

Trabajo Fin de Máster

Ingeniería Industrial

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Autor: Teresa Guillén Hernández

Tutores: José Reinoso Cuevas, Luis Távara Mendoza

Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Máster
Ingeniería Industrial

**Formulación de un modelo de daño anisótropo
tridimensional para materiales compuestos basado
en la teoría de invariantes.**

Autor:

Teresa Guillén Hernández

Tutores:

José Reinoso Cuevas

Luis Távara Mendoza

Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Trabajo Fin de Máster: Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Autor: Teresa Guillén Hernández

Tutores: José Reinoso Cuevas
Luis Távara Mendoza

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

A mi familia

ÍNDICE

ÍNDICE.....	8
RESUMEN	10
ÍNDICE DE TABLAS	12
ÍNDICE DE FIGURAS	13
NOTACIÓN.....	15
1 INTRODUCCIÓN.....	17
1.1 Introducción a los materiales compuestos.	17
1.2 Mecanismos de fallo de materiales compuestos a compresión.	19
1.3 Modelado de daño en materiales compuestos. Estado del arte.	24
1.3.1 Criterios de fallo	25
1.3.2 Mecánica de daño continuo.....	31
1.4 Motivación y objetivos.	36
1.5 Organización.....	37
2 MARCO COMPUTACIONAL Y DE MODELADO	38
2.1 Teoría del invariante.	38
2.1.1 Introducción.	38
2.1.2. Teorema de isotropización.....	39
2.1.3. Ecuaciones constitutivas para materiales isótropos y anisótropos en forma de funciones tensoriales isótropas.	40
2.2 Método de los elementos finitos.	42
2.2.1 Introducción.	42
2.2.2 Definición del problema elástico (formulación débil).	42
2.2.3 Discretización.	44
2.2.4 El teorema de los trabajos virtuales (formulación débil).	45
3 CRITERIO TRIDIMENSIONAL BASADO EN LA TEORÍA DE INVARIANTES	49
3.1 Introducción.	49
3.2 Propiedades in situ.	50
3.3 Fallo de la matriz.	51
3.3.1 Formulación del criterio.	52
3.3.2 Orientación del plano de fractura.	53
3.4 Fallo de las fibras.....	63

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

3.4.1 Fallo de las fibras a tracción.....	63
3.4.2 Fallo de las fibras a compresión. <i>Fibre kinking</i>	64
4 MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO CONTINUO DE MATERIALES COMPUESTOS.....	70
4.1 Introducción.....	70
4.2 Comportamiento elástico: comportamiento transversalmente isótropo.....	70
4.3 Termodinámica del daño continuo.....	71
4.4. Modelo de daño basado en el criterio tridimensional del invariante.....	73
4.4.1. Funciones de activación del daño.....	75
4.4.2. Evolución del daño.....	75
4.4.3 Leyes de evolución del daño empleadas.....	76
4.5. Formulación del tensor constitutivo tangente.....	79
5 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS.....	87
5.1 Conclusiones.....	87
5.2 Desarrollos futuros.....	87
ANEXO.....	89
REFERENCIAS.....	91

En el presente proyecto se describe la formulación teórica de un modelo no lineal de daño anisótropo para materiales compuestos formados por una matriz polimérica reforzada con fibras largas. Dicho modelo de daño es de carácter intralaminar. En cuanto al criterio de daño utilizado, criterio tridimensional basado en la teoría del invariante, distingue entre mecanismos de fallo (fibra y matriz, a tracción y a compresión respectivamente) y se caracteriza porque no es necesario determinar el plano de fallo y porque las formulaciones son independientes de las transformaciones del sistema coordinado.

En cuanto a la propagación del daño una vez que ha satisfecho el criterio de fallo, se desarrolla un modelo de degradación de daño progresivo, en el que la resistencia se reduce gradualmente al aumentar la carga aplicada tras el fallo del material. Destacar que para el caso del fallo de la fibra a tracción y fallo de la matriz tanto a tracción como a compresión, se emplea una degradación exponencial (Figura 01). Sin embargo, para el fallo de la fibra a compresión (*fibre kinking*), se utiliza una degradación compuesta de dos zonas: una zona de degradación lineal seguida de una degradación exponencial (Figura 02).

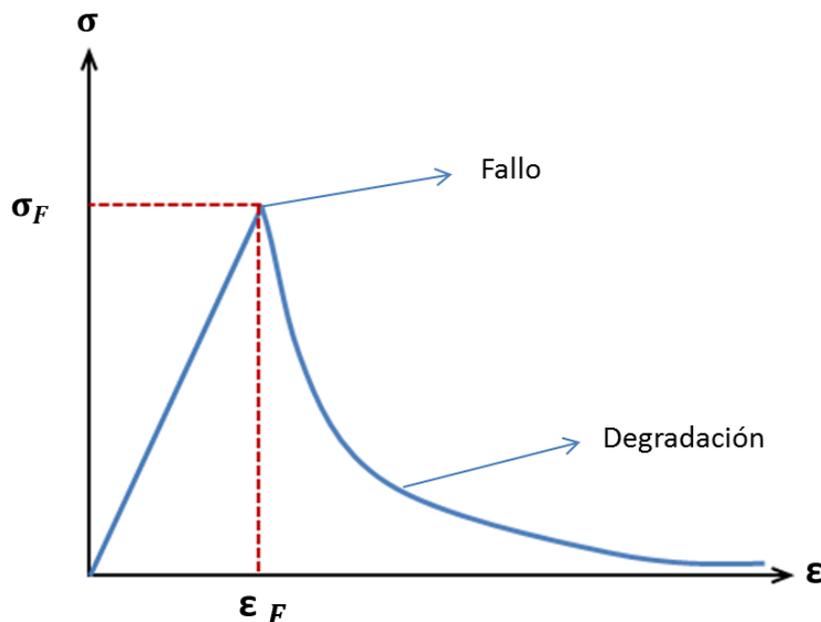


Figura 01: Degradación de la fibra a tracción y de la matriz a tracción y a compresión.[1]

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

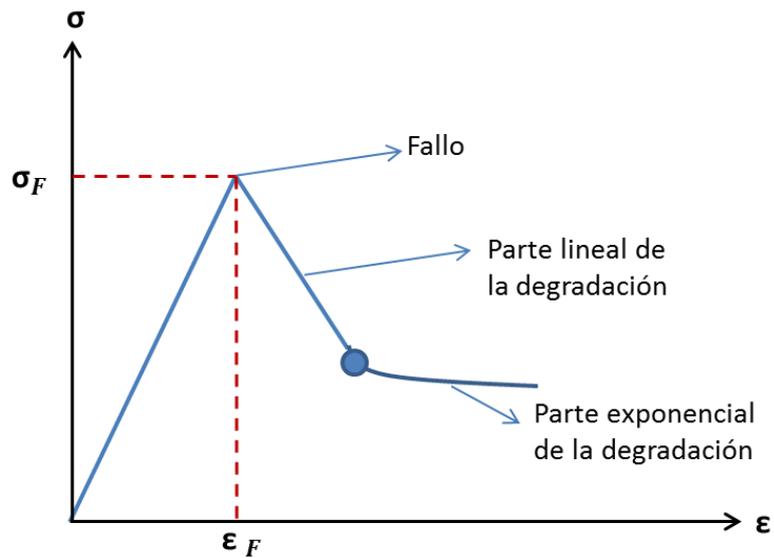


Figura 02: Degradación de la fibra a compresión (*fibre kinking*).

Con el fin de formular el modelo se introduce un tensor constitutivo termodinámicamente admisible, basando la evolución del daño del material en los Principios de la Termodinámica.

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1. Propiedades mecánicas de los materiales compuestos	18
Tabla 4.1. Submatrices de rigidez	74

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 0.1. Degradación de la fibra a tracción y de la matriz a tracción y a compresión.	10
Figura 0.2. Degradación de la fibra a compresión (<i>fibre kinking</i>).	11
Figura 1.1. Detalle de la composición de un laminado.	18
Figura 1.2. Despegue de la interfaz fibra-matriz.	19
Figura 1.3. Cracking de la matriz y tunneling.	20
Figura 1.4. Micropandeo elástico.	20
Figura 1.5. Micropandeo plástico.	21
Figura 1.6. Fiber kinking.	21
Figura 1.7. Aplastamiento de la fibra.	22
Figura 1.8. Fallo por cortadura bajo compresión longitudinal.	23
Figura 1.9. Fallo por cortadura de la matriz bajo compresión transversal.	23
Figura 1.10. Fallo por cortadura de la fibra.	24
Figura 1.11. Plano de fallo según el criterio de Puck.	28
Figura 1.12. Caracterización del daño continuo.	33
Figura 2.1. Problema de contorno.	44
Figura 2.2. Proceso de discretización.	45
Figura 3.1. Plano de fractura transversal.	53
Figura 3.2. Compresión transversal en la dirección 2.	54
Figura 3.3. Compresión transversal en la dirección 3.	54
Figura 3.4. Compresión transversal biaxial con tensiones de distinto orden.	55
Figura 3.5. Compresión transversal biaxial con tensiones de igual orden.	57
Figura 3.6. Compresión transversal biaxial con tensiones de igual orden y tensiones tangenciales longitudinales.	58
Figura 3.7. Estado tensional completo a compresión.	59
Figura 3.8. Tracción transversal en la dirección 2.	60
Figura 3.9. Tracción transversal en la dirección 3.	60
Figura 3.10. Tracción trasnversal biaxial con tensiones de distinto orden.	61
Figura 3.11. Tracción transversal biaxial con tensiones de igual orden.	61
Figura 3.12. Tracción transversal biaxial con tensiones de igual orden y tensiones tangenciales longitudinales.	62

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Figura 3.13. Estado tensional completo a tracción. 63

Figura 3.14. Modelo *kinking* 3D. 64

Figura 3.15. Zona de desalineamiento 67

NOTACIÓN

FF	Fiber Failure (fallo de la fibra)
IFF	Inter Fiber Failure (fallo de la matriz o entre fibras)
FEM	Finite Element Method (Método de los Elementos Finitos)
FRP	Fiber Reinforced Polymers (materiales poliméricos reforzados con fibras).
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	Componentes de tensión normales a los ejes de ortotropía de la lámina
σ_{ij} ($i \neq j$)	Componentes de tensión tangenciales a los ejes de ortotropía de la lámina, donde i indica la dirección normal al plano en el que actúa la tensión y j indica la dirección de la tensión
$\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$	Componentes de deformación normales a los ejes de ortotropía de la lámina
γ_{ij} ($i \neq j$)	Componentes de deformación tangenciales
X_t, X_c, Y_t, Y_c	Resistencia de un material en dirección longitudinal (X) y transversal (Y), expresada en términos de tensiones, a tracción (t) y a compresión (c).
S_L, S_T	Resistencia de un material a cizalladura expresada en términos de tensiones, en dirección longitudinal (S_L) y transversal (S_T)
$X_{\epsilon t}, X_{\epsilon c}, Y_{\epsilon t}, Y_{\epsilon c}$	Resistencia de un material en dirección longitudinal (x) y transversal (Y), expresada en términos de deformaciones a tracción (t) y a compresión (c).
S_ϵ	Resistencia de un material a cizalladura expresada en términos de deformaciones
Z	Resistencia a tracción biaxial de una lámina
E_i, E_{if}	Módulo de elasticidad longitudinal en dirección i de la lámina y de la fibra (f)
ν_{ij}, ν_{ijf}	Coefficiente de Poisson de la lámina y la fibra
Y_{BT}, Y_{BC}	Resistencia de un material en dirección transversal (Y) biaxial (B), expresada en términos de tensiones, a tracción (t) y a compresión (c).
ϵ^e	Deformaciones elásticas
ϵ^i	Deformaciones inelásticas
$\bar{\sigma}$	Tensor de tensiones efectivas
d_{ij}	Variable de daño del mecanismo de fallo i , en el estado j (tracción o compresión)

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

A	Tensor estructural de isotropía transversal
a	Dirección característica de los materiales trasnversalmente isótropos
I_1, I_2 y I_3	Invariantes del criterio de fallo
f_M	Función del fallo
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_{32}	Parámetros de fallo
ψ	Ángulo del plano del kinking
φ	Ángulo del kinking
C^{tg}	Tensor constitutivo del material dañado o tensor constitutivo tangente
C^{sec}	Tensor constitutivo secante
H	Tensor de flexibilidad
G	Energía complementaria a la de Gibbs
D^{mec}	Disipación mecánica de energía
D^{ter}	Disipación térmica de energía
V	Volumen objeto de estudio
N_I	Función de forma asociada al nodo I
d_{Ii}	Desplazamiento del nodo I en dirección i
B	Operador de compatibilidad
F_{ext}	Vector de fuerzas externas aplicadas en los nodos
K_e, K	Matriz de rigidez, elemental y global
$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$	Submatrices que sumadas conforman la matriz constitutiva
F_{fE}	Función de activación del daño
r_E	Umbral de daño
f_E	Índice de exposición

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción a los materiales compuestos.

Un material compuesto es la combinación de dos o más materiales, denominados fases o constituyentes, para la formación de un nuevo material. Los materiales que se combinan están separados entre sí por interfases y dan lugar a un nuevo material que aúna las propiedades individuales de dichos constituyentes.[1]

En la actualidad, existe una gran variedad de materiales compuestos, los cuales pueden ser clasificados en función de los materiales elegidos, del tipo de refuerzo (fibra/partículas) y su orientación (unidireccional, bidireccional o aleatoria).

El reciente interés por el uso de estos materiales reside en su capacidad de proporcionar mejores prestaciones desde el punto de vista mecánico de los materiales tradicionalmente empleados en aplicaciones ingenieriles (materiales metálicos y cerámicos). Estas elevadas prestaciones son especialmente relevantes en aplicaciones aeronáuticas y aeroespaciales, automovilísticas, energías renovables, entre otros sectores, debidos a sus elevados ratios de rigidez/peso y resistencia/peso. Adicionalmente estos materiales permiten su adecuación a diferentes concepciones de diseño en términos geométricos, adaptándose a la aplicación requerida.[2]

Los materiales compuestos que se van a estudiar y analizar en el presente trabajo se componen de fibra (fibras largas) y matriz. La fibra es la encargada de soportar las tensiones principales y la matriz transmite las tensiones entre ellas actuando además como protección.

En la práctica, los materiales compuestos se obtienen tras la superposición de diversas láminas con distintas orientaciones y espesores que dependerán de las tensiones, esto es lo que se denomina laminado. En la figura 1.1 se muestra un laminado constituido por 4 láminas, cada una de ellas con sus fibras y la matriz. Destacar que las direcciones principales de cada lámina son: "1" dirección de la fibra, "2" dirección perpendicular a la fibra en el plano de la fibra y "3" dirección perpendicular a la fibra en la dirección del espesor. Sin duda alguna, la producción de componentes ingenieriles mediante laminados son los más comúnmente empleados en aplicaciones aeronáuticas debido a sus excelentes prestaciones.

Las materias primas de los materiales compuestos son muy diversas. Las matrices suelen ser resinas epoxi o poliéster, ambas termoestables, es decir, no se funden al calentarlas aunque pierden propiedades de rigidez a alta temperatura. En cuanto a las fibras, las más usadas son las de carbono, vidrio, boro y las orgánicas (registradas como

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Kevlar). A continuación, en la tabla 1.1, se muestran algunas de sus propiedades generales:

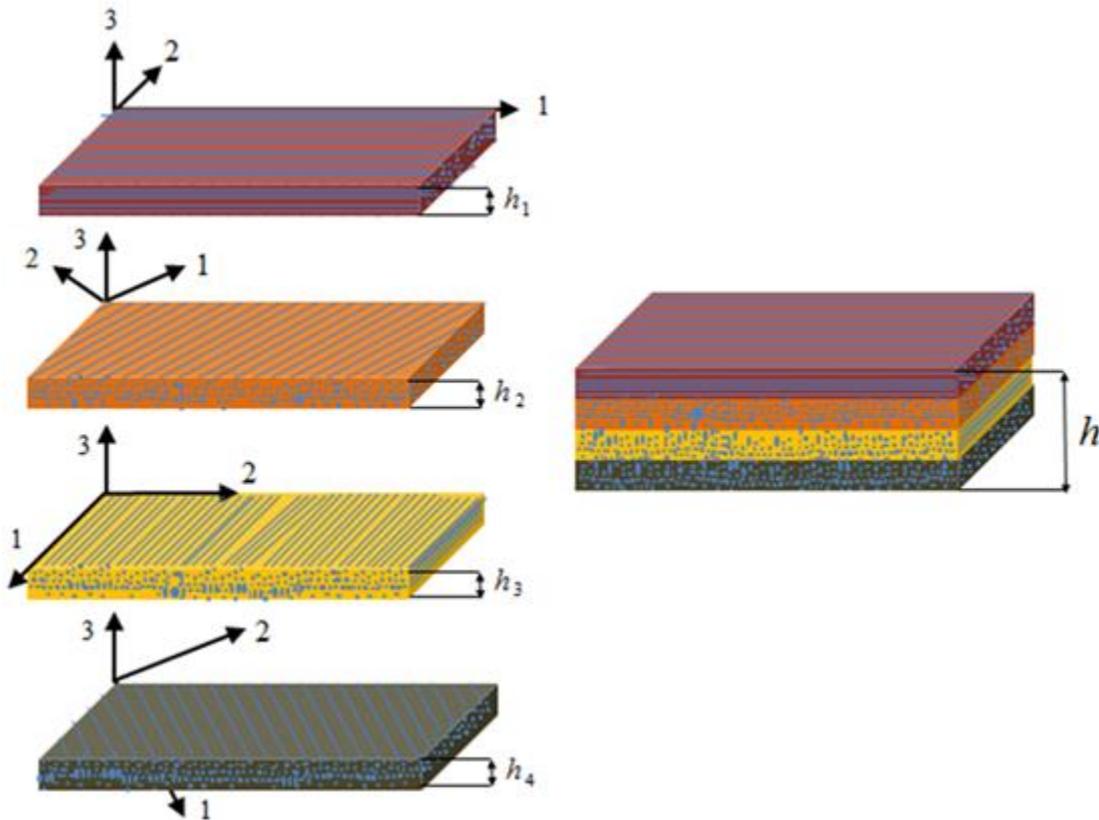


Figura1.1 Detalle de la composición de un laminado.

Propiedades	Unidades	Carbono Base PAN Tipo I	Carbono Base PAN Tipo II	Vidrio E	Kevlar 49 Poliamida
Diámetro	μm	7-9,7	7,6-8,6	8-14	11.9
Densidad	10^3kgm^{-3}	1.95	1.75	2.56	1.45
Módulo de Young E_{11}	GPa	390	250	76	125
Módulo de Young E_{22}	GPa	12	20	76	
Resistencia a tracción	GPa	2.2	2.7	1,4-2,5 (típica) 3,5 (estirada reciente mente)	2.8-3.6
Alargamiento de rotura	%	0,5	1	1.8-3.2	2.2-2.8
Coefficiente de dilatación térmica (0 a 100^0C)	10^{-6}C^{-1}	-0.5 a -1.2 (paralelo) 7-12 (radial)	-0.1 a -0.5 (paralelo) 7-12 (radial)	4.9	-2 (paralelo) 59 (radial)
Conductividad térmica (paralela al eje de la fibra)	$\text{Wm}^{-1} \text{C}^{-1}$	105	24	1.04	0.04

Tabla 1.1. Propiedades mecánicas de los materiales compuestos [2]

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

1.2 Mecanismos de fallo de materiales compuestos a compresión.

Debido a la heterogeneidad de los materiales compuestos, la fractura de éstos está caracterizada por diferentes mecanismos de daño los cuales tiene su origen a nivel microscópico. Dichos modos/mecanismos de fractura son originados por: (i) fallo de la fibra a tracción/compresión, (ii) fallo de la matriz a tracción/compresión, (ii) fallo de la matriz bajo la acción de cargas tangenciales en el plano de la lámina (plano 12) o por cargas tangenciales transversales al plano de la lámina (planos 13 y 23).

El comportamiento de los materiales compuestos bajo cargas a compresión es un campo relativamente desconocido e imprevisible y que concita el interés de numerosos investigadores con el fin de explicar sus causas y sus posibles efectos. Dicho análisis se ha venido llevando a cabo debido a que se producen una gran diversidad de mecanismos de fallo y no se conoce muy bien por qué a veces ocurren unos y no otros, ni tampoco su orden de aparición. Por todo ello, la resistencia a compresión de los materiales compuestos es muy difícil de determinar ya que depende de una gran cantidad de factores y parámetros. Para la realización de este proyecto ha sido necesario realizar un estudio exhaustivo de los diferentes mecanismos de fallo que pueden aparecer en los materiales compuestos unidireccionales bajo cargas de compresión en la dirección de la fibra o bajo cargas de compresión en la dirección perpendicular a éstas [3]–[5]. A continuación se muestra un breve esquema de dichos mecanismos de fallo:

- Compresión longitudinal/ paralela a la dirección de las fibras:
 - **Despegue de la interfaz fibra-matrix**

Es la separación o despegue que se produce entre la fibra y la matriz. Por lo tanto se trata de un fallo en la interfase, el cual se produce debido a la diferencia significativa entre la rigidez entre ambos constituyentes (Figura 1.2).

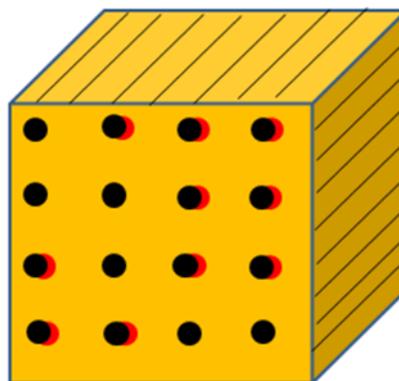


Figura 1.2. Despegue de la interfaz fibra-matrix.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

- **Splitting**

Se produce cuando la resistencia de la matriz es baja y consiste en la formación de grietas en la matriz. Dichas grietas se pueden producir en la dirección perpendicular a las fibras (splitting transversal o *cracking*) o en la dirección paralela a las fibras (splitting longitudinal o *tunneling*). Dichos mecanismos se representan en la Figura 1.3.

