

Proyecto Fin de Máster

Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

Simulación dinámica interactiva de un camión articulado

Autor: José Manuel Recio López

Tutor: José Luis Escalona Franco

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Proyecto Fin de Máster
Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

Simulación dinámica interactiva de un camión articulado

Autor:

José Manuel Recio López

Tutor:

José Luis Escalona Franco

Catedrático de Universidad

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Proyecto Fin de Máster: Simulación dinámica interactiva de un camión articulado

Autor: José Manuel Recio López

Tutor: José Luis Escalona Franco

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Fecha:

El Secretario del Tribunal

*A mis sobrinas:
Mercedes y Teresa*

Agradecimientos

Han pasado varios años desde que decidí continuar mis estudios realizando el Máster Universitario en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica (R.D. 1393/07) y parece que fue ayer mismo. ¡Cuánto me alegro de haber tomado aquella decisión!, pues ha sido una de las experiencias más importantes, gratificantes y enriquecedoras que he tenido a lo largo de mi vida.

¿Por quién empezar? Esta pregunta me hago, ya que son muchas las personas a las que quiero agradecer sus consejos, su apoyo, su cariño, su comprensión, su tiempo, sus palabras, su presencia, sus enseñanzas; en definitiva, personas que han contribuido a mi crecimiento y educación como persona, como ingeniero y como investigador.

Al igual que hice al terminar mi proyecto fin de carrera, agradezco a mis padres: Salvador y María José, a mis hermanos: Salvador, Ángel y María de la Paz, y a mis familiares, su apoyo en mi decisión de continuar con estudios de posgrado. A mi amigo y compañero de profesión Raúl Cano Bazaga le agradezco su incondicional apoyo y compañía en los buenos y en los menos buenos momentos, y los apasionados debates que compartimos sobre la vida, la ciencia y el conocimiento. A mi amigo y también compañero de profesión Raúl Mir Álvarez y al resto de amigos de Montequinto, agradecerles su apoyo y el sacarme de casa a tomar un refresco. A mi compañero del máster Federico Alán Aguirre Alesso, Fede, le agradezco transmitirme su energía y su optimismo siempre que me encontraba con él. Al Dr. Andrés Jesús Martínez Donaire agradecerle sus agradables conversaciones y preocupación por mí en cada encuentro. A mis profesores la Catedrática Juana María Mayo Núñez y el Catedrático José Luis Escalona Franco les agradezco sus clases, su dedicación, sus consejos y el transmitirme su motivación por la asignatura Dinámica de Sistemas Multicuerpo. Por supuesto, no puedo olvidarme del Catedrático José María Gallardo Fuentes, del Dr. José Antonio Rodríguez Ortiz y del Dr. Yadir Torres Hernández, por ser los que pusieron la semilla de la investigación en mí y me dieron la seguridad para saltar del nido hacia el descubrimiento del universo desconocido. También agradecerles a todos los profesores de este máster, especialmente al Catedrático Federico París Carballo, al Dr. José Martínez García, al Dr. Johan Wideberg, al Catedrático Francisco García Benítez, al Catedrático José Domínguez Abascal, a la Catedrática Pilar Ariza Moreno, al Dr. Javier Martínez Reina, al Catedrático Emilio Freire Macías, al Catedrático Bosco García Archilla, al Catedrático Manuel Doblaré Castellano, al Catedrático Rafael Gallego Sevilla y al Director de la Escuela, el Catedrático Jaime Domínguez Abascal, sus clases y consejos. Finalmente, quiero dedicar unas palabras a Isabel por su apoyo, por su cariño y por poner luz cuando sólo había sombras.

José Manuel Recio López

Ingeniero Industrial

Sevilla, 26 de Junio de 2017

Resumen

Son muchos los simuladores del movimiento de camiones que existen, pero estos simuladores no tienen en cuenta la dinámica del vehículo sino que simplemente aplican relaciones cinemáticas. El interés de este trabajo se encuentra en la creación de un simulador dinámico interactivo que tenga en cuenta las ecuaciones de la dinámica propia del sistema cuyo movimiento se desea simular, concretamente un camión articulado compuesto por cabeza tractora y semirremolque que rueda sobre un perfil plano con contacto puntual en cada una de sus ruedas.

