

Capítulo 2

Modelo de Navarro y De los Ríos

2.1 Modelo de Navarro y De los Ríos para placas infinitas

El modelo de Navarro y De los Ríos (NR) [10, 11] originalmente fue desarrollado para analizar el crecimiento de grietas microestructuralmente pequeñas por fatiga en componentes planos, sin concentradores de tensiones y cargados en modo III. Concretamente, se estudia el caso de una grieta de longitud comparable con el tamaño de grano del material, creciendo en una placa infinita sin discontinuidades geométricas. Dicho trabajo se basa en la clásica investigación de Bilby et al. [12], y modela la grieta y la zona plástica asociada con una distribución continua de dislocaciones infinitesimales distribuidas a lo largo de una línea recta de longitud el tamaño medio de grano del material. Es decir, se asume que la deformación plástica generada por el crecimiento de una grieta se produce en bandas de deslizamiento rectilíneas, atravesando los granos del material, o lo que es lo mismo, la grieta crece en una línea, moviendo dislocaciones únicamente en esa dirección.

Para reproducir la microgrieta, su zona plástica asociada y la barrera microestructural se considera que en cada una de estas zonas, las dislocaciones se encuentran sometidas a una tensión de “*fricción*” diferente que se opone a su movimiento. Sobre la microgrieta, dicha tensión de fricción representa la oposición al movimiento relativo entre ambas caras de la grieta, en la zona plástica ésta reproducirá la oposición del material al movimiento de las dislocaciones en la banda de deslizamiento. Finalmente, la tensión de fricción en la zona de la barrera reproducirá la resistencia del material a que las

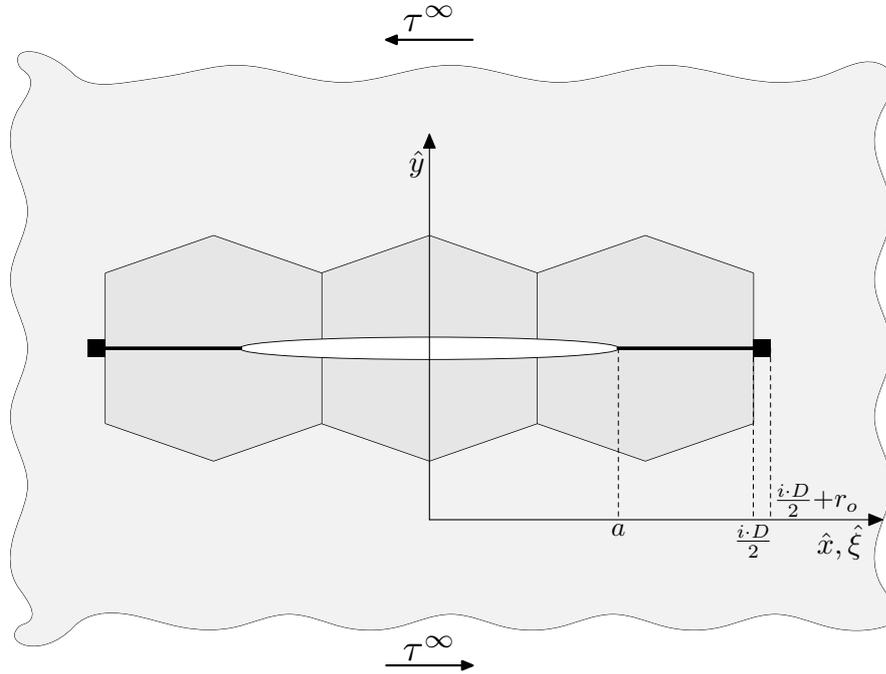


Figure 2.1: Esquema de grieta, zona plástica, barrera y microestructura del material.

dislocaciones superen el borde de grano y con ello la grieta pueda continuar creciendo por fatiga dentro del grano vecino [10, 11].

Entonces, el proceso de crecimiento de una grieta en una placa infinita sin concentradores de tensiones según el modelo NR, se inicia con la nucleación de una microgrieta en el grano que presenta la mejor orientación cristalográfica para la formación de bandas de deslizamiento. Una vez nucleada la microgrieta, la zona plástica se extiende por todo el grano, desde la punta de la grieta hasta el borde de grano, donde la presencia de dicha interfaz impide su propagación hacia granos vecinos, actuando como una barrera. Conforme avanza la grieta dentro del grano, mueve dislocaciones hacia la barrera microestructural, aumentando la tensión sobre ella. Si dicha tensión se incrementa lo suficiente como para activar bandas de deslizamiento en el grano vecino, la grieta se propagará y se repetirá este ciclo en cada una de las barreras siguientes. Si, por el contrario, la tensión no es lo suficientemente alta como para inducir deformación plástica en el grano aledaño, la grieta será no propagante. La figura 2.1 muestra un esquema de la grieta, la zona plástica y la barrera, junto con los granos del material.

En dicho esquema, se considera un material con un tamaño de grano promedio D y una grieta de longitud $2a$, sometido a una tensión externa cortante τ^∞ . La posición del borde de grano es $iD/2$ con respecto al centro de la grieta, donde i representa la cantidad de granos afectados por la grieta y toma valores $i = 1, 3, 5, \dots$, considerando que la grieta crece de forma simétrica. La barrera se encuentra entre esa posición y $r_0 + iD/2$, siendo r_0 , el ancho de la barrera. Las variables \hat{x} , \hat{y} y $\hat{\xi}$ tienen unidades de longitud.

En la figura 2.2 se observa un esquema similar, con la grieta creciendo sin los granos del material. Allí se pueden encontrar esquemáticamente a las dislocaciones en la grieta y en la banda de deslizamiento y las tensiones que se oponen a su movimiento. Las primeras, σ_1 y σ_2 , representan la tensión de “fricción” en la grieta y en la zona plástica respectivamente, mientras que σ_3 representa la tensión en la barrera. Cabe destacar que en este caso, las variables que figuran en el gráfico, x , ξ e y , son adimensionales.

