

Trabajo Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería de Caminos, Ca-
nales y Puertos

Un método espectral formulado en 2.5D ba-
sado en el MEC y el MEF para estudiar pro-
pagación de ondas en medios acústicos y
elásticos. Resumen

Autor: Francisco Javier Cruz Muñoz

Tutor: Antonio Romero Ordóñez

Tutor: Pedro Galvín Barrera

Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de
Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Resumen

En este trabajo se presenta una formulación espectral en dos dimensiones y media (2.5D) basada en el método de los elementos finitos (MEF) y el método de los elementos de contorno (MEC) para estudiar la propagación de ondas en los ámbitos de la acústica de fluidos y la elastodinámica tridimensionales (3D). El análisis se lleva a cabo mediante la superposición de problemas bidimensionales (2D) para diferentes números de onda a lo largo de la coordenada longitudinal. El método numérico está basado en la descomposición del dominio para representar el sistema fluido-estructura. Se presenta en este trabajo un elemento finito espectral para representar ondas guiadas en sólidos con sección transversal arbitraria. Además, el MEC se extiende a la formulación espectral para estudiar medios fluidos infinitos. Ambas aproximaciones utilizan polinomios de interpolación de Lagrange como funciones de forma en los puntos de Legendre-Gauss-Lobatto (LGL). Las técnicas propuestas se han verificado mediante dos problemas de referencia: la propagación de ondas en un medio fluido infinito en presencia de una cavidad rígida fija y la propagación de ondas en un carril libre, y los resultados obtenidos presentan un buen grado de acuerdo con las soluciones de referencia. Se realiza un breve análisis $h - p$ para evaluar la precisión de los métodos.

Índice

<i>Resumen</i>	I
1 Introducción	1
1.1 Esquema del problema y motivación	1
1.2 Objetivos	1
1.3 Contribuciones originales	2
1.4 Organización del texto	2
2 Modelo numérico	3
2.0.1 La formulación espectral 2.5D del método de los elementos de contorno	3
2.0.2 La formulación espectral 2.5D del método de los elementos finitos	4
3 Verificación del modelo numérico	9
3.0.1 Cavity cilíndrica en un medio fluido	9
3.0.2 Propagación de ondas en un carril libre	10
4 Conclusiones y desarrollos futuros	15
<i>Índice de Figuras</i>	17
<i>Bibliografía</i>	19

1 Introducción

1.1 Esquema del problema y motivación

La propagación de ondas armónicas en medios acústicos y elásticos es un fenómeno común en muchos campos de la ingeniería. Los métodos híbridos basado en el Método de los Elementos de Contorno (MEC) y en el Método de los Elementos Finitos (MEF) son adecuados para estudiar problemas de interacción fluido estructura. En el rango de frecuencias bajo, los elementos finitos convencionales con funciones de forma lineales representan de forma precisa las ondas radiadas en fluidos y sólidos. Sin embargo, en el rango de frecuencias altas, estas funciones de forma no proporcionan resultados de confianza debido a lo que se conoce como efectos de polución [1, 14]: la precisión de la solución numérica empeora cuando aumenta el número de onda adimensional y no es suficiente la regla de n elementos por longitud de onda [11].

Los efectos de polución (dispersión numérica) no pueden evitarse en problemas bidimensionales y tridimensionales [17], pero pueden reducirse mediante funciones de forma de orden elevado. Ihlenburg y Babška [12, 13] demostraron que formulaciones de orden elevado mejoran la precisión de los métodos numéricos reduciendo las dimensiones de las discretizaciones. Mehdizadeh y Paraschivoiu [16] estudiaron varias metodologías de elementos finitos para la ecuación de Helmholtz. Los autores llegaron a la conclusión de que el p -FEM reduce drásticamente los efectos de polución. Mehdizadeh y Paraschivoiu [16] compararon el Método de los Elementos Espectrales (SEM) con un método MEF de segundo orden. Llegaron a la conclusión que el SEM requiere un menor número de elementos por longitud de onda y un menor coste computacional. Vos et al. [23] presentaron una implementación eficiente del método de los elementos espectrales $h-p$ y analizaron que combinación específica de tamaño de elementos y orden de aproximación minimizaban el coste computacional para un determinado nivel de precisión.

El p -FEM y las metodologías espectrales se han desarrollados usando diferentes familias de funciones de forma: polinomios de Lagrange, Legendre y Bernstein. Biermann et al. [5] y Petersen et al. [19] estudiaron varias familias de funciones de forma para simulaciones acústicas. Los autores concluyeron que el método de los elementos finitos de alto orden are eficiente, incluso para el rango alto de frecuencias, y los elementos basados en los polinomios de Bernstein dan lugar a la solución más eficiente y estable.

Muchos autores han aplicado el metodo de los elementos espectrales en diferentes campos. Degrande y De Roeck [7] desarrollador un método de orden elevado para estudiar la respuesta dinámica de medios porosos saturados usando elementos espectrales. Los autores usaron como funciones de forma en una formulación en desplazamientos la solución analítica para las ecuaciones de Biot restringidas a la propagación de ondas en deformación plana.

Kudela et al. [15] aplicaron elementos espectrales para estudiar propagación de ondas en una barra isotropica y en una viga de Timoshenko. Los autores propusieron esta metodología para detectar daño en estructuras. Los resultados obtenidos fueron comparados con los obtenidos con la metodología convencional de elementos finitos y los medidos en estructuras. Esta comparación resalto la eficiencia de los elementos espectrales y que la metodología refleja el fenómeno bastante bien.

1.2 Objetivos

El método propuesto en este trabajo considera una aproximación en dos dimensiones y media (2.5D) para representar problemas de interacción fluido-estructura. El estudio de ondas radiadas tridimensionales (3D) en

medios fluidos y sólidos requiere el uso de modelos que demandan un alto coste computacional. La solución se vuelve mucho más simple si el medio es homogéneo en una dirección, aunque la fuente dinámica permanezca 3D. Esta situación se conoce como problemas en dos dimensiones y media (2.5D) [6]. Este trabajo presente una formulación espectral en 2.5D basada en el MEF y en el FEM para estudiar la propagación de ondas en problemas de interacción fluido-estructura. El método propuesto es útil para problemas donde el material y las propiedades geométricas son constantes a lo largo de la coordenada longitudinal, y la fuente presenta un comportamiento 3D.

1.3 Contribuciones originales

Los siguientes puntos proporcionan un breve esquema de lo que se percibe que son contribuciones significativas del presente trabajo.

- El método de los elementos espectrales en 2.5D en medios acústicos ha sido extendido a su formulación espectral para el cálculo de propagación de ondas en medios fluidos. Esto introduce un nuevo y preciso método, con un menor coste computacional, para resolver problemas en un rango de frecuencias elevado.
- Por otra parte, un nuevo elemento finito en 2.5D se ha presentado para el estudio de guía de ondas sólidos.