Para ello, se ha utilizado el programa Matlab en el que se ha realizado toda la programación y visualización de los resultados de la simulación. Matlab tiene la ventaja de ser un entorno de programación de alto nivel y es muy utilizado por ingenieros y científicos en sus trabajos e investigaciones.

El profesor José Luis Escalona Franco tiene gran experiencia en la dinámica de sistemas mecánicos fruto del trabajo desarrollado en el Grupo de Ingeniería Mecánica y Fabricación de la Universidad de Sevilla. Previamente al trabajo desarrollado en la presente memoria, en dicho Grupo se han llevado a cabo varios estudios interesantes en el tema de la simulación interactiva. Estos estudios son la simulación interactiva de la dinámica de una bicicleta, la simulación interactiva de la dinámica de una motocicleta y la simulación interactiva de la dinámica de un triciclo, relacionados con la asignatura Dinámica de Sistemas Multicuerpo del Máster Universitario en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica, y sobre ellos este trabajo está fundamentado.

Abstract

There are many the motion simulators of trucks that exist, but these simulators do not take into account the dynamics of the vehicle but simply apply kinematic relations. The interest of this work lies in the creation of an interactive dynamic simulator that takes into account the equations of the dynamics of the system whose motion wants to be simulated, concretely an articulated truck composed of a tractor and semitrailer that rolls on a plane profile with point contact in each one of its wheels.

To do this, we have used the Matlab program in which all the programming and visualization of the simulation results has been done. Matlab has the advantage of being a high-level programming environment and is widely used by engineers and scientists in their work and research.

The professor José Luis Escalona Franco has wide experience in the dynamics of mechanical systems as a result of the work developed in the Group of Mechanical Engineering and Manufacturing of the University of Seville. Prior to the work developed in this report, several interesting studies have been carried out in the area of interactive simulation. These studies are the interactive simulation of the dynamics of a bicycle, the interactive simulation of the dynamics of a motorcycle and the interactive simulation of the dynamics of a tricycle, related to the subject Dynamics of Multibody Systems of the Master's Degree in Advanced Design in Mechanical Engineering, and on them this work is based.

Índice general

Índice general	I
Lista de figuras	V
Lista de tablas	VII
1. Generalidades	1
1.1. Concepto de simulación	1
1.1.1. Definición e importancia de la simulación	1
1.1.2. Modelado	3
1.2. Estado de la técnica	4
1.3. Simuladores de sistemas multicuerpo comerciales	5
1.4. Trabajos previos en simulación	6
1.5. Entorno de programación	6
2. Dinámica de Sistemas Multicuerpo	7
2.1. Introducción	7
2.2. Cinemática tridimensional	8
2.2.1. Ecuación Fundamental de la Cinemática	8
2.2.2. Determinación de la matriz de transformación	9
2.2.3. Rotaciones simples	10
2.2.4. Rotaciones sucesivas	11
2.2.5. Ángulos de Cardan	12
2.2.6. Velocidad	13
2.2.7. Aceleración	15
2.3. Metodología empleada para el cálculo de las velocidades y aceleraciones	16
2.3.1. Velocidad	16
2.3.2. Aceleración	18
2.3.3. Expresiones cinemáticas	19
2.4. Dinámica tridimensional	19

