

Capítulo 4

Resolución numérica del modelo biaxial para placas entalladas

Una vez elegido el método de resolución numérica de ecuaciones integrales, se prosiguió a aplicarlo al modelo Biaxial para placas entalladas. Concretamente, se evaluó el caso de entallas circulares.

Previo a resolver las ecuaciones inherentes al modelo NR, es necesario conocer tanto el campo de tensiones elásticas sobre la línea de grieta que existiría en caso de no encontrarse la misma, como la contribución de la interacción entre dislocaciones, es decir, el *Núcleo* del problema. Ambos estudios fueron desarrollados por Chaves et al. [21], pero para facilitar la comprensión de la resolución numérica del modelo biaxial en su totalidad, se explican a continuación.

4.1 Tensiones elásticas

Por tratarse del campo de tensiones elásticas alrededor de una entalla circular, se trabaja con coordenadas polares, como se mencionó en la sección 2.4. Por esta razón es necesario establecer las relaciones entre las variables adimensionales a lo largo de la línea de grieta (x, ξ) y las utilizadas para calcular las tensiones elástica (r, θ_0) . La figura 4.1 muestra un esquema completo de todas ellas, mientras que las relaciones analíticas se muestran en las ecuaciones 4.1.

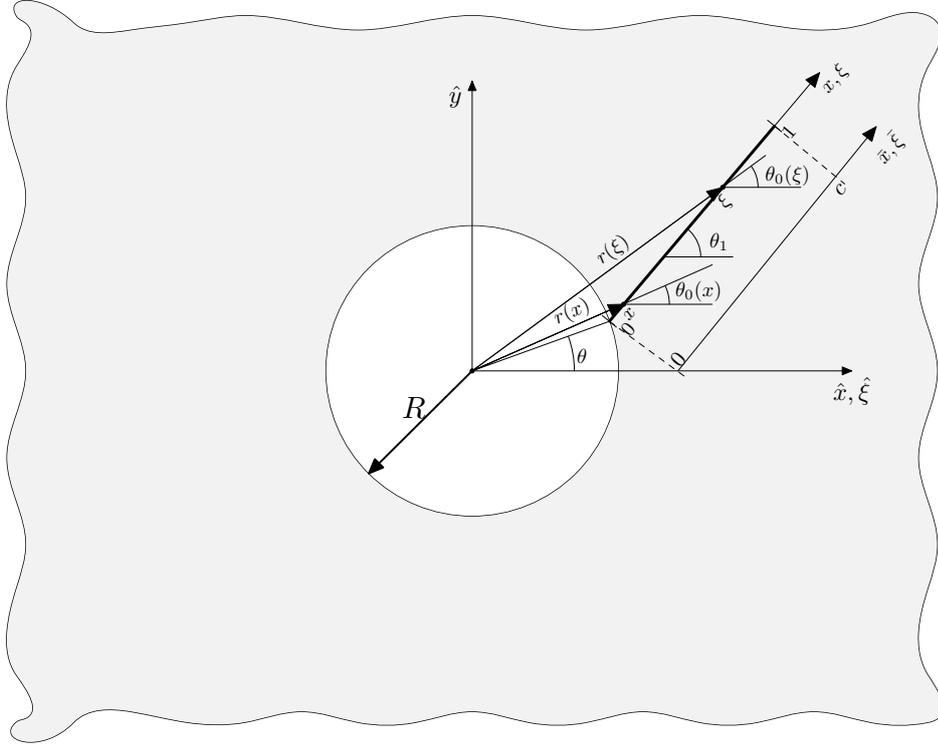


Figure 4.1: Variables utilizadas para resolver el problema elástico a lo largo de la línea de grieta

$$\begin{aligned}
 r(x) &= R \cos(\theta - \theta_0(x)) + c \cdot x \cos(\theta_1 - \theta_0(x)) \\
 r(\xi) &= R \cos(\theta - \theta_0(\xi)) + c \cdot \xi \cos(\theta_1 - \theta_0(\xi)) \\
 \theta_0(x) &= \arctan \left(\frac{R \sin(\theta) + c \cdot x \sin(\theta_1)}{R \cos(\theta) + c \cdot x \cos(\theta_1)} \right) \\
 \theta_0(\xi) &= \arctan \left(\frac{R \sin(\theta) + c \cdot \xi \sin(\theta_1)}{R \cos(\theta) + c \cdot \xi \cos(\theta_1)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para calcular el campo de tensiones elásticas generado en las inmediaciones de dicha entalla cuando la placa está sometida a una combinación de esfuerzos axiales y tangenciales, Chaves et al. [21] utiliza el principio de superposición. Esto implica, calcular por un lado el estado de tensiones generado por el esfuerzo a tracción y por otro, el generado por el esfuerzo de corte y sumar

ambos estados, como muestra la figura 4.2.