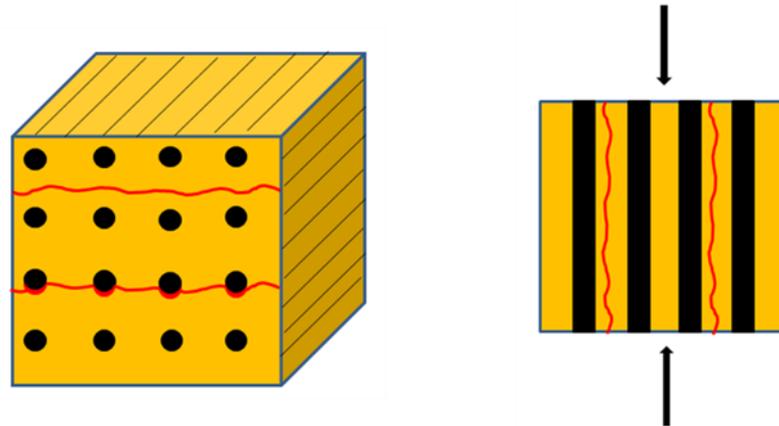


Figura 1.3. Cracking de la matriz y tunneling.

- **Micropandeo elástico (elastic microbuckling)**

Consiste en el micropandeo de las fibras con la matriz aún en régimen elástico. Se produce para fracciones volumétricas de fibra $\leq 0,4$ (Figura 1.4).



Figura 1.4. Micropandeo elástico

- **Micropandeo plástico (plastic microbuckling)**

Consiste en el micropandeo de las fibras con la matriz en régimen plástico y/o despegue de los constituyentes y microgrietas en la matriz. El micropandeo es local, no se produce una banda de fibras en micropandeo (*kink band*), ver Figura 1.5. Este mecanismo de fallo ocurre para fracciones volumétricas de fibra $> 0,4$ y la matriz se deforma de forma no lineal

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

(relación esfuerzos-deformación no es lineal)

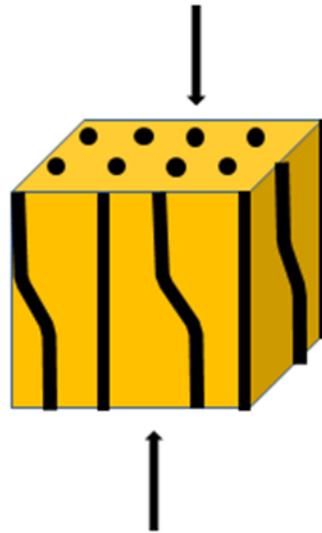


Figura 1.5. Micropandeo plástico.

- **Plegado/ doblado de las fibras (fiber kinking)**

Este mecanismo de fallo [6] se produce cuando falla la matriz en las proximidades de las fibras que se encuentran en micropandeo plástico. Cuando esto ocurre, las fibras colapsan dando lugar a una *kink band*, es decir, se produce un micropandeo plástico global en una banda del material, ver Figura 1.6.

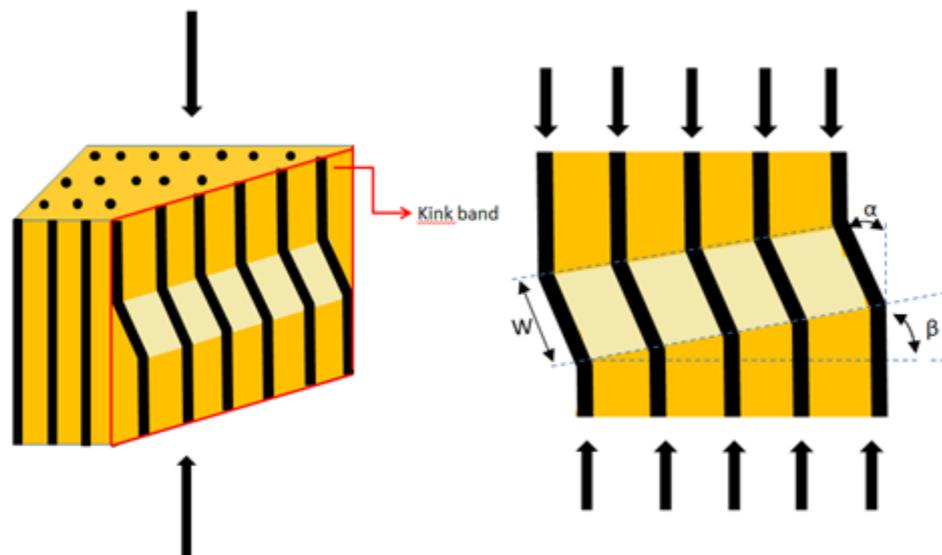


Figura 1.6. Fiber kinking.

En otras palabras, cuando se comprime un FRP, el material se deforma localmente en una banda (*kink band*) [7]: dentro de dicha banda, orientada

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

un ángulo β con respecto a la dirección normal a la carga y con un ancho igual a W , las fibras rotan un ángulo α con respecto a la dirección longitudinal. La formación y la evolución de la *kink band* puede dividirse en tres fases: inicio, propagación y ampliación. La primera fase corresponde a la aparición en una banda de fibras que sufren micropandeo plástico. La segunda fase consiste en el aumento de la longitud de la banda en la dirección definida por β . Finalmente, la última fase consiste en el aumento del ancho de la banda en la dirección definida por α .

- **Aplastamiento de la fibra (*fiber crushing*)**

Este mecanismo de daño ocurre cuando la matriz es fuerte y rígida y además, la deformación uniaxial del material iguala a la deformación intrínseca de crushing de las fibras [3]. Ver la figura 1.7.

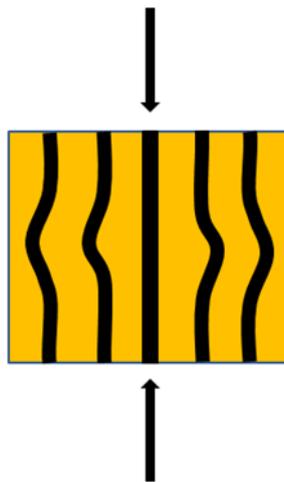


Figura 1.7. Aplastamiento de la fibra.

- **Fallo por cortadura (*shear failure*)**

En este caso, el fallo se produce por la plastificación de la matriz formándose una banda de fractura orientada a 45° con respecto al eje de carga, ver Figura 1.8. De acuerdo con el análisis [5] antes o durante el fallo, se produce una rotación de las fibras. Suele ocurrir en materiales compuestos con bajas fracciones volumétricas de fibra.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

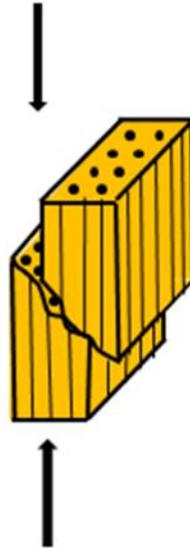


Figura 1.8. Fallo por cortadura bajo compresión longitudinal.

- Compresión transversal/ perpendicular a la dirección de las fibras:
 - Fallo por cortadura de la matriz o fallo por cortadura de la matriz con despegue de los constituyentes (*constituent debonding*) y/o aplastamiento de la fibra (*fiber crushing*):

El fallo transversal tiene lugar en la dirección perpendicular a las fibras, en planos paralelos a ellas formando un cierto ángulo. La resistencia a compresión transversal del material compuesto es insensible a la fracción volumétrica de la fibra, ver Figura 1.9.

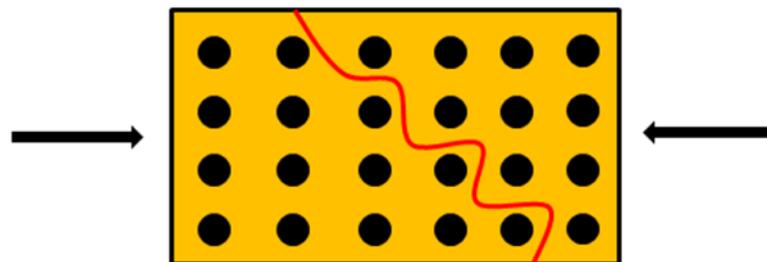


Figura 1.9. Fallo por cortadura de la matriz bajo compresión transversal.

- Fallo por cortadura de la fibra:

Este fallo sólo ocurre si se restringe, para el caso anterior, la deformación en la dirección perpendicular al plano de carga. De esta forma, el fallo se produce en planos paralelos a la dirección en la que se ha restringido el movimiento y por lo tanto, tiene lugar la fractura de la fibra, ver Figura 1.10. En este caso, la resistencia a compresión transversal del material aumenta al hacerlo la fracción volumétrica de fibra.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

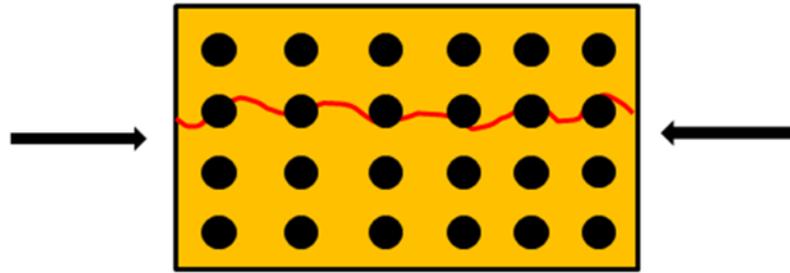


Figura 1.10. Fallo por cortadura de la fibra.

1.3 Modelado de daño en materiales compuestos. Estado del arte.

La mecánica de daño asociada al fallo de un material se compone de dos partes diferenciadas: inicio del daño y degradación. La primera parte, inicio del daño, consiste en relacionar el estado de tensiones real con uno admisible a través de un criterio de fallo apropiado para determinar si se produce o no el inicio del daño. Cabe destacar que el fallo de una lámina no provoca generalmente un fallo catastrófico del laminado completo, sino que sigue teniendo capacidad portante residual. Por ello, tras este primer fallo comienza la etapa de degradación. En dicha etapa la rigidez se reduce de forma gradual al aumentar la carga según cuál sea la tolerancia al daño del material objeto de estudio.

En la actualidad existe una gran variedad de criterios de fallo, los cuales están expresados en términos de deformaciones o de tensiones, y pueden diferenciar o no entre los distintos mecanismos de fallo, para estados planos o tridimensionales. En el apartado 1.3.1 se muestran los más relevantes.

Finalmente, en cuanto a la etapa de degradación o evolución del daño, cabe destacar que existen dos enfoques en el modelado de procesos de degradación en materiales compuestos:

- Modelos micromecánicos:

Diferencian entre la fibra y la matriz de forma explícita. El fallo de la matriz se modela a través de la degradación de sus propiedades y a partir de éstas y de las propiedades de las fibras inalteradas, se modelan las propiedades de la lámina que ha fallado. Finalmente, mediante las propiedades degradadas de la lámina que ha fallado y con las propiedades del resto de las láminas, se redefinen las propiedades mecánicas del laminado.

- Modelos macromecánicos:

Basados en la Teoría de Daño Continuo, el modelado de la lámina que falla se realiza mediante un material homogéneo equivalente (no distingue entre los constituyentes) cuyas propiedades mecánicas (propiedades mecánicas equivalentes) se reducen al degradarse. En el apartado 1.3.2, se detallan estos modelos puesto que los modelos empleados en el presente proyecto pertenecen a

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

este grupo.

1.3.1 Criterios de fallo

1.3.1.1 Criterios de fallo generales

Son criterios que surgen de la extrapolación de otros ya existentes para otros materiales, los cuales son adaptados para su aplicación en materiales compuestos.

Criterio de Máxima Tensión

Este primer criterio relaciona el estado tensional existente en ejes principales del material (ejes de ortotropía), con la resistencia máxima asociada a los mismos. Tal y como puede observarse en las ecuaciones siguientes, aunque distingue entre los mecanismos de fallo, no tiene en cuenta la interacción entre los mismos.

Estados de tracción:

$$\begin{aligned} |\sigma_{11}| < X_t \quad (\sigma_{11} > 0) \\ |\sigma_{22}| < Y_t \quad (\sigma_{22} > 0) \\ |\sigma_{12}| < S \end{aligned} \quad (1.1)$$

Estados de compresión:

$$\begin{aligned} |\sigma_{11}| < X_c \quad (\sigma_{11} < 0) \\ |\sigma_{22}| < Y_c \quad (\sigma_{22} < 0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Siendo:

X_t = Resistencia del material en dirección longitudinal, expresada en términos de tensiones, y a tracción.

X_c = Resistencia del material en dirección longitudinal, expresada en términos de tensiones y a compresión.

Y_t = Resistencia del material en dirección transversal, expresada en términos de tensiones y a tracción.

Y_c = Resistencia del material en dirección transversal, expresada en términos de tensiones y a compresión.

S = Resistencia de un material a cortadura, expresada en términos de tensiones.

Criterio de Máxima Deformación

El criterio de máxima deformación relaciona los estados de deformación reales con los máximos admisibles. Es análogo al anterior.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Estados de tracción:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} < X_{\varepsilon t} \quad (\varepsilon_{11} > 0) \\ \varepsilon_{22} < Y_{\varepsilon t} \quad (\varepsilon_{22} > 0) \\ |\gamma_{12}| < S_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Estados de compresión:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{11}| < X_{\varepsilon c} \quad (\varepsilon_{11} < 0) \\ |\varepsilon_{22}| < Y_{\varepsilon c} \quad (\varepsilon_{22} < 0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Siendo:

$X_{\varepsilon t}$ = Resistencia del material en dirección longitudinal, expresada en términos de deformaciones y a tracción.

$X_{\varepsilon c}$ = Resistencia del material en dirección longitudinal, expresada en términos de deformaciones y a compresión.

$Y_{\varepsilon t}$ = Resistencia del material en dirección transversal, expresada en términos de deformaciones y a tracción.

$Y_{\varepsilon c}$ = Resistencia del material en dirección transversal, expresada en términos de deformaciones y a compresión.

S_{ε} = Resistencia de un material a cortadura, expresada en términos de deformaciones.

Criterio de Tsai-Hill

Este criterio no distingue entre los mecanismos de fallo pero considera que las componentes normales y tangenciales interactúan entre sí. Como se puede observar a continuación, el criterio se reduce a la aplicación de una sola ecuación, la cual para una lámina y asumiendo tensión plana ($\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$), queda:

$$\frac{(\sigma_{11})^2}{X^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} - \frac{(\sigma_{22})^2}{Y^2} + \frac{(\sigma_{12})^2}{S^2} \geq 1 \quad (1.5)$$

Criterio de Tsai-Wu

Es una generalización del criterio de Tsai-Hill a partir de una formulación polinómica. La expresión para una lámina es la siguiente:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_6\sigma_{12} + F_{11}(\sigma_{11})^2 + F_{22}(\sigma_{22})^2 + F_{66}(\sigma_{12})^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} \geq 1$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$F_{11} = \frac{-1}{X_t X_c} \quad (1.6)$$

$$F_{22} = \frac{-1}{Y_t Y_c}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2Z^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) Z + \left(\frac{1}{X_c X_t} + \frac{1}{Y_c Y_t} \right) Z^2 \right]$$

Nótese que este criterio consta de 12 parámetros para un material ortótropo.

1.3.1.2 Criterios de fallo en materiales compuestos

Son criterios específicos para materiales compuestos, es decir, no surgen de la extrapolación de otros ya existentes para otros materiales.

Criterio de Hashin 1973

En 1973, Hashin y Rotem proponen un criterio bidimensional que distingue entre: fallo de la fibra a tracción (FFT), fallo de la fibra a compresión (FFC), fallo de la matriz a tracción (FMT) y fallo de la matriz a compresión (FMC).

$$\text{FFT: } \sigma_{11} \geq X_t$$

$$\text{FFC: } |\sigma_{11}| \geq X_c$$

$$\text{FMT: } \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 \geq 1$$

$$\text{FMC: } \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_c} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 \geq 1$$

(1.7)

Debe destacarse que este criterio no considera las tensiones tangenciales en el fallo de la fibra y para el fallo de la matriz, sólo tiene en cuenta las componentes de tensión que actúan en el plano de fallo.

Criterio de Hashin

En 1980 Hashin propone un nuevo criterio para estados de tensión tridimensionales. Por ello las expresiones del nuevo criterio difieren del original: incluye tensiones tangenciales en el fallo de la fibra a tracción, en el fallo de la matriz a compresión abandona la idea del plano de fallo y propone una interacción cuadrática de los invariantes del estado de tensiones.

$$\text{FFT: } \left(\frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \frac{1}{S_L^2} (\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2) \geq 1$$

$$\text{FFC: } \left| \frac{\sigma_{11}}{X_c} \right| \geq 1$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\begin{aligned}
 \text{FMT:} \quad & \frac{1}{Y_t^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_T^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S^2} (\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2) \geq 1 \\
 \text{FMC:} \quad & \frac{1}{Y_C} \left[\left(\frac{Y_C}{2S_T} \right)^2 - 1 \right] (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{4S_T^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_T^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S^2} \\
 & (\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2) \geq 1
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Criterio de Puck

Se trata de un criterio para estados de tensión biaxiales [8] y que mantiene tanto los cuatro modos de fallo (fibra, matriz, tracción y compresión) como el concepto de plano de acción [9]. Por lo tanto, el plano de fallo es muy importante, no sólo para representar la dirección de la grieta, sino también para aplicar el criterio. En el fallo de la matriz, el criterio se expresa en un sistema de referencia ortogonal al plano de fractura (σ_n, σ_{nt} y σ_{n1}) y propone un aumento de las resistencias a fractura (compresión) a través de los parámetros p (determinados experimentalmente). Por lo que respecta al fallo de la fibra, aparecen explícitamente las propiedades de los componentes del material y además tiene en cuenta las no-linealidades a compresión.

$$\begin{aligned}
 \frac{E_1}{X_t} \left(\sigma_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_2 \right) & \geq 1 \\
 \left(\frac{\sigma_n}{R_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{nt}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{n1}} \right)^2 & \geq 1 \\
 \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{nt} - p_{nt}\sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{n1} - p_{n1}\sigma_n} \right)^2 & \geq 1
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

A continuación, en la figura 1.11, se muestra el plano de fallo:

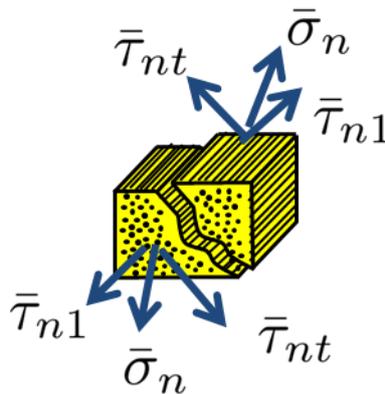


Figura 1.11: plano de fallo Puck [1]

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Criterio tridimensional basado en la teoría del invariante

Este criterio es el que se va a emplear en el presente proyecto. Es un criterio de fallo para estados de tensión tridimensionales y se basa en la función de plastificación transversalmente isótropa desarrollada por Vogler et al. [10] y Camanho et al. [11].

Se basa en la teoría del invariante y por ello no usa información geométrica sino que emplea, por medio de los tensores estructurales, la simetría del material. Por lo tanto, no es necesario buscar el plano de fractura como ocurría en los criterios anteriores y las ecuaciones constitutivas del material no van a verse modificadas por cambios en el sistema coordinado. Este aspecto es debido a que se define un sistema coordinado libre, es decir, independiente de la geometría y de las transformaciones correspondientes. Así, esta formulación tiene en cuenta la anisotropía como una propiedad intrínseca del material.

El criterio objeto de estudio del presente proyecto no predice el fallo de la fibra a tracción, sino que se predice con el criterio de deformación máxima admisible. Sin embargo el resto de fallos (fallo de la matriz/ transversal tanto a tracción como a compresión y fallo de la fibra/ longitudinal a compresión) se predicen con este nuevo criterio. Las expresiones asociadas con estos mecanismos de daño se detallan a continuación.

- Fallo de la matriz:

$$f_{E,IFF} = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \alpha_{32} I_3^2 \leq 1, \quad (1.10)$$

Donde:

$$\alpha_3 = \alpha_3^t, \alpha_{32} = \alpha_{32}^t \text{ si } I_3 > 0$$

$$\alpha_3 = \alpha_3^c, \alpha_{32} = \alpha_{32}^c \text{ si } I_3 \leq 0$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{S_T^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{S_L^2}$$

$$\alpha_{32}^t = \frac{1 - \frac{Y_T}{2Y_{BT}} - \alpha_1 \frac{Y_T^2}{4}}{Y_T^2 - 2Y_{BT} Y_T} \quad (1.11)$$

$$\alpha_3^t = \frac{1}{2Y_{BT}} - 2\alpha_{32}^t Y_{BT}$$

$$\alpha_{32}^c = \frac{1 - \frac{Y_C}{2Y_{BC}} - \alpha_1 \frac{Y_C^2}{4}}{Y_C^2 - 2Y_{BC} Y_C}$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\alpha_3^c = \frac{1}{2Y_{BC}} - 2\alpha_{32}^c Y_{BC}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 - \mathbf{a} (\boldsymbol{\sigma}^p)^2 \mathbf{a} = \frac{1}{4} (\sigma_{22})^2 - \frac{1}{2} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{1}{4} (\sigma_{33})^2 + (\sigma_{23})^2$$

$$I_2 = \mathbf{a} (\boldsymbol{\sigma}^p)^2 \mathbf{a} = (\sigma_{13})^2 + (\sigma_{12})^2$$

$$I_3 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a} = \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

Siendo:

Y_t = Resistencia del material en dirección transversal, expresada en términos de tensiones y a tracción.

