angulares a los rotores, el par torsor debido a la resistencia deja de anularse. Se produce entonces un movimiento de guiñada en el conjunto, Figura 4.3, gracias a la conservación del momento cinético.

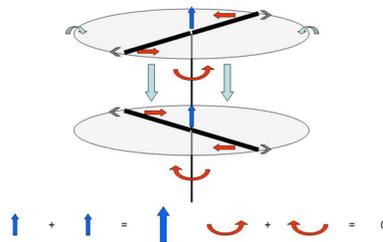


Figura 4.2 Ascenso, fuerzas y pares aerodinámicos.

Aunque este fenómeno es usualmente considerado, para cambiar el módulo o la dirección del vector tracción variando la velocidad angular nominal en los rotores y así producir una nueva configuración, el objetivo principal del presente proyecto consiste en modelizar y visualizar cómo influye unos determinados

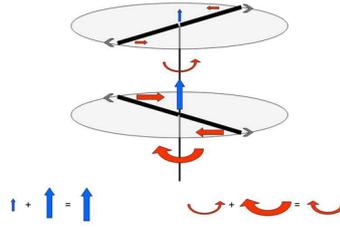


Figura 4.3 Movimiento de Guiñada, fuerzas y pares aerodinámicos.

pares ejercidos en las articulaciones del brazo robótico en el sistema del rotor coaxial modifican así la posición y actitud del conjunto *Sistema Robot* sin cambiar la velocidad angular proporcionada en los rotores para en una continuación controlar todo el *Sistema Robot* a través del sólido rígido equivalente al *Brazo Robot*.

Se concluye que a partir de ahora ambos rotores siempre van a girar a la misma velocidad angular proporcionando una determinada tracción total que se considerará un *input* en nuestro problema eliminando de la ecuación los pares torsores debido a la resistencia al aire.

4.1.2 Uniones esféricas. Fuerzas de fricción

Las articulaciones del brazo robótico están conectadas por uniones esféricas que permiten el giro en cualquier dirección. Éstas nos dan un conjunto de posibilidades de giro muy amplio aunque mecánicamente tiene algunas restricciones.

El arco posible en cualquier unión esférica no es completo a pesar de esto generalmente abarca un ángulo superior a 180 grados. La zona de contacto superficial en la unión esférica provoca un par de fricción que se puede modelar por

$$Q_{fric} = a_{fric} \Omega_{r_e}^2$$

4.1.3 Dinámica de partes activas

Como se ha ido comentando a lo largo del texto serán las articulaciones mediante las fuerzas y pares que generen en el conjunto las que determinarán el movimiento y las trayectorias que se puedan realizar.

Estas uniones esféricas producen un movimiento relativo entre las dos articulaciones que une y por tanto será necesario caracterizar la dinámica asociada a este movimiento. Si definimos la matriz de inercia de la unión esférica como I_{r_e} y la velocidad angular relativa que proporciona la unión Ω_{r_e} ,

$$I_{r_e} \dot{\Omega}_{r_e} = \tau_{r_e} - Q_{fric}$$

Será la variación de τ_{r_e} resultante, tomados como pares externos en la modelización del *Sistema Robot*, la que se utilizará para realizar el control del sistema.

La generación de velocidades angulares por partes móviles en la articulaciones provoca un fenómeno denominado movimiento giroscópico. Un vector de velocidad angular que cambia de dirección aunque no de módulo produce un par torsor de reacción al sentido de giro de los pares externos.

$$Q_{reac} = I_{re} |\Omega_{re}| (\Omega_{re} \wedge z_I)$$

4.2 Ecuaciones cinemáticas y dinámicas del *Sistema Robot*

El *Sistema Robot* está compuesto por tres articulaciones más el sistema de tracción coaxial. Para modelar estos cuerpos será necesario una serie de sistemas de referencia no inerciales, estos sistemas de referencia girarán solidariamente con el centro de masa correspondiente a cada uno de los 'links'; sin embargo, excepto el sistema de referencia asociado al 'link' raíz, los s.d.r tendrán su centro en la unión con su respectivo 'link' padre, Figura 4.4.

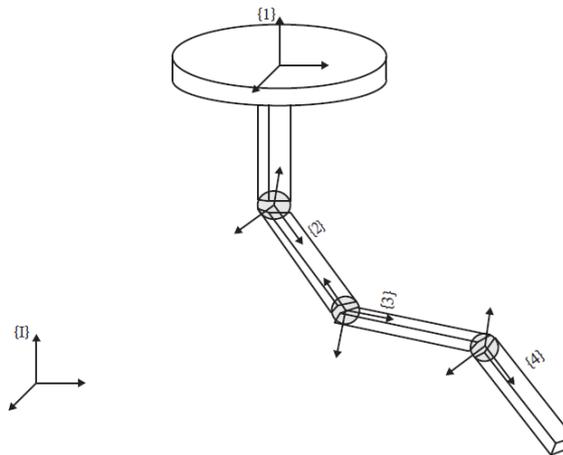


Figura 4.4 Conjunto del *Sistema Robot*.

Se necesitarán un conjunto de 15 variables generalizadas, 6 variables que caractericen la posición y actitud del 'link' raíz más 3 giros independientes por cada unión esférica que caracterizan completamente la posición y actitud del conjunto *Sistema Robot*.

Como se ha comentado anteriormente, los sistemas de referencia no inerciales de las articulaciones [s.d.r 2, 3 y 4] se han centrado en la unión con la articulación anterior en vez de en el centro de masas de éste. Lo que sí ha sido tenido en cuenta es que las direcciones de estos sistemas de referencia coincidan con los ejes principales del cuerpo. En este caso, al estar modelado por un prisma, sus ejes principales van asociado a las caras del prisma siendo perpendiculares a éstas.

$$I_{k_{cdm}} = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

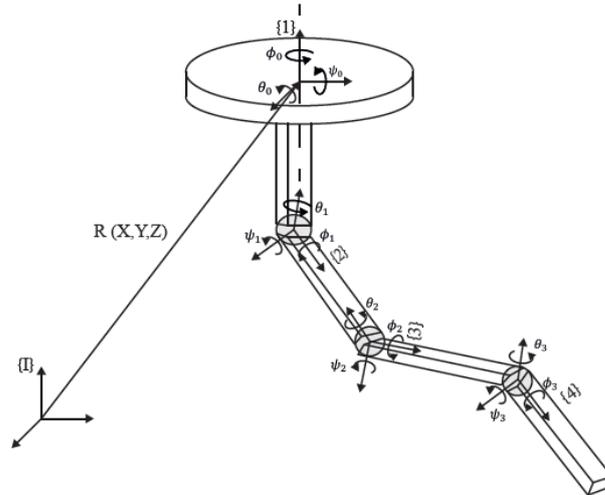


Figura 4.5 Variables generalizadas en el Conjunto Sistema Robot.

Al no estar los sistemas de referencia centrados en el centro de masa del cuerpo, se introducen unos términos de aceleración en las ecuaciones dinámicas. Utilizando la formulación de Newton-Euler y sea O el origen del sistema de referencia queda

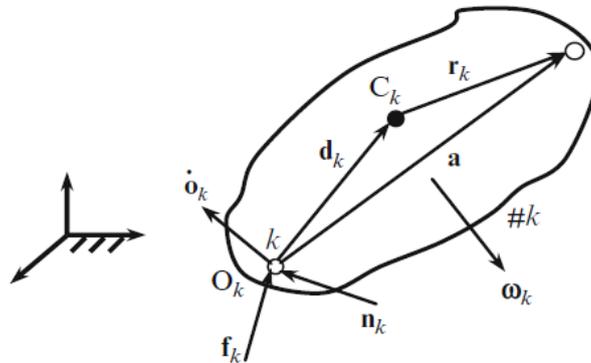


Figura 4.6 Sólido con el punto de aplicación en un punto cualquiera.

$$m_k \ddot{o}_k - m_k c_k \wedge \dot{\omega}_k - \omega \wedge (m_k c_k \wedge \omega_k) = f_k \tag{4.1}$$

$$I_{k_o} \dot{\omega}_k + m_k c_k \wedge \ddot{o}_k + \omega_k \wedge I_{k_o} \omega_k = \tau_k \tag{4.2}$$

La matriz de masa de cada 'link' tendrá la forma

$$M_k = \begin{bmatrix} m_k \mathbf{I} & -m_k [c_k] \\ m_k [c_k] & I_{k_o} \end{bmatrix}$$

Las matrices de inercias sobre el origen del sistema de referencia cambia y dada la posición y orientación escogida respecto al centro de masa la nueva matriz incluye términos de Steiner en la diagonal

$$I_{k_o} = \begin{bmatrix} I_1 + m_k d^2 & & \\ & I_2 + m_k d^2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

Estas matrices de masa expresadas en el *Sistema de Referencia Inercial*

$$M_k = \begin{bmatrix} m_k \mathbf{I} & -m_k W_k^I [c_k] \\ m_k W_k^I [c_k] & R_k^I I_{k_o} (R_k^I)^T \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones representadas en 4.1 se pueden formular más compactamente en forma matricial

$$M_k \begin{bmatrix} \ddot{\omega}_k \\ \dot{\omega}_k \end{bmatrix} + \Omega_k M_k E_k \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ \tau_k \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } \Omega_k = \begin{bmatrix} [\omega_k] & 0 \\ 0 & [\omega_k] \end{bmatrix} \text{ y } E_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se ha desarrollado en el Capítulo 3 utilizando la formulación de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas a resolver para el *Sistema Robot* tiene la forma

$$v_o = \begin{bmatrix} J_{v_{o1}} \\ J_{v_{o2}} \\ J_{v_{o3}} \\ J_{v_{o4}} \end{bmatrix} \dot{q}$$

$$\omega_1 = (\hat{J}_{\omega_1} \quad 0 \quad 0 \quad 0) \dot{q}_\omega$$

$$\omega_2 = (\hat{J}_{\omega_1} \quad R_1^I \hat{J}_{\omega_2} \quad 0 \quad 0) \dot{q}_\omega$$

$$\omega_3 = (\hat{J}_{\omega_1} \quad R_1^I \hat{J}_{\omega_2} \quad R_2^I \hat{J}_{\omega_3} \quad 0) \dot{q}_\omega$$

$$\omega_4 = (\hat{J}_{\omega_1} \quad R_1^I \hat{J}_{\omega_2} \quad R_2^I \hat{J}_{\omega_3} \quad R_3^I \hat{J}_{\omega_4}) \dot{q}_\omega$$

es decir,

$$\omega = \begin{bmatrix} J_{\omega_1} \\ J_{\omega_2} \\ J_{\omega_3} \\ J_{\omega_4} \end{bmatrix} \dot{q}$$

Se añade tres columnas de ceros en los distintos J_{ω_k} al inicio de la matriz para cuadrar las dimensiones respecto a \dot{q} .