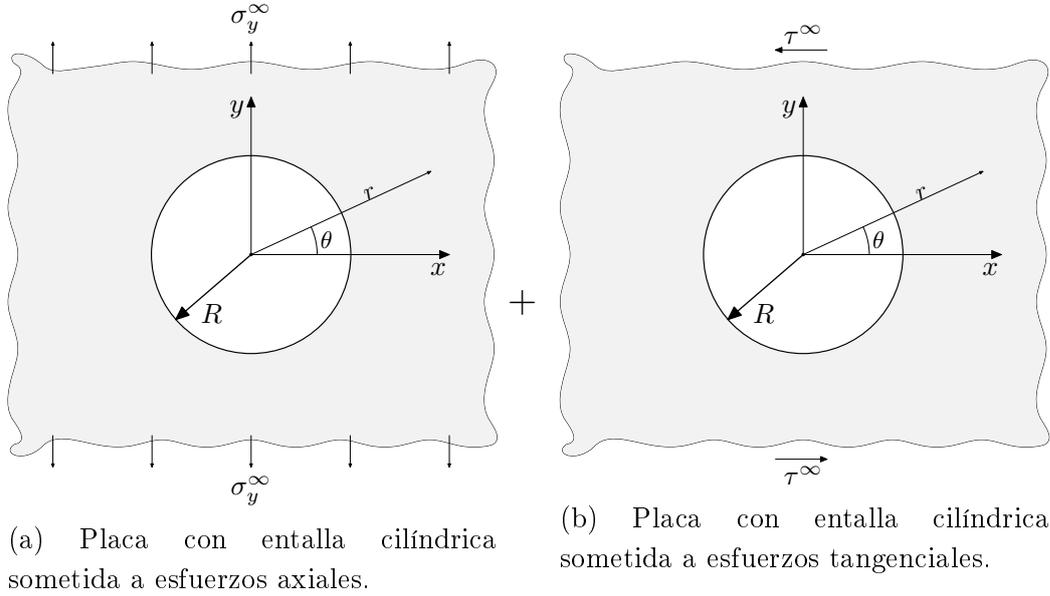


Figure 4.2: Combinación de esfuerzos axiales y tangenciales sobre una placa infinita con una entalla circular.

Para el caso de la placa sometida a un estado de carga axial, como la de la figura 4.2a, se pueden utilizar las fórmulas encontradas por Kirsch [21, 34]. Dichas fórmulas, en coordenadas polares resultan:

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, \theta) &= \frac{\sigma_y^\infty}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_y^\infty}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2}\right) \cos(2\theta) \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= \frac{\sigma_y^\infty}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_y^\infty}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{-\sigma_y^\infty}{2} \left(1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2}\right) \sin(2\theta)\end{aligned}\quad (4.2)$$

Para conocer el campo tensional producido por el esfuerzo de corte, simplemente se descompone éste en una tensión de tracción, girada 45° respecto de los ejes originales, y otra de compresión girada -45° . Dicho razonamiento se puede observar en la figura 4.3. Ambos estados se resuelven por separado,