Y_c = Resistencia del material en dirección transversal, expresada en términos de tensiones y a compresión.

S_L = Resistencia de un material a cizalladura en el plano de la fibra, expresada en términos de tensiones.

S_T = Resistencia de un material a cizalladura tangencial, expresada en términos de tensiones.

Y_{BT} = Resistencia biaxial del material en dirección transversal, expresada en términos de tensiones y a tracción.

Y_{BC} = Resistencia biaxial del material en dirección transversal, expresada en términos de tensiones y a compresión.

\mathbf{a} = longitud características de los materiales transversalmente isótropos.

Tr = traza del tensor

$\boldsymbol{\sigma}^p$ = tensor de tensiones plástico, es la parte del tensor de tensiones que induce a fenómenos inelásticos.

- Fallo de la fibra a compresión:

Se conoce como fiber kinking, es decir, doblado o plegado de la fibra. Este fallo puede producirse estando la matriz traccionada o comprimida.

$$f_{E,FF-} = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \alpha_{32} I_3^2 \leq 1 \quad (1.12)$$

Donde:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\alpha_3 = \alpha_3^t, \alpha_{32} = \alpha_{32}^t \text{ si } I_3 > 0 \quad (1.13)$$

$$\alpha_3 = \alpha_3^c, \alpha_{32} = \alpha_{32}^c \text{ si } I_3 \leq 0$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{S_T^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{S_L^2}$$

$$\alpha_{32}^t = \frac{1 - \frac{Y_T}{2Y_{BT}} - \alpha_1 \frac{Y_T^2}{4}}{Y_T^2 - 2Y_{BT} Y_T}$$

$$\alpha_3^t = \frac{1}{2Y_{BT}} - 2\alpha_{32}^t Y_{BT}$$

$$\alpha_{32}^c = \frac{1 - \frac{Y_C}{2Y_{BC}} - \alpha_1 \frac{Y_C^2}{4}}{Y_C^2 - 2Y_{BC} Y_C}$$

$$\alpha_3^c = \frac{1}{2Y_{BC}} - 2\alpha_{32}^c Y_{BC}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 - \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 \mathbf{a} = \frac{1}{4} (\sigma_{22})^2 - \frac{1}{2} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{1}{4} (\sigma_{33})^2 + (\sigma_{23})^2$$

$$I_2 = \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 \mathbf{a} = (\sigma_{13})^2 + (\sigma_{12})^2$$

$$I_3 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a} = \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

1.3.2 Mecánica de daño continuo.

1.3.2.1 Introducción.

La Mecánica del Daño Continuo es una rama de la Mecánica de Medios Continuos que estudia la degradación que sufren los materiales tras producirse su fallo. Esto es posible gracias a una serie de variables internas que afectan a las propiedades mecánicas originales del material. Dichas variables internas (escalares, vectoriales o tensoriales) se denominan variables de daño.

Principales hipótesis de la Mecánica del Daño Continuo:

- La evolución del daño gobierna el proceso de disipación de energía en el material.
- Las deformaciones plásticas son despreciables; es decir, las deformaciones inelásticas se deben únicamente al daño.
- El tensor de deformaciones se descompone aditivamente en dos componentes:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

tensor de deformación elástico e inelástico.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (1.14)$$

El modelo de Daño Continuo más sencillo considera daño isótropo, es decir, las propiedades mecánicas del material sufren una degradación isótropa (igual en todas las direcciones) o lo que es lo mismo, todas las entradas del tensor de tensiones están afectadas por la misma variable de daño $d \in [0,1]$. Dicha variable es un escalar y toma dos valores extremos: $d = 0$ si no hay daño, es decir el material conserva intactas sus propiedades mecánicas y la estructura correspondiente su capacidad portante, y $d = 1$ si el material está totalmente dañado. Esta variable interna establece la relación entre el área dañada (A_d) y el área intacta (A_0) de un volumen representativo:

$$d = \frac{A_d}{A_0} \quad (1.15)$$

Antes de continuar con las bases de la mecánica del daño continuo, es necesario definir dos conceptos que serán de gran utilidad:

- Principio de deformación equivalente: la tensión efectiva ($\bar{\sigma}$) que actúa sobre el material sin daño, produce la misma deformación que la tensión real (σ) aplicada al material con daño.
- Tensión efectiva: tensión que da lugar, en el modelo sin daño, a las mismas deformaciones que aparecen en el sólido dañado.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriormente expuestas, se establece que:

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{A_0 - A_d} \quad (1.16)$$

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

y por lo tanto, la relación entre ambas tensiones es:

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (1.17)$$

Destacar que un modelo de daño continuo tiene que definir un criterio de fallo y una ley de evolución de la variable de daño, es decir, tiene que evaluar las dos etapas anteriormente enunciadas del fallo de un material (inicio del fallo y degradación).

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

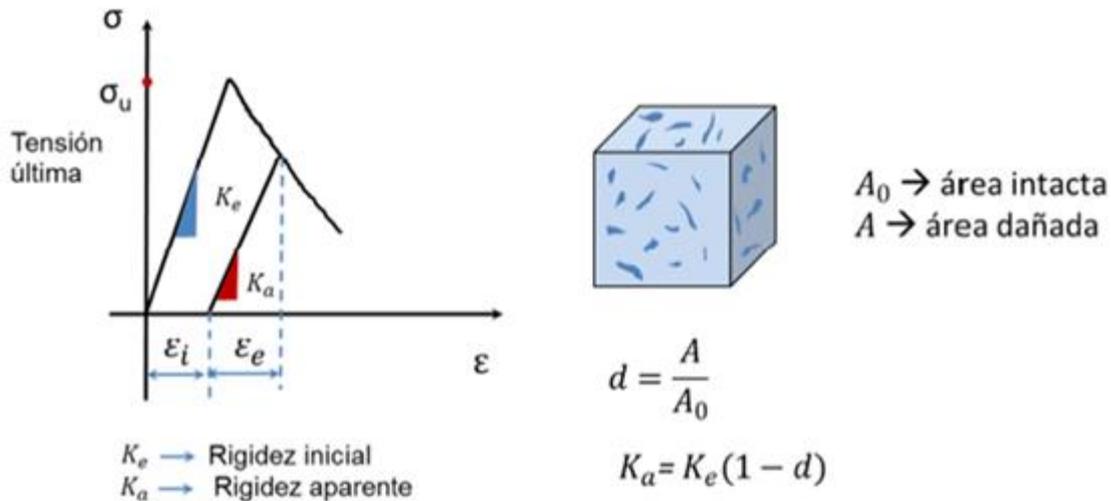


Figura 1.12. Caracterización del daño continuo [1].

1.3.2.2 Modelos anisótropos.

Los modelos de daño continuo utilizados para el análisis de materiales compuestos, son modelos de daño anisótropo. Es decir, la degradación de los materiales compuestos depende de la dirección y por lo tanto tiene varias componente de daño. En otras palabras, cada entrada del tensor de tensiones estará afectada por su variable de daño correspondiente, en lugar de todas por la misma como ocurría en los modelos isotrópicos. A continuación se muestra el estudio, sobre estos modelos, llevado a cabo por diversos autores [12].

Originalmente, Matzenmiller [13] relaciona las tensiones efectivas ($\bar{\sigma}$) con las nominales (σ) por medio de un tensor diagonal de cuarto orden (M). Este tensor M representa un operador de daño puesto que se compone de las variables d_i ($i=1,2,6$), las cuales representan a su vez a las variables de daño.

$$\bar{\sigma}_i = M_{ij}\sigma_j \quad (1.18)$$

Además, expresa las deformaciones (ε) en función de las tensiones efectivas ($\bar{\sigma}$) mediante el tensor de flexibilidad sin daño (H^0).

$$\varepsilon_k = H_{ki}^0 \bar{\sigma}_i \quad (1.19)$$

$$H_{ki}^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se obtiene:

$$\varepsilon_k = H_{ki}^0 M_{ij} \sigma_j \quad (1.21)$$

Finalmente, Matzenmiller disminuye las propiedades mecánicas del material a través de las variables de daño y así obtiene el tensor de flexibilidad con daño (\mathbf{H}).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_1)E_1} & -\frac{\nu_{21}}{(1-d_2)E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{(1-d_2)E_2} & \frac{1}{(1-d_2)E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_6)G_{12}} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Con todo esto, se obtiene un tensor de rigidez de la forma:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} (1-d_1)E_1 & (1-d_1)(1-d_2)\nu_{21}E_2 & 0 \\ (1-d_1)(1-d_2)\nu_{21}E_2 & (1-d_2)E_2 & 0 \\ 0 & 0 & D(1-d_6)G_{12} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$D = 1 - (1-d_1)(1-d_2)\nu_{21}\nu_{12}$$

Maimí et al. [14] llega al mismo resultado que Matzenmiller pero partiendo de la idea de que el proceso de daño es termodinámicamente irreversible. Define una función de energía libre complementaria a la de Gibbs, mediante la cual obtiene el tensor de flexibilidad con daño.

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma^2} \quad (1.24)$$

Sin embargo, Balzani [15] se basa en la energía libre de Helmholtz (Ψ) y descompone dicha energía en tantos términos como constantes ingenieriles intervienen en la ley constitutiva del material.

$$\Psi = \sum_{i=1,n} (1-d_i)\Psi_i \quad (1.25)$$

La evolución del daño puede modelarse de muchas formas, pero lo más sencillo es degradar las propiedades de los elementos que fallan hasta un valor nulo o un valor residual.

En esta línea, Lee [16] desarrolla un programa de Elementos Finitos para analizar el proceso de daño. Para el caso de fallo de la fibra, Lee considera que se produce el fallo total del material y por ello se anulan todas las rigideces. Sin embargo, para el caso de fallo de la matriz en la dirección transversal o delaminación, sólo anula ciertas componentes del tensor constitutivo. Si se produce fallo de la matriz en la dirección

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

transversal, los términos asociados a dicha dirección (2) serán cero y si se produce delaminación, sólo se anulan los asociados a la dirección del espesor (3).

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Esta propuesta de Lee, que considera que tras el fallo inicial el material pierde su capacidad de soportar carga, no reproduce el comportamiento real del material y además, tiene problemas de convergencia numérica (alcanzar soluciones de equilibrio). Por ello, los siguientes autores proponen una degradación gradual de las propiedades que permita que tras el fallo inicial el material siga teniendo capacidad portante, es decir, en lugar de suponer un modelo de degradación frágil como Lee, suponen un modelo de degradación progresiva o lo que es lo mismo, una pérdida gradual de la rigidez del material al producirse el fallo.

Matzenmiller [13] establece que la disipación de energía durante el proceso de degradación no puede ser negativa. A continuación se muestra dicha restricción que deben cumplir las ecuaciones que representan el crecimiento del daño:

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1} \frac{\partial G}{\partial d_i} \dot{d}_i \geq 0 \quad (1.28)$$

siendo:

- \mathcal{D} : disipación interna de energía.
- G : energía complementaria a la de Gibbs.

Finalmente, para el caso de tracción uniaxial en la dirección de la fibra, establece una evolución exponencial de las variables de daño:

$$d_i = 1 - \exp \left[\frac{1}{m_i} (1 - \varphi_i^{m_i}) \right], \quad (1.29)$$

Donde:

- φ_i , indica que hay daño cuando su valor es mayor o igual a 1.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

- m_i , es una constante semi-empírica para modelar el comportamiento del material tras el inicio del fallo.

Maimí [17] establece una función exponencial más general para determinar las variables de daño asociadas a cada mecanismo de fallo:

$$d_i = 1 - \frac{1}{F(\varphi_i)} \exp[A_i(1 - F(\varphi_i))]F(\varphi_j), \quad (1.30)$$

Siendo:

- $F(\varphi_i)$, función del criterio de fallo empleado.
- A_i , parámetro dependiente del daño.
- $F(\varphi_j)$, una función que depende de otras variables de daño (modos de fallo dependientes). Este término desaparece en el caso de fallo de la fibra ya que es independiente de otros modos de fallo.

Finalmente, destacar que para el cálculo de A_i Maimí iguala la energía disipada con la energía de fractura del mecanismo de daño considerado:

$$\int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial d_i} \dot{d}_i dt = \int_1^\infty \frac{\partial G}{\partial d_i} \frac{\partial d_i}{\partial \varphi_i} d\varphi_i = \frac{G_i}{L_c}, \quad (1.31)$$

donde L_c es la longitud característica de la malla y G_i es la energía de fractura asociada al modo de fallo i .

1.4 Motivación y objetivos.

El uso de los materiales compuestos se está extendiendo gradualmente en diversas aplicaciones, puesto que ya no solo se emplean para reducir peso en componentes secundarios, sino que sustituyen a estructuras principales. La expansión en su uso sólo se ve frenada por su caro proceso de fabricación y por cuestiones de seguridad.

Para conseguir un buen aprovechamiento de la capacidad portante de estos materiales, es necesario obtener predicciones fiables del inicio y propagación de los diferentes mecanismos de fallo. Esto se lleva a cabo mediante ensayos experimentales y análisis numéricos. Como la realización de ensayos resulta muy costosa y requieren mucho tiempo, es muy importante el desarrollo de modelos teóricos y computaciones que simulen la respuesta del material ante determinadas sollicitaciones. Destacar que la herramienta más utilizada para el análisis numérico de estructuras ingenieriles es el Método de los Elementos Finitos.

El objetivo de este trabajo es el desarrollo teórico de un modelo de daño continuo anisótropo termodinámicamente consistente para predecir el inicio y la propagación del daño de un material compuesto sometido a un estado tridimensional de tensiones. Esta formulación constituye la base para la posterior implementación de una subrutina

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

UMAT en el programa de Elementos Finitos ABAQUS. Para ello, se ha empleado como criterio de fallo el criterio 3D basado en la teoría del invariante, el cual no emplea información geométrica sino que utiliza la simetría del material. Esto trae consigo una serie de ventajas, por ejemplo: no es necesario buscar el plano de fractura para predecir el fallo y si realizamos transformaciones ortogonales respecto al sistema coordenado, las ecuaciones constitutivas no van a variar.

1.5 Organización.

El presente proyecto contiene la formulación teórica del criterio de fallo basado en la teoría del invariante y del proceso de degradación que ocurre tras el fallo inicial.

En el capítulo 2 se describe el marco computacional y de modelado. Se explica la teoría del invariante, puesto que es base del criterio estudiado y además se analiza su aplicación a cada tipo de material tal y como se observa en la sección 2.1. Finalmente se centra en el método de los elementos finitos (sección 2.2). Esta sección contiene una introducción al método (sección 2.2.1), su formulación fuerte (sección 2.2.2), su formulación débil (sección 2.2.4) y se detalla el proceso de discretización (sección 2.2.3).

El capítulo 3 se centra en el desarrollo y explicación del criterio de fallo basado en la teoría del invariante. Dicho criterio distingue entre dos tipos de fallos: fallo de fibra (sección 3.3) y fallo de la matriz (sección 3.2).

A continuación, en el capítulo 4, se analiza el modelo de daño continuo. Primero se caracteriza el comportamiento transversalmente isótropo (sección 4.2), después se profundiza en los principios termodinámicos (sección 4.3), posteriormente se desarrolla y explica el modelo de daño anisótropo utilizado (sección 4.4) y por último, se formula el tensor constitutivo tangente (sección 4.5).

Finalmente, en el capítulo 5, se recogen las conclusiones y se proponen las líneas de desarrollo futuras.

2 MARCO COMPUTACIONAL Y DE MODELADO

2.1 Teoría del invariante.

El desarrollo del modelo de daño llevado a cabo en este proyecto utiliza el criterio de fallo tridimensional basado en la teoría del invariante propuesto por Camanho y coautores [11]. Es por ello que a continuación se detallan los principales aspectos de dicho marco de modelado [18]. Destacar que las transformaciones del sistema de referencia que se van a considerar son transformaciones ortogonales (\mathbf{Q}), es decir, rotaciones y translaciones que mantienen constantes las longitudes y los ángulos. Finalmente, la ecuación constitutiva puede ser representada por la función de tensión general como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

siendo:

- $\boldsymbol{\varepsilon}$, el tensor de deformaciones elástico.
- \mathbf{A} y \mathbf{B} , los tensores estructurales, los cuales representan la simetría interna del material como una propiedad intrínseca del mismo.

2.1.1 Introducción.

Las ecuaciones constitutivas de los materiales isótropos permanecen constantes aunque giremos el sistema de referencia, es decir, son independientes de la dirección puesto que todos los planos son de simetría elástica. Por lo tanto, si realizamos una transformación ortogonal, la respuesta del material no varía ya que el grupo ortogonal es el grupo de simetría del material. Esto queda reflejado en la ecuación 2.2:

$$\boldsymbol{\sigma} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}, \quad (2.2)$$

donde \mathcal{O} representa un grupo ortonormal.

Sin embargo, en el caso de materiales anisótropos esto no ocurre puesto que el comportamiento depende de la dirección, o lo que es lo mismo, las ecuaciones constitutivas varían al cambiar el sistema de referencia debido a que todos los planos no son de simetría elástica y por lo tanto el grupo de simetría del material no coincide con todo el grupo ortogonal. Todo esto se muestra en la ecuación 2.3:

$$\boldsymbol{\sigma} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}. \quad (2.3)$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Así la función de tensión $\hat{\sigma}$ representa una función tensorial anisótropa con respecto a ε y una función tensorial isótropa con respecto a ε , \mathbf{A} y \mathbf{B} .

De esta forma, la respuesta del material únicamente permanecerá invariante si las transformaciones ortogonales pertenecen al grupo de simetría del material anisótropo considerado. Por lo tanto, el objetivo de la teoría del invariante es representar las ecuaciones constitutivas de los materiales anisótropos como funciones tensoriales isótropas mediante tensores estructurales (representan la simetría del material) e invariantes (I_1, I_2, I_3), si se logra dicho objetivo, al cambiar el sistema de referencia mediante transformaciones ortogonales pertenecientes al grupo de simetría del material, no variarán las ecuaciones constitutivas.

La definición de los invariantes I_1, I_2, I_3 para un tensor de segundo orden genérico son las siguientes:

$$I_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 - \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 \mathbf{a} = \frac{1}{4} (\sigma_{22})^2 - \frac{1}{2} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{1}{4} (\sigma_{33})^2 + (\sigma_{23})^2$$

$$I_2 = \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 \mathbf{a} = (\sigma_{13})^2 + (\sigma_{12})^2 \quad (2.4)$$

$$I_3 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a} = \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

2.1.2. Teorema de isotropización.

Como se ha indicado anteriormente, la teoría del invariante pretende expresar las ecuaciones constitutivas de los materiales anisótropos como funciones isótropas. De esta forma no variarían las ecuaciones al cambiar el sistema de referencia mediante transformaciones que pertenezcan al grupo de simetría del material. Para lograr dicho objetivo es necesario aplicar el Teorema de Isotropización, el cual establece que: "las funciones anisótropas se pueden transformar en isótropas incluyendo como argumentos de éstas tensores estructurales que sean invariantes respecto a transformaciones pertenecientes al grupo de simetría del material". En otras palabras, como los tensores estructurales representan la simetría del material como una propiedad intrínseca del mismo, son invariantes respecto a transformaciones que formen parte del grupo de simetría del material y por lo tanto respecto a dicho grupo la función pasa a ser invariante. Finalmente, tras conseguir que la función anisótropa pase a ser isótropa, sólo quedaría expresar dicha función en función de los invariantes.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

2.1.3. Ecuaciones constitutivas para materiales isótropos y anisótropos en forma de funciones tensoriales isótropas.

2.1.3.1. Materiales isótropos

El grupo de simetría de estos materiales es:

$$\mathcal{G}_k = O(3) \quad (2.5)$$

En este caso, cualquier transformación ortogonal coincide con el grupo de simetría del material puesto que todos los planos son de simetría elástica. Por lo tanto, las transformaciones ortogonales en materiales isótropos no alteran la respuesta del material, es decir, la matriz constitutiva del material no va a cambiar aunque lo haga el sistema de referencia.

La matriz constitutiva de estos materiales es:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}(1-\nu_{32}\nu_{23})}{D} & \frac{E_{11}(\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13})}{D} & \frac{E_{11}(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})}{D} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_{22}(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})}{D} & \frac{E_{22}(1-\nu_{31}\nu_{13})}{D} & \frac{E_{22}(\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{13})}{D} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_{33}(\nu_{31}-\nu_{21}\nu_{32})}{D} & \frac{E_{33}(\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{12})}{D} & \frac{E_{33}(1-\nu_{21}\nu_{12})}{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{23} \end{bmatrix}$$

$$D = 1 - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} - \nu_{31}\nu_{12}\nu_{23}$$

$$(2.6)$$

2.1.3.2. Materiales transversalmente isótropos

Estos materiales presentan una simetría hexagonal respecto a la dirección característica \mathbf{a} , por lo tanto las ecuaciones constitutivas no van a variar si se realizan transformaciones ortogonales pertenecientes al grupo de simetría del material, es decir, rotaciones respecto a la dirección \mathbf{a} (dirección característica de los materiales transversalmente isótropos, es la dirección de la fibra).

El grupo de simetría de estos materiales es:

$$\mathcal{G}_{12} = \{Q(\alpha, \mathbf{a}) \text{ con } 0 < \alpha < 2\pi, R(\mathbf{a}), R(\mathbf{b}), R(\mathbf{c}), \pm I\} \quad (2.7)$$

Siendo \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} los vectores de la base ortonormal.

