3. DINÁMICA DEL CONVERTIDOR DE ENERGÍA DE LAS OLAS OSCILANTE

Un convertidor de energía de las olas oscilante puede representarse como un cuerpo rígido sometido a la acción del oleaje. El movimiento de un cuerpo rígido en un fluido está caracterizado por seis componentes correspondientes a los seis grados de libertad o modos de movimiento oscilatorio.

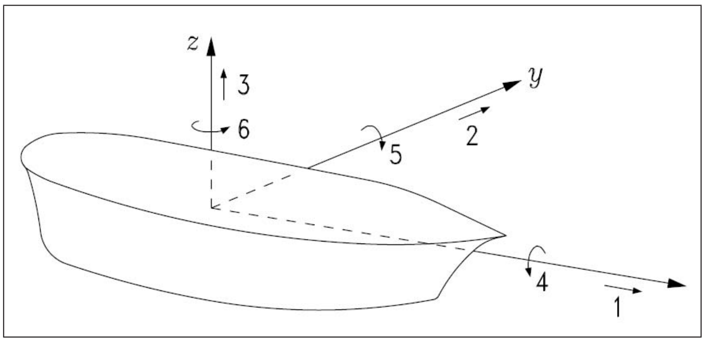

Fig. 3.1: Modos de movimiento de un cuerpo rígido en un fluido
(Falnes 2004)

Como se muestra en la figura 3.1 y en la tabla 3.1, tres modos de movimiento son de traslación y tres modos de movimiento son de rotación sobre cada uno de los ejes de referencia.

Tab. 3.1: Modos de movimiento de un cuerpo rígido en un fluido

Modo Nro.	**Componente**	**Nombre**
1	$v_1 = U_x$	*surge* (ondeante)
2	$v_2 = U_y$	*sway* (ondulante)
3	$v_3 = U_z$	*heave* (tirante)
4	$v_4 = \Omega_x$	*roll* (rodante)
5	$v_5 = \Omega_y$	*pitch* (arrojado)
6	$v_6 = \Omega_z$	*yaw* (desviado)

Por conveniencia se modelará inicialmente el convertidor de energía de las olas, del tipo punto de absorción flotante con referencia anclada al suelo marino, como una esfera semisumergida cuyo movimiento esta restringido al modo tirante o *heave* como se muestra en la figura 3.2.

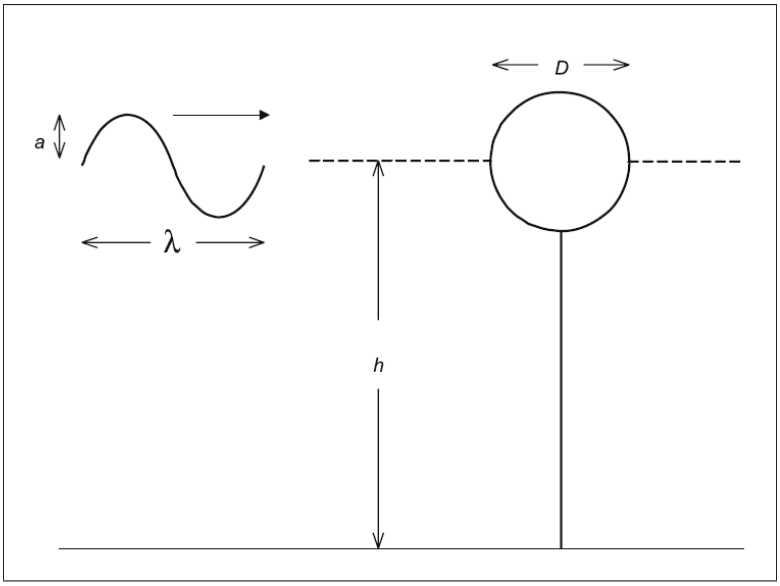

Fig. 3.2: Esquemático de un dispositivo WEC *heave* esférico
(Cruz 2008)

La ecuación de movimiento del cuerpo rígido oscilante puede plantearse a través de la segunda ley de Newton en donde la suma de todas las fuerzas sobre el cuerpo es igual a la masa por la aceleración. Para un dispositivo WEC oscilante la fuerza total puede expandirse de la siguiente manera (Price 2009).