Las ecuaciones dinámicas para el conjunto queda

$$\sum_{k=1}^4 \left((J_k)^T M_k J_k \right) \ddot{q} + \sum_{k=1}^4 \left((J_k)^T M_k \dot{J}_k + (J_k)^T \Omega_k M_k E_k J_k \right) \dot{q} = \sum_{k=1}^4 \left((J_{vk})^T f_k + (J_{\omega k})^T \tau_k' \right) \quad (4.3)$$

con los jacobianos de cada 'link' definidos por

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{v_1} \\ J_{\omega_1} \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} J_{v_2} \\ J_{\omega_2} \end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} J_{v_3} \\ J_{\omega_3} \end{bmatrix} \quad J_4 = \begin{bmatrix} J_{v_4} \\ J_{\omega_4} \end{bmatrix}$$

Se tiene un conjunto de 15 ecuaciones diferenciales de segundo orden para 15 variables generalizadas. El conjunto de variables se denominará como

$$q = (X \quad Y \quad Z \quad \psi_0 \quad \theta_0 \quad \phi_0 \quad \psi_1 \quad \theta_1 \quad \phi_1 \quad \psi_2 \quad \theta_2 \quad \phi_2 \quad \psi_3 \quad \theta_3 \quad \phi_3)$$

$$\dot{q} = (\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z} \quad \dot{\psi}_0 \quad \dot{\theta}_0 \quad \dot{\phi}_0 \quad \dot{\psi}_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\phi}_1 \quad \dot{\psi}_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\phi}_2 \quad \dot{\psi}_3 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\phi}_3)$$

$$\ddot{q} = (\ddot{X} \quad \ddot{Y} \quad \ddot{Z} \quad \ddot{\psi}_0 \quad \ddot{\theta}_0 \quad \ddot{\phi}_0 \quad \ddot{\psi}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\phi}_1 \quad \ddot{\psi}_2 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \ddot{\phi}_2 \quad \ddot{\psi}_3 \quad \ddot{\theta}_3 \quad \ddot{\phi}_3)$$

Los 'links' que conforman el brazo robótico se modelarán como sendos prismas de longitud l_k y base axb de densidad uniforme. El 'link' que modela el rotor coaxial será un disco de radio R_d igual a la longitud de las palas. Este disco se considerará idealmente de densidad uniforme con su centro de masas en el centro del mismo. Una barra sin masa y de longitud l_0 que determina la distancia entre el centro de masas del rotor coaxial y la unión del 'link' 1.

La matriz de rotación general del Sistema Robot se compone de las siguientes submatrices

$$R = \begin{bmatrix} I & R_1^I & R_2^I & R_3^I & R_4^I \\ 0 & I & R_2^1 & R_3^1 & R_4^1 \\ \vdots & & I & R_3^2 & R_4^2 \\ & \ddots & & I & R_4^3 \\ 0 & \dots & & 0 & I \end{bmatrix}$$

Los jacobianos de velocidades lineales $J_{v_{o_k}}$ y sus correspondientes matrices homogéneas W_k^I se definen como

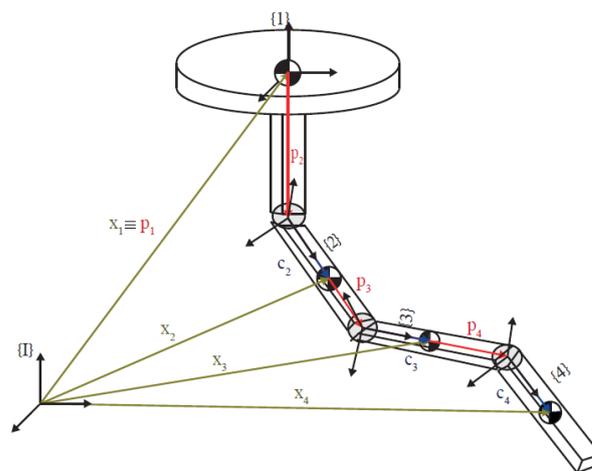


Figura 4.7 Vectores de posición en Sistema Robot.

- Link 1, Rotor coaxial:

$$x_1 = W_1^I \begin{bmatrix} c_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad o_1 = p_1$$

$$W_1^I = \begin{bmatrix} R_1^I & p_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1 \quad \text{y} \quad p_1 = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_I$$

$$J_{v_{o_1}} = \frac{\delta o_1}{\delta q}$$

- Link 2, Articulación 1:

$$x_2 = W_2^I \begin{bmatrix} c_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad o_2 = W_1^I \begin{bmatrix} p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W_2^I = W_1^I W_2^1 = W_1^I \begin{bmatrix} R_2^1 & p_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_1}{2} \end{bmatrix}_2 \quad \text{y} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_0 \end{bmatrix}_1$$

$$J_{v_{o_2}} = \frac{\delta o_2}{\delta q} \quad J'_{v_2} = \frac{\delta x_2}{\delta q}$$

- Link 3, Articulación 2:

$$x_3 = W_3^I \begin{bmatrix} c_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad o_3 = W_2^I \begin{bmatrix} p_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W_3^I = W_1^I W_2^1 W_3^2 = W_1^I W_2^1 \begin{bmatrix} R_3^2 & p_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}_3 \quad \text{y} \quad p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}_2$$

$$J_{v_{o_3}} = \frac{\delta o_3}{\delta q} \quad J'_{v_3} = \frac{\delta x_3}{\delta q}$$

- Link 4, Articulación 3:

$$x_4 = W_4^I \begin{bmatrix} c_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad o_4 = W_3^I \begin{bmatrix} p_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W_4^I = W_1^I W_2^1 W_3^2 W_4^3 = W_1^I W_2^1 W_3^2 \begin{bmatrix} R_4^3 & p_4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_3}{2} \end{bmatrix}_4 \quad \text{y} \quad p_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix}_3$$

$$J_{v_{o_4}} = \frac{\delta o_4}{\delta q} \quad J'_{v_4} = \frac{\delta x_4}{\delta q}$$

Por otro lado, los jacobianos angulares locales \hat{J}_{ω} para la formación de los jacobianos angulares J_{ω} se establecen de la siguiente forma

$$\hat{J}_{\omega_1} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & R_{(\phi_0)}^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & R_{(\phi_0)}^x R_{(\theta_0)}^y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta_0) \\ 0 & \cos(\psi_0) & \cos(\theta_0) \sin(\psi_0) \\ 0 & -\sin(\psi_0) & \cos(\psi_0) \cos(\theta_0) \end{bmatrix}$$

donde los jacobianos \hat{J}_{ω_2} , \hat{J}_{ω_3} y \hat{J}_{ω_4} tienen la misma forma con sus respectivos ángulos de Euler. La derivada temporal de los jacobianos \dot{J}_k se puede computar fácilmente de la siguiente manera $\dot{J}_k = \sum_{j=1}^{15} \frac{\delta J_k}{\delta q_j} \dot{q}_j$.

Por último, queda por caracterizar las fuerzas y pares externos a las que está sometido el Sistema Robot. Reuniendo todos los términos en el apartado anterior

$$f_1 = R_1^I \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_R)g \end{bmatrix}_I$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{bmatrix}_I$$

$$f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix}_I \quad f_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 g \end{bmatrix}_I$$

$$\tau_1 = 0$$

$$\tau_2 = R_2^I \tau_{r_2} + [x_2 - o_2] f_2 - Q_{reac_2}$$

$$\tau_3 = R_3^I \tau_{r_3} - R_2^I \tau_{r_2} + [x_3 - o_3] f_3 - Q_{reac_3}$$

$$\tau_4 = R_4^I \tau_{r_4} - (R_2^I \tau_{r_2} + R_3^I \tau_{r_3}) + [x_3 - o_3] f_3 - Q_{reac_4}$$

5 Reducción a sólido rígido general. Tensor de inercia

El objetivo final de este Proyecto Fin de Carrera es obtener el centro de masas y tensor de inercia del sólido rígido en cada instante conformado por el brazo robótico al completo como un único sólido rígido al introducir los pares torsores en las articulaciones. Se reducirá por tanto el *Sistema Robot* a dos sólidos rígidos enlazados, el cuerpo del conjunto del rotor coaxial y el sólido rígido genérico a obtener.

5.1 Centro de masas, X_G

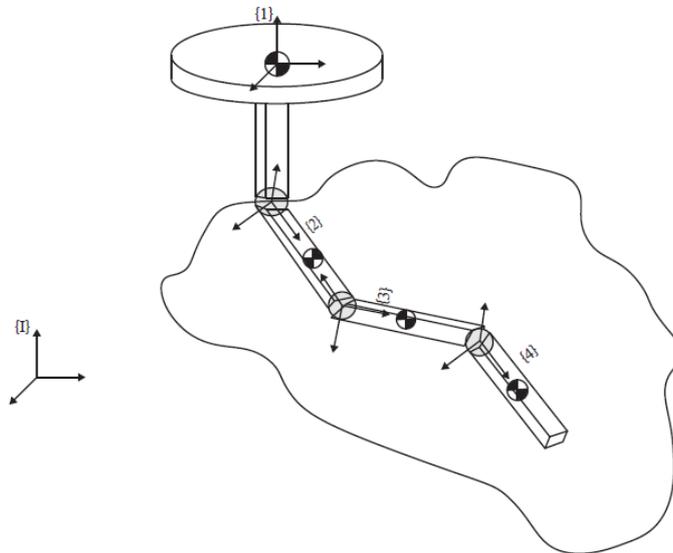


Figura 5.1 *Sistema Robot* definido el *Cuerpo Brazo Robot*.

Una vez se ha calculado la posición y actitud y las velocidades lineales y angulares absolutas de todos los cuerpos que forman el *Sistema Robot* se puede obtener el centro de masas del *Cuerpo Brazo Robot*

simplemente de la definición de centro de masas para un Sistema de Partículas.

$$x_G(q(t)) = \frac{\sum_{n=2}^4 m_n x_n(q(t))}{\sum_{n=2}^4 m_n} \quad (5.1)$$

Se ha utilizado la numeración ligada a los sistemas de referencia de los cuerpos que forman el *Cuerpo Brazo Robot*. Nótese que el vector $x_G(q(t))$ está expresado en el *Sistema de Referencia Inercial* según se definieron los vectores x_i en los anteriores capítulos.