La ecuación de equilibrio de dislocaciones a lo largo de la línea de grieta, en términos de las variables adimensionales x y ξ es la siguiente [10, 13, 14]:

$$A \int_{-1}^1 \frac{f(\xi) d\xi}{(x - \xi)} + (\tau^\infty - \sigma_f(x)) = 0 \quad (2.1)$$

El primer término representa la suma de las tensiones producidas entre las dislocaciones, siendo $f(\xi)$ la función distribución de las mismas y A una constante para la cual, $A = Gb/2\pi$ si se trata de dislocaciones de tornillo o $A = Gb/2\pi(1-\nu)$ si son de borde, donde G es el módulo de corte del material, b el vector de Burgers y ν el coeficiente de Poisson. El factor $1/(x - \xi)$ se denomina *Núcleo* de la ecuación y en él se ve reflejada la interacción entre la dislocación ubicada en x y aquella ubicada en ξ . τ^∞ es la tensión que habría en la línea de grieta si esta no existiera, debido a la tensión externa aplicada. Por su parte σ_f es la tensión que se opone al movimiento de las dislocaciones en cada una de las tres zonas, tomando valores σ_1, σ_2 y σ_3 .

Dicha ecuación (2.1) tiene una solución exacta, la cual se consigue aplicando el teorema de inversión de Muskhelishvili [16]. La función distribución de dislocaciones resulta [10, 11]:

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi^2 A} (\sigma_2 - \sigma_1) \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_1 \xi}{n_1 + \xi} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_1 \xi}{n_1 + \xi} \right| \right) \right] + \frac{1}{\pi^2 A} (\sigma_3 - \sigma_2) \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_2 \xi}{n_2 + \xi} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_2 \xi}{n_2 + \xi} \right| \right) \right] \quad (2.2)$$

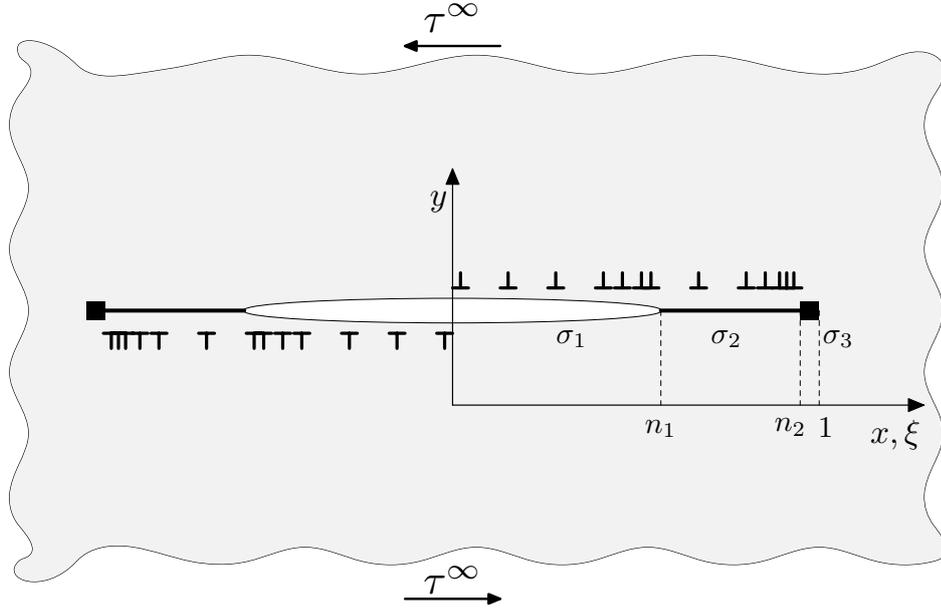


Figure 2.2: Esquema de grieta, zona plástica y barrera. Coordenadas adimensionales.

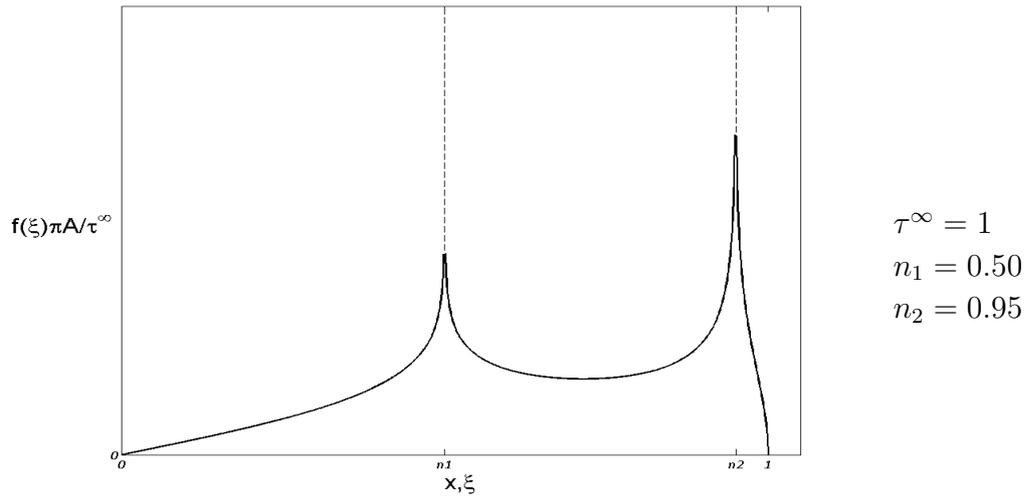
Por otra parte, de la condición de existencia de una distribución de dislocaciones acotada en ambos extremos, se obtiene la tensión en la barrera necesaria para mantener el equilibrio [10, 11, 14], la cual se muestra a continuación en la ecuación (2.3).

$$\sigma_3 = \frac{1}{\cos^{-1} n_2} \left[(\sigma_2 - \sigma_1) \sin^{-1} n_1 - \sigma_2 \sin^{-1} n_2 + \frac{\pi}{2} \tau^\infty \right] \quad (2.3)$$