$$F_{total}(t) = f_e(t) + f_r(t) + f_{hs}(t) + f_{PTO}(t) + f_t(t) + f_{perd}(t) = M.\ddot{x}(t) \tag{3.1}$$

donde $f_e(t)$ es la fuerza de excitación del oleaje, $f_r(t)$ es la fuerza debido a la radiación de olas por parte del dispositivo, $f_{hs}(t)$ es la fuerza hidrostática del agua, $f_{PTO}(t)$ es la fuerza del sistema de extracción de potencia (PTO: *Power Take Off*), $f_s(t)$ es la fuerza de restauración del resorte que ancla la boya al suelo marino, $f_{perd}(t)$ es la fuerza de amortiguamiento o de perdidas en el WEC, M es la masa y $x(t)$ es la posición del cuerpo oscilante.

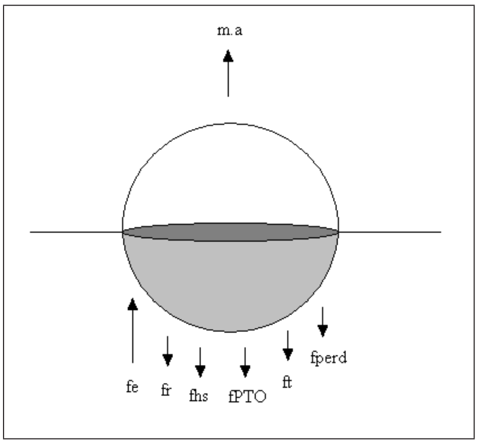

Fig. 3.3: Fuerzas aplicadas a la boya esférica

La ecuación 3.1 representa el modelo de un sistema con entrada o excitación $f_e(t)$ y salida o respuesta la posición del cuerpo oscilante $x(t)$. A excepción de la fuerza de excitación $f_e(t)$, las fuerzas que aparecen en la ecuación 3.1 pueden representarse como funciones lineales de la respuesta x(t).

3.1 Fuerza Hidrostática

Según el principio de Arquímedes un fluido ejerce sobre una boya una fuerza igual al peso del fluido desplazado. En el equilibrio el peso del cuerpo Mg es contrarrestado por el peso del fluido desplazado ρgv donde v es el volumen sumergido, g es la aceleración de la gravedad y ρ es la densidad del fluido. Si el cuerpo se mueve fuera de la posición de equilibrio, para pequeños desplazamientos la fuerza hidrostática $f_{hs}(t)$ se puede asumir proporcional al desplazamiento x(t).

$$f_{hs}(t) = -C_{hs}x(t) \tag{3.2}$$

La constante S_b es el coeficiente de rigidez hidrostática del cuerpo y es igual a $S_b = \rho gS$. S es la superficie de contacto en el sentido vertical del cuerpo con el fluido. Para una esfera o un cilindro de radio a esta superficie será igual a $S = \pi a^2$.

3.2 Fuerza del Sistema de Extracción de Potencia

Con la finalidad de establecer un control lineal sobre el movimiento del convertidor, la fuerza del sistema de extracción de potencia PTO se modelará como un sistema lineal de segundo orden

$$f_{PTO}(t) = -M_{pto}\ddot{x}(t) - B_{pto}\dot{x}(t) - C_{pto}x(t) \tag{3.3}$$

donde M_{pto}, B_{pto} y C_{pto} serán el coeficiente de inercia, el coeficiente de amortiguamiento y el coeficiente de elasticidad del PTO (Price 2009).

3.3 Fuerza de Restauración del Resorte que Ancla la Boya al Suelo Marino

En los sistemas boyantes del tipo punto de absorción flotante con referencia anclada al suelo marino, la fuerza del tensor que ancla la boya al suelo marino puede modelarse mediante la expresión:

$$f_t(t) = -C_t x(t) \tag{3.4}$$

donde C_t es la constante de elasticidad del resorte tensor.

3.4 Fuerza de Amortiguamiento o de Perdidas en el WEC

Las fuerzas $f_v(t)$ y $f_f(t)$ representan el efecto de la viscocidad del fluido y la fricción del sistema mecánico. Ambas dependen de la velocidad del cuerpo y se suelen modelar de la siguiente manera:

$$f_{perd}(t) = f_v(t) + f_f(t) \tag{3.5}$$

$$f_v(t) = -B_v \dot{x}(t) \tag{3.6}$$

$$f_f(t) = -B_f \dot{x}(t) \tag{3.7}$$

Las constantes B_f y B_v se conocen como los coeficientes de fricción y viscocidad respectivamente. Las perdidas suelen englobarse en la siguiente expresión:

$$f_{perd}(t) = -B_p \dot{x}(t) \tag{3.8}$$

donde $B_p = B_v + B_f$.

