2. HIDRODINÁMICA DE LAS OLAS

2.1 Hidrodinámica Básica

Dos ecuaciones hidrodinámicas básicas que expresan la conservación de la masa y del momento son la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \tag{2.1}$$

y la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p_{tot} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{f} \tag{2.2}$$

En estas ecuaciones ρ es la densidad, $\vec{v}$ es la velocidad, p_{tot} es la presión y $\nu = \eta/\rho$ es el coeficiente de viscocidad cinética del fluido.

Si consideramos sólo la fuerza gravitacional $\vec{f} = \rho\vec{g}$ y como presión sobre la superficie del fluido la atmosférica $p_{tot} = p_{atm}$, partiendo de las ecuaciones anteriores, se puede demostrar que sobre una superficie libre $z = \eta(x, y, t)$ definida como la interfaz entre el agua y el aire se satisface la ecuación:

$$[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi.\nabla\phi]_{z=\eta} + g.\eta = 0 \tag{2.3}$$

Donde ϕ es la velocidad potencial relacionada con la velocidad del fluido a través de la expresión $\nabla\hat{\phi} = \vec{v}$.

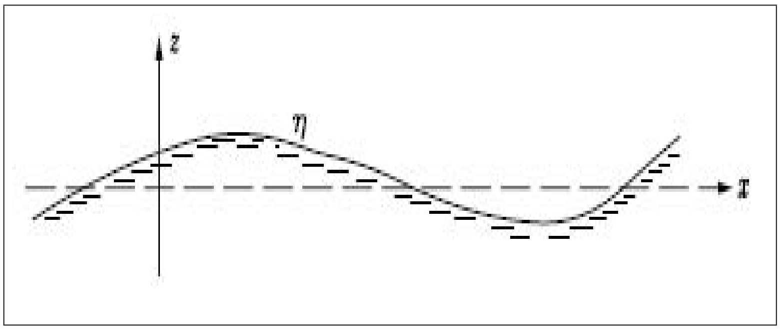

Fig. 2.1: Elevación de la ola
(Falnes 2004)

Linealizando las condiciones de borde cinemáticas de la velocidad potencial expresada en la ecuación 2.3 se puede obtener la siguiente relación:

$$[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z}]_{z=z_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_k}{dt} \tag{2.4}$$

Resolviendo la ecuación 2.4 se puede obtener la función de velocidad potencial $\phi(x, y, z, t)$ y a partir de ésta se pueden derivar las siguientes cantidades físicas:

$$p = p(x, y, z, t) = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{2.5}$$

$$\eta = \eta(x, y, t) = -\frac{1}{g}[\frac{\partial\phi}{\partial t}]_{z=0} \tag{2.6}$$

Las ecuaciones 2.5 y 2.6 representan la presión hidrodinámica del fluido y la elevación de la ola (elevación de la interfaz entre el agua y el aire a presión constante) respectivamente. Si consideramos el suelo oceánico horizontal, plano y suficientemente profundo las corrientes existentes en las profundidades no afectarán las olas sobre la superficie del agua. Asumiendo variaciones en el tiempo senoidales o armónicas, se puede escribir la velocidad potencial de manera fasorial o compleja de la siguiente manera:

$$\phi = \phi(x, y, z, t) = Re\{\hat{\phi}(x, y, z)e^{i\omega t}\} \tag{2.7}$$

De igual forma podemos referir tanto la presión hidrodinámica como la elevación de la ola al dominio complejo de la siguiente manera:

$$\hat{p} = -i\omega\rho\hat{\phi} \tag{2.8}$$

$$\hat{\eta} = -\frac{i\omega}{g}[\hat{\phi}]_{z=0} \tag{2.9}$$

Si se considera el caso de una onda plana, en donde no hay variación en la dirección ”y”, la solución en el dominio complejo de la ecuación 2.4 viene dada por la expresión:

$$\hat{\phi} = e(k.z)(ae^{-i.k.x} + be^{i.k.x}) \tag{2.10}$$

Donde la función e(k.z) es:

$$e(k.z) = \frac{1 + e^{-2k(z+h)}}{1 + e^{-2kh}}e^{kz} \tag{2.11}$$

Y a partir de la ecuación 2.7 se puede obtener adicionalmente:

$$\phi = Re\{[ae^{i(\omega.t-k.x)} + be^{i(\omega.t+k.x)}]\}e(k.z) \tag{2.12}$$

En las últimas ecuaciones la constante ”k” representa la velocidad angular espacial o frecuencia angular en radianes por metro.

Para el cálculo de la velocidad de fase debe tomarse en consideración que la ola oceánica es dispersiva, es decir, la velocidad de fase depende de la frecuencia. Si consideramos el parámetro ”h” como la profundidad del suelo oceánico la velocidad de fase será:

$$\omega^2 = g.k \tanh(k.h) \tag{2.13}$$

$$v_f \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} \tanh(k.h) = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(k.h)} \tag{2.14}$$

La expresión anterior puede simplificarse si asumimos que la ola se desplaza sobre una superficie de aguas profundas. En este caso si $k.h >> 1$ tenemos:

$$v_f \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g}{k}} \tag{2.15}$$

El valor v_f es la velocidad a la cual la cresta de la ola , sobre una linea de fase constante, se propaga con dirección perpendicular a la cresta. Se debe aclarar que la energía asociada a una ola plana armónica es transportada con una velocidad igual a la velocidad de grupo (ecuación 2.16).

$$v_g = d\omega/dk \tag{2.16}$$

Para el caso de olas sobre aguas profundas la velocidad de grupo es aproximadamente la mitad de la velocidad de fase.