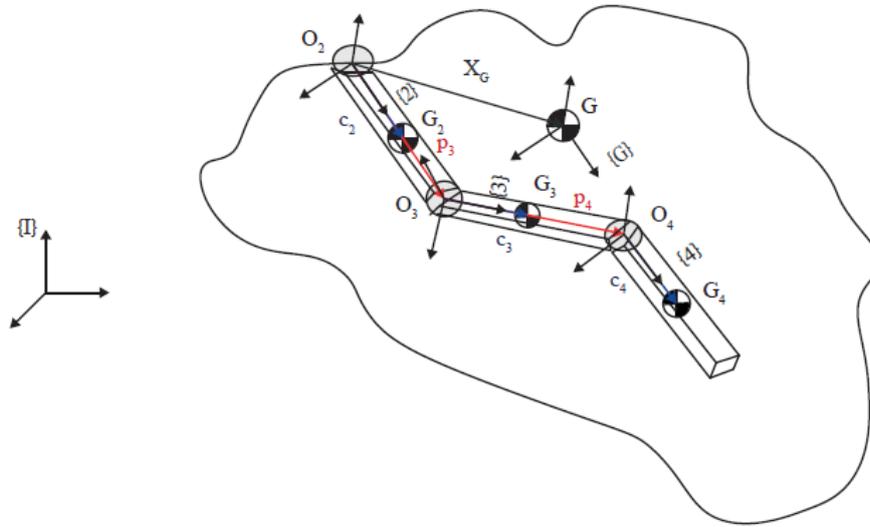


Figura 5.2 Vector de posición x_G definido en el *Cuerpo Brazo Robot*.

Sin embargo, si lo que queremos es obtener el vector X_G representado en la Figura 5.2 será necesario un cambio de sistema de referencia y para ello utilizamos las matrices de rotación ya definidas

$$X_G = (R_2^I)^T (x_G - p_1) \quad (5.2)$$

o aplicamos la ecuación 5.1 a los vectores de posición respecto al *Sistema de Referencia 2* como se hará posteriormente.

5.2 Tensor de inercia en X_G

Para terminar de caracterizar el *Cuerpo Brazo Robot* es necesario conocer el tensor de inercia ligado al centro de masas de éste. Para ello sólo conocemos el tensor de inercia de los prismas expresados en sus ejes de inercia principales en el centro de masa de los mismos. Como unión entre las dos caracterizaciones del brazo

robot, se tiene el origen del *Sistema de Referencia 2*, O_2 . Se utilizará el Teorema de Steiner aplicado dos veces para llegar al tensor de inercia del *Cuerpo Brazo Robot*. El Teorema de Steiner dice que

Teorema 5.2.1 (Teorema de Steiner) *El tensor de inercia de un sistema material en un punto O , respecto a un sistema de referencia es igual al tensor de inercia respecto a un sistema de referencia paralelo al anterior, que pasa por el centro de masas más el tensor de inercia respecto a los ejes situados en O de la masa total concentrada en G .*

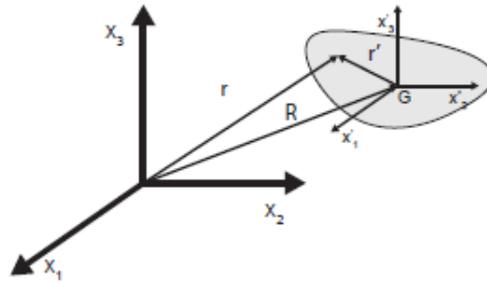


Figura 5.3 Teorema de Steiner.

Se formula matemáticamente de la siguiente forma,

$$I_{ij}(O) = I_{ij}(G) + M [R^2 \delta_{ij} - \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j]$$

Hay que destacar que el Teorema de Steiner nos indica dos puntos que no se pueden obviar para calcular correctamente el tensor de inercia.

- Los sistemas de referencia de los puntos donde se calculan los tensores de inercia son **paralelos**. Así será necesario girar ciertos sistemas de referencia para utilizarlos adecuadamente.
- El Teorema de Steiner sólo relaciona el tensor de inercia en el **centro de masas** de un cuerpo con el tensor de inercia en cualquier otro punto. No se podrá utilizar, por tanto, los tensores de inercia en el origen de los *Sistemas de Referencia 3 y 4*.

Se seguirá el siguiente procedimiento para obtener el tensor de inercia en el centro de masas del *Cuerpo Brazo Robot*.

1. Calcular los tensores de inercia de los cuerpos 2, 3 y 4 en el origen del *Sistema de Referencia 2*, O_2 utilizando el 5.2.1 Teorema de Steiner.
 - a) Calcular los vectores del centro de masas de los 'links', x_{G_2} , x_{G_3} y x_{G_4} en el *Sistema de Referencia 2*.

$$\begin{aligned}
x_{G_2} &= c_2 \\
x_{G_3} &= p_2 + R_3^2(q(t)) c_3 \\
x_{G_4} &= p_2 + R_3^2(q(t)) p_3 + R_4^2(q(t)) c_4
\end{aligned} \tag{5.3}$$

- b) Para cada 'link' se gira el tensor de inercia del centro de masa correspondiente a los ejes principales, paralelos al *Sistema de Referencia k* del 'link', para obtener unos ejes paralelos al *Sistema de Referencia 2* y así poder aplicar el Teorema de Steiner.

$$\begin{aligned}
I_{ij}(G_3)_{\parallel 2} &= R_3^2(q(t)) I_{ij}(G_3)_3 (R_3^2(q(t)))^T \\
I_{ij}(G_4)_{\parallel 2} &= R_4^2(q(t)) I_{ij}(G_4)_4 (R_4^2(q(t)))^T
\end{aligned}$$

- c) Para terminar se aplica el Teorema de Steiner en el origen del *Sistema de Referencia 2*.

$$\begin{aligned}
I_{ij}^2(O_2) &= I_{ij}(G_2)_2 + m_1 \left[|x_{G_2}|^2 \delta_{ij} - x_{G_{2i}} \cdot x_{G_{2j}} \right] \\
I_{ij}^3(O_2) &= I_{ij}(G_3)_2 + m_2 \left[|x_{G_3}|^2 \delta_{ij} - x_{G_{3i}} \cdot x_{G_{3j}} \right] \\
I_{ij}^4(O_2) &= I_{ij}(G_4)_2 + m_3 \left[|x_{G_4}|^2 \delta_{ij} - x_{G_{4i}} \cdot x_{G_{4j}} \right]
\end{aligned}$$

2. Conocido los tensores de inercia $I_{ij}^2(O_2)$, $I_{ij}^3(O_2)$ y $I_{ij}^4(O_2)$ y sabiendo la propiedad distributiva de los tensores de inercia que dice

Propiedad 5.2.1 (Distributiva)

$$I_{ij}(A \cup B) = I_{ij}(A) + I_{ij}(B)$$

si A y B son dos particiones disjuntas de un conjunto τ y los I_{ij} están todos calculados en el mismo punto del espacio.

Se puede obtener fácilmente el tensor de inercia del conjunto brazo robot en O_2 , $I_{ij}^{sol}(O_2)$.

3. Aplicando de nuevo el Teorema de Steiner y referenciando al centro de gravedad del *Cuerpo Brazo Robot*, se llega al tensor de inercia $I_{ij}^{sol}(G)$.

$$I_{ij}^{sol}(G) = I_{ij}^{sol}(O_2) - m_{sol} \left[|X_G|^2 \delta_{ij} - X_{G_i} \cdot X_{G_j} \right]$$

La masa total del brazo robot es $m_{sol} = m_1 + m_2 + m_3$

4. El tensor de inercia obtenido $I_{ij}^{sol}(G)$ está ligado a un sistema de referencia paralelo al *Sistema de Referencia 2* como se deduce de la aplicación del Teorema de Steiner.

5.3 Expresiones del cuerpo equivalente al Brazo Robot. X_G y $I_{ij}^{sol}(G)$

El objetivo principal de este proyecto fin de carrera es obtener las expresiones del centro de gravedad y el tensor de inercia del cuerpo equivalente al Brazo Robot para la reducción del número de ecuaciones dinámicas a simular para un futuro control del *Sistema Robot*.

Las ecuaciones de los diferentes centros de gravedad (5.3) tiene la siguiente expresión en coordenadas generalizadas y parámetros másicos y geométricos

$$x_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_{G_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_0 \end{bmatrix} + R_3^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_{G_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_0 \end{bmatrix} + R_3^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} + R_4^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_3^2 = \begin{bmatrix} \cos(\phi_2) \cos(\theta_2) & \sin(\phi_2) \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2) - \cos(\psi_2) \sin(\phi_2) & \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\theta_2) \sin(\psi_2) \sin(\phi_2) & \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) \\ \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2) & \cos(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) & \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$R_4^2(1,1) = \cos(\phi_2) \cos(\phi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) - \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\phi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \sin(\theta_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)]$$

$$R_4^2(1,2) = \sin(\theta_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_3)$$

$$R_4^2(1,3) = \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_2) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) - \cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \sin(\theta_3)$$

$$R_4^2(2,1) = \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] - [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)]$$

$$R_4^2(2,2) = [\cos(\phi_2)\cos(\psi_2) + \sin(\phi_2)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2)][\cos(\psi_3)\cos(\phi_3) + \sin(\phi_3)\sin(\psi_3)\sin(\theta_3)] - \\ - \sin(\phi_3)\cos(\theta_3)[\cos(\psi_2)\sin(\phi_2) - \cos(\phi_2)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2)] - \sin(\psi_2)\cos(\theta_2) \\ [\cos(\phi_3)\sin(\psi_3) - \sin(\phi_3)\cos(\psi_3)\sin(\theta_3)]$$

$$R_4^2(2,3) = \sin(\theta_3)[\cos(\psi_2)\sin(\phi_2) - \cos(\phi_2)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2)] + \cos(\theta_3)\sin(\psi_3) \\ [\cos(\phi_2)\cos(\psi_2) + \sin(\phi_2)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2)] + \cos(\psi_3)\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)\sin(\psi_2)$$