1.4 Organización del texto

El esquema de este trabajo es como se especifica a continuación. En primer lugar, se presenta el modelo numérico. La formulación espectral de elementos finitos en elastodinámica es descrita. Posteriormente se explica el método de los elementos de contornos en su formulación espectral. Por ultimo, los métodos propuestos se verifican mediante la resolución de dos problemas de referencia [20, 10].

2 Modelo numérico

La formulación espectral está basada en la formulación acomplada en 2.5D del MEC-MEF, donde el sólido (Ω_s) se representa mediante el MEF, mientras que la superficie límite (Γ_f) entre el sólido y el fluido ($\Omega_{f\infty}$) se modeliza mediante el MEC (Figure 2.1). En este trabajo, ambas formulaciones han sido desarrolladas por separado, y el proceso de acoplamiento es una línea para futuros desarrollos.

La formulación 2.5D calcula la solución del problema como la superposición de problemas bidimensionales (2D) con diferente número de onda longitudinal, k_z , en la dirección z . Para calcular la solución tridimensional (3D) se utiliza una transformada de Fourier inversa:

$$a(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{a}(\hat{\mathbf{x}}, k_z, \omega) e^{-ik_z z} dk_z \quad (2.1)$$

donde $a(\mathbf{x}, \omega)$ es la magnitud desconocida (por ejemplo, desplazamientos o presiones), $\hat{a}(\hat{\mathbf{x}}, k_z, \omega)$ es su representación en el dominio de la frecuencia y el número de onda, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(x, y, 0)$, ω es la frecuencia angular, y $i = \sqrt{-1}$. La integral definida en la Ecuación (2.1) se convierte en una suma de términos de la forma:

$$a(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{a}(\hat{\mathbf{x}}, k_z, \omega) e^{-ik_z z} \Delta k_z \quad (2.2)$$

con $k_z = m\Delta k_z$. Esta ecuación converge y puede aproximarse por una suma finita de términos.

2.0.1 La formulación espectral 2.5D del método de los elementos de contorno

La formulación de los elementos de contornos presentada en este trabajo considera un contorno arbitrario sumergido en un medio fluido infinito. La representación integral de la presión p^i para un punto i localizado en el subdominio fluido $\Omega_{f\infty}$, sin fuerzas de volumen ni condiciones de contorno se escribe como [9]:

$$c^i p^i(\mathbf{x}^i, \omega) = \int_{\Gamma_f} p^{i*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^i) u^i(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma_f} u^{i*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^i) p^i(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma \quad (2.3)$$

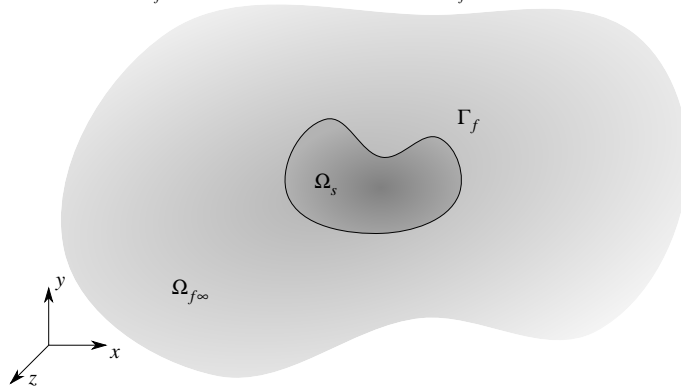


Figura 2.1 Descomposición del dominio.

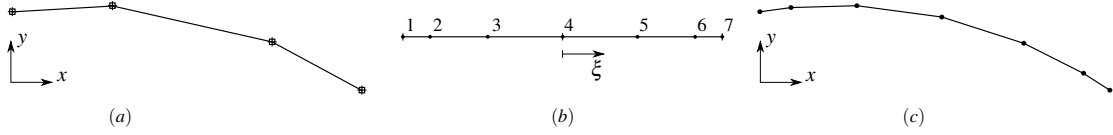


Figura 2.2 (a) Representación de la malla base, (b) definición del elemento en coordenadas naturales y (c) representación en coordenadas físicas del elemento de contorno espectral fluido de orden $p = 6$.

donde $u^i(\mathbf{x}, \omega)$ y $p^i(\mathbf{x}, \omega)$ son respectivamente el desplazamiento normal al contorno Γ_f y la presión nodal. $u^{i*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^i)$ y $p^{i*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^i)$ son respectivamente las soluciones fundamentales para un espacio completo fluido para el desplazamiento normal y la presión en un punto $\mathbf{x}$ debido a una carga puntual actuando en $\mathbf{x}^i$. El término fuera de la integral c^i sólo depende de la geometría del contorno en el punto i . El contorno de integración representa el contorno entre el medio fluido infinito ($\Omega_{f\infty}$) y el subdominio sólido (Ω_s).

A continuación se expone la formulación espectral del método de los elementos de contorno desarrollada en este trabajo.

$$c^i p^i(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Sigma_f} p^{i*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^i) u^i(\mathbf{x}, \omega) dS dz - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Sigma_f} u^{i*}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}^i) p^i(\mathbf{x}, \omega) dS dz \quad (2.4)$$

$$c^i \hat{p}^i(\hat{\mathbf{x}}, \omega, k_z) = \int_{\Sigma_f} \hat{p}^{i*}(\hat{\mathbf{x}}, \omega, k_z; \hat{\mathbf{x}}^i) \hat{u}^i(\hat{\mathbf{x}}, \omega, k_z) dS - \int_{\Sigma_f} \hat{u}^{i*}(\hat{\mathbf{x}}, \omega, k_z; \hat{\mathbf{x}}^i) \hat{p}^i(\hat{\mathbf{x}}, \omega, k_z) dS \quad (2.5)$$

$$c^i \hat{p}^i = \sum_{j=1}^Q \left[\left\{ \int_{\Sigma_f^j} \hat{p}^{i*} \phi^j d\Sigma \right\} \hat{u}^i - \left\{ \int_{\Sigma_f^j} \hat{u}^{i*} \phi^j d\Sigma \right\} \hat{p}^i \right] = \sum_{j=1}^Q [\hat{\mathbf{H}}^{ij} \hat{u}^i - \hat{\mathbf{G}}^{ij} \hat{p}^i] \quad (2.6)$$

El sistema de ecuaciones para todo el contorno de integración queda:

$$\hat{\mathbf{H}}(\omega, k_z) \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega, k_z) = \hat{\mathbf{G}}(\omega, k_z) \hat{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega, k_z) \quad (2.7)$$

El método de los elementos de contorno en su formulación espectral para un elemento fluido en 2.5D utiliza polinomios de Legendre de orden p como funciones de forma. Estas funciones ϕ se definen como:

$$\phi_i = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_j - \xi_i} \quad (2.8)$$

donde el sistema de coordenadas nodales ξ se encuentran en los puntos de Legendre-Gauss-Lobatto:

$$(1 - \xi^2) \frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad (2.9)$$

El contorno Γ_f se discretiza en elementos que son generados a partir de una malla base. La definición de los elementos se hace mediante el uso de polinomios de interpolación de la malla base y su representación en el sistema de coordenadas naturales. La Figura 2.2.(a) muestra la malla base para definir un elemento de orden $p = 6$. En ella se muestra también (b) la representación en coordenadas naturales del elemento, y (c) su representación en coordenadas físicas.