La simetría de este tipo de materiales queda representada por medio de un único tensor estructural A cuya expresión es:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\mathbf{A} := \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}. \quad (2.8)$$

Por lo tanto, este tensor estructural es invariante respecto a transformaciones ortogonales pertenecientes al grupo de simetría del material \mathcal{G}_{12} , lo que permite expresar las ecuaciones constitutivas como funciones isótropas, es decir, como funciones invariantes respecto de $\boldsymbol{\varepsilon}$ y \mathbf{A}

A continuación se muestra la matriz constitutiva de estos materiales expresada en los ejes principales del material, también llamados ejes de simetría:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_L - 2\mu_T & \lambda + \alpha & \lambda + \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha & \lambda + 2\mu_T & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha & \lambda & \lambda + 2\mu_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_T \end{bmatrix}$$

$$(2.9)$$

La conversión de los coeficientes invariantes en las constantes elásticas del material y viceversa, se muestran en la tabla A.1 del Anexo.

2.1.3.3. Materiales ortótropos

En el caso de materiales ortótropos, que cuentan con tres planos de simetría elástica, el grupo de simetría del material es el siguiente:

$$\mathcal{G}_3 = \{\mathbf{R}^\pi(\mathbf{a}), \mathbf{R}^\pi(\mathbf{b}), \mathbf{R}^\pi(\mathbf{c}), \pm I\} \quad (2.10)$$

Siendo \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} la base ortonormal y $\mathbf{R}^\pi(\cdot)$ representa una rotación alrededor de la dirección considerada un ángulo π .

La simetría de estos materiales queda representada por medio de 3 tensores estructurales mostrados a continuación:

$$\mathbf{A} := \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}; \quad \mathbf{B} := \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}; \quad \mathbf{C} := \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \quad (2.11)$$

Debido a la propiedad $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{1}$, se prescinde de un tensor (\mathbf{C}) al ser redundante.

A continuación se muestra la matriz constitutiva de estos materiales expresada en los ejes principales del material, también llamados ejes de simetría:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda + \alpha_1 & \lambda + \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha_1 & \lambda + 2\mu + 2\alpha_1 + 4\mu_1 + \beta_1 & \lambda + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha_2 & \lambda + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_3 & \lambda + 2\mu + 2\alpha_2 + 4\mu_2 + \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu + \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}$$

(2.12)

La conversión de los coeficientes invariantes en las constantes elásticas del material se muestra en la tabla A.2 del Anexo.

2.2 Método de los elementos finitos.

2.2.1 Introducción.

Existen una gran cantidad de problemas de cálculo de estructuras en los cuales resulta inasumible abordar su formulación desde el punto de vista analítico. En tales casos, los métodos numéricos han constituido una alternativa útil y potente para su resolución. La técnica numérica más utilizada es el método de los elementos finitos (MEF), lo cual se debe a su elevada versatilidad para abordar la resolución de diferentes problemas ingenieriles.

Actualmente hay una extensa literatura dedicada a estudiar los diferentes aspectos tanto teóricos como computacionales del MEF, por ejemplo: estimación de errores, procedimientos multiescala, cálculos no lineales o problemas multifísicos acoplados.

2.2.2 Definición del problema elástico (formulación débil).

A continuación se muestran las ecuaciones diferenciales básicas que gobiernan la Mecánica de Medios Continuos bajo la hipótesis de deformaciones infinitesimales. Dado un sólido definido por un volumen V y contorno S como el que se representa en la figura 2.1 Sometido a unas fuerzas por unidad de volumen \bar{b} en V , a unas fuerzas por unidad de superficie \bar{t} en S_t y a unos desplazamientos \bar{u} en S_u , tal que $S = S_t \cup S_u$. Las ecuaciones básicas que deben satisfacer tanto el campo de desplazamientos u , así como el campo de tensiones σ y deformaciones \mathcal{E} generados en el sólido por la aplicación de las cargas/restricciones anteriores, son:

Equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{b}_i = 0 \text{ en } V; \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \text{ en } S_T \quad (2.13)$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Compatibilidad:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ en } V; \mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i \text{ en } S_U \quad (2.14)$$

Ecuaciones de comportamiento:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{ij} \quad (2.15)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse empleando la notación de Voigt, la cual es compatible con ABAQUS:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{div}[\boldsymbol{\sigma}] + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$$

Siendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{tensor de deformaciones} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}\}^T$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{tensor de tensiones} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}\}^T$$

$$\mathbf{u} = \text{vector de desplazamientos} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \text{vector de fuerzas internas} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}^T$$

$$\text{div}[\boldsymbol{\sigma}] = \text{denota la divergencia del tensor asociado} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{23})^2}{D} E_{11} & \frac{(\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{21})}{D} E_{22} & \frac{(\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{21})}{D} E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{21})}{D} E_{22} & \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})}{D} E_{22} & \frac{(\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{12})}{D} E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{21})}{D} E_{22} & \frac{(\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{12})}{D} E_{22} & \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})}{D} E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2(1-\nu_{23})} E_{22} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$D = 1 - 2\nu_{21}\nu_{12}(1 + \nu_{23}) - (\nu_{23})^2$$

y \mathbf{C} es la matriz de comportamiento de un material transversalmente isotrópico sin que exista daño.

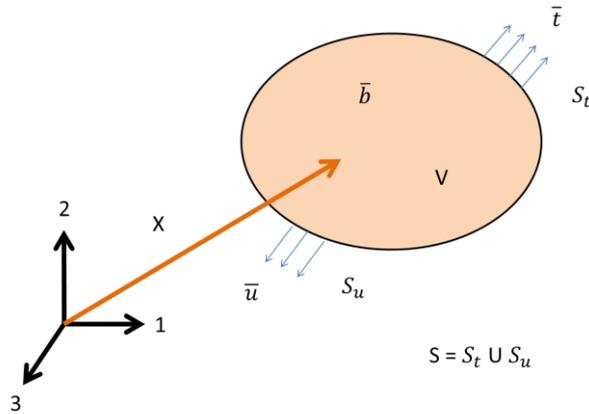


Figura 2.1: Problema de contorno.

2.2.3 Discretización.

En el MEF, se discretiza el dominio bajo estudio, es decir, se descompone en elementos no solapables y finitos realizándose una aproximación de la geometría: $V \approx \sum_{e=1}^{n_e} V_e$, donde V_e es el volumen de cada elemento y n_e el número total de elementos. Estos elementos pueden ser, según el problema a resolver, bidimensionales o tridimensionales y están conectados entre sí a través de puntos comunes llamados nodos y por los lados comunes interelementales.

Gracias a la discretización, se logra transformar un sistema continuo con infinitos grados de libertad y gobernado por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en un sistema con un número finito de grados de libertad y definido por un sistema de ecuaciones. Por lo tanto, el problema diferencial inicial pasa a ser otro problema algebraico, de tal forma que se simplifica su resolución.

Una vez que se ha discretizado, se calcula el campo de desplazamientos de cada elemento mediante los desplazamientos de sus nodos. Para ello hay que emplear las funciones de forma o también llamadas funciones de interpolación. Posteriormente, se

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

ensamblan las matrices de rigidez de cada uno de los elementos y así se obtiene la matriz de rigidez global.

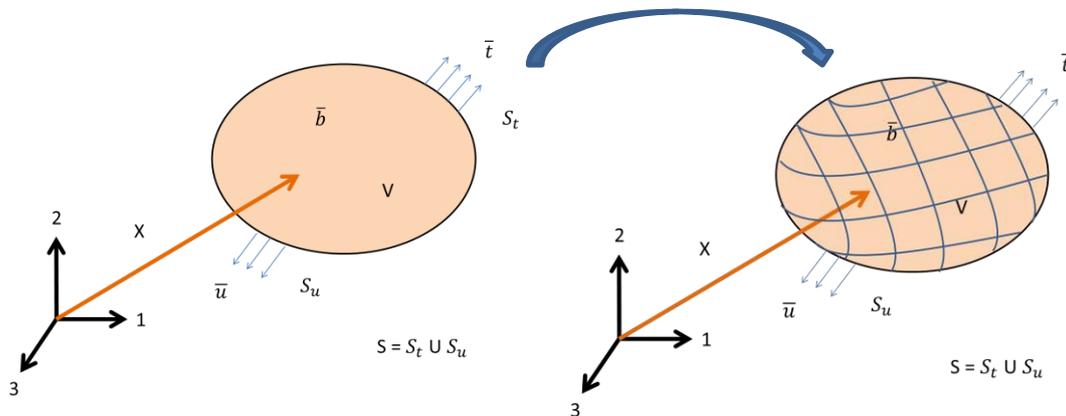


Figura 2.2: Proceso de discretización.

2.2.4 El teorema de los trabajos virtuales (formulación débil).

La formulación débil en la que se basa el Método de los Elementos Finitos es el Teorema de los Trabajos Virtuales (TTV).

El cálculo del desplazamiento en cualquier punto de la geometría $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ se realiza como una combinación lineal de las funciones de forma, $N_I(\xi), I = 1, 2 \dots N_{nod}$. Cada nodo tiene asociada una función de forma, siendo N_{nod} el número de nodos a nivel de elemento y $\xi = \{\zeta, \eta, \varphi\}$ el espacio natural paramétrico en el que se definen las funciones de forma a nivel de elemento. Generalmente, dichas funciones de forma (también llamadas funciones de interpolación) son funciones polinómicas dependientes de las coordenadas locales (\mathbf{x}) y que toman un valor unidad en el nodo I y un valor nulo en el resto. Las funciones N_I , representan el campo de desplazamientos que resultaría de un valor unidad a un desplazamiento en un grado de libertad, manteniendo nulos todos los demás desplazamientos:

$$u_i = \sum_{I=1}^{N_{nod}} N_I(\xi) p_{Ii} \quad i = x, y, z \quad (2.19)$$

u_i es el desplazamiento en cualquier punto del elemento debido a los desplazamientos nodales p_{Ii} . En forma matricial, la expresión anterior queda:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}(\xi) \mathbf{p} \quad (2.20)$$

Por lo tanto, la aproximación de las deformaciones es:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \approx \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{N_{nod}} \left(\frac{\partial N_I}{\partial x_j} p_{Ii} + \frac{\partial N_I}{\partial x_i} p_{Ij} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

Esta aproximación en notación matricial queda:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{p} \quad (2.22)$$

Siendo $\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi})$ un operador que contiene las derivadas de las funciones de interpolación respecto a las coordenadas del espacio.

Teniendo en cuenta la nueva expresión de las deformaciones y asumiendo un comportamiento elástico lineal, la interpolación de las tensiones se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{p} \quad (2.23)$$

Finalmente, tras obtener las interpolaciones de las tensiones y las deformaciones, queda aplicar las ecuaciones de equilibrio. Esto último se va a hacer utilizando el Teorema de los Trabajos Virtuales (TTV) :

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}}^T \delta \mathbf{u} dS + \int_V \bar{\mathbf{b}}^T \delta \mathbf{u} dV \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\partial} \delta \mathbf{u} \text{ en } V \\ \delta \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ en } S_u \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como los desplazamientos y las deformaciones virtuales se determinan por medio de las funciones de forma:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &\approx \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{p} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} &\approx \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.26)$$

El TTV queda:

$$\int_V \delta \mathbf{p}^T \mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} \mathbf{p} dV = \int_{S_t} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_V \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV \quad (2.27)$$

Invocando la arbitrariedad de los desplazamientos virtuales, $\delta \mathbf{d}$, es posible expresar la Ec.(3.26) de la siguiente forma:

$$\delta \mathbf{p}^T \left[\int_V \mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{p} = \left[\int_{S_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV \right] \delta \mathbf{p} \quad (2.28)$$

Se obtiene la expresión del vector de fuerzas exteriores equivalente (\mathbf{f}_{ext}) y la de la matriz de rigidez del elemento (\mathbf{K}_e):

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (2.29)$$

$$\mathbf{f}_{ext} = \int_{S_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV \quad (2.30)$$

Quedando el TTV:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{p} = \mathbf{f}_{ext} \quad (2.31)$$

Finalmente, sumando las ecuaciones obtenidas de cada elemento mediante el denominado proceso de ensamblaje, el sistema global del problema de contorno correspondiente puede expresarse:

$$\mathbf{K} \mathbf{p} = \mathbf{F}_{ext}, \quad (2.32)$$

Siendo:

\mathbf{K} : matriz de rigidez global (obtenida tras ensamblar las matrices \mathbf{K}_e de todos los elementos).

\mathbf{F}_{ext} : vector de fuerzas externas aplicadas en los nodos (también es conocido).

\mathbf{p} : vector de desplazamientos nodales de todo el sistema discreto

Nótese que la implementación del modelo desarrollado en este proyecto incluye no-linealidades materiales como consecuencia de la incorporación de fenómenos asociados al daño intralaminar en materiales compuestos. Por lo tanto, la resolución numérica de las ecuaciones de gobierno se realiza de forma incremental-iterativa mediante el método de Newton Raphson. Dentro del contexto de análisis no-lineal de estructuras mediante MEF. Así, la ecuación (2.27) puede expresarse de forma alternativa:

$$\delta \mathbf{p}^T \left[\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}) dV - \int_{S_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS - \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV \right], \quad (2.33)$$

Pudiéndose identificar el vector de fuerzas interno \mathbf{f}_{int} como:

$$\mathbf{f}_{int} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}) dV, \quad (2.34)$$

Donde se ha incluido la dependencia del tensor de tensiones con respecto a las variables de daño de forma explícita.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

El cálculo de la matriz de rigidez del sistema requiera la linealización de \mathbf{f}_{int} para un incremento de desplazamientos $\Delta \mathbf{d}$. De esta forma puede expresarse:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{p}} \Delta \mathbf{p}, \quad (2.35)$$

La linealización del tensor de puede calcularse:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{p} \quad (2.36)$$

3 CRITERIO TRIDIMENSIONAL BASADO EN LA TEORÍA DE INVARIANTES

3.1 Introducción.

En este capítulo se describe el criterio de fallo elegido para el desarrollo del modelo de daño anisótropo para materiales compuestos reforzados con fibras unidireccionales objeto de este estudio. Este criterio de fallo intralaminar a nivel de lámina equivalente ha sido propuesto por Camnaho y colaboradores [11], el cual permite la consideración de estados tensionales tridimensionales así como la consideración del mecanismo de fallo denominado *fibre kinking*, en el caso de fallo en la dirección de la fibra bajo cargas de compresión.

Este criterio de fallo se basa en la teoría del invariante, que a su vez se basa en tensores estructurales y en invariantes. Los tensores estructurales representan la simetría de los materiales transversalmente isótropos como una propiedad intrínseca del material y no en función de un sistema coordenado determinado. De esta forma el criterio no necesita utilizar información geométrica para predecir el fallo ni buscar el plano de fractura. Además, las transformaciones del sistema coordenado no van a influir en la formulación, es decir, las ecuaciones constitutivas del material no van a cambiar aunque transformemos el sistema coordinado puesto que van a expresarse como funciones tensoriales isótropas.

Nótese a su vez que el criterio sólo predice el fallo a nivel de lámina, por ello en el caso de laminados multidireccionales hay que analizar lámina a lámina. Cabe destacar que si se trata de un laminado multidireccional y se produce el fallo de la matriz, hay que considerar las propiedades in situ/resistencias in situ. Esto último es necesario porque las resistencias en la dirección perpendicular a la fibra y las resistencias de cizalladura de los laminados multidireccionales no coinciden con las obtenidas a partir de las láminas unidireccionales, debido al efecto del espesor y de la orientación de cada lámina. Las expresiones para el cálculo de las resistencias in-situ se detallan en la sección 3.2.

En cuanto a los tipos de fallos, se distinguen dos tipos en este criterio: fallo de la fibra (longitudinal) y fallo de la matriz (transversal). Cada uno de estos fallos es formulado considerando diferentes criterios, pudiéndose producirse por esfuerzos de tracción o compresión en estados tensionales multi-axiales.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

3.2 Propiedades in situ.

Tal y como se ha indicado anteriormente, el criterio de fallo basado en la teoría del invariante predice el fallo en una lámina, por lo tanto, para el caso de laminados multidireccionales hay que calcular las tensiones y deformaciones de cada capa.

Sin embargo, tal y como se ha comprobado experimentalmente, las resistencias transversales a la fibra y la de cizalla de un laminado multidireccional no son las mismas que las obtenidas a partir de cada una de las capas unidireccionales. Este hecho es debido a que estas resistencias varían según la orientación de las capas (ubicación en el laminado) y el espesor del laminado. Para solventar esta discrepancia, es necesario considerar las denominadas propiedades in-situ del material en el criterio tanto de la fibra como de la matriz, ya que aunque estas propiedades están asociadas al fallo de la matriz, dicho fallo interviene en el fallo de la fibra.

En concreto, este trabajo se basa en la definición de las propiedades in-situ definidas en [19], cuyas expresiones se detallan a continuación:

Para láminas delgadas:

$$Y_{is}^T = \sqrt{\frac{8G_{IC}(L)}{\pi t \Lambda_{22}^0}} \quad (3.1)$$

$$Y_{is}^C = Y^C \quad (3.2)$$

$$Y_{is}^{BT} = Y^{BT} \quad (3.3)$$

$$Y_{is}^{BC} = Y^{BC} \quad (3.4)$$

$$S_{is}^L = \sqrt{\frac{(1 + \beta \phi G_{12}^2)^{1/2} - 1}{3\beta G_{12}}} \quad \phi = \frac{48G_{IIC}}{\pi t} \quad (3.5)$$

$$S_{is}^T = Y^C \cos \theta \left[\sin \theta + \frac{\cos \theta}{\tan 2\theta} \right] \quad (3.6)$$

Siendo:

$G_{IC}(L)$ = Energía de fractura intralaminar en modo I.

G_{IIC} = Energía de fractura intralaminar en modo II.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Λ_{22}^0 = componente del tensor de grieta correspondiente a la fractura en modo I en el plano según la teoría de Dvorak.

t = Espesor de la lámina.

G_{12} = Módulo de elasticidad tangencial en el plano de la fibra.

β = parámetro de ajuste que indica si el comportamiento a cortadura es lineal o no.

θ = el ángulo de fractura de la matriz

Para láminas gruesas: además de las ecuaciones que se muestran a continuación (), se emplean las ecuaciones 3.2, 3.3, 3.4 y 3.6.

$$Y_{is}^T = 1,12\sqrt{2}Y^T \quad (3.7)$$

$$S_{is}^L = \sqrt{\frac{(1+\beta\phi G_{12}^2)^{1/2} - 1}{3\beta G_{12}}} \quad \phi = \frac{12 (S^L)^2}{G_{12}} + \frac{72}{4} \beta (S^L)^4 \quad (3.8)$$

3.3 Fallo de la matriz.

Con el fin de formular un criterio de fallo para materiales compuestos reforzados con fibras es necesario la distinción entre los posibles mecanismos de fallo en estos materiales. Desde un punto de vista mecánico, es habitual la consideración de cada lámina individual de un laminado mediante la aproximación de sólido transversalmente isótropo equivalente. Es decir, no se tiene en cuenta las diferentes fases que lo componen (fibra y matriz) sino que su respuesta mecánica puede ser formulada en el contexto de la Mecánica de Medios Continuos.

Teniendo en cuenta estos argumentos, para el caso de materiales compuestos es esencial la distinción entre: (i) mecanismos de fallo dominados por la fibra, que se producen en dirección longitudinal con respecto al refuerzo, (ii) mecanismos de fallo dominados por la matriz, que se producen en dirección transversal al refuerzo.

En particular, el fallo de la matriz se produce como consecuencia de los daños producidos tanto en la matriz como en la interfase fibra-matriz, los cuales pueden producirse tanto a tracción como a compresión.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

3.3.1 Formulación del criterio.

Como se ha indicado anteriormente, el criterio de fallo utilizado en este trabajo es el propuesto en [11] para el fallo de la matriz, el cual es un criterio tridimensional basado en la teoría del invariante. Este criterio utiliza tensores estructurales de isotropía transversal (\mathbf{A}). Estos tensores representan las direcciones características de los materiales transversalmente isótropos (\mathbf{a}), las cuales coinciden con la dirección de la fibra en el caso de materiales compuestos unidireccionales.

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}. \quad (3.9)$$

La formulación general del criterio de fallo es una función del tensor estructural (\mathbf{A}) y del tensor de tensiones (σ) que tras operar da lugar a la siguiente expresión:

$$f_{E,IFF} = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \alpha_{32} I_3^2 \leq 1 \quad (1.10)$$

Donde:

$$\alpha_3 = \alpha_3^t, \alpha_{32} = \alpha_{32}^t \text{ si } I_3 > 0$$

$$\alpha_3 = \alpha_3^c, \alpha_{32} = \alpha_{32}^c \text{ si } I_3 \leq 0$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{S_T^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{S_L^2}$$

$$\alpha_{32}^t = \frac{1 - \frac{Y_T}{2Y_{BT}} - \alpha_1 \frac{Y_T^2}{4}}{Y_T^2 - 2Y_{BT} Y_T} \quad (1.11)$$

$$\alpha_3^t = \frac{1}{2Y_{BT}} - 2\alpha_{32}^t Y_{BT}$$

$$\alpha_{32}^c = \frac{1 - \frac{Y_C}{2Y_{BC}} - \alpha_1 \frac{Y_C^2}{4}}{Y_C^2 - 2Y_{BC} Y_C}$$

$$\alpha_3^c = \frac{1}{2Y_{BC}} - 2\alpha_{32}^c Y_{BC}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^p)^2 - \mathbf{a}(\sigma^p)^2 \mathbf{a} = \frac{1}{4} (\sigma_{22})^2 - \frac{1}{2} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{1}{4} (\sigma_{33})^2 + (\sigma_{23})^2$$

$$I_2 = \mathbf{a}(\sigma^p)^2 \mathbf{a} = (\sigma_{13})^2 + (\sigma_{12})^2$$

$$I_3 = \text{tr} \sigma - \mathbf{a} \sigma \mathbf{a} = \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Cabe destacar que según si el fallo es a tracción o a compresión, los factores α_i ($i = 1,2,3,32$) en la expresiones anteriores son diferentes.