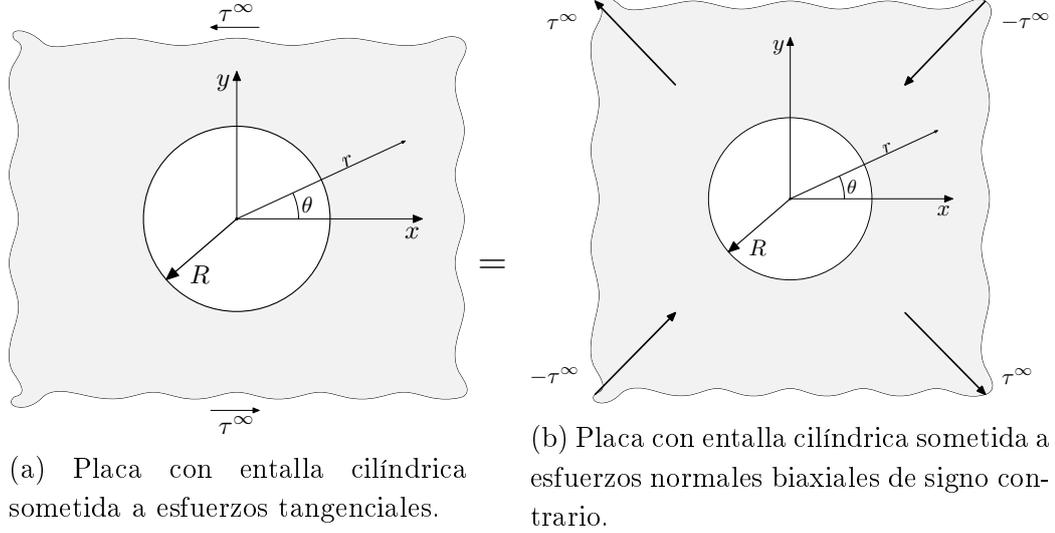


Figure 4.3: Relación entre esfuerzos tangenciales y axiales sobre una placa.

utilizando las fórmulas encontradas por Kirsch considerando el cambio de ángulo respecto de los ejes iniciales, para luego sumarse.

Para la carga a tracción, las ecuaciones que resultan para un punto (r, θ) respecto de los ejes originales, son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(r, \theta) &= \frac{\tau^\infty}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\tau^\infty}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2} \right) \sin(2\theta) \\
 \sigma_\theta(r, \theta) &= \frac{\tau^\infty}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\tau^\infty}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \sin(2\theta) \\
 \tau_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{-\tau^\infty}{2} \left(1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2} \right) \cos(2\theta)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para la carga de compresión sobre ejes a -45° de los ejes originales, el campo de tensiones se puede describir con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(r, \theta) &= \frac{\tau^\infty}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\tau^\infty}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2} \right) \sin(2\theta) \\
 \sigma_\theta(r, \theta) &= \frac{\tau^\infty}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\tau^\infty}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \sin(2\theta) \\
 \tau_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{\tau^\infty}{2} \left(1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2} \right) \cos(2\theta)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Siguiendo con el desarrollo llevado a cabo por Chaves [21], dichos campos se suman, se evalúan en el punto x ($r(x), \theta_0(x)$, figura 4.1) y se rotan un ángulo $(\theta_1 - \theta_0(x))$ para quedar sobre la dirección de la línea de grieta. De esta manera, las nuevas tensiones $\sigma(x)$ y $\tau(x)$ son:

$$\sigma(x) = \sigma_r(x) [\sin^2(\theta_1 - \theta_0(x))] + \sigma_\theta(x) [\cos^2(\theta_1 - \theta_0(x))] - \tau_{r\theta}(x) [\sin(2(\theta_1 - \theta_0(x)))] \quad (4.5)$$

$$\tau(x) = -\sigma_r(x) [\sin(\theta_1 - \theta_0(x)) \cos(\theta_1 - \theta_0(x))] + \sigma_\theta(x) [\sin(\theta_1 - \theta_0(x)) \cos(\theta_1 - \theta_0(x))] + \tau_{r\theta}(x) [\cos(2(\theta_1 - \theta_0(x)))] \quad (4.6)$$

4.2 Tensiones debido al resto de dislocaciones

Ya conocidas las tensiones elásticas sobre la línea de grieta, generadas por interacción entre las tensiones externas (σ_y^∞ y τ^∞) con la entalla, se deben calcular las tensiones debidas a la interacción entre las dislocaciones, llamadas $\bar{\sigma}_y(x)$ y $\bar{\tau}(x)$.

Continuando con el razonamiento empleado por Chaves en [21], las tensiones $\bar{\sigma}_y(x)$ y $\bar{\tau}(x)$ sobre una dislocación genérica situada en un punto $x \in (0, 1)$, producidas por una dislocación con vector de Burger (b_x, b_y) en los ejes locales (x, y) , ubicada en una posición genérica $\xi \in (0, 1)$ se expresa de la siguiente manera:

$$\bar{\sigma}_y(x) = A [b_x K_{x\sigma}(x, \xi) + b_y K_{y\sigma}(x, \xi)] \quad (4.7)$$

$$\bar{\tau}(x) = A [b_x K_{x\tau}(x, \xi) + b_y K_{y\tau}(x, \xi)] \quad (4.8)$$

Donde $K_{x\sigma}(x, \xi)$, $K_{y\sigma}(x, \xi)$, $K_{x\tau}(x, \xi)$, $K_{y\tau}(x, \xi)$ son los *Núcleos* del sistema definidos para un agujero circular, multiplicados por funciones trigonométricas, de manera de obtener las tensiones en la línea de grieta [21]. El desarrollo de cada uno de ellos se puede encontrar en el apéndice A.