2.0.2 La formulación espectral 2.5D del método de los elementos finitos

La formulación espectral para el subdominio sólido se basa en el principio de los trabajos virtuales. Para un campo de desplazamientos virtuales arbitrario $\delta \mathbf{u}$ impuesto en el sólido Ω_s , el trabajo virtual debido a las fuerzas internas y de inercia debe ser igual al trabajo virtual producido por las cargas externas [25]:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega_s} \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \rho_s \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) d\Omega + \int_{\Omega_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \omega) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega) d\Omega \\ & = \int_{\Omega_s} \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \rho_s \mathbf{b}(\mathbf{x}, \omega) d\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ es el vector de desplazamientos, $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ son respectivamente el tensor de deformaciones y el tensor de tensiones, $\rho_s \mathbf{b}(\mathbf{x}, \omega)$ son las fuerzas de dominio Ω_s , ρ_s es la densidad del sólido, y $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega)$ es el vector de fuerzas nodales. Una variable precedida de δ indica un cambio virtual de su magnitud.

El vector de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ se aproxima de la forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{N} \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{N}$ son las funciones de forma y $\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega)$ es el vector de desplazamientos nodales.

El tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ se deriva del vector de desplazamientos nodales $\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega)$ como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_1 \mathbf{N} \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{L}_2 \mathbf{N} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} \quad (2.12)$$

donde

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

y

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

El tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ se puede reescribir como una combinación lineal de los elementos del vector de desplazamientos, de forma que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{B}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{N}$ y $\mathbf{B}_2 = \mathbf{L}_2 \mathbf{N}$.

El tensor de tensiones está relacionado con el tensor de deformaciones a través de la ley constitutiva del material:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

A continuación se expone la formulación espectral del método de los elementos finitos desarrollada en este trabajo.

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega_s} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{N} \underline{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_s} \left(\delta \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}_1^T + \delta \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} \right)^T \mathbf{B}_2^T \right) \mathbf{D} \left(\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} \right) d\Omega \\ & = \int_{\Omega_b} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left(\int_{A_s} \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{N} dA \right) \underline{\mathbf{u}} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left(\int_{A_s} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dA \right) \underline{\mathbf{u}} dz \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left(\int_{A_s} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 dA \right) \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} \right)^T \left(\int_{A_s} \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dA \right) \underline{\mathbf{u}} dz \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} \right)^T \left(\int_{A_s} \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 dA \right) \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} dz \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left(\int_{A_s} \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{b} dA \right) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left(\int_{\Sigma_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Sigma \right) dz
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left[\int_{A_s} \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{N} dA \right] \underline{\mathbf{u}} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left[\int_{A_s} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dA \right] \underline{\mathbf{u}} dz \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left[\int_{A_s} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 dA - \int_{A_s} \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dA \right] \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} dz \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left(\int_{A_s} \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 dA \right) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}}{\partial z^2} dz \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left(\int_{A_s} \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{b} dA \right) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \delta \underline{\mathbf{u}}^T \left(\int_{\Sigma_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Sigma \right) dz
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$-\omega^2 \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^0 \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^1 \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} + \mathbf{K}^2 \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}}{\partial z^2} = \underline{\mathbf{f}} \tag{2.21}$$

$$\mathbf{M} = \int_{A_s} \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{N} dA \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^0 &= \int_{A_s} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dA \\
\mathbf{K}^1 &= \int_{A_s} (\mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1) dA \\
\mathbf{K}^2 &= \int_{A_s} \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 dA
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \int_{A_s} \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{b}(x, y, z, \omega) dA + \int_{\Sigma_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f}(x, y, z, \omega) d\Sigma \tag{2.24}$$

La Ecuación (2.21) se transforma al dominio del número de onda como:

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}^0 - ik_z \mathbf{K}^1 - k_z^2 \mathbf{K}^2] \hat{\underline{\mathbf{u}}}(k_z, \omega) = \hat{\underline{\mathbf{f}}}(k_z, \omega) \tag{2.25}$$

El método propuesto utiliza polinomios de Legendre de orden p como funciones de forma $\mathbf{N}$, y el sistema de coordenadas nodales $\boldsymbol{\xi}(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ se define como los puntos de Lobatto-Gauss-Legendre (LGL):

$$\begin{cases} (1 - \xi^2) \frac{\partial \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0 \\ (1 - \eta^2) \frac{\partial \mathbf{N}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

El subdominio sólido Ω_s se discretiza en elementos que se generan a partir de una malla base. La Figura 2.3.(a) muestra un elemento de orden $p = 6$. La figura también muestra (b) la representación del elemento en coordenadas naturales y (c) físicas.

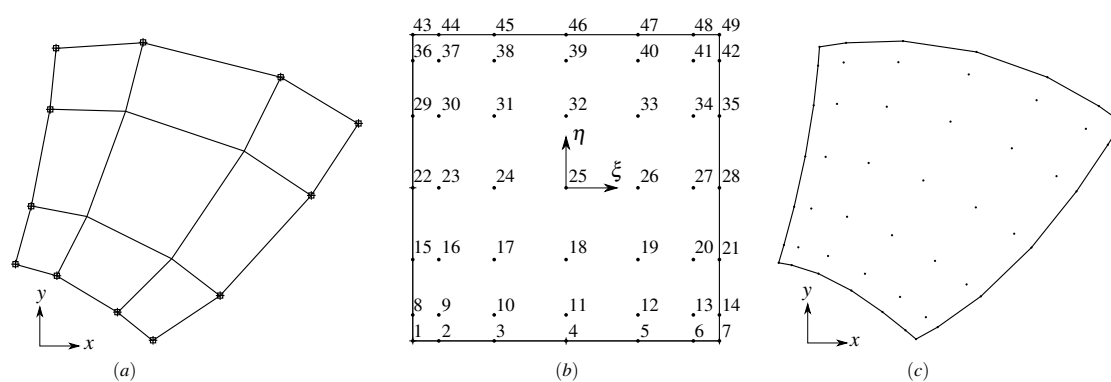


Figura 2.3 (a) Representación de la malla base, (b) definición del elemento en coordenadas naturales y (c) representación en coordenadas físicas de un elemento espectral de orden $p=6$.

3 Verificación del modelo numérico

Los métodos espectrales de elementos finitos y de contorno han sido verificados mediante la resolución de dos problemas de referencia, una cavidad cilíndrica sumergida en un medio fluido infinito, y la propagación de ondas en un carril libre.

3.0.1 Cavidad cilíndrica en un medio fluido

El modelo MEC se ha verificado con un problema de referencia. El modelo se ha validado mediante la solución de una cavidad cilíndrica, sumergida en un medio fluido homogéneo. La cavidad está sometida a una carga de presión puntual armónica. La solución analítica se puede encontrar en la Referencia [20].