2.4.1.	Ecuaciones de Newton-Euler para un sólido rígido	19
2.4.2.	Ecuaciones de Newton-Euler para un sistema multicuerpo	21
2.4.3.	Fuerzas generalizadas sobre un cuerpo rígido	23
2.4.4.	Fuerzas generalizadas aplicadas	23
2.4.5.	Fuerzas generalizadas de reacción	29
2.4.6.	Sistema de ecuaciones diferenciales y algebraicas del movimiento	29
2.4.7.	Integración del sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento	30
2.5.	Sistema de ecuaciones diferenciales para el simulador interactivo	34
3.	Modelo multicuerpo del vehículo articulado	35
3.1.	Introducción	35
3.2.	Modelo del sistema multicuerpo	36
3.2.1.	Definición del sistema multicuerpo	36
3.2.2.	Dimensiones del sistema multicuerpo	37
3.2.3.	Coordenadas generalizadas del sistema multicuerpo	40
3.2.4.	Orientación de los cuerpos en función de las coordenadas generalizadas	42
3.2.5.	Posición de los cuerpos en función de las coordenadas generalizadas	43
3.2.6.	Configuración inicial de referencia	44
3.3.	Propiedades del sistema multicuerpo	46
3.3.1.	Propiedades mecánicas	46
3.3.2.	Suspensión	46
3.3.3.	Dirección	47
3.3.4.	Tracción	49
3.3.5.	Aerodinámica	50
3.3.6.	Fuerzas tangenciales de contacto	51
3.3.7.	Fuerza de la gravedad	51
3.3.8.	Determinación de las coordenadas dependientes e independientes del sistema	52
3.3.9.	Restricciones cinemáticas	53
3.3.10.	Posición de equilibrio estático	55
4.	Desarrollo del código en Matlab para la simulación	57
4.1.	Introducción	57
4.2.	Archivos de programación definidos	59
4.3.	Diagramas de flujo de las llamadas a las funciones en las simulaciones	63

4.3.1.	Simulación no interactiva	63
4.3.2.	Simulación interactiva	65
4.4.	Ejecución de la simulación	68
4.4.1.	Mando de control	68
4.4.2.	Controles	68
4.5.	Listado de los códigos de los archivos	70
5.	Resultados y animación	73
5.1.	Resultados	73
5.2.	Vistas de animación	73
5.2.1.	Vista tridimensional	73
5.2.2.	Vista de planta	74
5.2.3.	Vista de perfil	75
5.2.4.	Vista frontal	75
6.	Resumen, conclusiones y trabajos futuros	77
6.1.	Resumen	77
6.2.	Conclusiones	77
6.3.	Trabajos futuros	78
	Anexo	79
	Bibliografía y referencias	83

Índice de figuras

1.1.	Elementos básicos y relaciones en el proceso de simulación [48]	3
1.2.	Simulación del movimiento de un vehículo en <i>ADAMS</i>	5
1.3.	Parte del código de programación en <i>Matlab</i>	6
2.1.	Representación esquemática de un sistema multicuerpo [2]	7
2.2.	Vectores de posición del punto P del cuerpo rígido i	9
2.3.	Rotaciones sucesivas [3]	11
2.4.	Sistema de referencia de un vehículo xyz	13
2.5.	Cuerpo rígido i sometido a fuerzas y momentos externos en el punto P	19
2.6.	Cuerpos rígidos i y j enlazados mediante suspensión	25
2.7.	Fuerza tangencial de contacto F_t en función de la velocidad del punto de contacto v_C	28
3.1.	Camión articulado bajo estudio	35
3.2.	<i>Quinta rueda</i> y <i>king pin</i> típicos [6]	36
3.3.	Perspectiva superior de la cabeza tractora	37
3.4.	Perspectiva inferior del semirremolque	37
3.5.	Sistema multicuerpo con ejes de referencia	38
3.6.	Acotación del sistema multicuerpo	39
3.7.	Configuración inicial de referencia	44
3.8.	Detalle de la suspensión	47
3.9.	Relación entre los ángulos de giro de las ruedas directrices	48
3.10.	Diferencial típico [11]	49
4.1.	Diagrama de flujo de la simulación no interactiva	64
4.2.	Diagrama de flujo del bloque integrador	65
4.3.	Diagrama de flujo de la simulación interactiva	66
4.4.	Diagrama de flujo del bloque integrador	67
4.5.	Mando de control NGS-Maverick	68
4.6.	Controles del mando de control NGS-Maverick	69

5.1. Vista tridimensional de la simulación	74
5.2. Vista de planta de la simulación	74
5.3. Vista de perfil de la simulación	75
5.4. Vista frontal de la simulación	75

Índice de tablas

3.1. Acotación de longitudes	39
3.2. Acotación de alturas	40
3.3. Propiedades mecánicas	46
3.4. Parámetros de la suspensión	46
3.5. Parámetros de la dirección	48
3.6. Parámetro de la tracción	50
3.7. Parámetros aerodinámicos	51
3.8. Parámetros de la fuerza tangencial de contacto	51
3.9. Parámetro de la fuerza gravitatoria	52

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Concepto de simulación

1.1.1. Definición e importancia de la simulación

Una simulación se puede definir como el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias -dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos- para el funcionamiento del sistema [32]. Un sistema se define como un conjunto de entidades, por ejemplo, personas o máquinas, que actúan o interaccionan juntas hacia el logro de algún fin lógico [34].