$$R_4^2(3,1) = [\cos(\phi_2)\sin(\psi_2) - \cos(\psi_2)\sin(\phi_2)\sin(\theta_2)][\cos(\psi_3)\sin(\phi_3) - \cos(\phi_3)\sin(\psi_3)\sin(\theta_3)] + \\ + \cos(\phi_3)\cos(\theta_3)[\sin(\phi_2)\sin(\psi_2) + \cos(\phi_2)\cos(\psi_2)\sin(\theta_2)] + \cos(\psi_2)\cos(\theta_2) \\ [\sin(\phi_3)\sin(\psi_3) + \cos(\phi_3)\cos(\psi_3)\sin(\theta_3)]$$

$$R_4^2(3,2) = \cos(\theta_3)\sin(\phi_3)[\sin(\phi_2)\sin(\psi_2) + \cos(\phi_2)\cos(\psi_2)\sin(\theta_2)] - \cos(\psi_2)\cos(\theta_2) \\ [\cos(\psi_3)\cos(\phi_3) - \cos(\psi_3)\sin(\phi_3)\sin(\theta_3)] - [\cos(\phi_2)\sin(\psi_2) - \sin(\phi_2)\cos(\psi_2)\sin(\theta_2)] \\ [\cos(\phi_3)\cos(\psi_3) + \sin(\phi_3)\sin(\psi_3)\sin(\theta_3)]$$

$$R_4^2(3,3) = \cos(\psi_2)\cos(\psi_3)\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \cos(\theta_3)\sin(\psi_3)[\cos(\phi_2)\sin(\psi_2) - \cos(\psi_2)\sin(\phi_2)\sin(\theta_2)] \\ - \sin(\theta_3)[\sin(\phi_2)\sin(\psi_2) + \cos(\phi_2)\cos(\psi_2)\sin(\theta_2)]$$

Con estas expresiones se obtiene el centro de gravedad X_G

$$X_G = \frac{m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_1}{2} \end{bmatrix} + m_2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_0 \end{bmatrix} + R_3^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \end{bmatrix} \right\} + m_3 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_0 \end{bmatrix} + R_3^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} + R_4^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_3}{2} \end{bmatrix} \right\}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

En cuanto al tensor de inercia ligado al centro de gravedad X_G del cuerpo equivalente del *Brazo Robot*, primero es necesario expresar los tensores de inercia intermedios calculados para obtener la expresión de $I_{ij}^{sol}(G)$.

Los tensores de inercia en ejes principales de los 'links' 2, 3 y 4 centrados en sus respectivos centros de gravedad,

$$I_{ij}(G_2)_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m_1 (b^2 + l_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_1 (a^2 + l_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_1 (b^2 + a^2) \end{bmatrix}$$

$$I_{ij}(G_3)_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m_2 (b^2 + l_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_2 (a^2 + l_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_2 (b^2 + a^2) \end{bmatrix}$$

$$I_{ij}(G_4)_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m_3 (b^2 + l_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_3 (a^2 + l_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_3 (b^2 + a^2) \end{bmatrix}$$

Los tensores $I_{ij}(G_3)_3$ y $I_{ij}(G_4)_4$ girados para ser expresados en el *Sistema de Referencia 2*

$$I_{ij}(G_3)_{\parallel 2}(1,1) = \frac{1}{12} m_2 \sin^2(\theta_2) (a^2 + b^2) + \frac{1}{12} m_2 \cos^2(\phi_2) \cos^2(\theta_2) (l_2^2 + b^2) + \frac{1}{12} m_2 \cos^2(\theta_2) \sin^2(\phi_2) (l_2^2 + a^2)$$

$$\begin{aligned} I_{ij}(G_3)_{\parallel 2}(1,2) &= \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] [a^2 + l_2]] - \\ &- \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \cos(\phi_2) [\sin(\phi_2) \cos(\psi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] [b^2 + l_2]] - \\ &- \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2) [b^2 + a^2]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{ij}(G_3)_{\parallel 2}(1,3) &= \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \cos(\phi_2) [\sin(\phi_2) \sin(\psi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [b^2 + l_2]] - \\ &- \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [a^2 + l_2]] - \\ &- \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2) [b^2 + a^2]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{ij}(G_3)_{\parallel 2}(2,1) &= \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] [a^2 + l_2]] - \\ &- \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \cos(\phi_2) [\sin(\phi_2) \cos(\psi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] [b^2 + l_2]] - \\ &- \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2) [b^2 + a^2]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{ij}(G_3)_{\parallel 2}(2,2) &= \frac{1}{12} [m_2 [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)]^2 [a^2 + l_2] + \frac{1}{12} [m_2 [\sin(\phi_2) \cos(\psi_2) - \\ &\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)]^2 [b^2 + l_2] + \frac{1}{12} [m_2 \cos^2(\theta_2) \sin^2(\psi_2)] [b^2 + a^2]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{ij}(G_3)_{\parallel 2}(2,3) &= \frac{1}{12} [m_2 \cos(\psi_2) \sin(\psi_2) \cos^2(\theta_2)] [b^2 + a^2] - \frac{1}{12} [m_2 [\sin(\phi_2) \sin(\psi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] \\ &[\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] [b^2 + l_2] - \frac{1}{12} [m_2 [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] \\ &[\sin(\psi_2) \cos(\phi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [a^2 + l_2]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{ij}(G_3)_{\parallel 2}(3,1) &= \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \cos(\phi_2) [\sin(\phi_2) \sin(\psi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [b^2 + l_2]] - \\ &- \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [a^2 + l_2]] - \\ &- \frac{1}{12} [m_2 \cos(\theta_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2) [b^2 + a^2]] \end{aligned}$$

$$I_{ij}(G_3)_{||2}(2,3) = \frac{1}{12} [m_2 \cos(\psi_2) \sin(\psi_2) \cos^2(\theta_2)] [b^2 + a^2] - \frac{1}{12} [m_2 [\sin(\phi_2) \sin(\psi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] \\ [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)]] [b^2 + l_2] - \frac{1}{12} [m_2 [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] \\ [\sin(\psi_2) \cos(\phi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)]] [a^2 + l_2]$$

$$I_{ij}(G_3)_{||2}(3,3) = \frac{1}{12} [m_2 [\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \cos(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)]^2] [a^2 + l_2] + \frac{1}{12} [m_2 [\sin(\phi_2) \sin(\psi_2) + \\ \cos(\psi_2) \cos(\phi_2) \sin(\theta_2)]^2] [b^2 + l_2] + \frac{1}{12} [m_2 \cos^2(\psi_2) \cos^2(\theta_2)] [b^2 + a^2]$$

$$I_{ij}(G_4)_{||2}(1,1) = \\ \frac{1}{12} m_3 [a^2 + b^2] [\cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) + \cos(\psi_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_2) \sin(\psi_3)]^2 + \\ + \frac{1}{12} m_3 [b^2 + l_3^2] [\sin(\theta_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) \\ [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)]] - \cos(\phi_2) \cos(\phi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)]^2 + \\ + \frac{1}{12} m_3 [a^2 + l_3^2] [\sin(\theta_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \\ + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\psi_3) \cos(\phi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)]] + \cos(\phi_2) \sin(\phi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)]^2$$

$$I_{ij}(G_4)_{||2}(1,2) = \\ \frac{1}{12} m_3 [b^2 + l_3^2] [\sin(\theta_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\ + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)]] - \\ - \cos(\phi_2) \cos(\phi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)] \\ + [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\ + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\ - \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\ \frac{1}{12} m_3 [a^2 + b^2] [\cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) + \cos(\psi_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_2) \sin(\psi_3)] \\ + \sin(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\ + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\ - \cos(\phi_2) \cos(\phi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)]^2 + \frac{1}{12} m_3 [a^2 + l_3^2] \\ [\sin(\theta_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) \\ [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)]] + \cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_3)]^2$$

