

Apéndice

Apéndice A

Expresión de los núcleos para la solución biaxial

La tensión generada por una dislocación en presencia de una entalla circular puede ser obtenida de la literatura [26]. Éstas están basadas en funciones tipo *Núcleo*, $K_{i(ij)}$, y se expresan en coordenadas radiales, respecto del centro de la entalla, con el eje $\hat{x}$ pasando por la dislocación, como se observa en la figura A.1. A continuación, se muestra el desarrollo de la expresión de la tensión producida por una dislocación, tomado de [21].

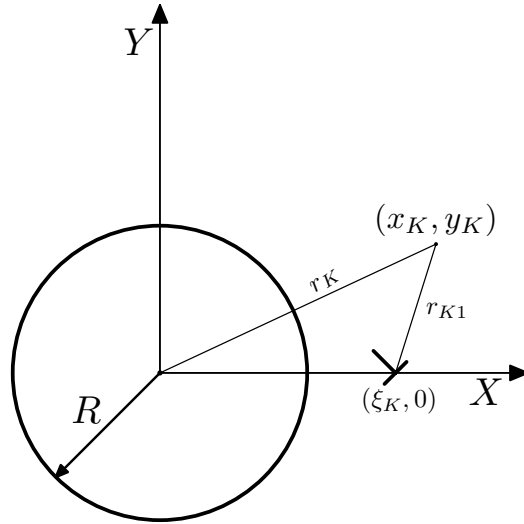


Figure A.1: Esquema de las variables utilizadas en la expresión de los *Núcleos*.

La tensión producida por una dislocación localizada en $(\xi_K, 0)$, con un vector

de Burgers (b_x, b_y) , sobre un punto genérico (x_K, y_K) en presencia de una entalla circular de radio R se puede expresar de la siguiente manera:

$$\bar{\sigma}_x^r = A [b_x K_{x(xx)} + b_y K_{y(xx)}]$$

$$\bar{\sigma}_y^r = A [b_x K_{x(yy)} + b_y K_{y(yy)}]$$

$$\bar{\tau} = A [b_x K_{x(xy)} + b_y K_{y(xy)}]$$

Cada uno de los *Núcleos* tiene la siguiente expresión [26, 21]:

$$K_{x(xx)} = -\frac{y_K}{r_{K1}^4} [3x_1^2 + y_K^2] + \frac{y_K}{r_{K2}^2} \left[\frac{2x_2^2}{r_{K2}^2} + 1 \right] - \frac{y_K}{r_K^2} \left[\frac{2x_K^2}{r_K^2} + 1 \right] - \frac{2y_K L}{r_{K2}^4 d_K^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_{K2}^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + \left(x_2 - \frac{L}{2} \right) \right] + \frac{R^2 y_K}{r_K^4} \left(\frac{4x_K^2}{r_K^2} - 1 \right)$$

$$K_{x(yy)} = \frac{y_K}{r_{K1}^4} (x_1^2 - y_K^2) - \frac{y_K}{r_{K2}^2} \left(\frac{2x_2^2}{r_{K2}^2} - 1 \right) + \frac{y_K}{r_K^2} \left(\frac{2x_K^2}{r_K^2} - 1 \right) + \frac{2y_K L}{r_{K2}^4 d_K^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_{K2}^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + \left(3x_2 - \frac{L}{2} \right) \right] - \frac{R^2 y_K}{r_K^4} \left(\frac{4x_K^2}{r_K^2} - 1 \right)$$

$$K_{x(xy)} = \frac{x_1}{r_{K1}^4} (x_1^2 - y_K^2) - \frac{x_2}{r_{K2}^2} \left(\frac{2x_2^2}{r_{K2}^2} - 1 \right) + \frac{x_K}{r_K^2} \left(\frac{2x_K^2}{r_K^2} - 1 \right) + \frac{2x_2 L}{r_{K2}^4 d_K^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_{K2}^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + \left(4x_2 - \frac{3L}{2} \right) \right] - \frac{R^2 x_K}{r_K^4} \left(\frac{4x_K^2}{r_K^2} - 3 \right) - \frac{L}{r_{K2}^2 d_K^2}$$

$$K_{y(xx)} = \frac{x_1}{r_{K1}^4} (x_1^2 - y_K^2) - \frac{x_2}{r_{K2}^2} \left(\frac{2x_2^2}{r_{K2}^2} - 1 \right) + \frac{x_K}{r_K^2} \left(\frac{2x_K^2}{r_K^2} - 1 \right) - \frac{2x_2 L}{r_{K2}^4 d_K^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_{K2}^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + (3 - d_K^2) x_2 - \frac{3L}{2} \right] + \frac{R(2d_K^2 - 2)}{2r_K^2 d_K}$$

$$K_{y(xy)} = \frac{y_K}{r_{K1}^4} (x_1^2 - y_K^2) - \frac{y_K}{r_{K2}^2} \left(\frac{2x_2^2}{r_{K2}^2} - 1 \right) + \frac{y_K}{r_K^2} \left(\frac{2x_K^2}{r_K^2} - 1 \right) - \frac{2y_K L}{r_{K2}^4 d_K^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_{K2}^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + (2 - d_K^2) x_2 - \frac{L}{2} \right] - \frac{R y_K}{r_K^4} \left[R \left(\frac{4x_K^2}{r_K^2} - 1 \right) + \frac{x_K}{d_K} (2d_K^2 - 2) \right]$$