Naylor et al. [33] definen simulación -aplicada al ámbito de la economía- como una técnica numérica para llevar a cabo experimentos sobre un computador digital, que involucra ciertos tipos de modelos lógicos y matemáticos que describen el comportamiento de un sistema económico o de negocio en períodos ampliados del tiempo real.

La simulación es la representación de un proceso o fenómeno mediante otro más simple, que permite analizar sus características; pero no es sólo eso, también es algo muy cotidiano, como puede ser desde la simulación de un examen, la producción de textiles, alimentos, juguetes, construcción de infraestructuras por medio de maquetas, hasta el entrenamiento virtual de los pilotos de aviones.

La simulación es una técnica muy poderosa y ampliamente usada en las ciencias e ingenierías para analizar y estudiar sistemas complejos, así como en ciencias sociales y economía [46]. En investigaciones se formularon modelos que se resolvían de forma analítica. En casi todos estos modelos la meta era determinar soluciones óptimas. Sin embargo, debido a la complejidad no todos los problemas del mundo real se

pueden representar adecuadamente en forma de modelo. Cuando se intentan utilizar modelos analíticos, en general se necesitan de tantas hipótesis de simplificación que es probable que las soluciones no sean buenas, o bien, sean inadecuadas para su realización. En ese caso, con frecuencia la única opción de modelado y análisis de que dispone quien toma decisiones es la simulación mediante técnicas numéricas. Simular, es reproducir artificialmente un fenómeno o las relaciones entrada-salida de un sistema. Esto ocurre siempre cuando la operación de un sistema o la experimentación en él son imposibles, costosas, peligrosas o poco prácticas, como en el entrenamiento de personal de operación, de pilotos de aviones, etc.

La importancia de la simulación radica en las empresas que necesitan saber el resultado de algún acontecimiento y para ello se gastarían recursos, dinero y tiempo, y posiblemente no diera un buen resultado. Por ello se acude a la simulación, para poder prevenir dichos resultados.

La simulación ha adquirido en la actualidad un papel de gran importancia para la actividad industrial en todos los sectores y sus aplicaciones parecen no tener límites. Se desarrollan simuladores de procesos industriales, de inversiones de capital, de operaciones quirúrgicas, de mecanismos, de desarrollo de epidemias, del sistema inmunológico humano, de plantas productivas, de misiones espaciales y de un largo etcétera. Cada vez más compañías de todos los sectores utilizan la simulación para llevar a cabo su actividad ya que permiten conocer de antemano el resultado de una práctica o sistema antes de ponerlo en funcionamiento.

El desarrollo de herramientas específicas de aprendizaje mediante la utilización de las últimas tecnologías, y a su vez el avance en materia de diseño de metodologías de evaluación, análisis y validación de interfaces de usuario, han supuesto un gran progreso en el control de riesgo y reducción de los accidentes. A su vez, permiten la investigación en diferentes campos del comportamiento humano en situaciones adversas.

Utilizando simuladores con fines formativos se obtiene mayor rendimiento y una notable reducción del riesgo de accidentes haciendo del trabajo una actividad mucho más segura y efectiva. Además, existen infinidad de situaciones que serían demasiado costosas o imposibles de entrenar sin el uso de la simulación. Las posibilidades de personalización de los ejercicios a las necesidades de formación de cada persona la hacen muy efectiva. El alumno puede repetir los ejercicios hasta que la asimilación de los conceptos se haya completado.

1.1.2. Modelado

Para realizar una simulación de un sistema es necesario hacer un buen modelo de la realidad que se desea simular.

El modelado es el proceso de construcción de un modelo. Un modelo es una representación de un objeto, sistema, o idea. El modelado es un arte. El arte de modelar consiste en la habilidad para analizar un problema, resumir sus características esenciales, seleccionar y modificar las suposiciones básicas que caracterizan al sistema, y luego enriquecer y elaborar el modelo hasta obtener una aproximación útil. En nuestro caso, el modelo es un conjunto de relaciones matemáticas o lógicas derivadas de supuestos sobre el comportamiento de un sistema.