$$\begin{aligned}
 I_{ij}(G_4)_{||2}(1,3) = & \\
 \frac{1}{12}m_3 [a^2 + b^2] & [\cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) + \cos(\psi_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_2) \sin(\psi_3)] \\
 & [\sin(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
 & + \cos(\theta_3) \sin(\psi_3) [\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \cos(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)] - \\
 & - \cos(\psi_2) \cos(\psi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)] - \\
 - \frac{1}{12}m_3 [b^2 + l_3^2] & [\sin(\theta_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\
 & - \cos(\phi_2) \cos(\phi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)] \\
 [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] & [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
 & + \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)]] - \\
 - \frac{1}{12}m_3 [a^2 + l_3^2] & [\sin(\theta_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & + \cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_3)] \\
 & [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \cos(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)] \\
 & [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & + \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] - \\
 & - \cos(\theta_3) \sin(\phi_3) [\sin(\phi_2) \sin(\psi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{ij}(G_4)_{||2}(2,1) = & \\
 \frac{1}{12}m_3 [b^2 + l_3^2] & [\sin(\theta_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\
 & - \cos(\phi_2) \cos(\phi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)] \\
 [[\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] & [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\
 & - \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)]] - \\
 \frac{1}{12}m_3 [a^2 + b^2] & [\cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) + \cos(\psi_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_2) \sin(\psi_3)] \\
 & [\sin(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
 & + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\
 & - \cos(\phi_2) \cos(\phi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)]^2 + \frac{1}{12}m_3 [a^2 + l_3^2] \\
 & [\sin(\theta_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) \\
 & [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_3)]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{ij}(G_4)_{\parallel 2}(2,2) = & \frac{1}{12}m_3 [a^2 + b^2] [\sin(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& + \cos(\theta_3) \sin(\psi_3) [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& \cos(\psi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\psi_2)]^2 + \\
+ \frac{1}{12}m_3 [b^2 + l_3^2] & [[\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\
& - \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)]]^2 + \\
+ \frac{1}{12}m_3 [a^2 + l_3^2] & [\cos(\theta_3) \sin(\phi_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\
- [[\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] & [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& + \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)]]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{ij}(G_4)_{\parallel 2}(2,3) = & \frac{1}{12}m_3 [a^2 + l_3^2] [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \cos(\phi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& + \cos(\theta_2) \cos(\psi_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \sin(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\
& - \sin(\phi_3) \cos(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)]] \\
& [\cos(\theta_3) \sin(\phi_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\
& - [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)]] \\
& [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& + \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \sin(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\
- \frac{1}{12}m_3 [b^2 + l_3^2] & [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& + \cos(\theta_2) \cos(\psi_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)]] \\
& [[\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)] \\
& [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \sin(\psi_3) \cos(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\
& - \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)]] \\
- \frac{1}{12}m_3 [a^2 + b^2] & [\sin(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& + \cos(\theta_3) \sin(\psi_3) [\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\
& \cos(\psi_2) \cos(\psi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)] \\
& [\sin(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& + \cos(\theta_3) \sin(\psi_3) [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& \sin(\psi_2) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \cos(\psi_3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I_{ij}(G_4)_{||2}(3,1) = \\
 & \frac{1}{12}m_3 [a^2 + b^2] [\cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) + \cos(\psi_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_2) \sin(\psi_3)] \\
 & \quad [\sin(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
 & \quad + \cos(\theta_3) \sin(\psi_3) [\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \cos(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)] - \\
 & \quad - \cos(\psi_2) \cos(\psi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)] - \\
 & - \frac{1}{12}m_3 [b^2 + l_3^2] [\sin(\theta_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & \quad + \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\
 & \quad - \cos(\phi_2) \cos(\phi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)] \\
 & [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & \quad + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
 & \quad + \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)]] - \\
 & - \frac{1}{12}m_3 [a^2 + l_3^2] [\sin(\theta_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & \quad \cos(\theta_2) \sin(\phi_2) [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & \quad + \cos(\phi_2) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\phi_3)] \\
 & \quad [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \cos(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)] \\
 & \quad [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
 & \quad + \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \cos(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] - \\
 & \quad - \cos(\theta_3) \sin(\phi_3) [\sin(\phi_2) \sin(\psi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{ij}(G_4)_{||2}(3,2) = \\
& \frac{1}{12}m_3 [a^2 + l_3^2] [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \cos(\phi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& \quad + \cos(\theta_2) \cos(\psi_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \sin(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\
& \quad - \sin(\phi_3) \cos(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)]] \\
& \quad [\cos(\theta_3) \sin(\phi_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\
& \quad - [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)]] \\
& \quad [\cos(\phi_3) \cos(\psi_3) + \sin(\psi_3) \sin(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& \quad + \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) [\cos(\phi_3) \sin(\psi_3) - \sin(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\
& - \frac{1}{12}m_3 [b^2 + l_3^2] [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& \quad + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& \quad + \cos(\theta_2) \cos(\psi_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)]] \\
& \quad [[\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\psi_2) \sin(\phi_2) \sin(\theta_2)] \\
& \quad [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \sin(\psi_3) \cos(\phi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& \quad + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\
& \quad - \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)]] \\
& - \frac{1}{12}m_3 [a^2 + b^2] [\sin(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& \quad + \cos(\theta_3) \sin(\psi_3) [\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] - \\
& \quad \cos(\psi_2) \cos(\psi_3) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)] \\
& \quad [\sin(\theta_3) [\cos(\psi_2) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& \quad + \cos(\theta_3) \sin(\psi_3) [\cos(\phi_2) \cos(\psi_2) + \sin(\phi_2) \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& \quad \sin(\psi_2) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \cos(\psi_3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{ij}(G_4)_{||2}(3,3) = \\
& \frac{1}{12}m_3 [a^2 + b^2] [\sin(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& \quad + \cos(\theta_3) \sin(\psi_3) [\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& \quad \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \cos(\psi_3)]^2 + \\
& + \frac{1}{12}m_3 [b^2 + l_3^2] [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \sin(\phi_3) - \cos(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& \quad + \cos(\phi_3) \cos(\theta_3) [\sin(\psi_2) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] + \\
& \quad + \cos(\theta_2) \cos(\psi_2) [\sin(\phi_3) \sin(\psi_3) + \cos(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)]]^2 + \\
& + \frac{1}{12}m_3 [a^2 + l_3^2] [[\cos(\phi_2) \sin(\psi_2) - \sin(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)] [\cos(\psi_3) \cos(\phi_3) + \sin(\phi_3) \sin(\psi_3) \sin(\theta_3)] + \\
& \quad + \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) [\sin(\psi_3) \cos(\phi_3) - \sin(\phi_3) \cos(\psi_3) \sin(\theta_3)] - \\
& \quad - \cos(\theta_3) \sin(\phi_3) [\sin(\phi_2) \sin(\psi_2) + \cos(\phi_2) \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)]]^2
\end{aligned}$$

5.4 Ecuaciones cinemáticas y dinámicas del *Sistema Robot* equivalente

Por último, se desarrollan las ecuaciones cinemáticas y dinámicas resultantes de utilizar el cuerpo equivalente al *Brazo Robot*.

El *Sistema Robot* equivalente estará formado ahora por el cuerpo que modela el rotor coaxial ligado al *Sistema de Referencia 1* y el cuerpo equivalente al *Brazo Robot* ligado al *Sistema de Referencia 2*. Se reduce así el número de variables generalizadas a nueve, facilitando la implementación de las ecuaciones.

$$q = (X \ Y \ Z \ \phi_0 \ \theta_0 \ \psi_0 \ \phi_1 \ \theta_1 \ \phi_1)$$

$$\dot{q} = (\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z} \ \dot{\phi}_0 \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\psi}_0 \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\phi}_1)$$

$$\ddot{q} = (\ddot{X} \ \ddot{Y} \ \ddot{Z} \ \ddot{\phi}_0 \ \ddot{\theta}_0 \ \ddot{\psi}_0 \ \ddot{\phi}_1 \ \ddot{\theta}_1 \ \ddot{\phi}_1)$$

Las ecuaciones cinemáticas lineales y de actitud son ahora

$$v_o = \begin{bmatrix} J_{v_{o1}} \\ J_{v_{o2}} \end{bmatrix} \dot{q}$$

$$\omega_1 = (\hat{J}_{\omega_1} \ 0 \ 0 \ 0) \dot{q}_\omega$$

$$\omega_2 = (\hat{J}_{\omega_1} \ R_1^T \hat{J}_{\omega_2} \ 0 \ 0) \dot{q}_\omega$$

$$\omega = \begin{bmatrix} J_{\omega_1} \\ J_{\omega_2} \end{bmatrix} \dot{q}$$

Respecto a los vectores y matrices que son necesarios para determinar los jacobianos lineal y angular no cambian respecto a lo expresado en 4.2 para los 'links' 1 y 2 excepto el vector que indica la posición del centro de masas del cuerpo ligado al *Sistema de Referencia 2* que ahora será el centro de masas del cuerpo equivalente al *Brazo Robot*, es decir, $c_2 = X_G$ definido X_G en la ecuación 5.2.

Así si expresamos las ecuaciones cinemáticas de los dos cuerpos al completo

- **Link 1, Rotor coaxial:**

$$v_{o1} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad \omega_1 = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_0 - \dot{\phi}_0 \sin(\theta_0) \\ \dot{\theta}_0 \cos(\psi_0) + \dot{\phi}_0 \cos(\theta_0) \sin(\psi_0) \\ \dot{\phi}_0 \cos(\psi_0) \cos(\theta_0) - \dot{\theta}_0 \sin(\psi_0) \end{bmatrix}$$

- **Link 2, cuerpo equivalente al *Brazo Robot*:**

$$v_{o_2} = \begin{bmatrix} \dot{X} + \dot{\theta}_0 l_0 \cos(\theta_0) \\ \dot{Y} - \dot{\psi}_0 l_0 \cos(\psi_0) \cos(\theta_0) + \dot{\theta}_0 l_0 \sin(\psi_0) \sin(\theta_0) \\ \dot{Z} + \dot{\psi}_0 l_0 \sin(\psi_0) \cos(\theta_0) + \dot{\theta}_0 l_0 \cos(\psi_0) \sin(\theta_0) \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}_0 - \dot{\theta}_1 (\sin(\psi_1) \sin(\theta_0) + \cos(\psi_1) \cos(\theta_0) \sin(\phi_0)) - \dot{\phi}_0 \sin(\theta_0) - \dot{\phi}_1 (\cos(\phi_0) \cos(\theta_0) \sin(\theta_1) - \\ \cos(\psi_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0) \cos(\theta_1) \sin(\phi_0) \sin(\psi_1)) + \dot{\psi}_1 \cos(\phi_0) \cos(\theta_0) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_0 \cos(\psi_0) - \dot{\psi}_1 (\cos(\phi_0) \cos(\psi_0) \sin(\theta_0) - \cos(\phi_0) \sin(\psi_0) \sin(\theta_0)) - \\ -\dot{\phi}_1 [\cos(\theta_1) \sin(\psi_1) (\cos(\phi_0) \cos(\psi_0) + \sin(\phi_0) \sin(\psi_0) \sin(\theta_0)) - \sin(\theta_1) (\cos(\psi_0) \sin(\phi_0) - \\ - \cos(\phi_0) \sin(\psi_0) \sin(\theta_0)) + \cos(\psi_1) \cos(\theta_0) \cos(\theta_1) \sin(\psi_0)] - \\ -\dot{\theta}_1 [\cos(\psi_1) (\cos(\phi_0) \cos(\psi_0) + \sin(\phi_0) \sin(\psi_0) \sin(\theta_0)) - \cos(\theta_0) \sin(\psi_0) \sin(\psi_1)] + \\ + \dot{\phi}_0 \cos(\theta_0) \sin(\psi_0) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}_1 (\sin(\phi_0) \sin(\psi_0) + \cos(\phi_0) \cos(\psi_0) \sin(\theta_0)) - \\ -\dot{\phi}_1 [\sin(\theta_1) (\sin(\phi_0) \sin(\psi_0) + \cos(\phi_0) \cos(\psi_0) \sin(\theta_0)) - \\ - \cos(\theta_1) \sin(\psi_1) (\cos(\phi_0) \sin(\psi_0) - \cos(\psi_0) \sin(\phi_0) \sin(\theta_0)) + \\ + \cos(\psi_0) \cos(\psi_1) \cos(\theta_0) \cos(\theta_1)] - \dot{\theta}_0 \sin(\psi_0) + \\ + \dot{\theta}_1 [\cos(\psi_1) (\cos(\phi_0) \sin(\psi_0) - \sin(\phi_0) \cos(\psi_0) \sin(\theta_0)) + \\ + \cos(\theta_0) \cos(\psi_0) \sin(\psi_1)] + \dot{\phi}_0 \cos(\theta_0) \cos(\psi_0) \end{array} \right\} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones dinámicas 4.3 para el conjunto de cuerpos del *Sistema Robot* se reduce a