3.5 Fuerza de Radiación

La fuerza del sistema oscilante sobre el fluido causada por el movimiento forzado del cuerpo sobre el agua en calma se conoce como la fuerza de radiación (Price 2009).

Para un cuerpo rígido oscilante la fuerza de radiación es la convolución entre los coeficientes de radiación y la velocidad del oscilador. Los coeficientes de radiación se obtienen a través de ensayos hidrodinámicos al sistema oscilante.

$$f_r(t) = -z_r(t) * v(t) = -z_r(t) * \frac{d}{dt} x(t) \tag{3.9}$$

La fuerza de radiación puede expresarse en el dominio de la frecuencia de la siguiente manera:

$$F_r(\omega) = -Z_r(\omega) V(\omega) \tag{3.10}$$

$Z_r(\omega)$ se conoce como la impedancia de radiación y esta formada por una parte real y una parte imaginaria

$$Z_r(\omega) = B_r(\omega) + iX_r(\omega) = R_r(\omega) + i\omega M_a(\omega) \tag{3.11}$$

En la ecuación 3.11 $B_r(\omega)$ es la resistencia de radiación, $X_r(\omega)$ es la reactancia de radiación y $M_a(\omega)$ es la masa agregada.

En la masa agregada $M_a(\omega)$, si $\omega \rightarrowtail \infty$ se tiene una masa constante adicional al sistema M_∞ (masa infinita) debida al fluido (Count and Jefferys 1980). En función de esta masa se puede definir la siguiente función en el dominio de la frecuencia:

$$K(\omega) = Z(\omega) - i\omega M_\infty = B_r(\omega) + i\omega(M_a(\omega) - M_\infty) \tag{3.12}$$

La expresión de la ecuación 3.12 suele definirse como la impedancia de radiación reducida $Z'_r(\omega)$:

$$Z'_r(\omega) = B_r(\omega) + iX'_r(\omega) \tag{3.13}$$

La fuerza de radiación expresada en términos de la impedancia de radiación reducida es:

$$F_r(\omega) = F'_r(\omega) - i\omega M_\infty V(\omega) \tag{3.14}$$

En la ecuación 3.14 el primer término $F'_r(\omega) = -K(\omega)V(\omega)$ es la fuerza de radiación reducida. En el dominio del tiempo la fuerza de radiación reducida puede representarse mediante la convolución de los coeficientes $k(t)$ (antitransformada de Fourier de $K(\omega)$) por la velocidad $v(t)$, es decir, $f'_r(t) = -k(t) * v(t)$.

En función de la masa infinita M_∞ y de los coeficientes $k(t)$, la fuerza de radiación se puede escribir de la siguiente forma:

$$f_r(t) = f'_r(t) - M_\infty \frac{d}{dt} v(t) = f'_r(t) - M_\infty a(t) \tag{3.15}$$

$$f_r(t) = -k(t) * \frac{d}{dt} x(t) - M_\infty \frac{d^2}{dt^2} x(t) \tag{3.16}$$

3.6 Fuerza de Excitación

La fuerza de excitación aplicada a un cuerpo rígido que oscila por el oleaje depende de la elevación de la ola incidente. La relación entre la elevación de la ola y la fuerza de excitación es no causal (Falnes 1995).

Suele representarse la fuerza de excitación como una función lineal de la elevación de la ola η en el dominio del tiempo y de la frecuencia de la siguiente manera:

$$f_e(t) = w(t) * \eta(t) \tag{3.17}$$

$$F_e(\omega) = W(\omega)\eta(\omega) \tag{3.18}$$

El Kernel de convolución $w(t)$ (antitransformada de Fourier de los coeficientes de excitación $W(\omega)$) representa la respuesta impulsiva de un sistema premonitorio (no causal) con memoria (Price 2009).