Por modelo puede entenderse una abstracción del sistema real que puede utilizarse para obtener predicciones y formular estrategias de control. En particular los modelos, se usan para analizar una o más modificaciones de distintos aspectos del sistema modelado que pueden afectar a otros aspectos del mismo sistema. Para ser útil, un modelo debe necesariamente incorporar elementos de tal forma que sea realista y simple. Por un lado, el modelo debe ser una aproximación razonable del sistema real e incorporar la mayoría de los aspectos del mismo. Por otro lado, el modelo no debe ser excesivamente complejo de modo que facilite su entendimiento y manipulación. Los modelos son un componente esencial de la simulación [45]; mientras más realista sea el modelo del sistema a simular, más fiables serán los resultados de la simulación.

Teniendo definido el modelo del problema bajo consideración, el siguiente paso es encontrar una solución del modelo. Para ello, pueden utilizarse métodos analíticos o numéricos.

Un modelo de resolución numérico es un algoritmo matemático aproximado. El algoritmo matemático de un modelo es traducido a un lenguaje de programación para ser utilizado mediante un equipo de computación y así obtener la solución numérica.

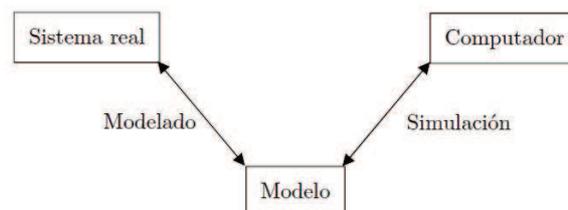


Figura 1.1: Elementos básicos y relaciones en el proceso de simulación [48]

1.2. Estado de la técnica

Son muchos los simuladores del movimiento de camiones que existen en el mercado, la mayoría asociados a videojuegos de ordenador, como el *Scania Truck Driving Simulator 1.5.0* [31]. Estos simuladores no tienen en cuenta la dinámica del vehículo sino que simplemente aplican relaciones cinemáticas para describir el movimiento. Pero a la hora de simular el movimiento real de un vehículo es estrictamente necesario aplicar las ecuaciones de la dinámica, integrarlas y obtener una dinámica acorde con la realidad de las fuerzas y momentos externos que actúan sobre el vehículo.

El interés práctico de un simulador se encuentra en la necesidad de formar a futuros usuarios del vehículo, máquina o proceso, de tal manera que éstos adquieran las destrezas necesarias para posteriormente enfrentarse a la aplicación en la realidad de los conocimientos adquiridos durante la simulación. En ingeniería del diseño los simuladores también tienen gran aplicación puesto que permiten optimizar los diseños de los productos facilitando las labores de diseño y ahorrando en los procesos de fabricación ayudando así a la labor del ingeniero.

Hoy en día las compañías de camiones desarrollan simuladores de sus productos con el objetivo de facilitar el acceso de los mismos a sus clientes. Además de la satisfacción del cliente, el simulador debe cumplir con las características técnicas del vehículo que tiene asociado, de forma que sea fiel a las condiciones de conducción del mismo. Es el caso, por ejemplo, del simulador de la compañía *Volvo Trucks* [25].

No sólo las compañías de camiones tienen la posibilidad de desarrollar simuladores de sus productos. Existen compañías de simulación como *Lander Simulations* [23], *Thoroughtec simulation* [24] o *Simumak* [26], que ofrecen como sus productos simuladores a la carta en función de las necesidades de sus clientes.

Además de las compañías, en las universidades se han ido desarrollando simuladores para la formación y la investigación de sus estudiantes. La universidad de Iowa (EE.UU.) ha desarrollado el *NADS* (National Advanced Driving Simulator) [35]. La universidad de Leeds realiza sus investigaciones sobre el *UoLDS* (University of Leeds Driving Simulator) [37], uno de los más avanzados simuladores de conducción para investigadores. Por su parte, en la universidad de Valencia (España) se ha desarrollado el *SIMUVEG* [36], un simulador de conducción para estudiar el comportamiento frente al volante de los conductores ante diferentes situaciones.