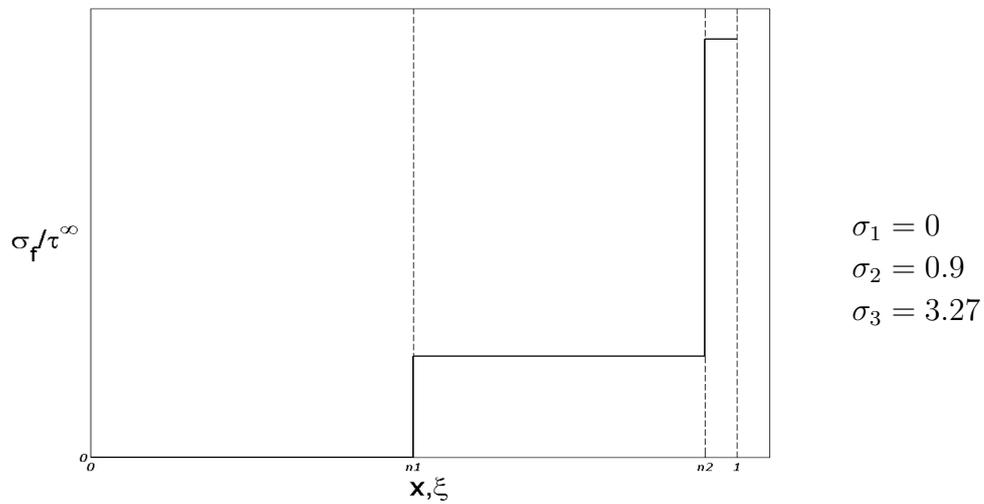
En la figura 2.3a se muestra un ejemplo de la distribución de dislocaciones teórica obtenida mediante la ecuación (2.2) para los siguientes valores de las variables, escogidos arbitrariamente: $n_1 = 0.50$, $n_2 = 0.95$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0.9$ y $\tau^\infty = 1$. A partir de la ecuación (2.3) se obtiene $\sigma_3 = 3.27 \text{MPa}$.

En dicha figura se observa la presencia de singularidades que son del tipo logarítmicas [10, 17, 18] en los cambios de zona (grieta-zona plástica y zona plástica-barrera) y es de valor 0 en ambos extremos ya que no hay desplazamiento plástico más allá de la barrera. Por su parte, en la figura 2.3b, y a modo comparativo, se muestra la tensión σ_f en cada una de las zonas. Se puede observar que la posición de los saltos en la tensión coincide con la de las singularidades en la función de distribución de dislocaciones. En

ambos casos, se muestra sólo la mitad de las funciones ($x, \xi \in [0; 1]$), utilizando la condición de simetría del problema. Cabe destacar que la función de distribución de dislocaciones obtenida es antisimétrica.



(a) Distribución de dislocaciones para un caso arbitrario.



(b) Tensión que se opone al movimiento de las dislocaciones.

Figure 2.3: Ejemplo de distribución de dislocaciones y tensiones de fricción utilizando las ecuaciones (2.2) y (2.3).

Volviendo sobre la expresión (2.3), en ella se relaciona directamente la tensión

en la barrera (σ_3) con la tensión aplicada a la pieza (τ^∞). Por otro lado, a medida que la grieta avanza, tanto n_1 como n_2 tienden al valor 1, aumentando así el valor de σ_3 . Se puede demostrar [10, 11] que el máximo de la tensión en la barrera se consigue cuando la grieta alcanza la barrera misma, eliminando la zona plástica ($n_1 = n_2 = n = (iD/2) / (iD/2 + r_0)$).

Despreciando la tensión de fricción en la zona de la grieta ($\sigma_1 = 0$), el máximo en la tensión en la barrera tiene la siguiente expresión:

$$\sigma_3 = \frac{1}{\cos^{-1}(n)} \frac{\pi}{2} \tau^\infty \quad (2.4)$$

Para que la grieta pueda propagarse al siguiente grano, el máximo alcanzado en la barrera tiene que ser lo suficientemente alto para poder activar un plano de deslizamiento en el grano vecino. Dicha condición se puede expresar, para una grieta que ocupa i granos, mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_3^i = \tau_c^i m_i^* \quad (2.5)$$

Donde σ_3^i es la tensión en la barrera correspondiente al grano “ i -ésimo”, τ_c^i es la tensión necesaria para activar un plano de deslizamiento en el grano vecino y m_i^* es un factor de orientación cristalográfica entre granos contiguos. Igualando las ecuaciones (2.4) y (2.5) se obtiene:

$$\tau_c^i m_i^* = \frac{1}{\cos^{-1}(n)} \frac{\pi}{2} \tau^\infty \quad (2.6)$$

Por lo tanto, la tensión externa mínima necesaria para que la grieta supere el grano “ i -ésimo”, (τ_{Li}^∞), es:

$$\tau_{Li}^\infty = \frac{2 \cos^{-1}(n)}{\pi} \tau_c^i m_i^* \quad (2.7)$$

Es sencillo demostrar [10, 11] que el máximo en esta tensión se dará para el primer grano, por lo que el límite a fatiga del material sin concentradores de tensiones, estará dado por la tensión necesaria para superar la primera barrera:

$$\tau_{L1}^\infty = \tau_{FL} \quad (2.8)$$

Partiendo de esta base, se puede demostrar que la relación entre la tensión necesaria para atravesar la primera barrera (el límite a fatiga del material, τ_{L1}^∞) y las sucesivas barreras es la siguiente [10, 11, 14]:

$$\frac{\tau_{Li}^\infty}{\tau_{L1}^\infty} = \frac{m_i^*}{m_1^*} \frac{1}{\sqrt{i}} \quad (2.9)$$

Esta ecuación provee una representación microestructural del diagrama de Kitagawa-Takahashi.

Si se realiza el razonamiento inverso, mediante el diagrama de Kitagawa-Takahashi del material estudiado, se puede obtener el término de la derecha de la ecuación (2.9) [19]. De esta manera se puede obtener la tensión necesaria para pasar cada una de las barreras a partir del límite a fatiga y el correspondiente diagrama del material analizado.

En caso de no conocerse el diagrama de Kitagawa-Takahashi del material, se puede utilizar la siguiente aproximación propuesta por Vallellano et al. [20].

$$\frac{\sigma_{Li}^{\infty}}{\sigma_{FL}^{\infty}} = \frac{\sqrt{a_0}}{\left[(iD/2)^f + (a_0)^f + (D/2)^f \right]^{1/2f}} \quad (2.10)$$

Siendo a_0 la distancia de El-Haddad ($a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma_{FL}}{K_{th}} \right)^2$) y f un exponente que permite ajustar la forma de la unión entre las dos asíntotas del diagrama. Se ha comprobado [20] que un valor intermedio razonable para una gran variedad de materiales es $f = 2.5$.