$$\left((J_1)^T M_1 J_1 + (J_2)^T M_2 J_2 \right) \ddot{q} + \left[\left((J_1)^T M_1 J_1 + (J_2)^T M_2 J_2 \right) + \left((J_1)^T \Omega_1 M_1 E J_1 + (J_2)^T \Omega_2 M_2 E J_2 \right) \right] \dot{q} = \left((J'_{v_1})^T f_1 + (J_{\omega_1})^T \tau'_1 \right) + \left((J'_{v_2})^T f_2 + (J_{\omega_2})^T \tau'_2 \right)$$

donde los jacobianos tienen la siguiente forma

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sin(\theta_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\psi_0) & \cos(\theta_0) * \sin(\psi_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\psi_0) & \cos(\psi_0) * \cos(\theta_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_2(:, 1:6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & l_0 * \cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 * \cos(\psi_0) * \cos(\theta_0) & l_0 * \sin(\psi_0) * \sin(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 * \cos(\theta_0) * \sin(\psi_0) & l_0 * \cos(\psi_0) * \sin(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sin(\theta_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\psi_0) & \cos(\theta_0) * \sin(\psi_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\psi_0) & \cos(\psi_0) * \cos(\theta_0) \end{bmatrix}$$

$$J_2(:,7) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos(\phi_0) * \cos(\theta_0) \\ \cos(\phi_0) * \sin(\psi_0) * \sin(\theta_0) - \cos(\psi_0) * \sin(\phi_0) \\ \sin(\phi_0) * \sin(\psi_0) + \cos(\phi_0) * \cos(\psi_0) * \sin(\theta_0) \end{bmatrix}$$

$$J_2(:,8) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin(\psi_1) * \sin(\theta_0) - \cos(\psi_1) * \cos(\theta_0) * \sin(\phi_0) \\ \cos(\theta_0) * \sin(\psi_0) * \sin(\psi_1) - \cos(\psi_1) * (\cos(\phi_0) * \cos(\psi_0) + \sin(\phi_0) * \sin(\psi_0) * \sin(\theta_0)) \\ \cos(\psi_1) * (\cos(\phi_0) * \sin(\psi_0) - \cos(\psi_0) * \sin(\phi_0) * \sin(\theta_0)) + \cos(\psi_0) * \cos(\theta_0) * \sin(\psi_1) \end{bmatrix}$$

$$J_2(:,9) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos(\psi_1) * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_0) - \cos(\phi_0) * \cos(\theta_0) * \sin(\theta_1) - \\ \cos(\theta_0) * \cos(\theta_1) * \sin(\phi_0) * \sin(\psi_1) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta_1) * (\cos(\psi_0) * \sin(\phi_0) - \cos(\phi_0) * \sin(\psi_0) * \sin(\theta_0)) - \cos(\theta_1) * \sin(\psi_1) * (\cos(\phi_0) * \cos(\psi_0) \\ + \sin(\phi_0) * \sin(\psi_0) * \sin(\theta_0) - \cos(\psi_1) * \cos(\theta_0) * \cos(\theta_1) * \sin(\psi_0)) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta_1) * \sin(\psi_1) * (\cos(\phi_0) * \sin(\psi_0) - \cos(\psi_0) * \sin(\phi_0) * \sin(\theta_0)) - \sin(\theta_1) * (\sin(\phi_0) * \sin(\psi_0) + \\ \cos(\phi_0) * \cos(\psi_0) * \sin(\theta_0) - \cos(\psi_0) * \cos(\psi_1) * \cos(\theta_0) * \cos(\theta_1)) \end{array} \right\} \end{bmatrix}$$

Las matrices de masas de cada cuerpo son

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_0 \mathbf{I} & -m_0 W_1^I [c_1] \\ m_0 W_1^I [c_1] & R_1^I I_{1_o} (R_1^I)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & R_1^I I_{1_o} (R_1^I)^T \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} m_{sol} \mathbf{I} & -m_{sol} W_2^I [X_G] \\ m_{sol} W_2^I [X_G] & R_2^I I_G^{sol} (R_2^I)^T \end{bmatrix}$$

donde

$$I_{1_o} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_0 R_d^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m_0 R_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m_0 R_d^2 \end{bmatrix}$$

W_2^I , R_1^I y R_2^I no cambian su valor respecto a lo ya definido en los Capítulos anteriores. Se puede apreciar que ahora se usan las expresiones de X_G y I_G^{sol} para el cálculo de la matriz de masa.

Sólo uno de los jacobianos asociado a las fuerzas y pares externos va a modificarse en esta configuración y es J'_{v_2} que es el que relaciona las fuerzas exteriores en su punto de aplicación, ahora X_G , con las fuerzas generalizadas. También el vector de fuerzas f_2 y el par τ_2 se modificarán

$$J'_{v_2} = \frac{\delta (R_2^I X_G)}{\delta q}$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{sol}g \end{bmatrix}_I \quad \tau_2 = [X_G - o_2] f_2$$

6 Simulador

Como punto adicional al proyecto, en las siguientes páginas se describe la estructura construida para la realización de un Simulador que obtenga el sistema definido en el Capítulo 4. En el Apéndice A y B se incluye los códigos desarrollados para este Simulador.

6.1 Estructura de las funciones

El archivo `.m` que inicializa el Simulador de nombre `SimulacionRotor3D_3links.m` contiene las condiciones iniciales de las variables generalizadas definidas en 4.2 así como las entradas del vector fuerzas generalizadas F_0 .

Ejecuta de igual modo la función `rotor3D_3links.m`. Esta función toma como entrada el vector de condiciones iniciales x_0 definido en `SimulacionRotor3D_3links.m`, el vector de fuerzas generalizadas F_0 y el tiempo del fin de la simulación T_{fin} .

La función `rotor3D_3links.m` proporciona como salida el vector de variables generalizadas q en el último instante de la simulación de las ecuaciones dinámicas del sistema, ver ecuación 4.3. Las ecuaciones dinámicas se define en la función `fun.m` que es llamada por la función `rotor3D_3links.m` dentro del comando `ode15s`. Así `fun.m` desarrolla los cálculos necesarios que se definen en el Capítulo 4.2 entre las páginas 34 y 38.

Para que el proceso de calcular el jacobiano, las matrices de rotación y los vectores de posición no incrementaran el tiempo de cálculo del Simulador se obtiene como salida de la función `jacobianoYR_3link.m` las expresiones simbólicas de las variables $[J, dJ, R, X1, X2, x, o, long, Jf]$ y se implementan en la función `fun.m` a partir de la serie de archivos `.m` `sustitucionX` siendo X cada una de las variables de salida de la función `jacobianoYR_3link.m`.

Apéndice **A**

Función *SimulacionRotor3D_3links.m*

```

% %Simulador rotor-robot3D

clear all; close all; clc

%Condiciones iniciales de fuerzas/pares externos

Tx=0; Ty=0; Tz=550;

Tau1x=0; Tau1y=0; Tau1z=0;

Tau2x=0; Tau2y=0; Tau2z=0;

Tau3x=0; Tau3y=0; Tau3z=0;

F0=[Tx,Ty,Tz,Tau1x,Tau1y,Tau1z,Tau2x,Tau2y,Tau2z,Tau3x,Tau3y,Tau3z]';
%size=9x1

Tfin=10;

%Condiciones iniciales de variables generalizadas

X=0; Y=0; Z=0;

psi0=0; theta0=0; phi0=0*pi/180;

psi1=0*pi/180; theta1=0*pi/180; phi1=0*pi/180;

psi2=0; theta2=0*pi/180; phi2=0*pi/180;

psi3=0*pi/180; theta3=0*pi/180; phi3=0*pi/180;

dX=0; dY=0; dZ=0;

dpsi0=0; dtheta0=0; dphi0=0;

dpsi1=0; dtheta1=0*pi/180; dphi1=0;

dpsi2=0; dtheta2=0; dphi2=0;

dpsi3=0; dtheta3=0; dphi3=0;

```

```
x0=[X,Y,Z,psi0,theta0,phi0,psi1,theta1,phi1,psi2,theta2,phi2,psi3,theta3,phi3  
dX,dY,dZ,dpsi0,dtheta0,dphi0,dpsi1,dtheta1,dphi1,dpsi2,dtheta2,dphi2,psi3,  
theta3,phi3]'; %size=15x1  
  
rotor3D_3links(x0,F0,Tfin)
```


Apéndice **B**

Función *rotor3D_3links.m*. Función anidada
fun.m

```

% Rotor 3D

function y = rotor3D_3links(x0,F0,Tfin)

%x0- condiciones iniciales

%Tfin- tiempo de simulación

global m0 l0 m1 l1 m2 l2 m3 l3 g I1_1 I2_1 I3_1 I1_2 I2_2 I3_2 I1_3 I2_3 I3_3
I1_4 I2_4 I3_4

%Distancias en [m], masas en [kg], inercias en [kg*m^2]

m0=5; m1=15; m2=15; m3=20;

l0=0.2; l1=0.3; l2=0.25; l3=0.3;

I1_1=30; I2_1=10; I3_1=10; I1_2=5; I2_2=5; I3_2=5; I1_3=5; I2_3=10; I3_3=30;
I1_4=40; I2_4=20; I3_4=40;

g=9.81;

% %Cálculo simbolico de J, dJ, R

% [Ja,dJa,Ra,X1a,X2a,xa,oa,long,Jfa]=jacobianoYR_3link;

%Tiempo de simulacion

tspan=[0 Tfin];

TOL=1e-4;

opciones=odeset('AbsTol',TOL,'RelTol',TOL,'Stats','on','Jpattern',jacpattern(3
0),'MaxOrder',3);

[t,x]=ode15s(@fun, tspan, x0,opciones,F0);

%Graficas

figure(1);

```

```

subplot(211),

plot(t,x(:,1),'r-*',t,x(:,2),'g-*',t,x(:,3),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('X[m]','Y[m]','Z[m]','Location','Best')

subplot(212),

plot(t,x(:,4),'r-*',t,x(:,5),'g-*',t,x(:,6),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('\psi_0[rad]','\theta_0[rad]','\phi_0[rad]','Location','Best')

print('condinithetal_pos1','-djpeg')

figure(2);

subplot(211),

plot(t,x(:,7),'r-*',t,x(:,8),'g-*',t,x(:,9),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('\psi_1[rad]','\theta_1[rad]','\phi_1[rad]','Location','Best')

subplot(212),

plot(t,x(:,10),'r-*',t,x(:,11),'g-*',t,x(:,12),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('\psi_2[rad]','\theta_2[rad]','\phi_2[rad]','Location','Best')

print('condinithetal_pos2','-djpeg')