3.3.2 Orientación del plano de fractura.

En el criterio expuesto en el presente proyecto, no es necesario buscar el plano de fractura para predecir el fallo como ocurría, por ejemplo, en el criterio de Puck. Pero para poder representar el fallo (cracking) transversal, es conveniente determinar la orientación del plano de fractura (θ). En la figura 3.1 se muestra la fractura de la matriz y su correspondiente ángulo de fractura.

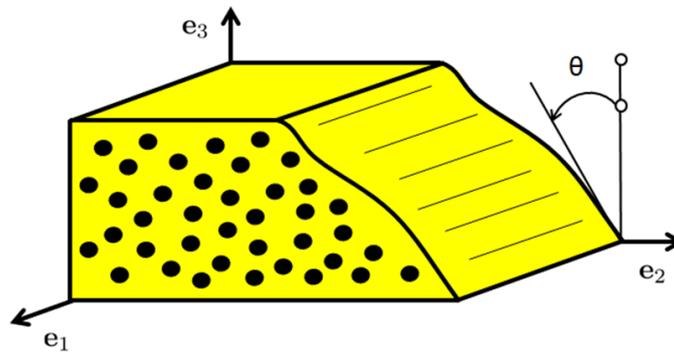


Figura 3.1: Plano de fractura transversal.

Para la determinación del ángulo de fractura de la matriz (θ) primero es necesario determinar si el material se encuentra sometido a un estado de compresión transversal ($I_3 < 0$) o a un estado de tracción transversal ($I_3 > 0$). Posteriormente, hay que analizar el estado de cargas del material y determinar qué tensión es la más crítica, es decir, la que potencialmente provoca el fallo.

A continuación se exponen los diferentes estados de carga analizados con sus correspondientes ángulos de fractura:

COMPRESIÓN TRANSVERSAL ($I_3 < 0$).

- Si sólo se cuenta con σ_{22} (ver figura 3.2.)

Bajo tal sollicitación, el material compuesto va a sufrir una deformación preferentemente según la dirección 3, por lo tanto para determinar el fallo es necesario comparar el estado de tensiones reales con la resistencia asociada a la dirección 3 (Y_c^{i3}). Según los círculos de Mohr correspondientes, el ángulo de fractura debería ser 45° (ángulo de máxima tensión tangencial). Pero experimentalmente se obtiene que dicho ángulo es de 53° y no 45° debido a que estos materiales no son totalmente isótropos porque tienen refuerzo. Diferentes autores han esgrimido diferentes causas de tales como la existencia de un ángulo de rozamiento interno [17]. En este trabajo, siguiendo los

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

argumentos expuestos en [11], el ángulo del plano de fallo (θ) se determina mediante la teoría de Mohr-Coulomb, la cual introduce un ángulo de rozamiento interno y modifica la tensión a la cual se produce la rotura. Gracias a la aplicación de esta teoría se obtiene un ángulo de fractura de 53° .

$$\theta = 53^\circ \quad (3.10)$$

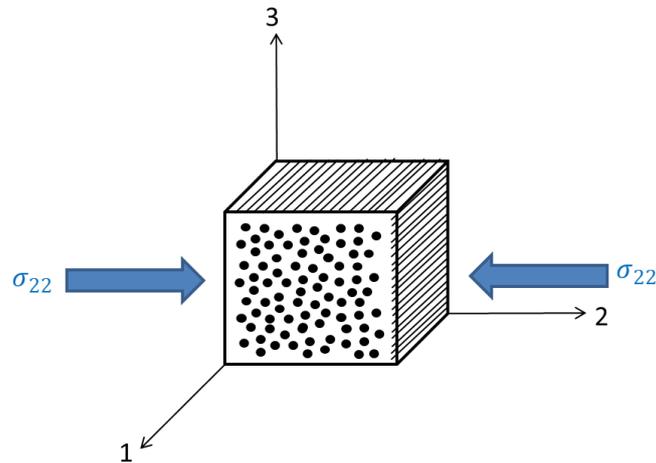


Figura 3.2. Compresión transversal en la dirección 2.

- Para el caso en el que sólo exista σ_{33} (ver figura 3.3):

Al igual que en caso anterior, la resistencia que indica si hay o no fallo es la Y_c^{is} (desplazamiento en la dirección 2) y la teoría empleada para calcular el ángulo de fractura es Mohr-coulomb, obteniéndose:

$$\theta = 53^\circ \quad (3.11)$$

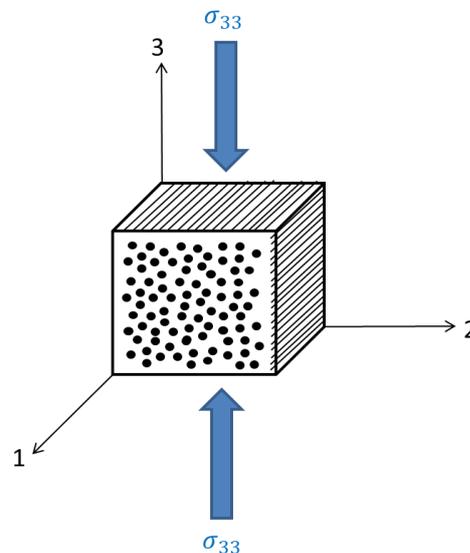


Figura 3.3. Compresión transversal en la dirección 3.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

- Para el caso de compresión bi-axial, el estado de cargas que se analiza es el mostrado en la figura 3.4.

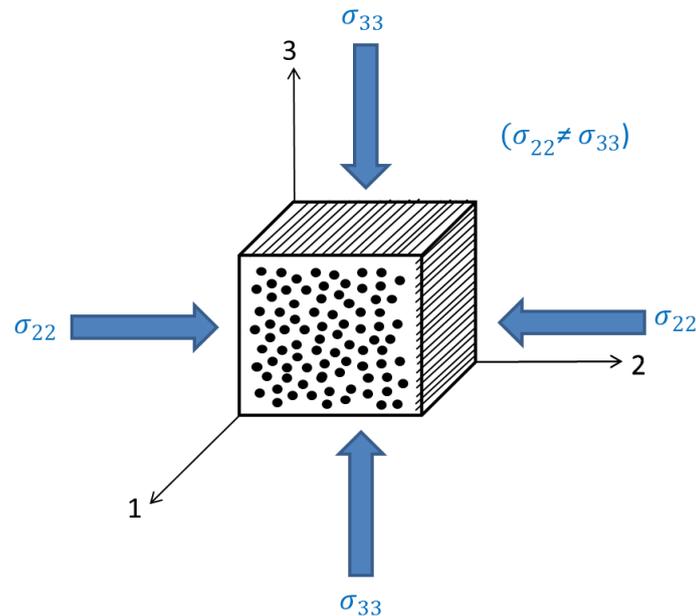


Figura 3.4. Compresión transversal biaxial con tensiones de distinto orden.

Destacar que en este estado de cargas, la tensión más crítica es σ_{33} puesto que actúa fuera del plano de la fibra (resistencia menor) y que la condición de fractura se establece con S_T^{is} porque si aplicamos simultáneamente σ_{22} y σ_{33} , el material únicamente puede desplazarse en las direcciones 23, 12 y 13, siendo sus respectivas resistencias S_T^{is} y S_L^{is} . Como se ha dicho anteriormente, la resistencia fuera del plano de la fibra es menor que en el plano de la fibra ($S_T^{is} < S_L^{is}$) por lo tanto S_T^{is} es la resistencia crítica, la que nos va a determinar si hay o no fallo. En este caso, el fallo se produce para las siguientes condiciones:

1. $|\sigma_{22}| \geq S_T^{is}$

Si se cumple esta condición el fallo puede deberse a σ_{22} o a σ_{33} puesto que como se ha dicho anteriormente σ_{33} es más crítica. Para determinar cuál de ellas produce el fallo, únicamente hay que ver cuál tiene mayor valor absoluto:

- ✓ $|\sigma_{22}| > |\sigma_{33}|$ COMPRESIÓN TRANSVERSAL EN EL PLANO DE LA FIBRA.

Según la teoría de Mohr, el ángulo de fractura es 45° (ángulo de máxima tensión tangencial). Pero experimentalmente se obtiene que dicho ángulo es de 53° y no 45° debido a que estos materiales no son totalmente isótropos porque tienen refuerzo. Por lo tanto, se calcula α mediante la teoría de Mohr-coulomb, la cual introduce un ángulo de rozamiento interno y modifica la tensión a la cual se produce la rotura. Gracias a la aplicación de esta teoría se obtiene un ángulo de fractura de 53° . Ver la ecuación 3.12:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\theta = \arcsin \sqrt{\frac{S_T^{is}}{\min\{|\sigma_{22}|, |Y_C^{is}|\}}} = 53^0 \quad (3.12)$$

- ✓ $|\sigma_{33}| > |\sigma_{22}|$ COMPRESIÓN TRANSVERSAL FUERA DEL PLANO DE LA FIBRA.

En este caso, igual que para la condición anterior y por los mismos motivos, se aplica la teoría de Mohr-Coulomb para el cálculo del ángulo de fractura. Obteniéndose:

$$\theta = \arcsin \sqrt{\frac{S_T^{is}}{\min\{|\sigma_{33}|, |Y_C^{is}|\}}} = 53^0 \quad (3.13)$$

2. $|\sigma_{33}| \geq S_T^{is}$

Si se cumple esta condición, no es necesario analizar el valor absoluto de σ_{22} . Esto es debido a que como σ_{33} es más crítica, si cumple la condición anterior, es la causante del fallo. En este caso se produce COMPRESIÓN TRANSVERSAL FUERA DEL PLANO DE LA FIBRA.

El ángulo de fractura se calcula, tal y como se ha explicado anteriormente, aplicando la teoría de Mohr-Coulomb. La expresión del ángulo de fractura es la ecuación 3.13.

- A continuación se analiza el caso de compresión transversal biaxial, en el que la magnitud de ambas tensiones normales son del mismo orden, ver Figura 3.5. Para esta situación, el ángulo de fallo se calcula aplicando la teoría de Mohr-Coulomb por lo que, tal y como se ha visto anteriormente, dicho ángulo es de 53^0 . En concreto, la expresión del ángulo de fractura puede ser la ecuación 3.12 o la 3.13 puesto que las tensiones normales son del mismo orden.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

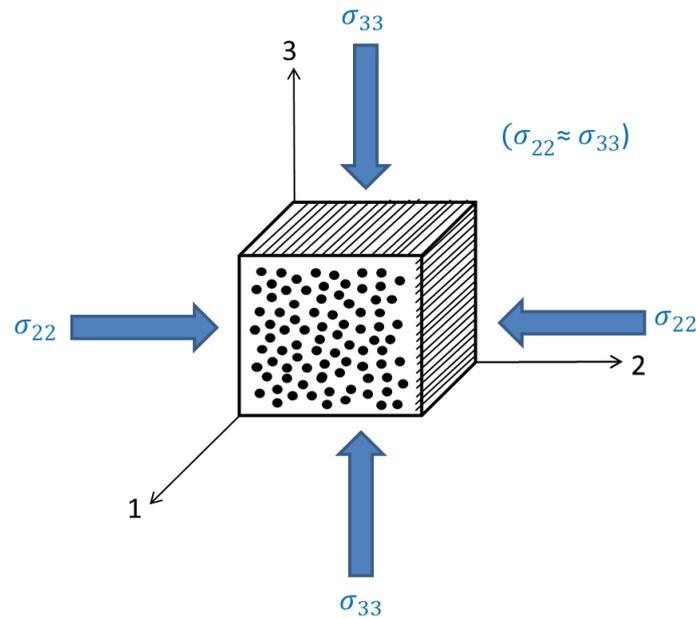


Figura 3.5. Compresión transversal biaxial con tensiones de igual orden.

- En el caso de acción conjunta de compresión biaxial transversal (en el plano de la lámina y fuera del plano de ésta) y acciones tangenciales longitudinales-transversal (en el plano de la lámina y fuera del plano de ésta), ver Figura 3.6, se asume que el efecto de σ_{22} y σ_{33} es muy pequeño. Por lo tanto el ángulo de fractura viene dado por las tensiones tangenciales en el plano de la fibra, es decir, se produce un FALLO POR CORTADURA LONGITUDINAL.

$$\theta = \arctg \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{13}} \quad (3.14)$$

La expresión 3.14 surge tras basarnos en consideraciones simétricas. Si sólo actúa σ_{12} , por evidencias experimentales se sabe que $\alpha = 90^\circ$ mientras que si sólo actúa σ_{13} , los resultados experimentales muestran un $\alpha = 0^\circ$. Por lo tanto si actúan ambas, el ángulo del plano de fractura será el comprendido entre ambas tensiones (ecuación 3.14).

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

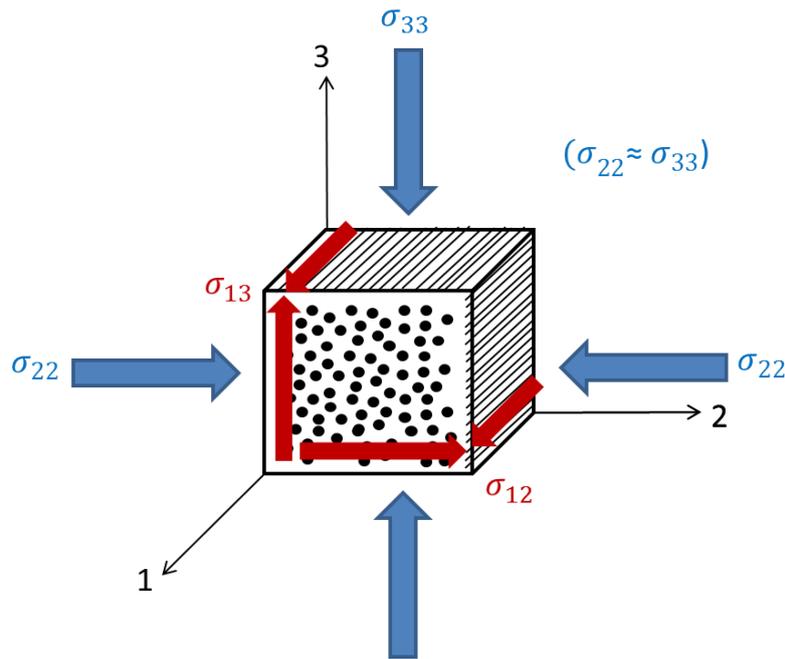


Figura 3.6. Compresión transversal biaxial con tensiones de igual orden y tensiones tangenciales longitudinales.

- En este caso (ver figura 3.7) se cuenta con todas las tensiones posibles, por lo tanto como las tensiones tangenciales son más críticas (evidencia experimental) el fallo va a ser por cortadura. Finalmente, para determinar si la cortadura es longitudinal o transversal, es necesario determinar qué efecto tangencial es el dominante y una vez que lo determinemos, se suponen las tensiones tangenciales no dominantes nulas. Determinar la tensión tangencial dominante se consigue gracias a la condición:

$$\alpha_1 I_1 + \alpha_3 I_3 + \alpha_{32} I_3^2 \geq |\alpha_2 I_2| \quad (3.15)$$

Siendo:

$$\alpha = f(\text{resistencias})$$

$$I_1 = f(\sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23})$$

$$I_2 = f(\sigma_{12}, \sigma_{13})$$

$$I_3 = f(\sigma_{22}, \sigma_{33})$$

Si se cumple la condición 3.15, la tensión tangencial transversal es la dominante y el fallo entonces es CORTADURA TRANSVERSAL. El cálculo del ángulo del plano de fallo se lleva a cabo mediante la siguiente ecuación:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctang \left(\frac{2\sigma_{23}}{\sigma_{22} - \sigma_{33}} \right) \quad (3.16)$$

Esta ecuación surge de suponer que σ_{12} y σ_{13} (tensiones tangenciales no dominantes) son nulas. Tras esta suposición se proyecta el tensor de tensiones tridimensional en el plano 23 (plano de la tensión σ_{23}) y se busca en dicho plano las tensiones principales máximas ($\sigma_{23}=0$). Tras hacer todo esto, se obtiene finalmente el círculo de mohr, por lo que se puede calcular el ángulo del plano de fallo.

Para el caso en que no se cumpla la condición 3.15, estamos ante un fallo por CORTADURA LONGITUDINAL y por lo tanto, tal y como se ha visto anteriormente, el ángulo del plano de fractura se determina con la ecuación 3.14. (Se emplea la suposición del caso de la figura 3.6).

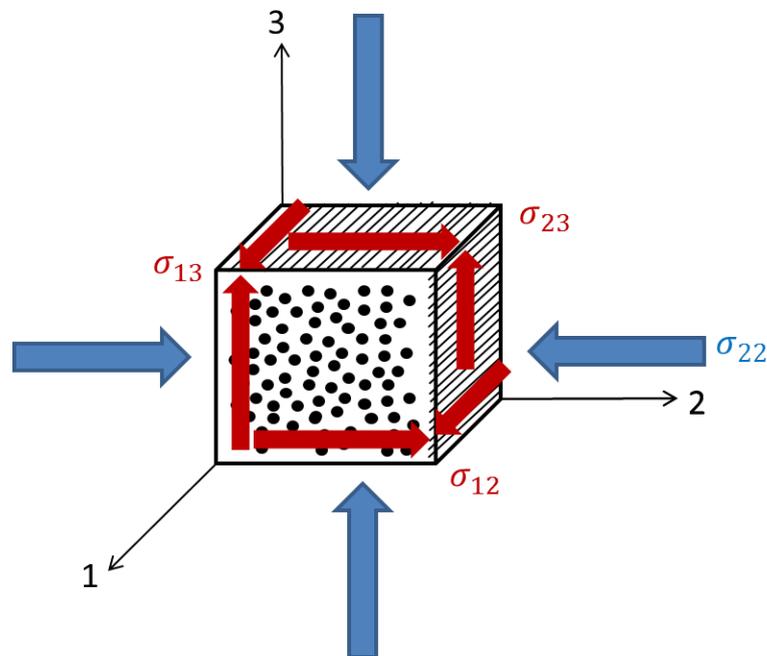


Figura 3.7. Estado tensional completo a compresión.

TRACCIÓN TRANSVERSAL ($I_3 > 0$).

- En el caso de que solamente exista tracción transversal en el plano de la lámina σ_{22} (ver figura 3.8), la orientación del plano de fallo se identifica con $\theta = 90^\circ$.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

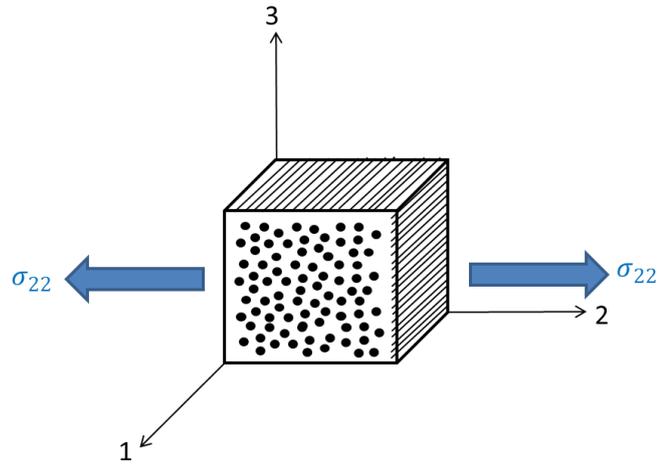


Figura 3.8. Tracción transversal en la dirección 2.

- Para un estado de tracción uniaxial fuera del plano de la lámina σ_{33} (Figura 3.9), la orientación del plano de fractura se debe únicamente a esta acción siendo $\theta = 0^0$.

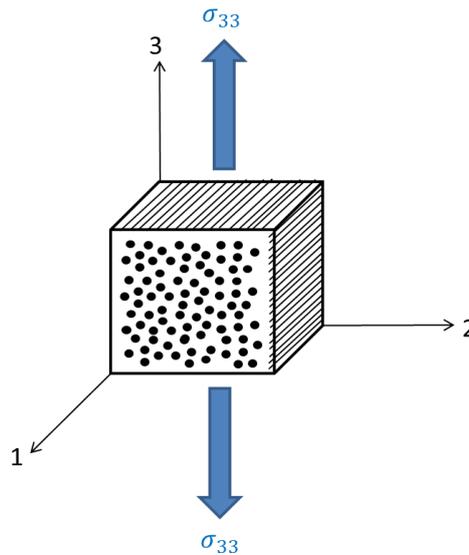


Figura 3.9. Tracción transversal en la dirección 3.

- Si el estado de cargas se corresponde con tracción biaxial transversal a la fibra (en el plano de la lámina y fuera del plano de ésta) donde existe una diferencia significativa en el valor de las mismas, ver Figura 3.10, se asume que la fractura va a estar gobernado por la acción de σ_{33} . Esto es debido a que dicha acción fuera del plano se considera como la más crítica. En esta situación, el valor del ángulo del plano de fallo es $\theta = 0^0$.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

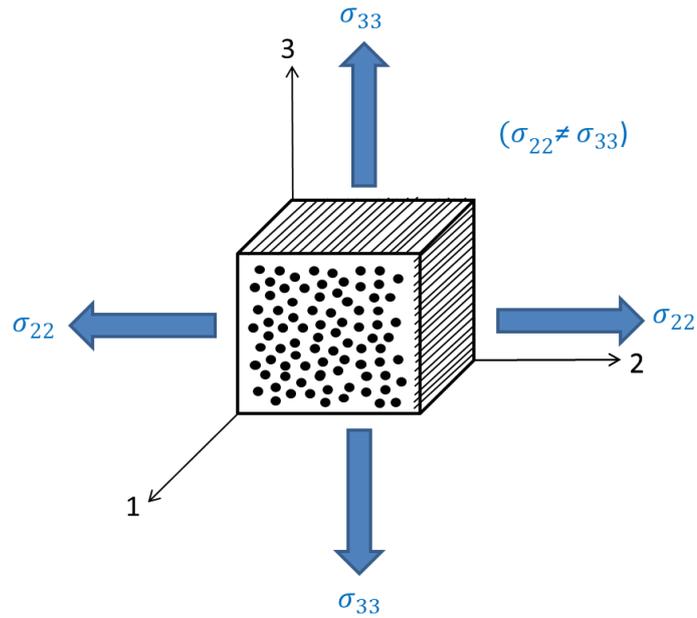


Figura 3.10. Tracción transversal biaxial con tensiones de distinto orden.