Por último, cabe destacar que el modelo de Navarro y De los Ríos consigue representar correctamente los patrones intermitentes de deceleraciones y aceleraciones sucesivas en el crecimiento de microgrietas [10, 11]. Dicho ritmo de crecimiento no puede ser representado con los modelos de cálculo a fatiga clásicos.

2.2 Modelo NR aplicado a placas entalladas

Como se vio en la sección anterior, un aporte muy importante del modelo NR es que recoge correctamente la representación del diagrama de Kitagawa del material analizado. Esto tiene una destacada relevancia para especímenes planos sin concentradores de tensiones, implicando que el límite a fatiga es la tensión necesaria para sobrepasar la primera barrera, como se ha mencionado en la sección anterior. Es decir, una vez que la grieta se propaga más allá del primer grano, nada la detendrá, siempre y cuando se mantengan las condiciones de carga externa.

Sin embargo, esto no siempre es así en componentes entallados, donde el campo de tensiones tiene un gradiente. En este caso, a medida que la grieta avanza, sale del campo de influencia de la entalla y comienza a ver reducida

la tensión en la punta. Así pues, por un lado la tensión en la barrera aumenta grano a grano, debido a la propagación de la grieta, mientras que por otro disminuye, debido a la disminución de la tensión externa a medida que se aleja de la entalla. Esta relación de compromiso entre ambas variables implica que la tensión necesaria para superar la primera barrera no siempre sea superior a la necesaria para superar todas las demás. De esta manera, el límite a fatiga del material estará dado por la tensión mínima necesaria para superar todas las barreras.

El cambio en la ecuación de equilibrio de dislocaciones radica, por un lado, en la compleja elaboración del *Núcleo* para el caso de cada geometría y modo de carga en particular y, por otro, en la dependencia de la tensión en la línea de grieta debido a la carga externa con la distancia al borde de la entalla. Dicha tensión deja de ser constante y pasa a tener un gradiente.

La figura 2.4 muestra el ejemplo de una placa infinita con una entalla circular, sometida a una carga axial σ_y^∞ . En ella se observa, además, el crecimiento simétrico de dos grietas de longitud a , la zona plástica asociada a cada una de ellas y las barreras microestructurales. Cabe destacar la presencia de las variables no adimensionales \hat{x} y $\hat{\xi}$, imprescindibles en este caso debido a la dependencia de la tensión en la línea de grieta, con la distancia a la entalla.

De este modo, la ecuación integral de equilibrio de las tensiones sobre las dislocaciones a lo largo de una de las líneas de grieta, teniendo en cuenta la presencia de la otra grieta creciendo de forma simétrica, se puede expresar de la siguiente manera [14]:

$$\int_R^{R+c} f(\hat{\xi}) K(\hat{x}, \hat{\xi}) d\xi = \frac{(\sigma_y(\hat{x}) - \sigma_f)}{A} \quad (2.11)$$

Donde $K(\hat{x}, \hat{\xi})$ es el *Núcleo* del sistema, el cual depende de la geometría y tiene en cuenta la simetría del problema, considerando la interacción de una dislocación situada en “ x ” con otra situada en “ ξ ” o en “ $-\xi$ ”. Por su parte, $\sigma_y(\hat{x})$ es la tensión elástica sobre la línea de grieta, debido exclusivamente a la interacción entre la entalla y a la carga externa, es decir, sin considerar la presencia de la grieta.

Además, por tratarse de un caso de carga biaxial, en el cual la combinación de estados de carga en el plano puede ser cualquiera, no existe a priori una dirección de grieta preferencial. Esto implica la necesidad de trabajar en el plano, evaluando distintas direcciones de propagación de la grieta (θ_1). La figura 2.5 muestra un esquema del modelo aplicado a una grieta con el sistema de coordenadas general (orientado en función de la carga de tracción) y el sistema local, con origen en el punto de iniciación de la grieta. Se trata de un medio infinito, sin concentradores de tensiones, sometido a una carga biaxial, representada como la combinación de dos tensiones genéricas, $\sigma_{\hat{y}}^\infty$ y τ^∞ [13, 22, 23].

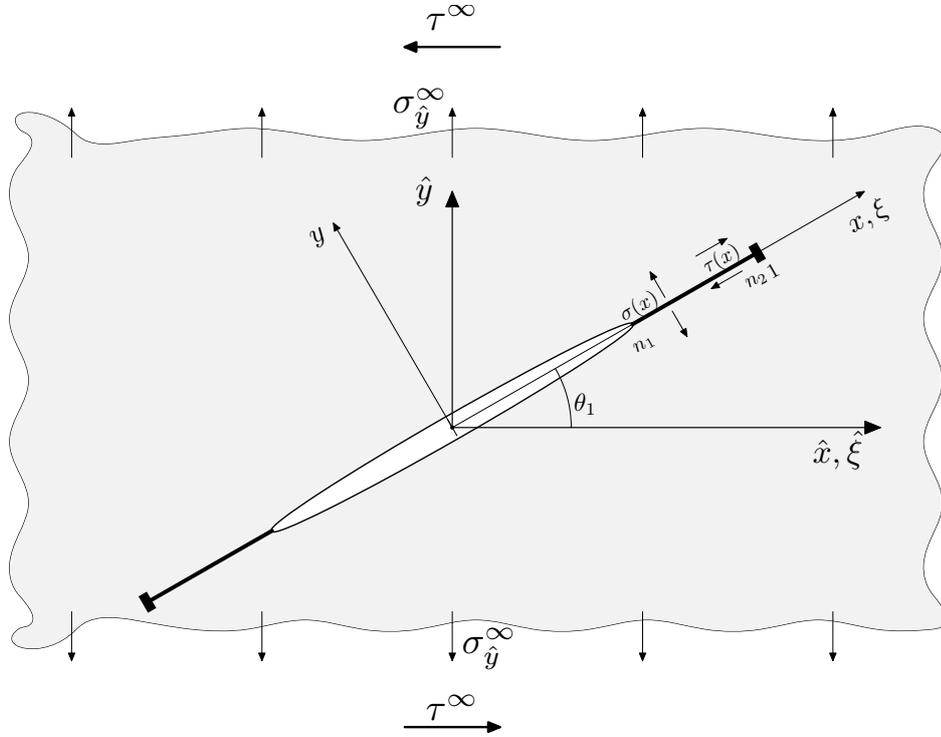


Figure 2.5: Placa con grieta sometida a esfuerzos biaxiales

Debido a la presencia de ambas distribuciones de dislocaciones y al trabajar en un plano, se deben considerar las tensiones de tracción y de corte sobre la línea de grieta, $\sigma(x)$ y $\tau(x)$, dentro del balance de tensiones. De esta manera, ambas ecuaciones integrales en coordenadas adimensionales resultan [13, 21, 22, 23]:

$$-\frac{1}{A} [\sigma(x) - \sigma_f] = \int_{-1}^1 f^y(\xi) K_y(x, \xi) d\xi$$

$$-\frac{1}{A} [\tau(x) - \tau_f] = \int_{-1}^1 f^x(\xi) K_x(x, \xi) d\xi \quad (2.12)$$

Ambas ecuaciones están desacopladas, por lo que se puede entender al sistema como la suma de dos sistemas monoaxiales, cada uno con el *Núcleo* correspondiente.