```

```

figure(3)

plot(t,x(:,13),'r-*',t,x(:,14),'g-*',t,x(:,15),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('\psi_3[rad]','\theta_3[rad]','\phi_3[rad]','Location','Best')

print('condinithetal_pos3','-djpeg')

figure(4);

subplot(211),

plot(t,x(:,16),'r-*',t,x(:,17),'g-*',t,x(:,18),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('dX/dt[m/s]','dY/dt[m/s]','dZ/dt[m/s]','Location','Best')

subplot(212),

plot(t,x(:,19),'r-*',t,x(:,20),'g-*',t,x(:,21),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('d\psi_0/dt[rad/s]','d\theta_0/dt[rad/s]','d\phi_0/dt[rad/s]','Location','Best')

print('condinithetal_vell1','-djpeg')

figure(5);

subplot(211),

```

```

plot(t,x(:,22),'r-*',t,x(:,23),'g-*',t,x(:,24),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('d\psi_1/dt[rad/s]', 'd\theta_1/dt[rad/s]', 'd\phi_1/dt[rad/s]', 'Location
', 'Best')

subplot(212),

plot(t,x(:,25),'r-*',t,x(:,26),'g-*',t,x(:,27),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('d\psi_2/dt[rad/s]', 'd\theta_2/dt[rad/s]', 'd\phi_2/dt[rad/s]', 'Location
', 'Best')

print('condinithetal_vel2', '-djpeg')

figure(6);

plot(t,x(:,28),'r-*',t,x(:,29),'g-*',t,x(:,30),'c-*');grid

xlabel('Time (s)')

legend('d\psi_3/dt[rad/s]', 'd\theta_3/dt[rad/s]', 'd\phi_3/dt[rad/s]', 'Location
', 'Best')

print('condinithetal_vel3', '-djpeg')

save data t x

y =x(length(t),:);

end

```

```

function [dxdt] = fun(t,u,F0)

global m0 l0 m1 l1 m2 l2 m3 l3 g I1_1 I2_1 I3_1 I1_2 I2_2 I3_2 I1_3 I2_3 I3_3
I1_4 I2_4 I3_4

X1=u(1:15); %Vector posicion de coordenadas generalizadas
[X,Y,Z,phi0,theta0,psi0,phi1,theta1,psi1,phi2,theta2,psi2]'

X2=u(16:30); %Vector velocidad de coordenadas generalizadas

l1=[l0 l1 l2 l3]';

%Conversion de variables simbólicas a numéricas

J=sustitucionJ(X1,l1);

dJ=sustituciondJ(X1,X2,l1);

R=sustitucionR(X1);

Jf=sustitucionJf(X1,l1);

%Redefición de jacobianos

J_1=J(1:6,:);

J_1=sparse(J_1);

J_2=J(7:12,:);

J_2=sparse(J_2);

J_3=J(13:18,:);

J_3=sparse(J_3);

J_4=J(19:24,:);

J_4=sparse(J_4);

```

```

dJ_1=dJ(1:6,:);

dJ_2=dJ(7:12,:);

dJ_3=dJ(13:18,:);

dJ_4=dJ(19:24,:);

Jw_1=J_1(4:6,:);

Jw_2=J_2(4:6,:);

Jw_3=J_3(4:6,:);

Jw_4=J_4(4:6,:);

% Jacobianos de Fuerzas

%Link 1 (Rotor)

Jv1_prima=Jf(1:3,:);

%Link 2

Jv2_prima=Jf(4:6,:);

%Link 3

Jv3_prima=Jf(7:9,:);

%Link 4

Jv4_prima=Jf(10:12,:);

%EDC de Actitud

%EDC

w1=Jw_1*X2(:);

w2=Jw_2*X2(:);

w3=Jw_3*X2(:);

```

```

w4=Jw_4*X2 (:);

w1_skew=skew(w1); %Construccion de matriz antisimetrica

w2_skew=skew(w2);

w3_skew=skew(w3);

w4_skew=skew(w4);

OMEGA_1=blkdiag(w1_skew,w1_skew);

OMEGA_2=blkdiag(w2_skew,w2_skew);

OMEGA_3=blkdiag(w3_skew,w3_skew);

OMEGA_4=blkdiag(w4_skew,w4_skew);

[xa,oa]=sustitucionxyo(X1,11);

x1=xa(:,1);

x2=xa(:,2);

x3=xa(:,3);

x4=xa(:,4);

o1=oa(:,1);

o2=oa(:,2);

o3=oa(:,3);

o4=oa(:,4);

```

```

x1_skew=skew(x1);

x2_skew=skew(x2);

x3_skew=skew(x3);

x4_skew=skew(x4);

%Matrices de masa

Io_1=diag([I1_1,I2_1,I3_1]); %Tensor de inercia en ejes principales (e.g link
1)

Io_2=diag([I1_2,I2_2,I3_2]); %En componentes, primer valor==direccion de eje,
segundo valor==num de link

Io_3=diag([I1_3,I2_3,I3_3]);

Io_4=diag([I1_4,I2_4,I3_4]);

Ic1=R(1:3,4:6)*Io_1*R(1:3,4:6)';

Ic2=R(1:3,7:9)*Io_2*R(1:3,7:9)';

Ic3=R(1:3,10:12)*Io_3*R(1:3,10:12)';

Ic4=R(1:3,13:15)*Io_4*R(1:3,13:15)';

Mc_1=[m0*eye(3),-m0*x1_skew; m0*x1_skew,Ic1];

Mc_1=sparse(Mc_1);

Mc_2=[m1*eye(3),-m1*x2_skew; m1*x2_skew,Ic2];

Mc_2=sparse(Mc_2);

Mc_3=[m2*eye(3),-m2*x3_skew; m2*x3_skew,Ic3];

Mc_3=sparse(Mc_3);

Mc_4=[m3*eye(3),-m2*x4_skew; m3*x4_skew,Ic4];

Mc_4=sparse(Mc_4);

```

```

M1=OMEGA_1*Mc_1*blkdiag(zeros(3,3),eye(3));

M2=OMEGA_2*Mc_2*blkdiag(zeros(3,3),eye(3));

M3=OMEGA_3*Mc_3*blkdiag(zeros(3,3),eye(3));

M4=OMEGA_4*Mc_4*blkdiag(zeros(3,3),eye(3));

%Fuerzas aplicadas

f1=R(1:3,4:6)*F0(1:3)+[0 0 -m0*g]';

f2=[0 0 -m1*g]';

f3=[0 0 -m2*g]';

f4=[0 0 -m3*g]';

%Pares aplicados

Tau1_gorro=[0 0 0]';

Tau2_gorro=F0(4:6); %Pares externos Tau1

Tau3_gorro=F0(7:9); %Pares externos Tau2

Tau4_gorro=F0(10:12); %Pares externos Tau2

%Dinámica de partes móviles

Tau1_e=R(1:3,7:9)*Tau2_gorro;

Tau2_e=R(1:3,10:12)*Tau3_gorro;

Tau3_e=R(1:3,13:15)*Tau4_gorro;

ta=0; %Variable para prueba sin pares giroscopicos

Omega_1=(Ic2\Tau1_e)*t;

Omega_2=(Ic3\Tau2_e)*t;

```

```

Omega_3=(Ic4\Tau3_e)*t;

absOmega1=sqrt(normaX(Omega_1));

absOmega2=sqrt(normaX(Omega_2));

absOmega3=sqrt(normaX(Omega_3));

Tau1_girosc=absOmega1*Ic2*cross(Omega_1,[0 0 1]');

Tau2_girosc=absOmega2*Ic3*cross(Omega_2,[0 0 1]');

Tau3_girosc=absOmega3*Ic4*cross(Omega_3,[0 0 1]');

%Pares generalizados

Tau1_prima=R(1:3,4:6)*Tau1_gorro+skew(x1-o1)*f1; %Pares aplicados en cada link
expresado en el sdr inercial

Tau2_prima=R(1:3,7:9)*Tau2_gorro-R(1:3,4:6)*Tau1_gorro+skew(x2-o2)*f2-
Tau1_girosc;

Tau3_prima=R(1:3,10:12)*Tau3_gorro-
(R(1:3,4:6)*Tau1_gorro+R(1:3,7:9)*Tau2_gorro)+skew(x3-o3)*f3-Tau2_girosc;

Tau4_prima=R(1:3,13:15)*Tau4_gorro-
(R(1:3,4:6)*Tau1_gorro+R(1:3,7:9)*Tau2_gorro+R(1:3,10:12)*Tau3_gorro)+skew(x4-
o4)*f4-Tau3_girosc;

%Determinacion de matriz general de Masa, matriz de Coriolis y fuerza

%generalizada

M=J_1'*Mc_1*J_1+J_2'*Mc_2*J_2+J_3'*Mc_3*J_3+J_4'*Mc_4*J_4;

C=(J_1'*Mc_1*dJ_1+J_1'*M1*J_1)+(J_2'*Mc_2*dJ_2+J_2'*M2*J_1)+(J_3'*Mc_3*dJ_3+J_
3'*M3*J_3)+(J_4'*Mc_4*dJ_4+J_4'*M4*J_4);

Q=Jv1_prima'*f1+Jw_1'*Tau1_prima+Jv2_prima'*f2+Jw_2'*Tau2_prima+Jv3_prima'*f3+
Jw_3'*Tau3_prima+Jv4_prima'*f4+Jw_4'*Tau4_prima;

%ODEs

```

```
dX1 = X2;
```

```
dX2=M\ (Q-C*X2);
```

```
dxdt = [dX1; dX2];
```

```
end
```