La cavidad tiene un radio $r = 5$ m, y las propiedades del fluido son la velocidad de propagación de las ondas $\alpha = 1500$ m/s y la densidad $\rho = 1000$ kg/m³.

El problema se ha resuelto para un rango de frecuencias de entre 2.5 Hz hasta 320 Hz, con un paso de $\Delta f = 2.5$ Hz. Se ha tomado un valor constante $k_z = 10^{-5}$ rad/m. El campo de presiones radiado se ha calculado mediante la identidad de Somigliana.[9].

La solución del problema se ha calculado para una fuente situada en el fluido en el punto $\hat{\mathbf{x}}_0 = (x_0, y_0) = (0, 15)$ a 15 m del centro de la cavidad.

El tamaño de los elementos y el orden de aproximación se ha establecido para mantener una densidad de nodos por longitud de onda de al menos $d_\lambda = 12$ [4].

Se han considerado tres discretizaciones diferentes, con una longitud de elementos de $1/h = 2/\pi$ m⁻¹, $1/h = 3/\pi$ m⁻¹ y $1/h = 4/\pi$ m⁻¹. En este trabajo se ha tomado un orden de elemento de $p = 5$.

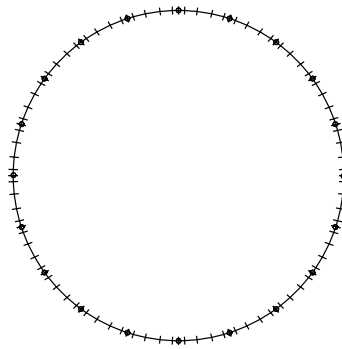


Figura 3.1 Cavidad cilíndrica embebida en un medio fluido infinito: discretización con una distribución de elementos $1/h = 2/\pi$ y orden $p = 6$.

El campo de ondas radiado se ha calculado en una malla de receptores como se muestra en la Figura ??.

La Figura 4.3 muestra la amplitud de la solución analítica del campo de presiones radiado y el campo total de presiones cuando actúa una presión puntual de 200 Hz. La Figure 4.4 representa el error absoluto entre los resultados numéricos y la solución analítica para las diferentes discretizaciones estudiadas.

Los máximos errores aparecen en la zona de sombra y alrededor del contorno de la inclusión. La solución numérica mejora cuanto mayor sea la distancia al contorno. Como era de esperar, la precisión del modelo

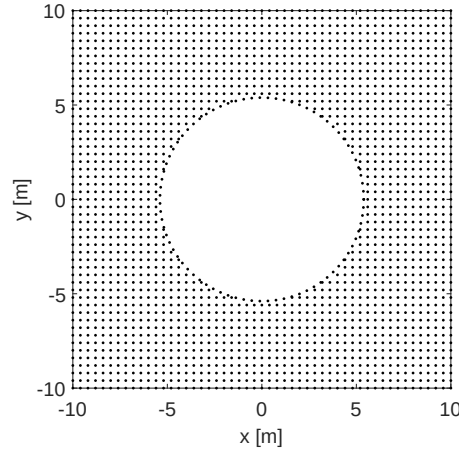


Figura 3.2 Malla de receptores.

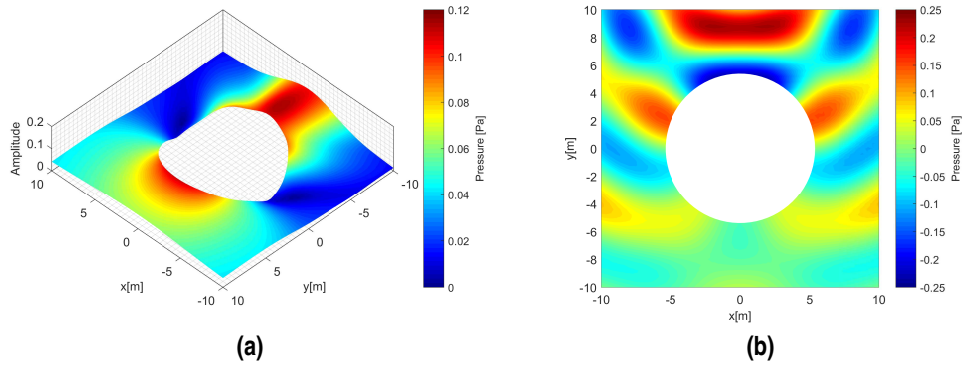


Figura 3.3 (a) Campo de presiones radiado y (b) campo total de presiones debido a una carga armónica actuando a 200 Hz.

mejora al disminuir el tamaño de los elementos. Los resultados muestran que un orden de aproximación mayor o un menor tamaño de elementos debe usarse para calcular la solución en puntos cercanos al contorno.

3.0.2 Propagación de ondas en un carril libre

El elemento sólido espectral presentado en la Sección 2.0.1 se ha verificado mediante el cálculo de las ondas propagativas en un carril libre UIC861-3. Este problema ya ha sido estudiado por L. Gavric [10]. Las curvas de dispersión y los modos de vibración se han calculado para un rango de número de onda $0 - 35$ rad/m, con un paso de $\Delta k_z = 0.05$ rad/m.

La sección transversal se ha representado mediante siete elementos, tres para la cabeza del carril, tres para el patín y uno para el alma. Esta es una ventaja del método de los elementos finitos espectrales, que permite discretizar el dominio con un menor número de elementos. El problema ha sido resuelto con diferentes órdenes de aproximación para evaluar la precisión del método.

Los resultados muestran que aparecen ocho modos de vibración característicos en el rango de frecuencias $0 - 6$ kHz. Cuatro modos tienen componentes de desplazamiento axiales/verticales (Figure ??), mientras que el resto se caracterizan por un movimiento lateral de la sección transversal (Figure ??).

Los resultados numéricos muestran un buen grado de acuerdo con los resultados de referencia para casi todas las ondas descritas. Las ondas de movimiento lateral son muy parecidas a la solución de referencia. Por otra parte, las ondas $ax1$, $ax2$ y $ax3$ muestran diferencias apreciables con los resultados presentados en la Referencia [10] para el rango de frecuencias más elevado. Estas diferencias podrían ser explicadas por la malla gruesa utilizada en la Referencia [10] para frecuencias tan altas. Los resultados propuestos sugieren que la solución para mallas finas convergen a la solución del SEM que aparece en las Figuras 4.6 y 4.7.

Estos resultados están en concordancia con los descritos en la Referencia [10]. De modo que la precisión del método propuesto queda verificada.