De manera análoga al caso uniaxial, se obtiene una condición de superación de la barrera *i-ésima*, con la diferencia de poseer la contribución de ambas tensiones [22, 23]:

$$\frac{\sigma_3^i}{m_{\sigma i}^*} + \frac{\tau_3^i}{m_{\tau i}^*} = \tau_c \quad (2.13)$$

Al igual que en el caso uniaxial, $m_{\sigma i}^*$ y $m_{\tau i}^*$ son los factores de proyección de la tensión normal σ_3^i y tangencial τ_3^i , respectivamente. Reordenando la condición de activación 2.13, se obtiene:

$$\frac{\sigma_3^i}{m_{\sigma i}^* \tau_c} + \frac{\tau_3^i}{m_{\tau i}^* \tau_c} = 1 \quad (2.14)$$

Por su parte, cada una de las constantes de activación de la “*i-ésima*” barrera puede relacionarse con la primera a través del diagrama de Kitagawa, como ya fue mencionado en la sección 2.1. Utilizando la relación 2.9 en la página 20 tanto para “ $m_{\sigma i}^* \tau_c / m_{\sigma 1}^* \tau_c$ ”, como para “ $m_{\tau i}^* \tau_c / m_{\tau 1}^* \tau_c$ ” y la aproximación 2.10 en el caso de no conocer el diagrama de Kitagawa del material estudiado, se obtiene [13, 21]:

$$\begin{aligned} m_{\sigma i}^* \tau_c &= m_{\sigma 1}^* \tau_c \frac{\sqrt{a_0}}{\left[(iD/2)^f + (a_0)^f + (D/2)^f \right]^{1/2f}} \sqrt{i} \\ m_{\tau i}^* \tau_c &= m_{\tau 1}^* \tau_c \frac{\sqrt{a_0}}{\left[(iD/2)^f + (a_0)^f + (D/2)^f \right]^{1/2f}} \sqrt{i} \end{aligned} \quad (2.15)$$

A priori, las constantes de activación para el primer grano son desconocidas. Sin embargo, ya se ha mencionado que el límite de fatiga del material plano sin concentradores de tensiones, está relacionado con la superación de la primera barrera. Se puede demostrar [22, 23] que ambas constantes cumplen las siguientes relaciones con los límites de fatiga en tracción σ_{FL} y torsión τ_{FL} :

$$m_{\sigma 1}^* \tau_c = \frac{\pi}{2 \cos^{-1} n_2} \frac{\sigma_{FL}}{2 - \bar{\alpha}}$$

$$m_{\tau_1}^* \tau_c = \frac{\pi}{2 \cos^{-1} n_2} \frac{\sigma_{FL}}{2\sqrt{\bar{\alpha} - 1}} \quad (2.16)$$

siendo $\bar{\alpha} = \sigma_{FL}/\tau_{FL}$.

Una vez resuelto de manera numérica el sistema de ecuaciones, lo que se verá en secciones siguientes (2.5 y 3), y calculadas las tensiones en la barrera (σ_3^i y τ_3^i), se procede a calcular la condición de activación (2.13).

Al igual que en el caso uniaxial (2.6), se puede demostrar que la tensión en la barrera es linealmente proporcional a ambas tensiones aplicadas [24], por lo tanto, si se resuelve el sistema inicialmente para dos tensiones σ_y^∞ y τ^∞ y se obtienen las tensiones en la barrera, σ_3 y τ_3 , correspondientes a esa carga externa, se puede calcular fácilmente el factor $\lambda(\theta_1, i)$, el cual multiplicado por el primer miembro de 2.14 da exactamente 1, y por lo tanto cumple el criterio de activación [21].

$$\lambda(\theta_1, i) = \frac{1}{\frac{\sigma_3^i}{m_{\sigma_i}^* \tau_c} + \frac{\tau_3^i}{m_{\tau_i}^* \tau_c}} \quad (2.17)$$

Una vez conocido $\lambda(\theta_1, i)$, las tensiones necesarias para superar la barrera “*i-esima*” (σ_{Li} y τ_{Li}) son:

$$\sigma_{Li} = \lambda(\theta_1, i) \cdot \sigma_y^\infty \quad (2.18)$$

$$\tau_{Li} = \lambda(\theta_1, i) \cdot \tau^\infty$$

Para conocer el límite de fatiga de la pieza para una relación de cargas dada, se sigue un procedimiento sencillo. Para cada dirección de grieta definida por θ_1 se calcula el factor $\lambda(\theta_1, i)$ necesario para superar todas las i barreras, mediante la ecuación 2.17. Dicho valor, llamado $\Lambda(\theta_1)$, es:

$$\Lambda(\theta_1) = \max \lambda(\theta_1, i) \quad (2.19)$$

De todos los valores $\Lambda(\theta_1)$, uno por cada dirección estudiada, el mínimo se utiliza para conocer el límite a fatiga del material, mediante las ecuaciones 2.18, para esa relación de carga. Es decir, el mínimo valor necesario para hacer propagar una grieta por alguna de las direcciones posibles. Por su parte, la dirección correspondiente al mínimo será aquella por donde propagará la grieta. De esta forma, el modelo proporciona tanto el límite a fatiga como la dirección preferencial de propagación. De ahora en adelante, y por

simplicidad, se llamará al factor λ_{FL} límite de fatiga del material, aunque se trate, en realidad, del factor que permite su obtención.

$$\lambda_{FL} = \min \Lambda(\theta_1) \quad (2.20)$$

2.4 Modelo NR biaxial aplicado a placas entalladas

Al aplicar el modelo NR biaxial a una entalla, suceden los mismos inconvenientes que para el caso uniaxial (sección 2.2, página 21), sumados a otros inherentes a pasar de trabajar sobre una línea a un plano.