Desde el punto de vista de la ingeniería, los simuladores en los que un ingeniero está interesado son los simuladores que permiten el análisis de los resultados tras una simulación del sistema bajo estudio, de tal forma que sea más fácil el diseño

del sistema. En la actualidad hay una gran variedad de simuladores comerciales que permiten un postproceso de los datos para una fácil interpretación de los resultados. Se centra ahora la atención, pues es el objeto de este trabajo, en los simuladores de sistemas multicuerpo.

1.3. Simuladores de sistemas multicuerpo comerciales

Los simuladores de sistemas multicuerpo comerciales más conocidos son el programa *ADAMS* (*Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems*) de la compañía *MSC Software* [27], el paquete *SimMechanics* del programa *Matlab* [28], el programa *SimPack* de la compañía *Dassault Systems* [29] o el programa *SimWise* [30], entre muchos otros más.

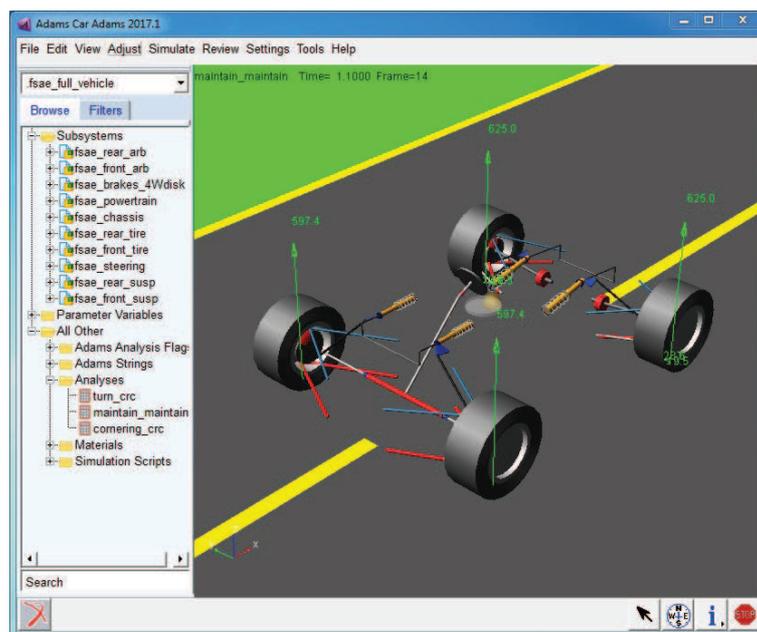


Figura 1.2: Simulación del movimiento de un vehículo en *ADAMS*

Algunos de estos simuladores no sólo ofrecen la posibilidad de un análisis dinámico de sistemas multicuerpo, sino además otros análisis como análisis estructurales por elementos finitos, análisis modal o análisis de optimización.

1.4. Trabajos previos en simulación

El profesor José Luis Escalona Franco tiene gran experiencia en la dinámica de sistemas mecánicos fruto del trabajo desarrollado en el Grupo de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Sevilla. Previamente al trabajo desarrollado en la presente memoria, en dicho Grupo se han llevado a cabo estudios interesantes en el tema de la simulación interactiva de vehículos. Estos estudios son relativos a la simulación interactiva de la dinámica de una bicicleta [38] [39] [40] [41] [42], la simulación interactiva de la dinámica de una motocicleta [44] y la simulación interactiva de la dinámica de un triciclo, relacionados con la asignatura Dinámica de Sistemas Multicuerpo del Máster Universitario en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica.

El trabajo presente ha pretendido ser una extensión al mundo de las cuatro ruedas con remolque de dichos simuladores, en los que está fundamentado.