B.1 Función *jacobianoYR_3link.m*

```

function [J,dJ,R,X1,X2,x,o,long,Jf]=jacobianoYR_3link

X1=zeros(15,1);

X2=zeros(15,1);

long1=0; long2=0; long3=0;

X=X1(1); Y=X1(2); Z=X1(3);

psi0=X1(4); theta0=X1(5); phi0=X1(6);

psi1=X1(5); theta1=X1(6); phi1=X1(9);

psi2=X1(10); theta2=X1(7); phi2=X1(12);

psi3=X1(13); theta3=X1(14); phi3=X1(15);

dX=X2(1); dY=X2(2); dZ=X2(3);

dpsi0=X2(4); dtheta0=X2(5); dphi0=X2(6);

dpsi1=X2(7); dtheta1=X2(8); dphi1=X2(9);

dpsi2=X2(10); dtheta2=X2(11); dphi2=X2(12);

dpsi3=X2(13); dtheta3=X2(14); dphi3=X2(15);

syms X Y Z psi0 theta0 phi0 psi1 theta1 phi1 psi2 theta2 phi2 psi3 theta3 phi3
real

syms dX dY dZ dpsi0 dtheta0 dphi0 dpsi1 dtheta1 dphi1 dpsi2 dtheta2 dphi2
dpsi3 dtheta3 dphi3 real

syms long0 long1 long2 long3 real

AG=[psi0 theta0 phi0;

    psi1 theta1 phi1;

    psi2 theta2 phi2;

    psi3 theta3 phi3];

```

```

X1=[X Y Z psi0 theta0 phi0 psi1 theta1 phi1 psi2 theta2 phi2 psi3 theta3
phi3]';

X2=[dX dY dZ dpsi0 dtheta0 dphi0 dpsi1 dtheta1 dphi1 dpsi2 dtheta2 dphi2 dpsi3
dtheta3 dphi3]';

long=[long0 long1 long2 long3]';

n=4;

%Determinación de Jacobianos

%Jacobianos angulares locales, Jw_k_gorro

for k=1:n

    i=(3*k-2:3*k);

    if k~=2

        R_x=[1 0 0;

            0 cos(AG(k,1)) sin(AG(k,1));

            0 -sin(AG(k,1)) cos(AG(k,1))];

    else

        R_x=[1 0 0;

            0 cos(AG(k,1)+pi) sin(AG(k,1)+pi);

            0 -sin(AG(k,1)+pi) cos(AG(k,1)+pi)];

    end

    R_y=[cos(AG(k,2)) 0 -sin(AG(k,2));

        0 1 0;

        sin(AG(k,2)) 0 cos(AG(k,2))];

    R_z=[cos(AG(k,3)) sin(AG(k,3)) 0;

```

```

        -sin(AG(k,3)) cos(AG(k,3)) 0;

        0 0 1];

    %Matriz de rotación de angulos de Euler elemental entre link padre e
    hijo

    %Primera matriz elemental, matriz de rotación de angulos de Euler
    respecto al sdr inercial

    R_xy=R_x*R_y;

    R_elem(i,:)=R_x*R_y*R_z;

    Jw_gorro(i,:)= [1 0 0; (R_x*[0 1 0]')'; (R_xy*[0 0 1]')']'; %Matriz 9x3
    [Jw^1 Jw^2 Jw^3]'

end

%Matriz de Rotaciones

for d=1:n

    for k=1:(n+1-d)

        l=k+d;

        i=(3*k-2:3*k); %Link padre (filas)

        j=(3*l-2:3*l); %Link hijo (columnas)

        if d==1

            R(i,j)=R_elem(i,:);

        else

            j1=j-3*ones(1,3); %Desplazamiento unidad de 1 a la izquierda

            R(i,j)=R(i,j1)*R(j1,j);

```

```

        end

    end

end

%Jacobianos angular

l=1; j=1:3;

for k=1:n

    if k>=1

        i=(3*k-2:3*k);

        Jw_k(i,j)=Jw_gorro(j,:);

    else

        end

    end

l=2; j=4:6;

for k=1:n

    if k>=1

        i=(3*k-2:3*k);

        i1=1:3;

        Jw_k(i,j)=R(i1,j)*Jw_gorro(j,:);

    else

        end

    end

l=3; j=7:9;

```

```
for k=1:n

    if k>=1

        i=(3*k-2:3*k);

        i1=1:3;

        Jw_k(i,j)=R(i1,j)*Jw_gorro(j,:);

    else

    end

end
```

```
l=4; j=10:12;
```

```
for k=1:n

    if k>=1

        i=(3*k-2:3*k);

        i1=1:3;

        Jw_k(i,j)=R(i1,j)*Jw_gorro(j,:);

    else

    end

end
```

```
%Jacobiano lineal
```

```
c1=[0 0 0]';
```

```
c2=[0 0 long1/2]';
```

```
c3=[0 0 long2/2]';
```

```
c4=[0 0 long3/2]';
```

```

    c=[c1,c2,c3,c4]; %Matriz de vectores de posicion del cdm de cada link
    en el sdr local del link correspondiente

    p1=[X Y Z]'; %Posición absoluta del rotor

    p2=[0 0 -long0]'; %Es negativo pues se introduce el giro de 180° en
    los sdr de las articulaciones del brazo

    p3=[0 0 long1]';

    p4=[0 0 long2]';

    p=[p1,p2,p3,p4]; %Matriz de vectores de posición entre sdr de link k y
    link k-1 expresado en el sdr en link k-1

    for d=1:n

        for k=1:(n+1-d)

            l=k+d;

            i=(4*k-3:4*k); %Link padre (filas)

            j=(4*l-3:4*l); %Link hijo (columnas)

            iR=(3*k-2:3*k); %Link padre (filas)

            jR=(3*l-2:3*l); %Link hijo (columnas)

            if d==1

                ceros=sym('[0 0 0]');

                uno=sym('1');

                W(i,j)=[R(iR,jR),p(1:3,k);ceros,uno];

            else

                j1=j-4*(d-1)*ones(1,4); %Desplazamiento unidad de 1 a la
                izquierda

                W(i,j)=W(i,j1)*W(j1,j);

```

```

        end

    end

end

x1=W(1:4,5:8)*[c(:,1);1]; % x1 devuelve un vector [x1;1]

n1=length(x1)-1;

x1=x1(1:n1); %Vector de posición del cdm del link 1 respecto al sdr
inercial

x2=W(1:4,9:12)*[c(:,2);1]; % x2 devuelve un vector [x2;1]

n2=length(x2)-1;

x2=x2(1:n2);

x3=W(1:4,13:16)*[c(:,3);1]; % x3 devuelve un vector [x3;1]

n3=length(x3)-1;

x3=x3(1:n3);

x4=W(1:4,17:20)*[c(:,4);1]; % x4 devuelve un vector [x4;1]

n4=length(x4)-1;

x4=x4(1:n4);

x=[x1,x2,x3,x4]; %Matriz de vectores de posición respecto al sdr
inercial

o1=W(1:4,5:8)*[zeros(3,1);1];

o1=o1(1:n1);

o2=W(1:4,9:12)*[zeros(3,1);1];

o2=o2(1:n2);

o3=W(1:4,13:16)*[zeros(3,1);1];

```

```
o3=o3(1:n3);

o4=W(1:4,17:20)*[zeros(3,1);1];

o4=o4(1:n4);

o=[o1,o2,o3,o4];
```

```
Jv_1=jacobian(o1,X1(:));
```

```
Jv_2=jacobian(o2,X1(:));
```

```
Jv_3=jacobian(o3,X1(:));
```

```
Jv_4=jacobian(o4,X1(:));
```

```
%Jacobiano de fuerzas
```

```
Jf_1=jacobian(x1,X1(:));
```

```
Jf_2=jacobian(x2,X1(:));
```

```
Jf_3=jacobian(x3,X1(:));
```

```
Jf_4=jacobian(x4,X1(:));
```

```
Jf=[Jf_1;Jf_2;Jf_3;Jf_4];
```

```
%Jacobiano de cada link
```

```
Jw_1=[zeros(3),Jw_k(1:3,:)];
```

```
Jw_2=[zeros(3),Jw_k(4:6,:)];
```

```
Jw_3=[zeros(3),Jw_k(7:9,:)];
```

```
Jw_4=[zeros(3),Jw_k(10:12,:)];
```

```
J_1=[Jv_1;Jw_1];
```

```
J_2=[Jv_2;Jw_2];

J_3=[Jv_3;Jw_3];

J_4=[Jv_4;Jw_4];

J=[J_1;J_2;J_3;J_4];

%Derivada temporal de Jacobiano

dJ=diff(J,X1(1))*X2(1);

for s=2:length(X1)

dJ=dJ+diff(J,X1(s))*X2(s); % dJ=sum(dJ/dqj*der(qj))

end
```

Índice de Figuras

2.1.	Representación del <i>Sistema2D</i>	4
2.2.	Vuelo en Punto Fijo - x	14
2.3.	Vuelo en Punto Fijo - v	14
2.4.	Ascenso - x	15
2.5.	Ascenso - v	15
2.6.	Par Motor - x	16
2.7.	Par Motor - v	16
2.8.	Condiciones iniciales no nulas (giros) - x	17
2.9.	Condiciones iniciales no nulas (giros) - v	17
2.10.	Condiciones iniciales no nulas (vel. angulares) - x	18
2.11.	Condiciones iniciales no nulas (vel. angulares) - v	18
3.1.	Cuerpo rígido articulado en estructura de árbol	19
3.2.	Definición de vectores de posición	25
4.1.	Plano rotor en movimiento de avance	30
4.2.	Ascenso, fuerzas y pares aerodinámicos	30
4.3.	Movimiento de Guiñada, fuerzas y pares aerodinámicos	31
4.4.	Conjunto del <i>Sistema Robot</i>	32
4.5.	Variables generalizadas en el Conjunto <i>Sistema Robot</i>	33
4.6.	Sólido con el punto de aplicación en un punto cualquiera	33
4.7.	Vectores de posición en <i>Sistema Robot</i>	35
5.1.	<i>Sistema Robot</i> definido el <i>Cuerpo Brazo Robot</i>	39
5.2.	Vector de posición x_G definido en el <i>Cuerpo Brazo Robot</i>	40
5.3.	Teorema de Steiner	41

Índice de Tablas

2.1.	Condiciones iniciales de posición y fuerzas externas	13
2.2.	Condiciones iniciales de giros	13

Bibliografía

- [1] Herman Bruyninckx, *Robot kinematics and dynamics*, 2010.
- [2] M. Rodriguez Danta, *Mecànica*, 2013.
- [3] C. Karen Liu, *A quick tutorial on multibody dynamics*, Ed. Georgia Institute of Technology, 2003.
- [4] Bijan Shrinzadeh, *Dynamic model simplification of serial manipulators*, paper from Symp. On Robotics Automation, ISRA, 2006.
- [5] Suril Vijaykumar, *Dynamics of tree-type robotic systems*, Springer, 2013.