La no causalidad de este sistema lineal esta relacionada con que la elección de la entrada no es la causa de la salida. La causa real de la salida así como de la entrada podría ser una tormenta distante o un generador de olas en el laboratorio. La no causalidad podría ser en parte atribuida a que la ola incidente podría golpear el cuerpo y ejercer una fuerza antes que la ola alcance el punto de referencia que convenientemente ha sido elegido para el sistema oscilante (Falnes 1995).

La no causalidad significa que $w(t) \neq 0$ para $t < 0$. Esto quiere decir que para tener conocimiento de la fuerza de excitación en el instante actual $f_e(t)$ es necesario tener algún conocimiento futuro de la elevación de la ola incidente en el punto de referencia (Falnes 1995).

Existe una relación entre los coeficientes de la fuerza de excitación $W(\omega)$ y la resistencia de amortiguamiento o de radiación $B_r(\omega)$. Falnes (Falnes 2004) plantea la siguiente ecuación usando la relación de Haskind:

$$B_r(\omega) = \frac{k}{8J}|W(\omega)|^2 \tag{3.19}$$

donde $k(rad/m)$ es la frecuencia espacial de la ola y J es el transporte de energía de la ola.

Si asumimos aguas profundas, se puede aproximar el transporte de energía de la ola y la frecuencia temporal de la ola a las expresiones:

$$J = \frac{\rho g^2}{4\omega}|A|^2 \tag{3.20}$$

$$\omega^2 = g.k \tag{3.21}$$

donde A es la amplitud de la ola. Con las ecuaciones 3.19, 3.20 y 3.21 se puede demostrar que:

$$|F_e(\omega)| = \sqrt{\frac{2g^3\rho B_r(\omega)}{\omega^3}}|A| \tag{3.22}$$

Esta última relación puede ser usada para obtener los coeficientes de la fuerza de excitación para oleaje regular.

$$|W(\omega)| = \sqrt{\frac{2g^3\rho B_r(\omega)}{\omega^3}} \tag{3.23}$$

3.7 Ecuación Dinámica del Convertidor de Energía de las Olas Oscilante

Como se comentó anteriormente, a partir de la segunda ley de Newton se puede plantear la ecuación dinámica para un cuerpo que oscila en un fluido:

$$M\frac{d^2}{dt^2}x(t) = f_e(t) + f_r(t) + f_{hs}(t) + f_{PTO}(t) + f_t(t) + f_{perd}(t) \tag{3.24}$$

Si sustituimos en la ecuación 3.24 las expresiones 3.2, 3.3, 3.4, 3.8 y 3.9 encontramos el sistema lineal que relaciona la fuerza de excitación con la posición del oscilador.

$$M\ddot{x}(t)+z_r(t)*\dot{x}(t)+B_p\dot{x}(t)+(C_t+C_{hs})x(t)+M_{pto}\ddot{x}(t)+B_{pto}\dot{x}(t)+C_{pto}x(t) = f_e(t) \tag{3.25}$$

Es usual encontrar en la bibliografía la ecuación 3.25 en función de la masa infinita M_∞ y del Kernel de convolución $k(t)$. Esta expresión se obtiene sustituyendo 3.2, 3.3, 3.4, 3.8 y 3.16 en 3.24.

$$(M+M_\infty)\ddot{x}(t)+k(t)*\dot{x}(t)+B_p\dot{x}(t)+(C_t+C_{hs})x(t)+M_{pto}\ddot{x}(t)+B_{pto}\dot{x}(t)+C_{pto}x(t) = f_e(t) \tag{3.26}$$

Las ecuaciones 3.25 y 3.26 suelen expresarse en términos de la velocidad y no de la posición del oscilador de la siguiente manera:

$$M\dot{v}(t)+z_r(t)*v(t)+B_pv(t)+(C_t+C_{hs})\int_0^t v(\tau)d\tau+M_{pto}\dot{v}(t)+B_{pto}v(t)+C_{pto}\int_0^t v(\tau)d\tau = f_e(t) \tag{3.27}$$

$$(M+M_\infty)\dot{v}(t)+k(t)*v(t)+B_pv(t)+(C_t+C_{hs})\int_0^t v(\tau)d\tau+M_{pto}\dot{v}(t)+B_{pto}v(t)+C_{pto}\int_0^t v(\tau)d\tau = f_e(t) \tag{3.28}$$