- Para el estado de tensional caracterizado por tracción bi-axial transversal a la dirección de la fibra (en el plano de la lámina y fuera del plano de ésta) donde el valor de dichas acciones es del mismo orden, ver Figura 3.11, se asume que la determinación de la orientación del plano de fractura es coincidente con la dirección de la tensión tangencial máxima, es decir $\theta = 45^\circ$.

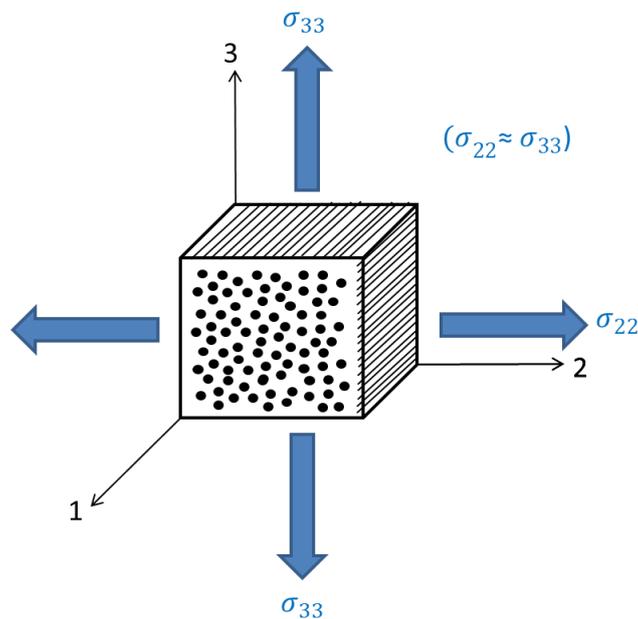


Figura 3.11. Tracción transversal biaxial con tensiones de igual orden.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

- Para el caso en el que se tengan tracción bi-axial (en el plano de la lámina y fuera del plano de ésta), las cuales son del mismo orden, y las acciones tangenciales σ_{13} y σ_{12} , ver Figura 3.12, se asume que el fallo se produce principalmente por efecto de las acciones de CORTADURA TRANSVERSAL. Por lo tanto, el ángulo del plano de fallo se determina mediante la ecuación 3.16 (visto anteriormente en el caso de compresión transversal).

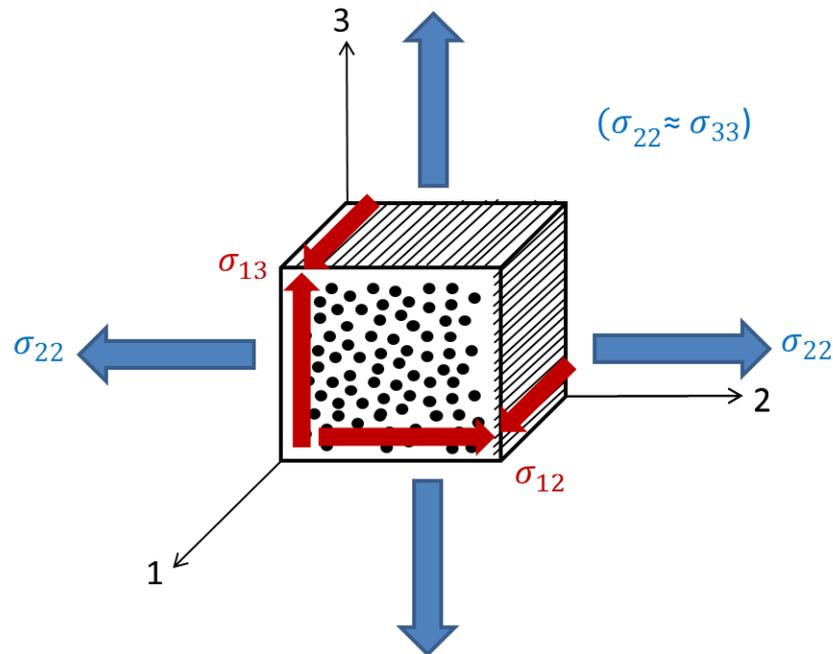


Figura 3.12. Tracción transversal biaxial con tensiones de igual orden y tensiones tangenciales longitudinales.

- Finalmente para un estado de tensiones completo tal y como el mostrado en la Figura 3.13, en el que existe la acción conjunta de todas las componentes tensionales excepto las normales en dirección de la fibra (σ_{11}), el cálculo del ángulo del plano de fractura se realiza exactamente igual que en el caso de compresión transversal, es decir, el fallo es por cortante y hay que determinar si es debido a las tensiones tangenciales longitudinales o a las transversales. Para ello se emplea la siguiente expresión:

$$\alpha_1 I_1 + \alpha_3 I_3 + \alpha_{32} I_3^2 \geq |\alpha_2 I_2| \quad (3.17)$$

Si se cumple la condición anterior, el fallo es dominado por el efecto de las acciones de CORTADURA TRANSVERSAL y por lo tanto el ángulo de fallo se determina con la ecuación 3.16. En caso contrario se trata de un fallo por las acciones de CORTADURA LONGITUDINAL, obteniéndose el ángulo del plano de fallo mediante la expresión 3.14.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

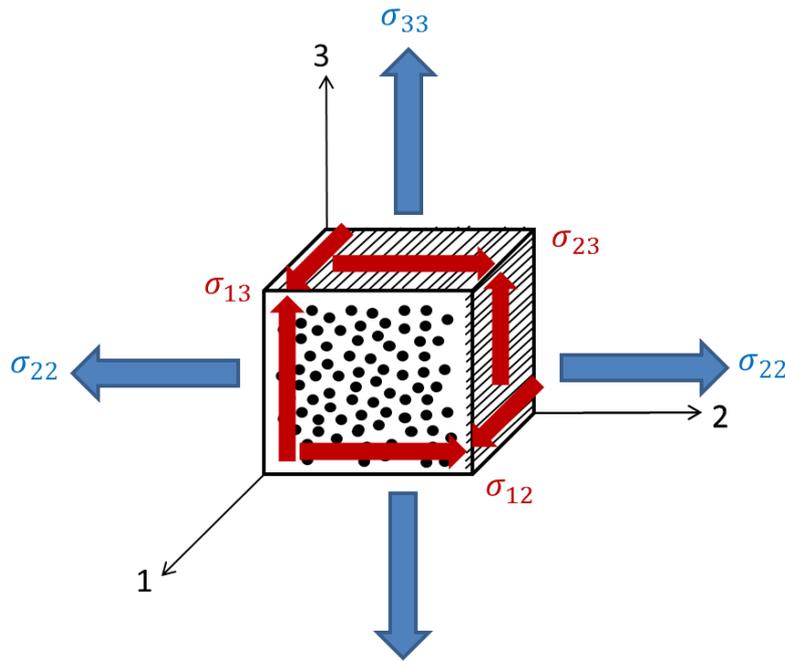


Figura 3.13. Estado tensional completo a tracción.

3.4 Fallo de las fibras

El fallo de las fibras consiste en la pérdida de la capacidad portante de la lámina en la dirección longitudinal y puede producirse tanto a tracción como a compresión. En cuanto al criterio de fallo empleado para predecir el fallo de las fibras, destacar que serán criterios diferentes dependiendo de si el fallo es a tracción o a compresión. En el primer caso se utiliza el criterio de deformación máxima admisible, sin embargo, para el fallo a compresión se emplea el modelo tridimensional del kinking, el cual se basa en el criterio de fallo del invariante formulado para el fallo de la matriz.

3.4.1 Fallo de las fibras a tracción.

El criterio de fallo para predecir la fractura a tracción de la fibra se basa en el criterio de máxima deformación admisible [6].

$$f_{E,FF+} = \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_1^T} \leq 1 \quad (3.18)$$

Siendo:

ϵ_{11} = deformación en la dirección de la fibra.

ϵ_1^T = deformación máxima admisible en la dirección de la fibra.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

3.4.2 Fallo de las fibras a compresión. *Fibre kinking*.

Cuando el fallo de las fibras se produce por compresión longitudinal, se origina el *fibre kinking* o pliegue de las fibras. Este colapso de las fibras es debido a un desalineamiento local inicial de las fibras (micro defectos estructurales locales) que al situarse cerca de la fisuración local de la matriz, no son capaces de soportar la matriz y por lo tanto, aparece la banda *kink* (banda de plegado o doblado de las fibras). En otras palabras, el *fibre kinking* ocurre cuando el criterio de fallo de la matriz se satisface en la zona de desalineamiento de las fibras.

3.4.2.1 Formulación del criterio para el *fibre kinking*.

Este fallo se predice utilizando la formulación basada en el invariante para fallo transversal, visto anteriormente, en la zona de desalineamiento. Pero en este caso, la dirección característica de los materiales transversalmente isótropos (**a**) utilizada en el criterio de fallo, pasa a ser la dirección de las fibras desalineadas.

Hay que distinguir varios sistemas de referencia, tal y como se observa en la figura 3.14:

- $1^0 2^0 3^0$ sistema coincidente con los ejes del material.
- $1^1 2^1 3^1$ sistema asociado al plano del *kinking*.
- $1^R 2^R 3^R$ sistema asociado al ángulo del *kinking*.

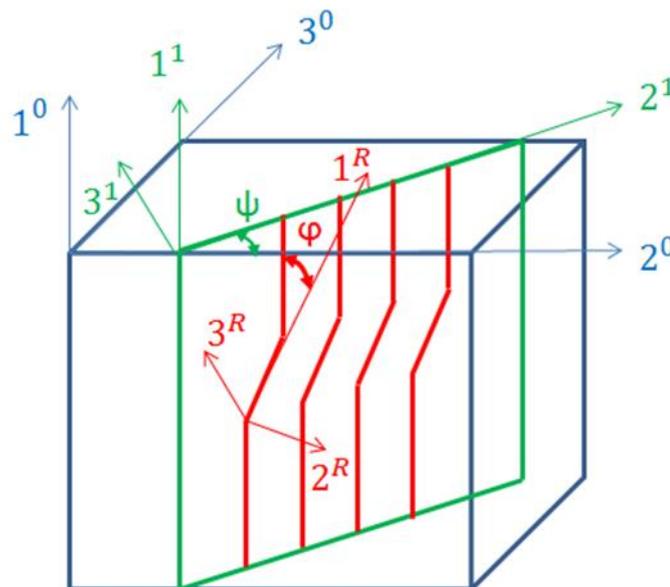


Figura 3.14. Modelo *kinking* 3D.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Tal y como se ha indicado anteriormente, \mathbf{a} pasa a ser la dirección de las fibras desalineadas, es decir, $\mathbf{a}^R = [1 \ 0 \ 0]^T$. Por lo tanto, para expresar \mathbf{a} en el sistema coordinado del material, \mathbf{a}^0 , es necesario realizar dos transformaciones (ver ecuación 3.19)

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{T}_{10} \mathbf{a}^1 = \mathbf{T}_{10} \cdot \mathbf{T}_{R1} \mathbf{a}^R = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \cos\psi \sin\varphi \\ \sin\psi \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{T}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{R1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo mismo pasa con el tensor de tensiones, puesto que se conoce el tensor de tensiones referido al sistema coincidente con los ejes del material pero es necesario conocerlo en la zona de desalineamiento puesto que ahí es donde se aplica el criterio de fallo. Por ello, son necesarias dos rotaciones del tensor de tensiones: la primera para expresar el tensor de tensiones en el plano del kinking (ver ecuación 3.20) y la segunda para expresar el tensor de tensiones anterior en la zona de desalineamiento (ver ecuación 3.21)

$$\boldsymbol{\sigma}^\psi = \mathbf{T}_{10}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T}_{10} \quad (3.20)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\varphi = \mathbf{T}_{R1}^T \boldsymbol{\sigma}^\psi \mathbf{T}_{R1} \quad (3.21)$$

El criterio de fallo para el caso de fallo de la fibra queda del siguiente modo:

$$f_{E,FF-} = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \alpha_{32} I_3^2 \leq 1 \quad (1.12)$$

Donde:

$$\alpha_3 = \alpha_3^t, \alpha_{32} = \alpha_{32}^t \text{ si } I_3 > 0$$

$$\alpha_3 = \alpha_3^c, \alpha_{32} = \alpha_{32}^c \text{ si } I_3 \leq 0$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{S_T^2}$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\alpha_2 = \frac{1}{S_L^2} \quad (1.13)$$

$$\alpha_{32}^t = \frac{1 - \frac{Y_T}{2Y_{BT}} - \alpha_1 \frac{Y_T^2}{4}}{Y_T^2 - 2Y_{BT} Y_T}$$

$$\alpha_3^t = \frac{1}{2Y_{BT}} - 2\alpha_{32}^t Y_{BT}$$

$$\alpha_{32}^c = \frac{1 - \frac{Y_C}{2Y_{BC}} - \alpha_1 \frac{Y_C^2}{4}}{Y_C^2 - 2Y_{BC} Y_C}$$

$$\alpha_3^c = \frac{1}{2Y_{BC}} - 2\alpha_{32}^c Y_{BC}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 - \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 \mathbf{a} = \frac{1}{4} (\sigma_{22})^2 - \frac{1}{2} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{1}{4} (\sigma_{33})^2 + (\sigma_{23})^2$$

$$I_2 = \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}^p)^2 \mathbf{a} = (\sigma_{13})^2 + (\sigma_{12})^2$$

$$I_3 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a} = \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

Destacar que donde aparece tracción se refiere a que la matriz está traccionada y donde aparece compresión se refiere a compresión en la matriz, pero en ambos casos la fibra se encuentra comprimida.

3.4.2.2 Ángulo del plano del *Kinking*.

El ángulo del plano del *kinking* se denota por ψ y es el ángulo que maximiza el índice del fallo *kinking*. Se puede obtener de dos formas: haciendo un barrido $0 \leq \psi_i \leq \pi$ para ver qué ángulo comprendido en ese rango es el que maximiza el fallo, o bien, utilizando la expresión:

$$\psi = \arctan \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{12}} \quad (3.22)$$

La expresión anterior surge de la suposición de que el plano del *kinking* es definido por las tensiones tangenciales que actúan en el plano de la fibra. Sin embargo, si σ_{13} y σ_{12} son nulas, la expresión a utilizar cambia puesto que ahora se supone que el plano del *kinking* es originado por la tensión tangencial fuera del plano de la fibra. Por lo tanto el ángulo del plano del *kinking* se determina mediante la siguiente expresión:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\psi = 1/2 \arctan \left(\frac{2\sigma_{23}}{\sigma_{22} - \sigma_{33}} \right) \quad (3.23)$$

3.4.2.3 Ángulo del *Kinking*.

El ángulo del *kinking* (φ) se calcula empleando el procedimiento propuesto por Catalanotti et al. [6] la suma de un ángulo de desalineamiento inicial originado por los defectos de fabricación y las imperfecciones del material (φ_0) y otro ángulo (γ_m) que es originado por la carga tangencial aplicada en la zona de desalineamiento (τ_{12}^m).

$$\varphi = \text{sgn} \{ \tau_{12}^\psi \} (\varphi_0 + \gamma_m) \quad (3.24)$$

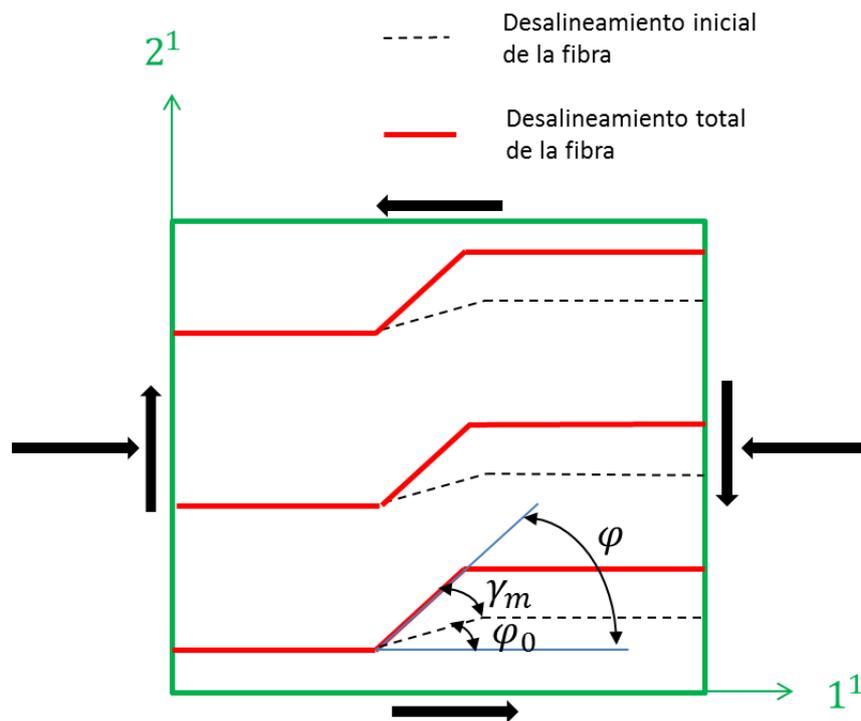


Figura 3.15: zona de desalineamiento [11].

Teniendo en cuenta que se supone un ángulo inicial cero ($\varphi_0 = 0$), la ecuación anterior queda:

$$\varphi = \text{sgn} \{ \tau_{12}^\psi \} (\gamma_m) \quad (3.25)$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Por lo tanto, para determinar el ángulo del kinking, es necesario calcular previamente:

- τ_{12}^{ψ} :
Carga tangencial en el plano del kinking. Este valor se obtiene tras expresar las tensiones en el plano del kinking.
- γ_m :
Como se ha indicado anteriormente, este ángulo depende de la carga tangencial en la zona de desalineamiento y como se supone un comportamiento lineal a cortante, dicha dependencia queda de la forma:

$$\tau_{12}^m = f(\gamma_m) = \chi \gamma_m \quad (3.26)$$

Donde:

χ , es un parámetro asociado a la creación de la banda del kinking y cuya expresión es:

$$\chi = -\frac{\sin(2\varphi_c) * X_c}{2\varphi_c} \quad (3.27)$$

φ_c , es el ángulo del kinking cuando se aplica compresión pura en la dirección de la fibra (el desalineamiento inicial se calcula para el caso particular de fallo bajo compresión pura en la dirección de la fibra, por eso aparece este factor en la expresión de χ). Su cálculo se realiza a través de la siguiente ecuación:

$$\varphi_c = \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{4\sqrt{\alpha_1 - 4\alpha_2 + \alpha_2^2 X_c^2 + (\alpha_3^c)^2 + 2\alpha_2 \alpha_3^c X_c + 4\alpha_{32}^c + (\alpha_1 + 4\alpha_{32}^c) X_c + 4\alpha_3^c} [(\alpha_1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_{32}^c) X_c]^{-1}}{2} \right\} \quad (3.28)$$

τ_{12}^m , es la tensión tangencial expresada en la zona de desalineamiento y por lo tanto va a depender del ángulo del kinking. Para su cálculo hay que expresar las tensiones referidas al plano del kinking, en el sistema asociado al ángulo del kinking.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\tau_{12}^m = \sin(\varphi)\cos(\varphi)(\sigma_{22}^\Psi - \sigma_{11}^\Psi) + [(\cos(\varphi)^2) - (\sin(\varphi)^2)] |\tau_{12}^\Psi| \quad (3.29)$$

Como $\varphi_0 = 0$ entonces $\varphi = \gamma_m$, quedando la expresión anterior de la forma:

$$\tau_{12}^m = \sin(\gamma_m)\cos(\gamma_m)(\sigma_{22}^\Psi - \sigma_{11}^\Psi) + [(\cos(\gamma_m)^2) - (\sin(\gamma_m)^2)] |\tau_{12}^\Psi| \quad (3.30)$$

Se observa que la ecuación 3.30 es no lineal. Por ello para su resolución se va a aplicar el método de Newton-Raphson pasando a expresarse la ecuación como:

$$F = \chi \gamma_m - \sin(\gamma_m)\cos(\gamma_m)(\sigma_{22}^\Psi - \sigma_{11}^\Psi) + [(\cos(\gamma_m)^2) - (\sin(\gamma_m)^2)] |\tau_{12}^\Psi| = \chi \gamma_m + \frac{1}{2} (\sigma_{11}^\Psi - \sigma_{22}^\Psi) \sin(2\gamma_m) - |\tau_{12}^\Psi| \cos(2\gamma_m) \quad (3.31)$$

Y su derivada respecto a γ_m es:

$$\frac{dF}{d\gamma_m} = \chi + (\sigma_{11}^\Psi - \sigma_{22}^\Psi) \cos(2\gamma_m) + 2|\tau_{12}^\Psi| \sin(2\gamma_m) \quad (3.32)$$

El ángulo γ_m se calcula finalmente con la fórmula recursiva:

$$\gamma_{mi+1} = \gamma_{mi} - \frac{F|_{\gamma_m=\gamma_{mi}}}{\frac{dF}{d\gamma_m}|_{\gamma_m=\gamma_{mi}}} \quad (3.33)$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

4 MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO CONTINUO DE MATERIALES COMPUESTOS

4.1 Introducción.

Los materiales compuestos reforzados con fibras se utilizan de forma general en forma de laminados, es decir, se componen de varias láminas superpuestas. Experimentalmente se ha observado que el fallo de una lámina no da lugar necesariamente a un fallo catastrófico del laminado completo, sino que el laminado sigue teniendo una capacidad portante residual y por lo tanto admite cargas mayores.