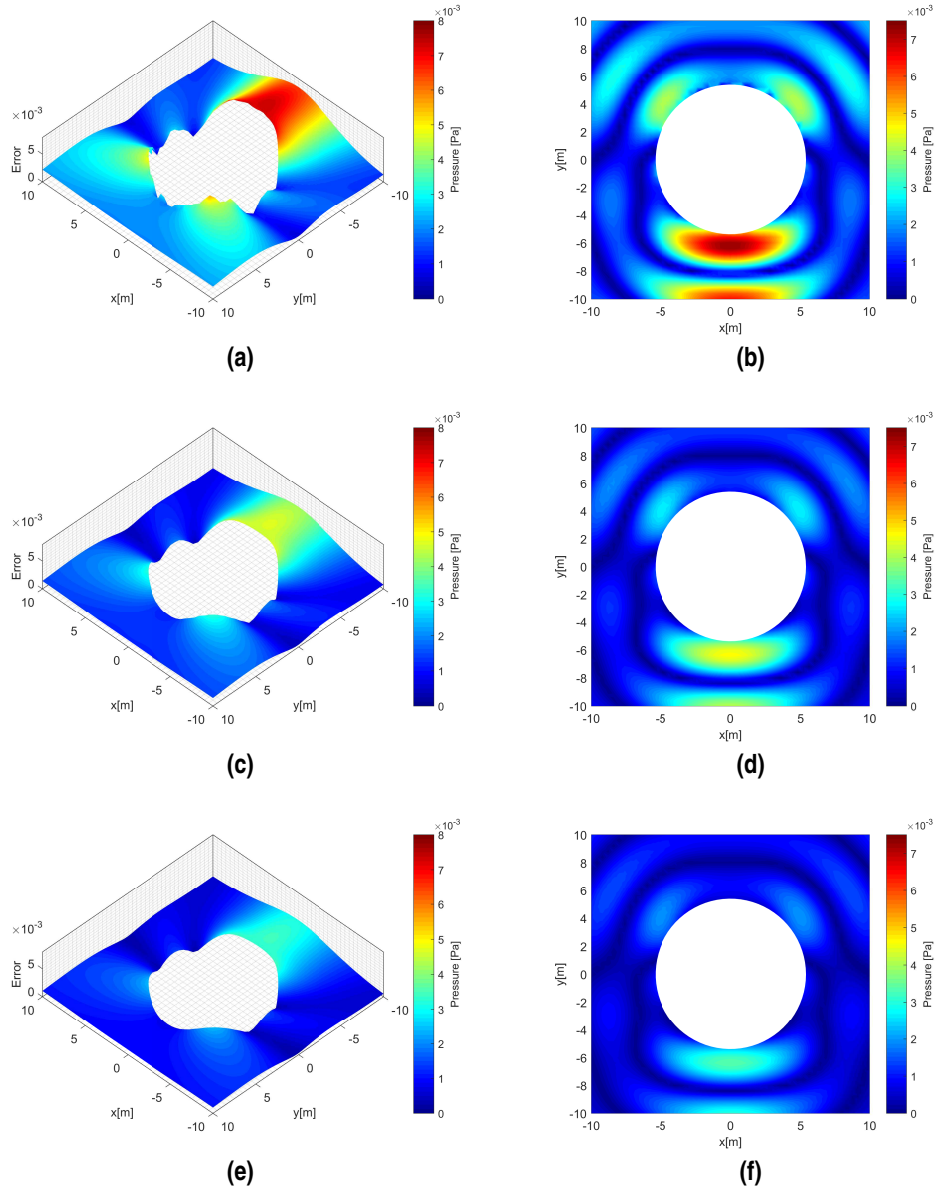


Figura 3.4 Error a

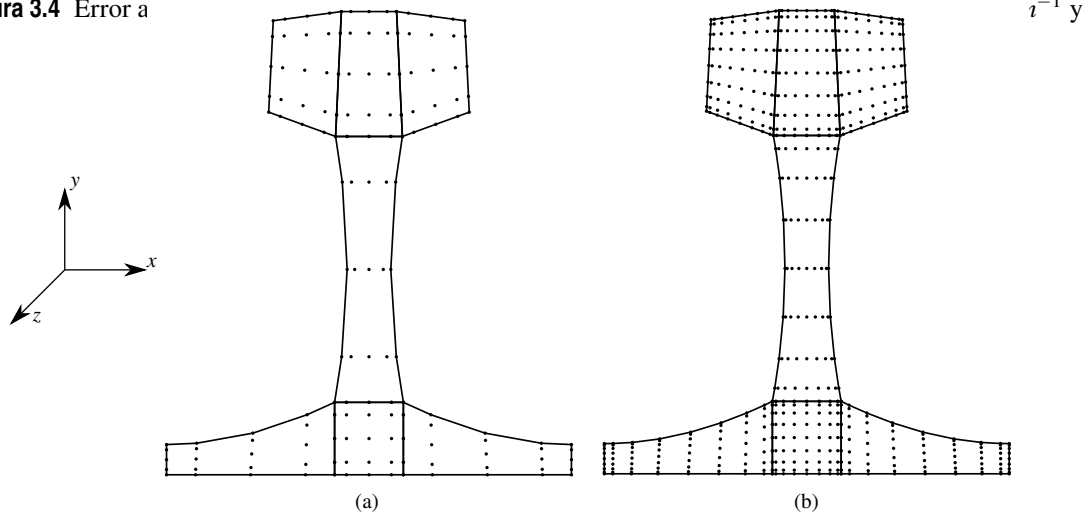


Figura 3.5 Discretización del carril con elementos espectrales. Orden de elementos (a) $p=4$ y (b) $p=8$.

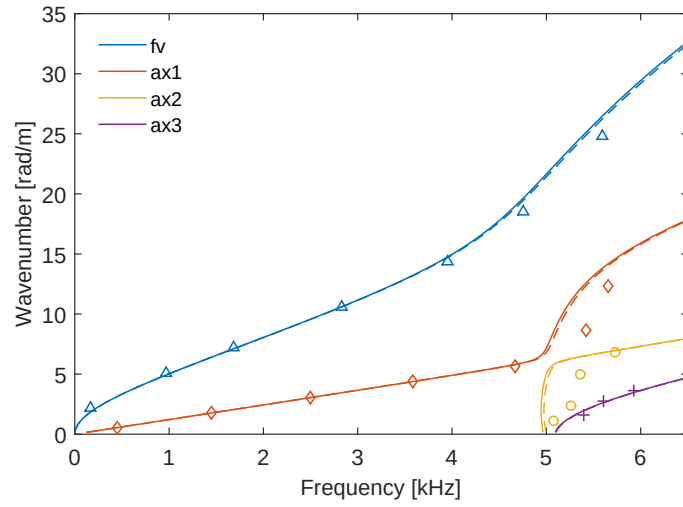


Figura 3.6 Curvas de dispersión de los modos axiales/verticales para el rango de frecuencias 0-6000 Hz. —, resultados numéricos para $p = 8$; - -, resultados numéricos para $p = 4$; $\triangle$, $\diamond$, $\circ$, $+$, resultados de referencia [10].