Si se aplica la transformada de Fourier a la ecuación 3.27 o 3.28 se obtiene la siguiente expresión en el dominio de la frecuencia:

$$\left(\left(B_r(\omega)+B_p+i(\omega(M+M_a(\omega))-\frac{C_t+C_{hs}}{\omega})\right)+\left(B_{pto}+i(\omega M_{pto}-\frac{C_{pto}}{\omega})\right)\right)V(\omega) = F_e(\omega) \tag{3.29}$$

El primer término dentro del paréntesis que multiplica a $V(\omega)$ en la ecuación 3.29 se conoce con el nombre de impedancia intrínseca del sistema $Z_{int}(\omega)$.

$$Z_{int}(\omega) = B_r(\omega)+B_p+i\left(\omega(M+M_a(\omega))-\frac{C_t+C_{hs}}{\omega}\right) \tag{3.30}$$

El segundo termino dentro del paréntesis que multiplica a $V(\omega)$ en la ecuación 3.29 es la impedancia del sistema extractor de potencia $Z_{pto}(\omega)$.

$$Z_{pto}(\omega) = B_{pto}+i(\omega M_{pto}-\frac{C_{pto}}{\omega}) \tag{3.31}$$

La ecuación dinámica puede ahora escribirse en función de la impedancia total del sistema oscilante $Z_{total}(\omega) = Z_{int}(\omega)+Z_{pto}(\omega)$.

$$F_e(\omega) = (Z_{int}(\omega)+Z_{pto}(\omega))V(\omega) \tag{3.32}$$

$$F_e(\omega) = Z_{total}(\omega)V(\omega) \tag{3.33}$$

3.8 Ecuación Dinámica del Convertidor de Energía de las Olas Oscilante con Memoria y sin Memoria

En la literatura sobre energía de las olas se tratan dos modelos distintos en el dominio del tiempo de la dinámica del convertidor. Ambos modelos se representan por medio de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

3.8.1 Ecuación dinámica del convertidor de energía de las olas oscilante con memoria

El modelo general planteado en la ecuación 3.26 de la sección 3.7 es la ecuación dinámica integro-diferencial del WEC con memoria. La operación de convolución requiere del conocimiento previo de los valores de velocidad del dispositivo como se observa en la ecuación 3.34.

$$(M+M_\infty)\ddot{x}(t)+\int_0^t k(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau+B_p\dot{x}(t)+(C_t+C_{hs})x(t)+M_{pto}\ddot{x}(t)+B_{pto}\dot{x}(t)+C_{pto}x(t)=f_e(t) \tag{3.34}$$

El modelo del WEC con memoria de la ecuación 3.34 puede ser usado para realizar estudios tanto para oleaje irregular como para oleaje regular (senoidal puro) en régimen transitorio o permanente dado que en él se representa la memoria debido a la ondas radiadas.

3.8.2 Ecuación dinámica del convertidor de energía de las olas oscilante sin memoria

El estudio de la dinámica de los dispositivos WEC puede simplificarse ante oleaje regular o senoidal puro. Dado que para un oleaje regular de frecuencia ω_0 en régimen permanente la velocidad adquiere una forma senoidal con amplitud, frecuencia y fase constantes en el tiempo, los coeficientes $B_r(\omega)$ y $M_a(\omega)$ en la ecuación 3.29 adquieren valores constantes $B_r = B_r(\omega_0)$ y $M_a = M_a(\omega_0)$, entonces, la ecuación 3.29 toma la forma:

$$\left(\left(B_r+B_p+i(\omega(M+M_a)-\frac{C_t+C_{hs}}{\omega})\right)+\left(B_{pto}+i(\omega M_{pto}-\frac{C_{pto}}{\omega})\right)\right)V(\omega)=F_e(\omega) \tag{3.35}$$

Si referimos la ecuación 3.35 al dominio del tiempo se obtiene:

$$(M+M_a)\ddot{x}(t)+(B_r+B_p)\dot{x}(t)+(C_t+C_{hs})x(t)+M_{pto}\ddot{x}(t)+B_{pto}\dot{x}(t)+C_{pto}x(t)=f_e(t) \tag{3.36}$$

El modelo del WEC sin memoria de la ecuación 3.36 sólo es valido para realizar estudios ante oleaje regular (senoidal puro) en régimen permanente.