4.3 Ecuaciones integrales

Una vez encontradas las tensiones elásticas alrededor de la entalla y aquellas producidas por el resto de las dislocaciones, se procede a armar las ecuaciones de equilibrio de tensiones, propias del modelo NR. Estas son las vistas en la página 28, ecuaciones 2.21, las cuales para simplificar el entendimiento del método de resolución numérica, se vuelven a escribir a continuación. Ambas tensiones vistas en las secciones previas son funciones de la posición de cada una de las dislocaciones, por lo que en un primer lugar, las integrales deben tener reflejada la influencia de las dimensiones. Dichas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A} [\sigma(\bar{x}) - \sigma_f] &= \int_0^c f^x(\bar{\xi}) K_{x\sigma}(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} + \int_0^c f^y(\bar{\xi}) K_{y\sigma}(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} \\ -\frac{1}{A} [\tau(\bar{x}) - \sigma_f] &= \int_0^c f^x(\bar{\xi}) K_{x\tau}(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} + \int_0^c f^y(\bar{\xi}) K_{y\tau}(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} \end{aligned}$$

Como se ha visto en la sección 3.2, el método propuesto de integración debe aplicarse en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que se realiza el siguiente cambio de variables:

$$(\xi + 1) \frac{c}{2} = \bar{\xi} \qquad (x + 1) \frac{c}{2} = \bar{x}$$

$$d\xi \cdot \frac{c}{2} = d\bar{\xi} \qquad dx \cdot \frac{c}{2} = d\bar{x}$$

De esta forma, las ecuaciones adimensionalizadas resultan:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\pi A \cdot c} [\sigma(x) - \sigma_f] &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f^x(\xi) K_{x\sigma}(x, \xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f^y(\xi) K_{y\sigma}(x, \xi) d\xi \\ -\frac{2}{\pi A \cdot c} [\tau(x) - \sigma_f] &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f^x(\xi) K_{x\tau}(x, \xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f^y(\xi) K_{y\tau}(x, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.9)$$

Este sistema de ecuaciones integrales se resuelve utilizando la ecuación 2.25, en la sección 2.5, para funciones acotadas en ambos extremos del intervalo de integración.

Es muy importante destacar en este punto que, si bien el desarrollo del trabajo de Erdogan et al. [25] presentado aquí es para ecuaciones integrales con un *Núcleo* singular de *Cauchy*, los coeficientes que multiplican a la función en los términos de la sumatoria (en el caso *Acotado-Acotado* “ $1 - \xi_i^2/N + 1$ ”) son también, los coeficientes de las *Cuadraturas de Gauss* para cada una de las funciones de peso correspondientes. Por esto, es posible utilizar este mismo desarrollo para ecuaciones integrales con *Núcleos* que contengan más términos que solamente el término singular de *Cauchy* [25].

El sistema de ecuaciones queda entonces:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\pi A \cdot c} [\sigma(x_k) - \sigma_f] &= \sum_{i=1}^N \frac{1 - \xi_i^2}{(N + 1)} K_{x\sigma}(x_k, \xi_i) f^x(\xi_i) + \\
 &\quad \sum_{i=1}^N \frac{1 - \xi_i^2}{(N + 1)} K_{y\sigma}(x_k, \xi_i) f^y(\xi_i) \\
 -\frac{1}{\pi A \cdot c} [\tau(x_k) - \tau_f] &= \sum_{i=1}^N \frac{1 - \xi_i^2}{(N + 1)} K_{x\tau}(x_k, \xi_i) f^x(\xi_i) + \quad (4.10) \\
 &\quad \sum_{i=1}^N \frac{1 - \xi_i^2}{(N + 1)} K_{y\tau}(x_k, \xi_i) f^y(\xi_i)
 \end{aligned}$$

$$\text{Siendo } \begin{cases} x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2(N+1)}\right) & k = 1, \dots, N+1 \\ \xi_i = \cos\frac{\pi \cdot i}{N+1} & i = 1, \dots, N \end{cases}$$

El sistema queda conformado por $2N + 2$ incógnitas, $2N$ de ellas son los valores de las funciones en los puntos ξ_i , en los cuales se evalúan ($f^x(\xi)$ y $f^y(\xi)$) y las dos incógnitas restantes son las tensiones en la barrera, σ_3 y τ_3 . A su vez, posee $2N + 2$ ecuaciones, una por cada punto de colocación x_k y por cada tensión analizada. De esta forma, se obtiene un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas.