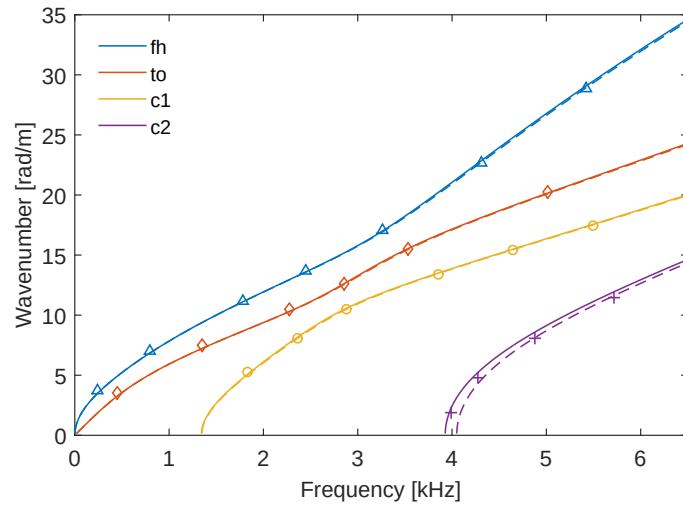


Figura 3.7 Curvas de dispersión de los modos laterales para el rango de frecuencias 0-6000 Hz. —, resultados numéricos para $p = 8$; - -, resultados numéricos para $p = 4$; $\triangle$, $\diamond$, $\circ$, $+$, resultados de referencia [10].

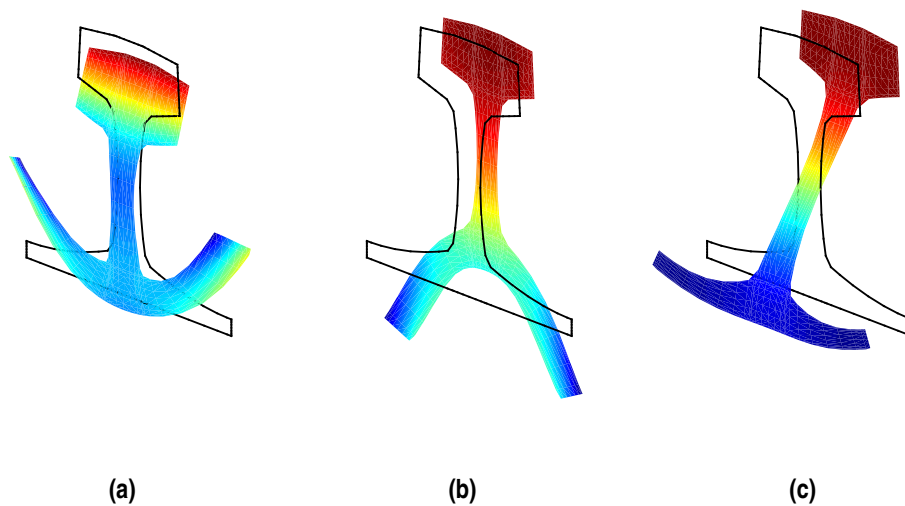


Figura 3.8 Vista frontal del modo de la onda axiales a la frecuencia de 5600 Hz; (a) $ax1$, (b) $ax2$, (c) $ax3$.

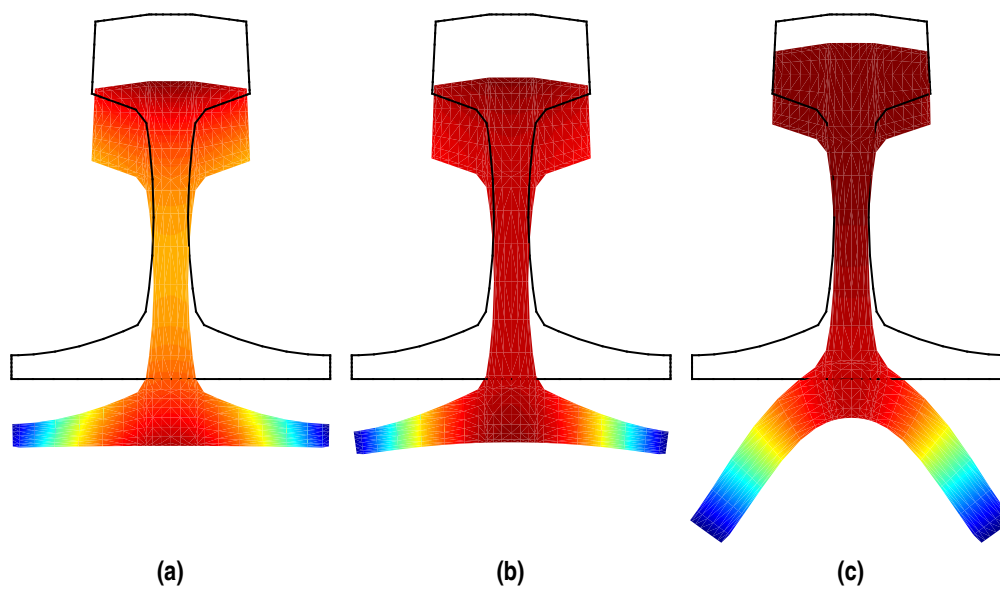


Figura 3.9 Vista frontal del modo de la onda fv a las frecuencias (a) 450 Hz, (b) 1500 Hz y (c) 4200 Hz.

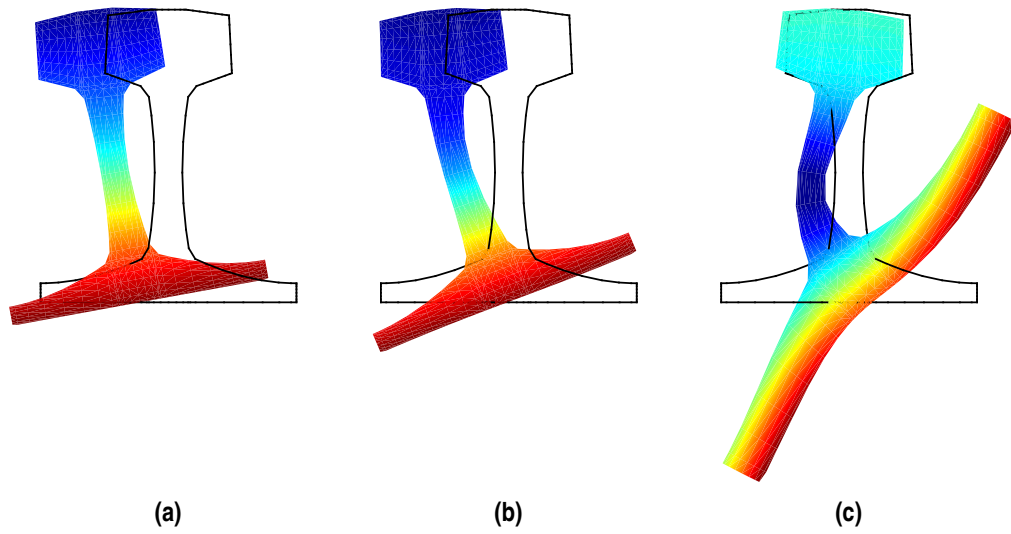


Figura 3.10 Vista frontal del modo de la onda *fh* a las frecuencias (a) 450 Hz, (b) 1500 Hz y (c) 4200 Hz.