$$v_g = v_f/2 \tag{2.17}$$

Regresando a la ecuación 2.10, se podría interpretar el primer término como una ola incidente y el segundo término como una onda reflejada. Si se define $\Gamma = b/a$ como el coeficiente de reflexión complejo y $A = -i\omega a/g$ como la amplitud de elevación compleja, se puede reescribir la ecuación 2.10 como:

$$\hat{\phi} = -\frac{g}{i\omega} e(k.z)(e^{-i.k.x} + \Gamma e^{i.k.x}) \tag{2.18}$$

En consecuencia la elevación de la ola $\eta = \eta(x,t)$ tiene una amplitud compleja:

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}(x) = A(e^{-i.k.x} + \Gamma e^{i.k.x}) \tag{2.19}$$

Si definimos:

$$\hat{\eta}_i = Ae^{-i.k.x} \tag{2.20}$$

$$\hat{\eta}_r = Be^{i.k.x} = A\Gamma e^{i.k.x} \tag{2.21}$$

Se tiene:

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}_i + \hat{\eta}_r \tag{2.22}$$

$$\hat{\phi} = -\frac{g}{i\omega}\hat{\eta}e(kz) \tag{2.23}$$

Para una ola progresiva plana, en donde no hay componente reflejada, la constante B=0, por tanto las ecuaciones de la elevación en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo serán:

$$\hat{\eta} = Ae^{-i.k.x} \tag{2.24}$$

$$\eta(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{2.25}$$

2.2 Transporte de Energía de la Ola

En primer lugar se considerará la energía potencial asociada con la elevación de la onda plana. La energía potencial por unidad horizontal de área relativa al suelo marino es el producto de la masa del agua por unidad de área $\rho(h+\eta)$, por la aceleración de la gravedad g, por la altura del centro de masas del agua sobre el suelo marino $(h+\eta)/2$. Esto es:

$$E_p(x,t) = (\rho g/2)(h+\eta)^2 = (\rho g/2)h^2 + \rho g h\eta + (\rho g/2)\eta^2 \tag{2.26}$$

El incremento de la energía potencial respecto al agua en calma es:

$$E_p(x,t) = \rho g h\eta + (\rho g/2)\eta^2 \tag{2.27}$$

Entonces, la energía potencial promedio por unidad de área para una onda plana, armónica y progresiva es:

$$E_p = (\rho g/2)\overline{\eta^2(x,t)} = (\rho g/4)|A|^2 \tag{2.28}$$

Sobre las mismas consideraciones, la velocidad del fluido se puede determinar a partir de la ecuación de velocidad potencial 2.23 y de la relación $\nabla\hat{\phi} = \vec{v}$.

$$\vec{v} = (\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}, 0, \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial z}) \tag{2.29}$$

Que para el caso de aguas profundas se convierte en la expresión:

$$\vec{v} = (\hat{v_x}, 0, \hat{v_z}) = (\omega\hat{\eta}e^{kz}, 0, \omega\hat{\eta}e^{kz})) \tag{2.30}$$

La energía cinética promedio por unidad de volumen es entonces:

$$E_c = \frac{1}{2}\rho(|\hat{v_x}|^2 + |\hat{v_z}|^2) = \frac{\rho}{2}\omega^2|A|^2 e^{2kz} \tag{2.31}$$

Integrando desde $z = -\infty$ a z=0 se obtiene la energía cinética promedio por unidad de área horizontal:

$$E_c = \frac{\rho}{2}\omega^2|A|^2 \int_{-\infty}^{0} e^{2kz}dz = (\rho g/4)|A|^2 \tag{2.32}$$

Sumando la energía potencial y la cinética se obtiene la energía total almacenada:

$$E = (\rho g/2)|A|^2 \tag{2.33}$$

El transporte de energía de la ola por unidad de área vertical de una onda plana, armónica, en aguas profundas propagándose en la dirección ”x” es el promedio en tiempo del producto de la presión hidrodinámica por la velocidad. Utilizando las ecuaciones 2.8, 2.10 y 2.30 tenemos:

$$I = \frac{k\rho g^2}{2\omega}|A|^2 e^{2kz} \tag{2.34}$$

Integrando ”I” desde $z = -h$ hasta $z = 0$ se obtiene la potencia transportada en la ola por unidad de ancho de frente de onda:

$$J = \int_{-h}^{0} \frac{k\rho g^2}{2\omega}|A|^2 e^{2kz}dz = \frac{k\rho g^2}{4k\omega}|A|^2(1 - e^{-2kh}) \tag{2.35}$$

En aguas profundas el producto $k.h$ es mucho mayor que 1, entonces:

$$J = \frac{\rho g^2}{4\omega}|A|^2 \; kW/m \tag{2.36}$$

Recordando que la altura *H* de la ola es dos veces la elevación máxima *A* y que la frecuencia angular temporal ω es 2π entre el período de la ola, la ecuación 2.36 se puede escribir:

$$P = \frac{\rho g^2}{32\pi}TH^2 \; W/m. \tag{2.37}$$

La relación existente entre el transporte de energía J (energía por unidad de tiempo y ancho de frente de onda) y la energía total almacenada E (energía por unidad horizontal de área) define la velocidad de transporte de energía v_E.

$$J = v_E E \tag{2.38}$$

Si se calcula el cociente entre J y E se tiene:

$$v_E = \frac{J}{E} = \frac{g}{2\omega} = v_g \tag{2.39}$$

Por tanto, la velocidad de transporte de energía de una onda plana, armónica y en aguas profundas es igual a la velocidad de grupo.