Tal y como se ha mostrado anteriormente, existen dos enfoques que han sido empleados para el modelado de los procesos de degradación en materiales compuestos:

- Modelos micromecánicos.
- Modelos macromecánicos.

En el presente capítulo se describe el proceso de degradación de un material compuesto, supuesto transversalmente isótropo, empleando la Mecánica De Daño Continuo. Este modelo a su vez hace uso de la hipótesis de equivalencia de deformaciones entre los estados intacto y dañado para su formulación, véase [17].

4.2 Comportamiento elástico: comportamiento transversalmente isótropo.

Como se ha indicado anteriormente, en el presente proyecto se desarrolla el comportamiento un modelo de daño anisótropo para materiales compuestos laminares reforzados con fibras largas mediante un modelo macromecánico equivalente a nivel de lámina, es decir, no se realiza distinción entre las fases fibra y matriz. Por lo tanto, se asume un comportamiento original sin daño transversalmente isótropo, con planos de isotropía perpendiculares a la dirección de la fibra.

La matriz de rigidez C para materiales transversalmente isótropos, expresada en notación de Voight, es:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

de igual forma puede hacerse con su variación tal y como se muestra en la ecuación 4.4:

$$\dot{s} = \dot{s}^i + \dot{s}^e \geq 0 \quad (4.4)$$

Siendo: $\dot{s}^e = \frac{r}{T} - \frac{\nabla q}{T} + q \frac{\nabla T}{T^2}$

$$\dot{s}^i = \dot{s} - \frac{r}{T} + \frac{\nabla q}{T} - q \frac{\nabla T}{T^2} \geq 0$$

Multiplicando la expresión de la variación de entropía interna por la temperatura, puede obtenerse la disipación térmica y la mecánica (ver ecuación 4.5)

$$T\dot{s}^i = [T\dot{s} - r + \nabla q] + [-q \frac{\nabla T}{T}] = D^{mec} + D^{ter} \geq 0 \quad (4.5)$$

Teniendo en cuenta que el flujo de calor va de la fuente de mayor temperatura a la de menor, se establece que la disipación térmica es positiva siempre ($D^{ter} \geq 0$). Además si se aplica el Primer Principio de la Termodinámica, se obtiene:

$$D^{mec} = T\dot{s} - r + \nabla q = \sigma : \dot{\epsilon} + T\dot{s} - \dot{u} \geq 0 \quad (4.6)$$

Las variables medibles experimentalmente son la deformación (ϵ), la tensión (σ) y la temperatura absoluta (T). Sin embargo, la entropía (s) y la energía interna (u) no se pueden obtener experimentalmente y por ello surge la necesidad de definir una nueva función denominada energía libre de Helmholtz (Ψ).

$$\Psi(\epsilon, T, \mathbf{d}) = u(\epsilon, s, \mathbf{d}) - Ts \quad (4.7)$$

Las variables \mathbf{d} que aparecen en la ecuación anterior son las variables de daño (variables internas) que actúan para degradar la rigidez inicial del material una vez se ha satisfecho un cierto criterio de resistencia. Nótese que en este modelo se realiza una representación de daño anisótropo, siendo \mathbf{d} un vector de variables de daño.

La variación temporal de la energía libre de Helmholtz puede expresarse como:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} : \dot{T} + \sum_{i=1, n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_i} \dot{d}_i \quad (4.8)$$

Sustituyendo dicha variación en la expresión de la disipación mecánica y eliminando toda dependencia de la temperatura con el tiempo (procesos isoterms) se obtiene:

$$D^{mec} = (\sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}) : \dot{\epsilon} - \sum_{i=1, n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_i} \dot{d}_i \geq 0 \quad (4.9)$$

Finalmente, las conclusiones obtenidas del procedimiento desarrollado anteriormente son:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

- Como la desigualdad debe cumplirse para cualquier variación de deformación (variable libre), se obtiene que el tensor de tensiones es la derivada de la energía libre de Helmholtz respecto a las deformaciones.

$$\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.10)$$

Así mismo, la matriz constitutiva puede expresarse también en función de la energía libre de Helmholtz.

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.11)$$

- La evolución de las variables de daño tiene que ser positiva, es decir, el proceso de degradación es irreversible y por lo tanto el material no puede recuperarse del daño sufrido.

$$\sum_{i=1,n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial d_i} \dot{d}_i \geq 0 \quad (4.12)$$

4.4. Modelo de daño basado en el criterio tridimensional del invariante.

El modelo de daño continuo empleado en este proyecto ha sido un modelo de degradación directo, es decir, las variables internas de daño afectan de forma directa a las componentes de la matriz constitutiva \mathbb{C} . Estas variables de daño van a degradar (reducir) los módulos de elasticidad (longitudinales y tangenciales E_{11} , E_{22} y G_{12}), sin embargo, los coeficientes de Poisson no van a ser reducidos, por lo tanto sus valores permanecen inalterados.

Primero se determina si hay fallo, es decir, si se cumple alguno de los criterios de fallo expuestos anteriormente en el capítulo 3 (instante de iniciación). Posterior al instante de iniciación, comienza la etapa de degradación. Para dicha etapa se han empleado 7 variables de daño: d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , d_5 , d_6 y d_7 . Dichas variables toman un valor comprendido entre 0 (no hay daño) y 1 (daño total).

Para cada lámina se establece una energía libre de Helmholtz la cual se descompone en varios estados simples:

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{i=1,2,\dots,7} (1 - d_i) \Psi_i^0 \\ \Psi_i^0 &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_i^0 : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

El superíndice cero se refiere al estado sin daño y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ es el tensor de tensiones efectivo. A partir de las tensiones efectivas podemos obtener las reales mediante la siguiente expresión:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1,2..7} (1 - d_i) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i \quad (4.14)$$

Los estados simples se definen atendiendo a la descomposición de la matriz de rigidez en siete submatrices. Cada submatriz corresponde a un tipo de fallo y a una dirección tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}_1 &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbb{C}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbb{C}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbb{C}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbb{C}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbb{C}_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \\
 \mathbb{C}_7 &= \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & 0 & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4.15)$$

C_1	Fallo de la fibra
C_2	Fallo de la matriz en la dirección 2
C_3	Fallo de la matriz en la dirección 3
C_4	Acoplamiento entre fallo de la fibra y fallo de la matriz en la dirección 2
C_5	Acoplamiento entre fallo de la fibra y fallo de la matriz en la dirección 3
C_6	Fallo de la matriz en ambas direcciones (2 y 3)
C_7	Parámetros tangenciales

Tabla 4.1. Submatrices de rigidez.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Volviendo a los aspectos termodinámicos vistos en el apartado anterior, la evolución de las variables de daño tiene que ser siempre positiva puesto que la degradación es un proceso de carácter histórico e irreversible. Esto último se asegura utilizando unas variables internas α^K que toman un valor nulo al principio cuando no hay daño y k denota el incremento de carga actual.

4.4.1. Funciones de activación del daño.

Las funciones de activación del daño permiten determinar si estamos o no en régimen elástico (valor < 0 y valor $= 0$ respectivamente). Estas funciones se definen a partir de los mecanismos de fallo descritos en el criterio tridimensional basado en la teoría del invariante, es decir, fallo de la fibra a tracción, fallo de la fibra a compresión, fallo de la matriz a tracción y fallo de la matriz a compresión. Las funciones de activación del daño se definen como:

$$\begin{aligned}
 F_{f_{E,FF+}} &= f_{E,FF+} - r_{E,FF+} \leq 0 \\
 F_{f_{E,FF-}} &= f_{E,FF-} - r_{E,FF-} \leq 0 \\
 F_{f_{E,IFF+}} &= f_{E,IFF+} - r_{E,IFF+} \leq 0 \\
 F_{f_{E,IFF-}} &= f_{E,IFF-} - r_{E,IFF-} \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Siendo: $f_{E,FF+}$ y $f_{E,FF-}$ los índices de exposición del fallo de la fibra a tracción y compresión; $r_{E,FF+}$ y $r_{E,FF-}$ sus umbrales de daño; $f_{E,IFF+}$ y $f_{E,IFF-}$ los índices de exposición del fallo de la matriz a tracción y compresión con $r_{E,IFF+}$ y $r_{E,IFF-}$ sus respectivos umbrales de daño. Los umbrales de daño toman inicialmente un valor 1 (no se ha activado el daño) y aumentan con el daño. Además, son identificados con las respectivas variables internas α (variables auxiliares) una vez que se ha producido el fallo.

4.4.2. Evolución del daño.

Los umbrales de daño evolucionan con la historia de carga, por lo tanto dicha evolución se define con las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$r_E \geq 0; \quad F_E \leq 0; \quad r_E F_E = 0. \tag{4.17}$$

Siendo r_E un umbral de daño genérico, F_E su función de activación y f_E su factor de exposición [20].

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Cuando no se ha activado el daño, como $f_E < r_E$, la función de activación (F_E) es negativa y nos encontramos en régimen elástico.

En caso de que se produzca la activación del daño, hay que evaluar la variación temporal del factor de exposición \dot{f}_E tal y como se muestra a continuación:

- $\dot{f}_E \leq 0$; no hay evolución del daño. En este caso se tiene un estado de descarga o carga neutra.
- $\dot{f}_E > 0$; hay evolución del daño y tiene que cumplirse la condición de consistencia, es decir, no es admisible estar fuera de la superficie de fallo.

$$\dot{F}_E = \dot{f}_E - \dot{r}_E = 0 \longrightarrow \dot{f}_E = \dot{r}_E \quad (4.18)$$

La expresión anterior puede integrarse de forma explícita y por lo tanto, la evolución de los umbrales de daño en el intervalo entre los pseudo instantes $[k-1, k]$ es:

$$r_E^k = \alpha_E^k = \max \{1, \max \{\alpha_E^{k-1}, f_E^k\}\} \quad (4.19)$$

Destacar que $k-1$ y k son el último instante en equilibrio y el instante actual a lo largo del proceso de resolución y que la expresión 4.19 se particulariza para cada uno de los mecanismos de daño definidos en el criterio empleado en el presente proyecto.

4.4.3 Leyes de evolución del daño empleadas.

Como se ha indicado anteriormente, no se va a considerar que el fallo de una lámina de lugar al fallo del laminado, sino que se va a trabajar con una evolución del daño progresiva y por lo tanto, aunque se produzca el fallo, el material va a ser capaz de soportar más carga aunque va a ver reducidas sus propiedades mecánicas.

Para el caso del fallo de la fibra a tracción y el fallo de la matriz, tanto a tracción como a compresión, se define una evolución exponencial del daño. Sin embargo, para el fallo de la fibra a compresión se define una evolución con una primera zona lineal seguida de una zona exponencial. A continuación se van a ver cada una de las evoluciones de las variables de daño indicadas anteriormente.

4.4.3.1. Evolución exponencial de las variables de daño (fallo de la fibra a tracción y fallo de la matriz a tracción y a compresión)

Las variables de daño, para el caso de fallo de la fibra a tracción o de la matriz tanto a tracción como a compresión, evolucionan de acuerdo a las siguientes expresiones:

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$d_{ij} = 1 - \frac{1}{f_{E,FF}} \exp[A_{ij}(1 - f_{E,FF})] \quad i = f ; j = t. \quad (4.20)$$

$$d_{ij} = 1 - \frac{1}{f_{E,IFF}} \exp[A_{ij}(1 - f_{E,IFF})] \quad i = 1, 2 ; j = t, c. \quad (4.21)$$

Siendo A_{ij} unos factores que dependen de las propiedades mecánicas del material y de la longitud característica del elemento que se estudia. Esta longitud característica permite escalar la energía disipada durante la degradación por unidad de longitud y se calcula con ABAQUS. Destacar que dicho escalado permite emplear la técnica “crack band approach” [1] que supone una minimización de la dependencia de los resultados con la malla de elementos finitos (discretización espacial del problema).

Los parámetros G_{ij} son las energías de fractura de cada mecanismo de fallo i en cada estado de cargas j (tracción o compresión) y los factores R_{ij} son las resistencias del material con respecto a cada mecanismo de fallo.

$$A_{fj} = \frac{2L_C R_{fj}^2}{2E_{11} G_{fj} - L_C R_{fj}^2} \quad j = t$$

$$A_{1j} = \frac{2L_C R_{1j}^2}{2E_{22} G_{1j} - L_C R_{1j}^2} \quad j = t, c. \quad (4.22)$$

$$A_2 = \frac{2L_C R_2^2}{2G_{12} G_2 - L_C R_2^2}$$

Finalmente, para determinar el carácter histórico del criterio, se emplean unas variables internas α :

$$\alpha_{ft}^k = \max \{ \alpha_{ft}^{k-1}, f_{E,FF}^k \} \quad \text{si } \sigma_{11} \geq 0$$

$$\alpha_{1t}^k = \max \{ \alpha_{1t}^{k-1}, f_{E,IFF}^k \} \quad \text{si } f_{E,IFF} \geq 1 \text{ y } I_3 > 0$$

$$\alpha_{1c}^k = \max \{ \alpha_{1t}^{k-1}, f_{E,IFF}^k \} \quad \text{si } f_{E,IFF} \geq 1 \text{ y } I_3 < 0$$

$$\alpha_2^k = \max \{ \alpha_2^{k-1}, f_{E,IFF}^k \} \quad \text{si } f_{E,IFF} \geq 1$$
(4.23)

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

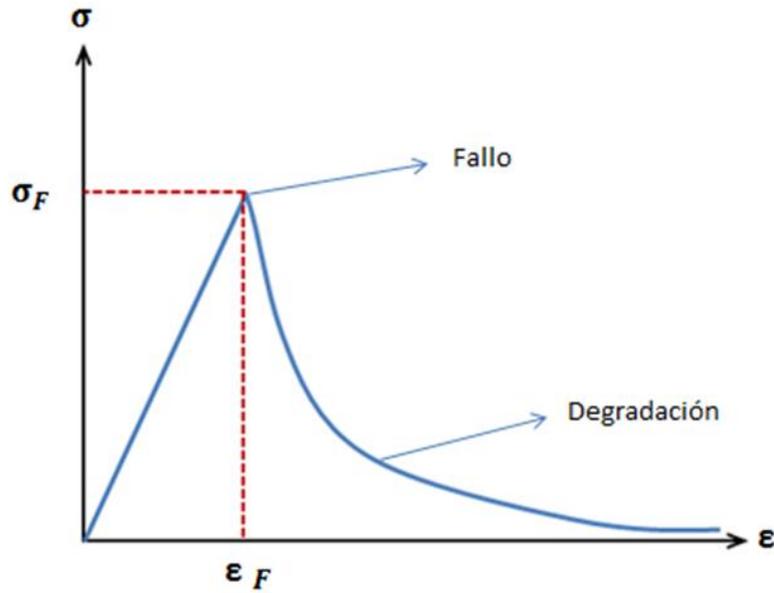


Figura 01: Degradación de la fibra a tracción y de la matriz a tracción y a compresión. [1]

4.4.3.2. Evolución lineal-exponencial de las variables de daño (fallo de la fibra a compresión)

La variable de daño para el caso de fallo de la fibra a compresión (fibre kinking), evoluciona de acuerdo a la siguiente expresión:

$$d_{fc} = \begin{cases} 1 + \frac{K_1}{E_1} - \frac{K_1 + E_1}{E_1 f_{E,FF-}} & \text{si } f_{E,FF-} \leq f_{E,FF-}^k \\ 1 - (1 - d_{fc}^k) \frac{f_{E,FF-}^k}{f_{E,FF-}} \exp \left[A_{fc} \left(1 - \frac{f_{E,FF-}}{f_{E,FF-}^k} \right) \right] & \text{si } f_{E,FF-} > f_{E,FF-}^k \end{cases} \quad (4.24)$$

Donde:

$$K_1 = \frac{L_C X_C E_1 (X_C - X_{C0})}{2G_{fc}^L E_1 - L_C X_C (X_C - X_{C0})}$$

$$f_{E,FF-}^k = \frac{2G_{fc}^L E_1 - L_C X_C X_{C0}}{L_C X_C^2} \quad (4.25)$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$d_{fc}^k = \frac{L_C G_{fc}^L E_1}{2G_{fc}^L E_1 + L_C X_C X_{C0}}$$

$$A_{fc} = \frac{2E_1 (G_{fc}^L E_1 - L_C X_C X_{C0})}{2E_1 (X_C G_{fc}^E - X_{C0} G_{fc}^L) - L_C X_C^2 X_{C0}}$$

Siendo:

X_{C0} = Resistencia de pull-out = $2X_C$

G_{fc}^L = Energía de fractura de la fibra a compresión en la evolución lineal.

G_{fc}^E = Energía de fractura de la fibra a compresión en la evolución exponencial.

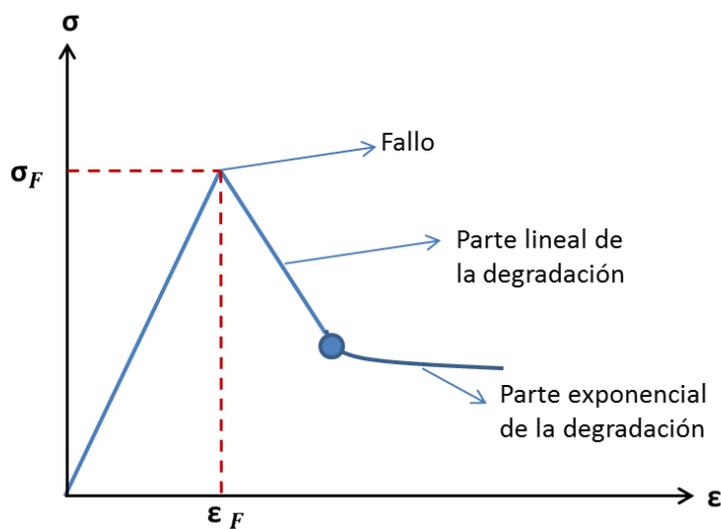


Figura 02: Degradación de la fibra a compresión (*fibre kinking*).

La transición entre la zona de degradación lineal y la exponencial (círculo figura 02) cumple que $f_{E,FF-} = f_{E,FF-}^k$. Siendo $f_{E,FF-}^k$ el factor de exposición correspondiente al punto donde se disipa la G_{fc}^L .

4.5. Formulación del tensor constitutivo tangente.

El tensor constitutivo define el comportamiento del material mediante sus propiedades y permite relacionar las tensiones y las deformaciones. Es un tensor de cuarto orden \mathbb{C}_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) que puede expresarse como una matriz \mathbb{C}_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) gracias a la notación de Voigt. El tensor constitutivo de un material transversalmente isótropo no dañado viene dado en la ecuación 4.1, sin embargo, para el caso de que el material esté dañado el tensor constitutivo que define el comportamiento de éste es diferente. En tal caso, el tensor que incorpora la información sobre el proceso de daño es el constitutivo tangente (\mathbb{C}^{tg}).

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$\mathbb{C}^{tg} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \sum_{i=1,2,..,7} (1 - d_i) \bar{\sigma}_i \right\} = \sum_{i=1,2,..,7} (1 - d_i) \mathbb{C}_i \sum_{i=1,2,..,7} \frac{\partial d_i}{\partial \varepsilon} \otimes \bar{\sigma}_i \quad (4.26)$$

Siendo:

$$\mathbb{C}^{sec} = \sum_{i=1,2,..,7} (1 - d_i) \mathbb{C}_i. \quad (4.27)$$

Por lo tanto, la expresión del tensor secante queda de la siguiente forma:

$$\mathbb{C}^{sec} = \begin{bmatrix} (1 - d_1)C_{11} & (1 - d_7)C_{12} & (1 - d_7)C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ (1 - d_7)C_{12} & (1 - d_2)C_{22} & (1 - d_7)C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ (1 - d_7)C_{13} & (1 - d_7)C_{23} & (1 - d_3)C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - d_4)C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - d_5)C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - d_6)C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Siendo:

$$(1 - d_1) = (1 - x d_{ft}) (1 - d_{fc})$$

$$(1 - d_2) = (1 - x d_{mt} \sin \theta) (1 - d_{mc} \sin \theta)$$

$$(1 - d_3) = (1 - x d_{mt} \cos \theta) (1 - d_{mc} \cos \theta)$$

$$(1 - d_4) = (1 - x d_{ft}) (1 - d_{fc}) (1 - x d_{mt} \sin \theta) (1 - d_{mc} \sin \theta)$$

$$(1 - d_5) = (1 - x d_{ft}) (1 - d_{fc}) (1 - x d_{mt} \cos \theta) (1 - d_{mc} \cos \theta)$$

$$(1 - d_6) = (1 - x d_{mt} \sin \theta) (1 - d_{mc} \sin \theta) (1 - x d_{mt} \cos \theta) (1 - d_{mc} \cos \theta)$$

$$(1 - d_7) = (1 - x d_{ft}) (1 - d_{fc}) (1 - x d_{mt}) (1 - d_{mc})$$

θ = ángulo del plano de fallo de la matriz

x = parámetro que depende del cierre grieta ($0 < x < 1$). Este parámetro se activa cuando estamos a compresión puesto que en dicha situación se recupera parte de la rigidez perdida a tracción. Esto se debe a que, bajo cargas de compresión, los labios de grieta se acercan y por lo tanto, se produce una transmisión parcial de la carga entre dichos labios aumentando la rigidez del material.