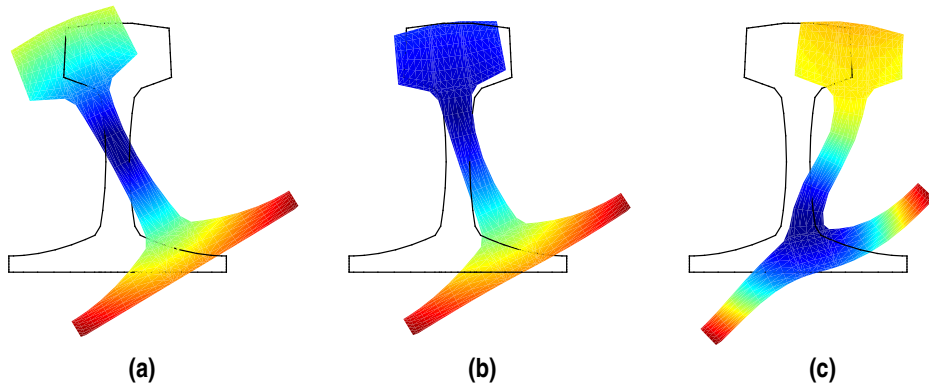


Figura 3.11 Vista frontal del modo de la onda *to* a las frecuencias (a) 450 Hz, (b) 1500 Hz y (c) 4200 Hz.

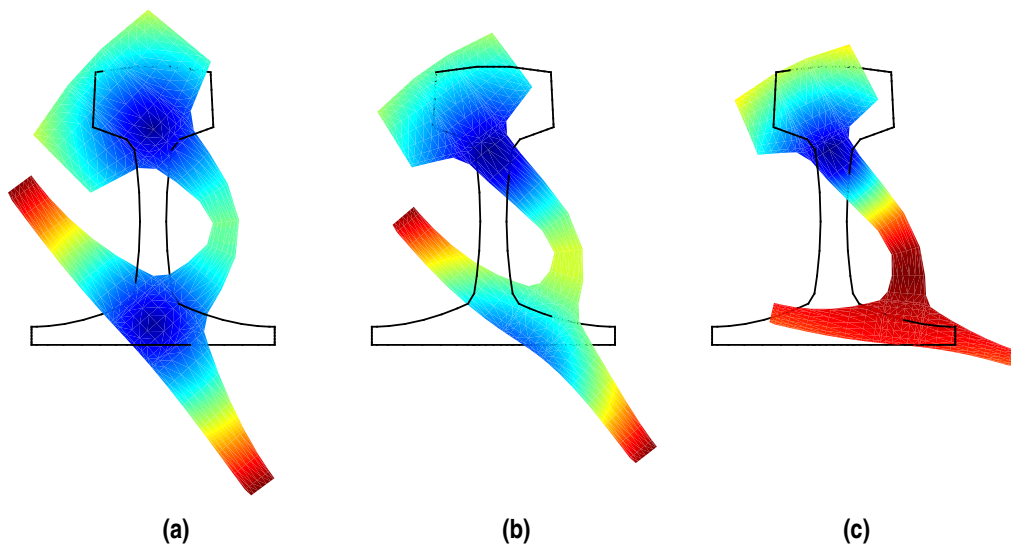


Figura 3.12 Vista frontal del modo de la onda *c1* a las frecuencias (a) 1500 Hz, (b) 2800 Hz y (c) 4200 Hz.

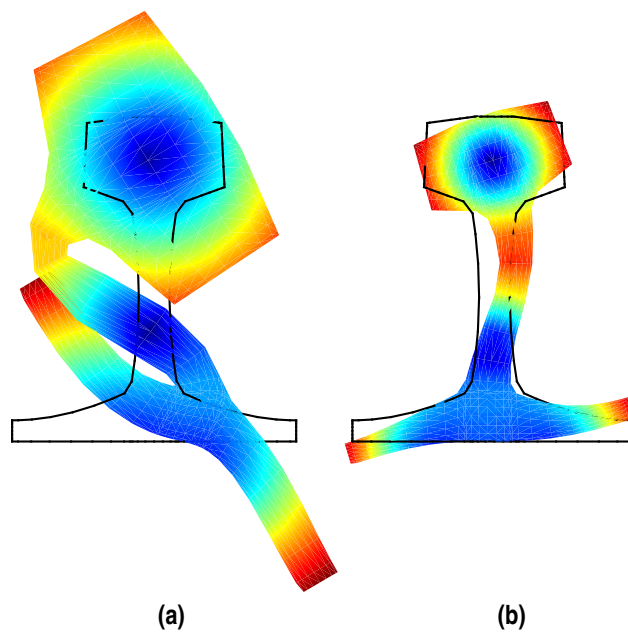


Figura 3.13 Vista frontal del modo de la onda $c2$ a las frecuencias (a) 4200 Hz y (b) 5200 Hz.

4 Conclusiones y desarrollos futuros

En este trabajo se han propuesto dos formulaciones espectrales basadas en el MEC y en el MEF para estudiar propagación de ondas. Ambos modelos resuelven problemas tridimensionales con propiedades del material y geometría constante a lo largo de la coordenada longitudinal. Los subdominios sólidos se representan mediante el MEF, mientras que el contorno del medio fluido se modeliza con el MEC. Los elementos finitos y de contorno espectrales en 2.5D han sido desarrollados.

Los modelos han sido verificados con dos problemas de referencia, de soluciones conocidas. El MEC ha sido validado mediante un problema consistente en una cavidad embebida en un medio fluido infinito sometido a un campo de presiones incidente. El MEF se ha verificado mediante el cálculo de las curvas de dispersión de ondas propagativas en un carril libre. Los resultados numéricos presentaron un buen grado de acuerdo con los resultados de referencia.

Los desarrollos futuros debería completar el trabajo aquí presentado. El primer paso es la mejora del modelo MEC. Esto puede alcanzarse resolviendo las integrales singulares con métodos más precisos, como resolviéndolas analíticamente o mediante un proceso de regularización. El siguiente paso consiste en el proceso de acoplamiento de ambos métodos para estudiar problemas de interacción fluido-estructura. Se podrá estudiar el problema del campo radiado en un fluido infinito causado por la deformación de una estructura debido a una carga puntual.