$$\begin{aligned}
K_{y(yy)} = & \frac{x_1}{r_{K1}^4} (x_1^2 + 3y^2) + \frac{x_2}{r_{K2}^2} \left(\frac{2x_2^2}{r_{K2}^2} - 3 \right) - \frac{x_K}{r_K^2} \left(\frac{2x_K^2}{r_K^2} - 3 \right) + \\
& \frac{2x_2L}{r_{K2}^4 d_K^2} \left[\frac{4x_2^2}{r_{K2}^2} \left(\frac{L}{2} - x_2 \right) + (5 - d_K^2) x_2 - \frac{3L}{2} \right] - \frac{R(2d_K^2 - 2)}{2r_K^2 d_K} + \\
& \frac{Rx_K}{r_K^4} \left[R \left(\frac{4x_K^2}{r_K^2} - 3 \right) + \frac{x_K}{d_K} (2d_K^2 - 2) \right] - \frac{L}{r_{K2}^2} \left(\frac{2}{d_K^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

La relación entre las variables de las funciones *Núcleos* y las variables necesarias para resolver el modelo NR son:

$$\begin{aligned}
\xi_K &= r(\xi) \\
x_K &= r(x) \cos(\theta_0(x) - \theta_0(\xi)) \\
y_K &= r(x) \sin(\theta_0(x) - \theta_0(\xi))
\end{aligned}$$

Las otras variables utilizadas para la definición de las funciones *Núcleos* se relacionan con estas últimas de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
d_K &= \frac{\xi_K}{R} & L &= \frac{R(d_K^2 - 1)}{d_K} \\
x_1 &= x_K - \xi_K & x_2 &= x_1 + L \\
r_{K1}^2 &= x_1 + y_K & r_{K2}^2 &= x_2^2 + y_K^2 \\
r_K^2 &= x_K^2 + y_K^2
\end{aligned}$$

Dado que el problema tratado consiste en dos grietas creciendo de manera simétrica desde la entalla, cada uno de los *Núcleos* resulta:

$$K_{i(jk)}^S(x_K, y_K, \xi_K) = K_{i(jk)}(x_K, y_K, \xi_K) - K_{i(jk)}(x_K, y_K, -\xi_K)$$

Por último, para obtener tanto los vectores de Burger's como las tensiones a lo largo de la línea de grieta es necesario hacer una rotación un ángulo $\gamma = \theta_1 - \theta_0(\xi)$.

Los vectores de Burger's se obtienen mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} b_x^r \\ b_y^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

Por su parte, las tensiones a lo largo de la línea de grieta $(\bar{\sigma}_y, \bar{\tau})$ se encuentran gracias a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_y &= \bar{\sigma}_x^r \sin^2(\gamma) + \bar{\sigma}_y^r \cos^2(\gamma) - \bar{\tau}^r \sin(2\gamma) \\ \bar{\tau} &= -\bar{\sigma}_x^r \sin(\gamma) \cos(\gamma) + \bar{\sigma}_y^r \sin(\gamma) \cos(\gamma) + \bar{\tau}^r \cos(2\gamma)\end{aligned}$$

Reemplazando $\bar{\sigma}_x^r$, $\bar{\sigma}_y^r$ y $\bar{\tau}^r$ por sus expresiones originales y extrayendo b_x y b_y , se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_y(x) &= A \cdot b_x [\sin^2(\gamma) (\cos(\gamma)K_{x(xx)} + \sin(\gamma)K_{y(xx)}) + \\ &\quad \cos^2(\gamma) (\cos(\gamma)K_{x(yy)} + \sin(\gamma)K_{y(yy)}) - \\ &\quad \sin(2\gamma) (\cos(\gamma)K_{x(xy)} + \sin(\gamma)K_{y(xy)})] + \\ &\quad A \cdot b_y [\sin^2(\gamma) (-\sin(\gamma)K_{x(xx)} + \cos(\gamma)K_{y(xx)}) + \\ &\quad \cos^2(\gamma) (-\sin(\gamma)K_{x(yy)} + \cos(\gamma)K_{y(yy)}) - \\ &\quad \sin(2\gamma) (-\sin(\gamma)K_{x(xy)} + \cos(\gamma)K_{y(xy)})] \\ \bar{\tau}(x) &= A \cdot b_x [-\sin(\gamma) \cos(\gamma) (\cos(\gamma)K_{x(xx)} + \sin(\gamma)K_{y(xx)}) + \\ &\quad \sin(\gamma) \cos(\gamma) (\cos(\gamma)K_{x(yy)} + \sin(\gamma)K_{y(yy)}) + \\ &\quad \cos(2\gamma) (\cos(\gamma)K_{x(xy)} + \sin(\gamma)K_{y(xy)})] + \\ &\quad A \cdot b_y [-\sin(\gamma) \cos(\gamma) (-\sin(\gamma)K_{x(xx)} + \cos(\gamma)K_{y(xx)}) + \\ &\quad \sin(\gamma) \cos(\gamma) (-\sin(\gamma)K_{x(yy)} + \cos(\gamma)K_{y(yy)}) + \\ &\quad \cos(2\gamma) (-\sin(\gamma)K_{x(xy)} + \cos(\gamma)K_{y(xy)})]\end{aligned}$$

Expresándolas de manera compacta, se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_y(x) &= A [b_x K_{x\sigma} + b_y K_{y\sigma}] \\ \bar{\tau}(x) &= A [b_x K_{x\tau} + b_y K_{y\tau}]\end{aligned}$$