Entre estas complicaciones, la tensión en la línea de grieta debido a la carga externa tiene un gradiente y pasa a depender de la posición con respecto a la entalla, las ecuaciones pasan a estar acopladas, existiendo ahora cuatro *Núcleos*, uno por cada combinación entre las tensiones sobre la línea de grieta ($\sigma(x)$, $\tau(x)$) y las funciones de distribución de dislocaciones ($f(\xi)^x$, $f(\xi)^y$) y, por último, se desconocen tanto la posición del inicio de la grieta alrededor de la entalla, como la dirección de propagación.

La figura 2.6 muestra el ejemplo de una placa infinita con un agujero, sometida a un estado de carga biaxial, combinación de una carga de tracción σ_y^∞ y una de corte τ^∞ . La placa posee dos grietas de longitud a creciendo de manera simétrica, desde un punto cualquiera de la entalla, definido por la variable θ , con una dirección arbitraria, definida por la variable θ_1 .

Por razones de conveniencia en el cálculo, se calculan las tensiones elásticas, debido a las cargas externas, alrededor de la entalla en coordenadas polares y luego se giran a coordenadas cartesianas, x e y , con el origen coincidente con el origen de la grieta. Cada una de las contribuciones de las tensiones externas a lo largo de la grieta (σ y τ) son entonces, funciones de dos ángulos, aquel que forma el punto de inicio de la grieta sobre la entalla, con respecto a la horizontal (θ) y el que forman la dirección de propagación y la horizontal (θ_1). Al mismo tiempo, también son funciones de la distancia a la entalla (r) y, evidentemente, de la carga aplicada ($\sigma_y^\infty, \tau^\infty$).

$$\sigma(\theta, \theta_1, r, \sigma_y^\infty, \tau^\infty) = \sigma(\bar{x})$$

$$\tau(\theta, \theta_1, r, \sigma_y^\infty, \tau^\infty) = \tau(\bar{x})$$

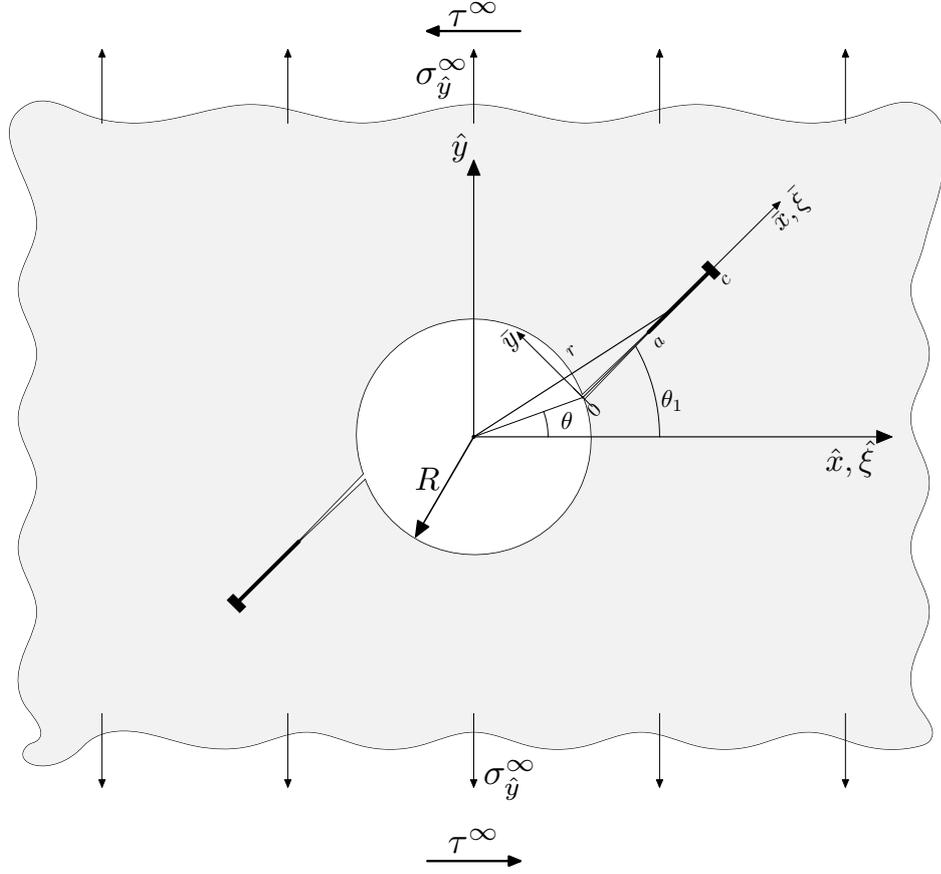


Figure 2.6: Placa entallada sometida a esfuerzos biaxiales.

Las ecuaciones de equilibrio para el caso general de una grieta creciendo desde una entalla, con la influencia de otra grieta creciendo de manera simétrica, son:

$$-\frac{1}{A} [\sigma(\bar{x}) - \sigma_f] = \int_0^c f^x(\bar{\xi}) K_{x\sigma}(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} + \int_0^c f^y(\bar{\xi}) K_{y\sigma}(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (2.21)$$

$$-\frac{1}{A} [\tau(\bar{x}) - \tau_f] = \int_0^c f^x(\bar{\xi}) K_{x\tau}(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} + \int_0^c f^y(\bar{\xi}) K_{y\tau}(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}$$

Siendo $c = iD/2 + r_0$ la distancia entre el inicio de la grieta hasta el final de la barrera.

En este caso, para encontrar el límite de fatiga se debe analizar para cada punto de iniciación θ alrededor de la entalla, todas las rectas de propagación posibles θ_1 . En cada una de ellas se encuentra una barrera cuya tensión para

sobrepasarla será máxima, utilizando la ecuación 2.17. Se busca entonces, el siguiente valor:

$$\Lambda(\theta, \theta_1) = \max \lambda(\theta, \theta_1, i) \quad (2.22)$$

Del conjunto de todas las tensiones máximas para sobrepasar las barreras, una por cada punto de iniciación y dirección de propagación, la más baja de ellas es el límite a fatiga del material λ_{FL} .

$$\lambda_{FL} = \min \Lambda(\theta, \theta_1) \quad (2.23)$$

El punto de iniciación y la dirección de propagación correspondientes a esa tensión mínima, serán el lugar preferente donde se inicie la grieta alrededor de la entalla y la dirección de propagación que tomará.