Índice de Figuras

2.1	Descomposición del dominio	3
2.2	(a) Representación de la malla base, (b) definición del elemento en coordenadas naturales y (c) representación en coordenadas físicas del elemento de contorno espectral fluido de orden $p = 6$	4
2.3	(a) Representación de la malla base, (b) definición del elemento en coordenadas naturales y (c) representación en coordenadas físicas de un elemento espectral de orden $p = 6$	7
3.1	Cavidad cilíndrica embebida en un medio fluido infinito: discretización con una distribución de elementos $1/h = 2/\pi$ y orden $p = 6$	9
3.2	Malla de receptores	10
3.3	(a) Campo de presiones radiado y (b) campo total de presiones debido a una carga armónica actuando a 200 Hz	10
3.4	Error absoluto obtenido para las discretizaciones (a-b) $1/h = 2/\pi m^{-1}$, (c-d) $1/h = 3/\pi m^{-1}$ y (f-g) $1/h = 4/\pi m^{-1}$	11
3.5	Discretización del carril con elementos espectrales. Orden de elementos (a) $p = 4$ y (b) $p = 8$	11
3.6	Curvas de dispersión de los modos axiales/verticales para el rango de frecuencias 0-6000 Hz. —, resultados numéricos para $p = 8$; - -, resultados numéricos para $p = 4$; $\triangle$, $\diamond$, $\circ$, $+$, resultados de referencia [10]	12
3.7	Curvas de dispersión de los modos laterales para el rango de frecuencias 0-6000 Hz. —, resultados numéricos para $p = 8$; - -, resultados numéricos para $p = 4$; $\triangle$, $\diamond$, $\circ$, $+$, resultados de referencia [10]	12
3.8	Vista frontal del modo de la onda axiales a la frecuencia de 5600 Hz; (a) $ax1$, (b) $ax2$, (c) $ax3$	12
3.9	Vista frontal del modo de la onda fv a las frecuencias (a) 450 Hz, (b) 1500 Hz y (c) 4200 Hz	13
3.10	Vista frontal del modo de la onda fh a las frecuencias (a) 450 Hz, (b) 1500 Hz y (c) 4200 Hz	13
3.11	Vista frontal del modo de la onda to a las frecuencias (a) 450 Hz, (b) 1500 Hz y (c) 4200 Hz	13
3.12	Vista frontal del modo de la onda $c1$ a las frecuencias (a) 1500 Hz, (b) 2800 Hz y (c) 4200 Hz	14
3.13	Vista frontal del modo de la onda $c2$ a las frecuencias (a) 4200 Hz y (b) 5200 Hz	14

Bibliografía

- [1] I. Babuška, F. Ihlenburg, E.T. Paik, and S.A. Sauter, *A generalized finite element method for solving the helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **128** (1995), no. 3-4, 325–359.
- [2] I. Babuška and M. Suri, *P and H-P versions of the finite element method, basic principles and properties*, SIAM Review **36** (1994), no. 4, 578–632.
- [3] P.Z. Bar-Yoseph, D. Fisher, and O. Gottlieb, *Spectral element methods for nonlinear spatio-temporal dynamics of an euler-bernoulli beam*, Computational Mechanics **19** (1996), no. 1, 136–151.
- [4] H. Bériot, G. Gabard, and E. Perrey-Debain, *Analysis of high-order finite elements for convected wave propagation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **96** (2013), no. 11, 665–688.
- [5] J. Biermann, O. von Estorff, S. Petersen, and C. Wenterodt, *Higher order finite and infinite elements for the solution of helmholtz problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **198** (2009), no. 13–14, 1171 – 1188.
- [6] M. Bouchon and K. Aki, *Discrete wave-number representation of seismic source wavefields*, Bulletin of the Seismological Society of America **67** (1977), no. 2, 259–277.
- [7] G. Degrande and G. De Roeck, *A spectral element method for two-dimensional wave propagation in horizontally layered saturated porous media*, Computers & Structures **44** (1992), no. 4, 717 – 728.
- [8] A. Deraemaeker, I. Babuška, and P. Bouillard, *Dispersion and pollution of the fem solution for the helmholtz equation in one, two and three dimensions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **46** (1999), no. 4, 471–499.
- [9] J. Domínguez, *Boundary elements in dynamics*, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton, 1993.
- [10] L. Gavrić, *Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique*, Journal of Sound and Vibration **185** (1995), no. 3, 531–543.
- [11] F. Ihlenburg, *The medium-frequency range in computational acoustics: Practical and numerical aspects*, Journal of Computational Acoustics **11** (2003), no. 2, 175–193.
- [12] F. Ihlenburg and I. Babuška, *Finite element solution of the helmholtz equation with high wave number Part I: The h-version of the FEM*, Computers and Mathematics with Applications **30** (1995), no. 9, 9–37.
- [13] F. Ihlenburg and I. Babuška, *Finite element solution of the helmholtz equation with high wave number part II: the h-p version of the FEM*, SIAM Journal on Numerical Analysis **34** (1997), no. 1, 315–358.
- [14] F. Ihlenburg, I. Babuška, and S. Sauter, *Reliability of finite element methods for the numerical computation of waves*, Advances in Engineering Software **28** (1997), no. 7, 417–424.

- [15] P. Kudela, M. Krawczuk, and W. Ostachowicz, *Wave propagation modelling in 1d structures using spectral finite elements*, Journal of Sound and Vibration **300** (2007), no. 1–2, 88 – 100.
- [16] O.Z. Mehdizadeh and M. Paraschivoiu, *Investigation of a two-dimensional spectral element method for helmholtz's equation*, Journal of Computational Physics **189** (2003), no. 1, 111 – 129.
- [17] A.A. Oberai and P.M. Pinsky, *A numerical comparison of finite element methods for the helmholtz equation*, Journal of Computational Acoustics **08** (2000), no. 01, 211–221.
- [18] A.T. Patera, *A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion*, Journal of Computational Physics **54** (1984), no. 3, 468–488.
- [19] S. Petersen, D. Dreyer, and O. von Estorff, *Assessment of finite and spectral element shape functions for efficient iterative simulations of interior acoustics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **195** (2006), no. 44–47, 6463 – 6478.
- [20] A.J.B. Tadeu and L.M.C. Godinho, *Three-dimensional wave scattering by a fixed cylindrical inclusion submerged in a fluid medium*, Engineering Analysis with Boundary Elements **23** (1999), no. 9, 745–755.
- [21] A.J.B. Tadeu, P.F.A. Santos, and E. Kausel, *Closed-form integration of singular terms for constant, linear and quadratic boundary elements. Part 1. SH wave propagation*, Engineering Analysis with Boundary Elements **23** (1999), no. 8, 671–681.
- [22] A.J.B. Tadeu, P.F.A. Santos, and E. Kausel, *Closed-form integration of singular terms for constant, linear and quadratic boundary elements. Part 2. SV-P wave propagation*, Engineering Analysis with Boundary Elements **23** (1999), no. 9, 757–768.
- [23] P.E.J. Vos, S.J. Sherwin, and R.M. Kirby, *From h to p efficiently: Implementing finite and spectral/hp element methods to achieve optimal performance for low- and high-order discretisations*, Journal of Computational Physics **229** (2010), no. 13, 5161 – 5181.
- [24] C. Zhu, G. Qin, and J. Zhang, *Implicit chebyshev spectral element method for acoustics wave equations*, Finite Elements in Analysis and Design **47** (2011), no. 2, 184 – 194.
- [25] O.C. Zienkiewicz, *The finite element method*, third ed., McGraw-Hill, 1986.