Para el cálculo del último término de la ecuación correspondiente al módulo constitutivo tangente (\mathbb{C}^{tg}) es necesario aplicar la regla de la cadena y realizar el cálculo de las derivadas correspondientes tal y como se va a detallar a continuación:

$$\sum_{i=1,2,..,7} \frac{\partial d_i}{\partial \varepsilon} \otimes \bar{\sigma}_i = \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon} \otimes \bar{\sigma}_1 + \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon} \otimes \bar{\sigma}_2 + \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon} \otimes \bar{\sigma}_3 + \frac{\partial d_4}{\partial \varepsilon} \otimes \bar{\sigma}_4 + \frac{\partial d_5}{\partial \varepsilon} \otimes \bar{\sigma}_5 + \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon} \otimes \bar{\sigma}_6 + \frac{\partial d_7}{\partial \varepsilon} \otimes \bar{\sigma}_7 \quad (4.29)$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Siendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon} &= -x^* \frac{\partial d_{ft}}{\partial \varepsilon} * (1 - d_{fc}) - \frac{\partial d_{fc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) \\
\frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon} &= -x^* \sin \theta^* \frac{\partial d_{mt}}{\partial \varepsilon} * (1 - d_{mc} * \sin \theta) - \frac{\partial d_{mc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{mt} * \sin \theta) * \sin \theta \\
\frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon} &= -x^* \cos \theta^* \frac{\partial d_{mt}}{\partial \varepsilon} * (1 - d_{mc} * \cos \theta) - \frac{\partial d_{mc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{mt} * \cos \theta) * \cos \theta \\
\frac{\partial d_4}{\partial \varepsilon} &= -x^* \frac{\partial d_{ft}}{\partial \varepsilon} * (1 - d_{fc}) * (1 - x^* d_{mt} * \sin \theta) * (1 - d_{mc} * \sin \theta) - \frac{\partial d_{fc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) * (1 - x^* d_{mt} * \sin \theta) * (1 - d_{mc} * \sin \theta) - x^* \sin \theta^* \frac{\partial d_{mt}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) * (1 - d_{fc}) * (1 - d_{mc} * \sin \theta) - \sin \theta^* \frac{\partial d_{mc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) * (1 - d_{fc}) * (1 - x^* d_{mt} * \sin \theta). \\
\frac{\partial d_5}{\partial \varepsilon} &= -x^* \frac{\partial d_{ft}}{\partial \varepsilon} * (1 - d_{fc}) * (1 - x^* d_{mt} * \cos \theta) * (1 - d_{mc} * \cos \theta) - \frac{\partial d_{fc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) * (1 - x^* d_{mt} * \cos \theta) * (1 - d_{mc} * \cos \theta) - x^* \cos \theta^* \frac{\partial d_{mt}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) * (1 - d_{fc}) * (1 - d_{mc} * \cos \theta) - \cos \theta^* \frac{\partial d_{mc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) * (1 - d_{fc}) * (1 - x^* d_{mt} * \cos \theta). \\
\frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon} &= -x^* \sin \theta^* \frac{\partial d_{mt}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{mt} * \cos \theta) * (1 - d_{mc} * \sin \theta) * (1 - d_{mc} * \cos \theta) - \sin \theta^* \frac{\partial d_{mc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{mt} * \sin \theta) * (1 - x^* d_{mt} * \cos \theta) * (1 - d_{mc} * \cos \theta) - x^* \cos \theta^* \frac{\partial d_{mt}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{mt} * \sin \theta) * (1 - d_{mc} * \sin \theta) * (1 - d_{mc} * \cos \theta) - \cos \theta^* \frac{\partial d_{mc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{mt} * \sin \theta) * (1 - d_{mc} * \sin \theta) * (1 - x^* d_{mt} * \cos \theta). \\
\frac{\partial d_7}{\partial \varepsilon} &= -x^* \frac{\partial d_{ft}}{\partial \varepsilon} * (1 - d_{fc}) * (1 - x^* d_{mt}) * (1 - d_{mc}) - \frac{\partial d_{fc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) * (1 - x^* d_{mt}) * (1 - d_{mc}) - x^* \frac{\partial d_{mt}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) * (1 - d_{fc}) * (1 - d_{mc}) - \frac{\partial d_{mc}}{\partial \varepsilon} * (1 - x^* d_{ft}) * (1 - d_{fc}) * (1 - x^* d_{mt}).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Como las variables de daño dependen de las deformaciones, es necesario aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_{ft}}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial d_{ft}}{\partial f_{E,FF+}} \left(\frac{\partial f_{E,FF+}}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} \right) \\
\frac{\partial d_{fc}}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial d_{fc}}{\partial f_{E,FF-}} \left(\frac{\partial f_{E,FF-}}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} \right) \\
\frac{\partial d_{mt}}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial d_{mt}}{\partial f_{E,IFF+}} \left(\frac{\partial f_{E,IFF+}}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} \right) \\
\frac{\partial d_{mc}}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial d_{mc}}{\partial f_{E,IFF-}} \left(\frac{\partial f_{E,IFF-}}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} \right)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

La derivada de las variables de daño respecto a los factores de exposición son escalares (orden 0). Para el caso de fallo de la fibra a tracción o fallo de la matriz tanto a tracción como a compresión, dicha derivada es la expresión que aparece en la ecuación 4.32 Sin embargo, si el fallo es el *fiber kinking*, la derivada es la mostrada en la ecuación 4.33.

$$\frac{\partial d_i}{\partial f_{E,i}} = \frac{1}{f_{E,i}^2} * (1 + A_i * f_{E,i}) \exp [A_i * (1 - f_{E,i})] \quad i = FF +, IFF -, IFF + \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial d_{fc}}{\partial f_{E,FF-}} = \begin{cases} \frac{K_1 + E_1}{E_1 f_{E,FF-}^2} & \text{si } f_{E,FF-} \leq f_{E,FF-}^k \\ \frac{1 - d_{fc}^k}{f_{E,FF-}^2} (f_{E,FF-}^k - A_{fc} f_{E,FF-}) \exp \left[A_{fc} \left(1 - \frac{f_{E,FF-}}{f_{E,FF-}^k} \right) \right] & \text{si } f_{E,FF-} > f_{E,FF-}^k \end{cases} \quad (4.33)$$

Las expresiones de las derivadas del factor de exposición respecto a las tensiones efectivas (segundo orden) son:

$$\frac{\partial f_{E,FF+}}{\partial \bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{E,FF+}}{\partial \bar{\sigma}_{11}} \\ \frac{\partial f_{E,FF+}}{\partial \bar{\sigma}_{22}} \\ \frac{\partial f_{E,FF+}}{\partial \bar{\sigma}_{33}} \\ \frac{\partial f_{E,FF+}}{\partial \bar{\sigma}_{12}} \\ \frac{\partial f_{E,FF+}}{\partial \bar{\sigma}_{13}} \\ \frac{\partial f_{E,FF+}}{\partial \bar{\sigma}_{23}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{X_T} \\ -\frac{\nu_{12}}{X_T} \\ \frac{\nu_{12}}{X_T} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial f_{E,FF-}}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial f_{E,IFF}}{\partial \bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_E}{\partial \bar{\sigma}_{11}} \\ \frac{\partial f_E}{\partial \bar{\sigma}_{22}} \\ \frac{\partial f_E}{\partial \bar{\sigma}_{33}} \\ \frac{\partial f_E}{\partial \bar{\sigma}_{12}} \\ \frac{\partial f_E}{\partial \bar{\sigma}_{13}} \\ \frac{\partial f_E}{\partial \bar{\sigma}_{23}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_1}{2} (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33}) + \alpha_3 \bar{\sigma}_{22} + 2\alpha_{32} (\bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}) \\ \frac{\alpha_1}{2} (\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_{22}) + \alpha_3 \bar{\sigma}_{33} + 2\alpha_{32} (\bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}) \\ 2\alpha_2 \bar{\sigma}_{12} \\ 2\alpha_2 \bar{\sigma}_{13} \\ 2\alpha_1 \bar{\sigma}_{23} \end{pmatrix}$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

Los coeficientes α , tal y como se vió en el capítulo dos, son diferentes según el fallo que se produzca.

Finalmente queda determinar las tensiones efectivas (segundo orden) y sus derivadas respecto a las deformaciones (cuarto orden):

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_1 &= \begin{pmatrix} \overline{\sigma_{11}}^1 \\ \overline{\sigma_{22}}^1 \\ \overline{\sigma_{33}}^1 \\ \overline{\sigma_{12}}^1 \\ \overline{\sigma_{13}}^1 \\ \overline{\sigma_{23}}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}\varepsilon_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} \overline{\sigma_{11}}^2 \\ \overline{\sigma_{22}}^1 \\ \overline{\sigma_{33}}^2 \\ \overline{\sigma_{12}}^2 \\ \overline{\sigma_{13}}^2 \\ \overline{\sigma_{23}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{22}\varepsilon_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \bar{\sigma}_3 &= \begin{pmatrix} \overline{\sigma_{11}}^3 \\ \overline{\sigma_{22}}^3 \\ \overline{\sigma_{33}}^3 \\ \overline{\sigma_{12}}^3 \\ \overline{\sigma_{13}}^3 \\ \overline{\sigma_{23}}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{33}\varepsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{\sigma}_4 = \begin{pmatrix} \overline{\sigma_{11}}^4 \\ \overline{\sigma_{22}}^4 \\ \overline{\sigma_{33}}^4 \\ \overline{\sigma_{12}}^4 \\ \overline{\sigma_{13}}^4 \\ \overline{\sigma_{23}}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{44}\gamma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \bar{\sigma}_5 &= \begin{pmatrix} \overline{\sigma_{11}}^5 \\ \overline{\sigma_{22}}^5 \\ \overline{\sigma_{33}}^5 \\ \overline{\sigma_{12}}^5 \\ \overline{\sigma_{13}}^5 \\ \overline{\sigma_{23}}^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{55}\gamma_{13} \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{\sigma}_6 = \begin{pmatrix} \overline{\sigma_{11}}^6 \\ \overline{\sigma_{22}}^6 \\ \overline{\sigma_{33}}^6 \\ \overline{\sigma_{12}}^6 \\ \overline{\sigma_{13}}^6 \\ \overline{\sigma_{23}}^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{66}\gamma_{23} \end{pmatrix} \\
 \bar{\sigma}_7 &= \begin{pmatrix} \overline{\sigma_{11}}^7 \\ \overline{\sigma_{22}}^7 \\ \overline{\sigma_{33}}^7 \\ \overline{\sigma_{12}}^7 \\ \overline{\sigma_{13}}^7 \\ \overline{\sigma_{23}}^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_{12} + C_{13})\varepsilon_{11} \\ (C_{12} + C_{23})\varepsilon_{22} \\ (C_{13} + C_{23})\varepsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

$$= \begin{bmatrix} C_{12} + C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{12} + C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{13} + C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la ecuación 4.36 queda de la forma:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} + C_{12} + C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} + C_{13} + C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

5 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

5.1 Conclusiones

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo no lineal de daño continuo anisótropo para materiales compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras, dicho modelo utiliza el criterio de fallo tridimensional basado en la teoría del invariante [11] bajo la hipótesis de deformaciones infinitesimales. La anisotropía del daño se caracteriza por la introducción de 7 variables de daño que están asociadas a los mecanismos de daño identificados por el criterio de daño basado en la teoría del invariante: (i) fallo de la fibra (FF), (ii) fallo de la matriz o entre fibras (IFF). La formulación del modelo incluye adicionalmente la distinción entre fallo a tracción y a compresión, lo cual permite reproducir ciclos de carga.

El modelo se establece de forma consistente con respecto a los límites termodinámicos, siendo definido a nivel de lámina, incorporando la detección de daño y la propagación del mismo hasta el colapso. Es por ello que esta formulación es fácilmente aplicable para el cálculo de estructuras laminadas.

Con referencia a la propagación del daño, en este trabajo se han presentado dos formulaciones diferentes, una para el fallo de la fibra a compresión y otra para el fallo de la matriz y el de la fibra a tracción. Ambas formulaciones determinan una evolución progresiva del daño, basada en las energías de fractura de cada uno de los mecanismos de daño, que sustituye a la ley empírica de degradación de las constantes elásticas originalmente propuesta por Puck [9].

5.2 Desarrollos futuros.

El presente proyecto no incluye la implementación numérica, por ello, queda pendiente dicha implementación en el programa de elementos finitos ABAQUS mediante la interfaz de usuario UMAT. Una vez realizada dicha implementación, se analizaría la respuesta obtenida en elementos de prueba simple para poder contrastar los resultados con los obtenidos experimentalmente.

En un futuro también podría validarse el criterio en laminados y aplicaciones estructurales más complejas. Para ello es necesario combinar la UMAT con criterios interlaminares que ABAQUS contiene por defecto, puesto que la subrutina sólo describe el comportamiento intralaminar. Por ello, una de las actividades futuras de esta investigación será llevar a cabo el modelado conjunto de estos mecanismos de daño, combinando el presente modelo con elementos de interfaz basados en leyes

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

cohesivas que han sido desarrollados en el Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales.

Otra actividad futura, debido a la creciente presencia de estructuras compuestas con una elevada esbeltez, sería la inserción de la ley constitutiva de daño desarrollada en elementos laminares avanzados. De esta forma se optimizarían los tiempos de computación. En este sentido, será objeto de estudio la implementación del presente modelo de daño en elementos *solid shell*, los cuales permiten el uso de leyes constitutivas tridimensionales. Estos elementos han sido desarrollados por este grupo de investigación.

Además, habrá que estudiar la implementación de este modelo en aplicaciones que conduzcan a inestabilidades estructurales (post-pandeo de paneles rigidizados) y en aplicaciones con elevados gradientes de tensiones en determinadas zonas del material (como run-out de rigidizadores, uniones con remaches y atornilladas, entre otras).

Por otro lado, el modelo puede mejorarse incluyendo un comportamiento elasto-plástico puesto que este comportamiento aparece en los materiales compuestos cuando son sometidos a tensiones de cortadura en plano y compresión transversal.

Finalmente, una línea de trabajo futuro es la formulación no local del modelo mediante la Teoría denominada como "*gradient enhanced*". Esta técnica permitirá obtener unas predicciones numéricas mucho más robustas con respecto a la malla de elementos finitos empleadas

- Simetría del tensor constitutivo:

$$\frac{v_{12}}{E_{22}} = \frac{v_{21}}{E_{11}}, \frac{v_{13}}{E_{33}} = \frac{v_{31}}{E_{11}}, \frac{v_{23}}{E_{33}} = \frac{v_{32}}{E_{22}}$$

- Coeficientes de la representación invariante:

$$\lambda = \frac{E_{22}(v_{23} + v_{13}v_{31})}{D}$$

$$\alpha = \frac{E_{22}(v_{31}(1 + v_{32} - v_{13}) - v_{32})}{D}$$

$$\beta = \frac{E_{11}(1 - v_{32}v_{23})}{D} - \frac{E_{22}(1 - v_{21}(v_{12} + 2(1 + v_{23})))}{D} - 4\mu_{12}$$

$$\mu_L = \mu_{12}$$

$$\mu_T = \mu_{23}$$

$$D = 1 - (v_{32})^2 - 2v_{13}v_{31} - 2v_{32}v_{31}v_{13}$$

- Constantes ingenieriles:

$$E_{22} = E_{33}; v_{23} = v_{32}; v_{12} = v_{13}; v_{21} = v_{31}; \mu_{12} = \mu_{13}$$

$$E_{11} = \frac{-(\lambda\mu_T - 4\lambda\mu_L - \lambda\beta + 2\mu_T^2 - \beta\mu_T - 2\mu_T\alpha - 4\mu_L\mu_T + \alpha^2)}{\lambda + \mu_T}$$

$$E_{22} = \frac{-4\mu_T(\lambda\mu_T - 4\lambda\mu_L - \lambda\beta + 2\mu_T^2 - \beta\mu_T - 2\mu_T\alpha - 4\mu_L\mu_T + \alpha^2)}{D_t}$$

$$v_{12} = \frac{2\mu_T(\lambda + \alpha)}{D_t}; v_{21} = \frac{(\lambda + \alpha)}{(2\mu_T + 2\lambda)}$$

$$v_{23} = \frac{-(\alpha^2 + 2\lambda\mu_T - \lambda\beta - 4\lambda\mu_L)}{D_t}$$

$$\mu_{12} = \mu_L; \mu_{23} = \mu_T$$

$$D_t = 4\mu_L\lambda + \beta\lambda - 4\mu_L^2 + 4\mu_L\alpha + 2\beta\mu_T + 8\mu_T\mu_L - \alpha^2$$

Tabla A.1. Parámetros de elasticidad isotrópica transversal.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

- Simetría del tensor constitutivo:

$$\frac{v_{12}}{E_{22}} = \frac{v_{21}}{E_{11}}, \frac{v_{13}}{E_{33}} = \frac{v_{31}}{E_{11}}, \frac{v_{23}}{E_{33}} = \frac{v_{32}}{E_{22}}$$

- Coeficientes de la representación invariante:

$$\lambda = \frac{E_{33}(1 - v_{12}^2 \frac{E_{11}}{E_{22}})}{D - 2\mu}$$

$$\mu = \mu_{13} + \mu_{23} - \mu_{12}$$

$$\mu_1 = \mu_{12} - \mu_{23}$$

$$\mu_2 = \mu_{12} - \mu_{13}$$

$$\alpha_1 = \frac{E_{11}(v_{13} + v_{12}v_{23})}{D - \lambda}$$

$$\alpha_2 = \frac{E_{22}(v_{23} + v_{21}v_{23})}{D - \lambda}$$

$$\beta_1 = \frac{E_{11}(1 - v_{23}v_{32})}{D - \lambda - 2(\mu + \alpha_1 + 2\mu_1)}$$

$$\beta_2 = \frac{E_{22}(1 - v_{13}v_{31})}{D - \lambda - 2(\mu + \alpha_2 + 2\mu_2)}$$

$$\beta_3 = \frac{E_{11}(v_{32}v_{23} + v_{12})}{D - \lambda - \alpha_2 - \alpha_1}$$

$$D = 1 - v_{23}v_{32} - v_{12}v_{21} - v_{13}v_{31} - 2v_{23}v_{31}v_{12}$$

- Casos especiales

- ✓ Isotropía transversal

$$\mu = \mu_T; \alpha_1 = \alpha; \mu_1 = \mu_L - \mu_T; \beta_1 = \beta$$

$$\alpha_2 = 0; \mu_2 = 0; \beta_2 = 0; \beta_3 = 0$$

- ✓ Isotropía

$$\alpha_1 = 0; \mu_1 = 0; \beta_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 0; \mu_2 = 0; \beta_2 = 0; \beta_3 = 0$$

Tabla A.2. Parámetros de elasticidad ortótropa.

REFERENCIAS

- [1] A. M. Vallecillos, "Desarrollo de un modelo constitutivo tridimensional de daño anisotrópico para materiales compuestos basado en el criterio Puck: formulación teórica e implementación numérica," 2015.
- [2] A. París, F; Cañas, P; Marín, J. C; Barroso, *Introducción al análisis y al diseño con materiales compuestos*. 2006.
- [3] N. A. FLECK, "Compressive Failure of Fiber Composites," in *Advances in applied mechanics*, Cambridge University Engineering Department.
- [4] B. Harris, *Engineering Composite Materials*.1999.
- [5] J. G. Morley, *High-Performance fibre composites*. Wolfson Institute of Interfacial Technology, University of Nottingham, U.K., 1987.
- [6] G. Catalanotti, P. P. Camanho, and A. T. Marques, "Three-dimensional failure criteria for fiber-reinforced laminates," *Compos. Struct.*, vol. 95, pp. 63–79, 2013.
- [7] S. Pimenta, "Micromechanics of kink-band formation," Imperial College of London and University of Porto, 2008.
- [8] A. . S. Puck, "Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models.," *Compos. Sci. Technol.*, vol. 58, pp. 1045–1067, 1998.
- [9] H. Puck, A.; Schurmann, "Failure Analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models," *Compos. Sci. Technol.*, vol. 58, pp. 1045–1067, 2002.
- [10] M. Vogler, R. Rolfes, and P. P. Camanho, "Modeling the inelastic deformation and fracture of polymer composites-Part I: Plasticity model," *Mech. Mater.*, vol. 59, pp. 50–64, 2013.
- [11] P. P. Camanho, A. Arteiro, A. R. Melro, G. Catalanotti, and M. Vogler, "Three-dimensional invariant-based failure criteria for fibre-reinforced composites," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 55, pp. 92–107, 2015.
- [12] J. Frank A. Leone, "Full Scale Testing and Progressive Damage Modelling of Sandwich Composite Aircraft Fuselage Structure," 2010.
- [13] A. Matzenmiller, J. Lubliner, and R. L. Taylor, "A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites," *Mech. Mater.*, vol. 20, no. 2, pp. 125–152, 1995.
- [14] P. Maimí, P. P. Camanho, J. A. Mayugo, and C. G. Dávila, "A Thermodynamically Consistent Damage Model for Advanced Composites. NASA/TM-2006-214282," *Nasa Tm*, no. March, p. 47, 2006.
- [15] C. Balzani, *Finite element modeling of intra-and interlaminar damage growth in composite laminate*. universität karlsruhe, 2009.
- [16] J. Lee, "Three dimensional finite element analysis of damage accumulation in composite laminate," *Comput. Struct.*, vol. 1, no. 3, pp. 335–350, 1982.
- [17] P. Maimí, "Modelización constitutiva y computacional del daño y la fractura de materiales compuestos," universidad de Girona, 2006.

Formulación de un modelo de daño anisótropo tridimensional para materiales compuestos basado en la teoría de invariantes.

- [18] M. Vogler, *Polymers, Anisotropic Material Models for Fiber Reinforced*. University of Hannover.2014
- [19] P. P. Camanho, C. G. Dávila, S. T. Pinho, L. Iannucci, and P. Robinson, "Prediction of in situ strengths and matrix cracking in composites under transverse tension and in-plane shear," *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, vol. 37, no. 2, pp. 165–176, 2006.
- [20] E. W. V. Chaves, *Notes on Continuum Mechanics*, First. 2013.