Como puede verse, el presente modelo brinda también el punto de iniciación y la dirección de propagación de la grieta, algo que no hacen los modelos enmarcados dentro del cálculo clásico de componentes sometidos a fatiga.

2.5 Resolución numérica del modelo NR

Como se mostró en las secciones anteriores, la pieza fundamental del modelo NR es el cálculo correcto de la tensión máxima en las sucesivas barreras, a medida que la grieta avanza. Dicho valor se puede obtener del balance de tensiones sobre las dislocaciones, que para el caso de un espécimen plano infinito sin concentradores de tensión, sometido a un esfuerzo monoaxial se reduce a la ecuación 2.1, en la página 17 y para casos más generales, se modifica tanto el *Núcleo* como la tensión externa aplicada a lo largo de la dirección de grieta.

Cuando se trata de un espécimen plano infinito sin concentración de tensiones, como ya se ha mencionado, es posible calcular la solución exacta. Sin embargo, en aquellos casos de geometrías más complejas, con concentradores de tensiones, el *Núcleo* de la ecuación deja de ser sencillo y la resolución analítica se vuelve muy compleja o inexistente. Es en este punto donde la resolución numérica de dicha ecuación es la única forma de calcular las tensiones en la barrera.

Sumado a la complejidad propia de la resolución numérica de una ecuación integral, en la sección 2.1 se mostró que la función de distribución de dislocaciones, incógnita en el problema, tiene singularidades logarítmicas que se

corresponden con los cambios abruptos en la tensión de fricción que impide el movimiento de las dislocaciones [10, 17, 18]. Esto implica descartar de antemano todos aquellos métodos de resolución que son para funciones acotadas en el intervalo de integración.

Con el fin de poder obtener dicha tensión en los casos donde la resolución analítica no es posible y donde, a priori, no se pueden utilizar métodos convencionales de resolución numérica de ecuaciones integrales, Chaves et al. [13] desarrollaron un método basado en el propuesto por Erdogan, Gupta y Cook pero adaptándolo para casos donde la función incógnita no está acotada en el intervalo de integración.

Los métodos propuestos por Erdogan et al. [25] en los años setenta, se aplican en aquellos casos donde la función incógnita no tiene singularidades en el interior del intervalo de integración, pero si puede tenerlas en los extremos. De esta manera, los autores distinguen tres casos: uno donde la función en ambos extremos del intervalo tiende a infinito (caso *no acotado-no acotado*), otro donde en uno de ellos lo hace (*no acotado-acotado* y viceversa) y, lógicamente, un tercero donde la función no tiene singularidades en ningún punto (caso *acotado-acotado*).

Sabiendo que la función incógnita para el modelo NR, $f(\xi)$, no cumple el requisito de ser acotada en el interior del intervalo, Chaves [13] propone dividir el intervalo de integración en la posición exacta de la singularidad. De esta manera, para el caso sencillo de una grieta creciendo en un medio infinito, como el visto en la figura 2.7, donde ésta alcanza la barrera, eliminándose la zona plástica, el intervalo de integración queda dividido en tres *subintervalos*:

- Acotado-No acotado para la barrera izquierda
- No acotado-No acotado para la grieta
- No acotado-Acotado para la barrera derecha

La figura 2.8 muestra como serían dichos intervalos de integración, para un ejemplo arbitrario con $n_1 = n_2 = n = 0.75$ y $\sigma_y^\infty = 1$. En rojo se observan los intervalos donde la función es *Acotada - No Acotada* o *No Acotada - Acotada*, mientras que en el intervalo negro se observa a la función *No Acotada* en ambos extremos.

El método propuesto por Erdogan et al. [25] consiste en obtener un sistema de ecuaciones lineales, teniendo como base la utilización de polinomios de Jacobi, de manera análoga al método de integración de *cuadraturas de Gauss*.

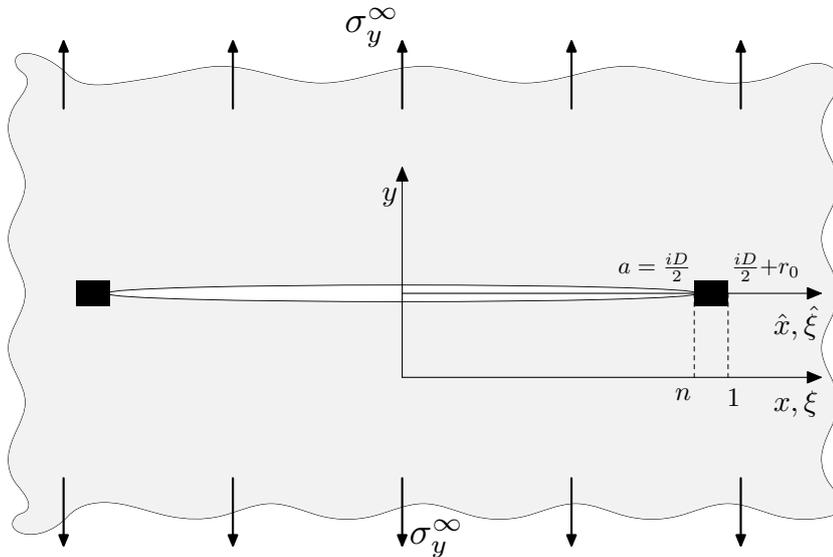


Figure 2.7: Placa infinita con grieta sometida a una carga de tracción uniaxial.

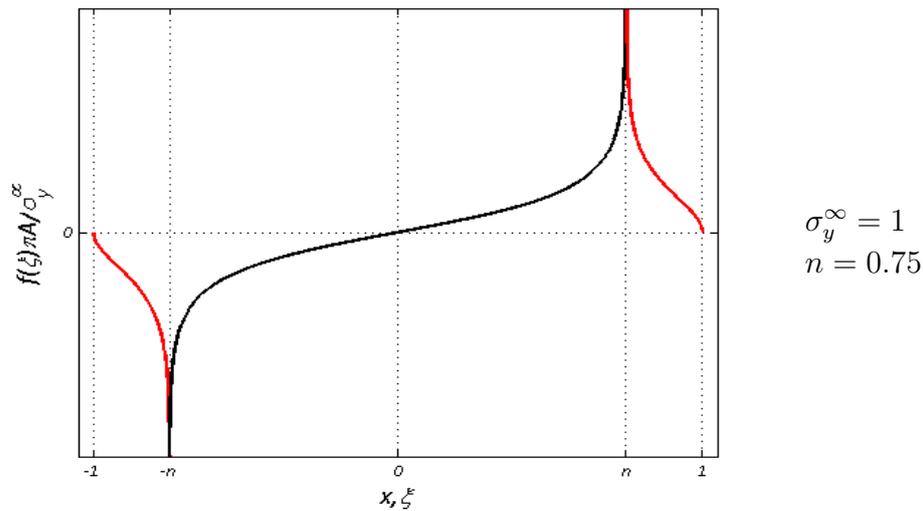


Figure 2.8: Ejemplo de los intervalos de integración utilizados por Chaves et al [13] para la resolución de este caso.

Mediante propiedades de dichos polinomios y trabajando algebraicamente con expansiones en fracciones simples, los autores proponen distintos sistemas de ecuaciones para cada caso. A continuación se muestran los sistemas de ecuaciones para cada uno de los tres. El detalle de la deducción se puede encontrar en [13, 25].

Sea la siguiente ecuación integral:

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)w(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (2.24)$$

Siendo la función $g(\xi)$ acotada en el intervalo $(-1; 1)$ la incógnita, $w(\xi) = (1 - \xi)^\alpha(1 + \xi)^\beta$, la función de peso de los polinomios de *Jacobi* y $S(x)$ una función conocida.

Si la función $g(\xi)$ está acotada en ambos extremos, la integral puede transformarse en un sistema de ecuaciones lineales como el mostrado a continuación:

$$S(x_k) = 2 \sum_{i=1}^N \frac{1 - \xi_i^2}{(N + 1)(\xi_i - x_k)} g(\xi_i) \quad (2.25)$$

donde se obtiene una ecuación por cada punto de colocación, x_k , siendo estos las $N + 1$ raíces del polinomio de Chebyshev de primer orden (T_{N+1}). Cada una de estas $N + 1$ ecuaciones tiene N incógnitas, las cuales son la función $g(\xi)$ evaluada en los puntos de integración, ξ_i , los que se obtienen como las N raíces del polinomio de Chebyshev de segundo orden (U_N).

$$\text{Siendo } \begin{cases} x_k = \cos \left(\frac{\pi(2k - 1)}{2(N + 1)} \right) & k = 1, \dots, N + 1 \\ \xi_i = \cos \frac{\pi \cdot i}{N + 1} & i = 1, \dots, N \end{cases}$$

La resolución del sistema de ecuaciones permite obtener N valores discretos de la función $g(\xi)$, en los puntos ξ_i . Utilizando un valor de N suficientemente alto, se obtiene una aproximación razonable de la función $g(\xi)$.

Por otra parte, al existir un punto de colocación x_k más que puntos de integración ξ_i , se obtiene un sistema con $N + 1$ ecuaciones y N incógnitas, como se mencionó previamente. Para este caso, los autores recomiendan descartar una ecuación cualquiera [25].

Análogamente, si la función $g(\xi)$ está acotada en sólo uno de los extremos, el sistema de ecuaciones derivado es:

$$S(x_k) = 2 \sum_{i=1}^N \frac{2(1 - \xi_i)}{(2N + 1)(\xi_i - x_k)} g(\xi_i) \quad (2.26)$$

$$\text{Siendo } \begin{cases} x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2N+1}\right) & k = 1, \dots, N \\ \xi_i = \cos\frac{\pi \cdot 2i}{2N+1} & i = 1, \dots, N \end{cases}$$

En este caso, el sistema contiene igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Por último, para el caso en que la función incógnita, $g(\xi)$, tiende a infinito en ambos extremos del intervalo, el sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$S(x_k) = 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{N(\xi_i - x_k)} g(\xi_i) \quad (2.27)$$

$$\text{Siendo } \begin{cases} x_k = \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{N}\right) & k = 1, \dots, N-1 \\ \xi_i = \cos\frac{\pi(2i-1)}{2N} & i = 1, \dots, N \end{cases}$$

Siguiendo la misma lógica que en los casos anteriores, se deduce que el sistema contará con $N-1$ ecuaciones para N incógnitas.

Para la resolución del caso concreto del modelo NR, como ya se mencionó anteriormente, se utilizan dos intervalos del tipo *acotado-no acotado*, los cuales proporcionan igual número de incógnitas que de ecuaciones, y un intervalo *no acotado-no acotado*, el cual tiene una incógnita más que ecuaciones. Si cada intervalo tiene N puntos de integración, habrá $3N$ incógnitas y $3N-1$ ecuaciones. Por otro lado, la tensión en la barrera se desconoce y es una incógnita más. De este modo, son $3N+1$ incógnitas y solamente $3N-1$ ecuaciones.

Para salvar esta indeterminación del sistema, Chaves propone, basándose en los trabajos de Hills para factores de intensidad de tensiones [26], imponer una condición de continuidad de la pendiente del desplazamiento plástico en los dos intervalos. Dicha condición equivale a que la función de distribución de dislocaciones $f(\xi)$ tenga el mismo valor a ambos lados de las uniones de intervalos, es decir, a ambos lados de la singularidad [13].

Así, se obtienen dos ecuaciones más, una por cada singularidad, dejando el sistema con igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas.

Los resultados conseguidos por el Chaves et al. [13, 14, 21], utilizando esta técnica de integración, son muy precisos para distintos tipos de carga y geometrías. Sin embargo, para casos particulares, el sistema puede quedar mal

condicionado y provocar errores numéricos. Sumado a ello, la utilización de las ecuaciones de continuidad de la pendiente del deslizamiento plástico implica introducir conceptos ajenos al modelo NR.

Estas inquietudes han derivado en la necesidad de buscar alternativas al método propuesto por Chaves et al. al menos para los casos específicos donde los errores numéricos dejan de ser despreciables.