1.5. Entorno de programación

Este trabajo se ha implementado en lenguaje de programación *Matlab*. Se ha hecho uso del paquete de cálculo simbólico que posee *Matlab* para generar las funciones simbólicas. La animación y visualización se ha presentado también en el entorno del programa *Matlab*.

```
close all
clear all
clc

global ParamCam Mmot del ddel dddel mando

mando = vrjoystick(1);

ParamCam = ParametrosCamionInteractiva;
qref = ParamCam.qref;
% Quita las coordenadas dependientes y el ángulo del volante (qref(25)),
% que es guiado
% Ind = [1 2 3 4 5 6 10 11 12 13 14 15 17 18 25 26]; % 16 independientes
% Dep = [7 8 9 16 19 20 21 22 23 24]; % 10 dependientes
qind0 = [qref(1) qref(2) qref(3) qref(4) qref(5) qref(6) qref(10) ...
        qref(11) qref(12) qref(13) qref(14) qref(15) qref(17) qref(18) ...
        qref(26)]';

y0 = [qind0' zeros(length(qind0),1)']';

tic;
t1 = 0;
t2 = 0.001;
tfin = inf;
```

Figura 1.3: Parte del código de programación en *Matlab*

Capítulo 2

Dinámica de Sistemas Multicuerpo

2.1. Introducción

La dinámica de sistemas multicuerpo es la rama de la mecánica que se encarga del estudio del movimiento de los sistemas multicuerpo. Un sistema multicuerpo, figura 2.1, es un sistema definido como un conjunto de cuerpos entre los que existe movimiento relativo, estando unidos mediante articulaciones, uniones o pares cinemáticos y elementos de fuerza: muelles, amortiguadores y actuadores, y sometidos a fuerzas externas (como la gravedad o la fuerza aerodinámica) y momentos externos. El término *sistema multicuerpo* aparece tras la publicación del libro *Dynamics of Systems of Rigid Bodies* de Jens Wittenburg en 1977 [1], y es un término que generaliza al de mecanismo.

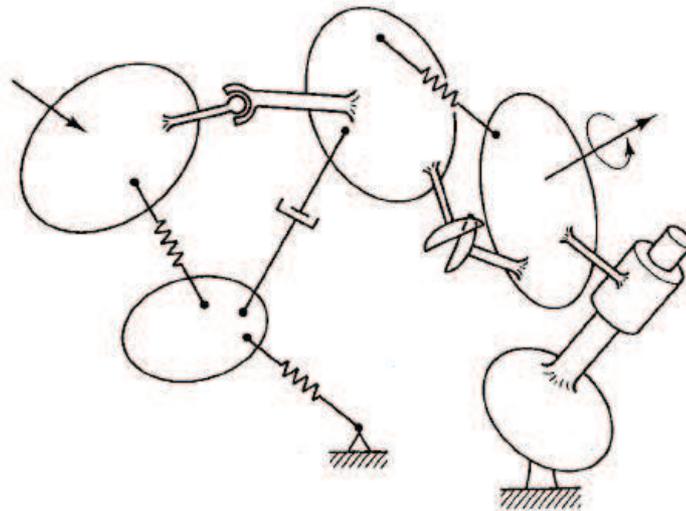


Figura 2.1: Representación esquemática de un sistema multicuerpo [2]

Ha sido con la introducción de los ordenadores cuando esta ciencia se ha desarrollado en potencia, pues antes era impensable resolver numéricamente los problemas asociados a los complejos sistemas mecánicos que existen hoy en día. Anteriormente, los problemas de mecanismos se resolvían de forma analítica o gráfica, pasando ahora a una resolución numérica y utilizando el término de sistema multicuerpo en lugar de mecanismo.

2.2. Cinemática tridimensional

La configuración de un cuerpo rígido de un sistema multicuerpo se describe usando un conjunto de coordenadas generalizadas o grados de libertad, que definen el vector de posición global de un punto de referencia del cuerpo (normalmente el centro de gravedad G), así como la orientación del cuerpo, dada por su matriz de transformación.

En el análisis tridimensional, el movimiento no restringido de un cuerpo rígido se describe mediante 6 coordenadas independientes: 3 coordenadas independientes describen la traslación del cuerpo y 3 coordenadas independientes definen su orientación.

Para determinar la posición y orientación en cada instante t de cada uno de los cuerpos que constituyen el sistema multicuerpo, es necesario definir un conjunto de coordenadas generalizadas \mathbf{q} (lineales y angulares). Conocidas estas coordenadas en función del tiempo, $\mathbf{q}(t)$, se puede determinar la posición y orientación de cada cuerpo i del sistema en cada instante t .

2.2.1. Ecuación Fundamental de la Cinemática

El movimiento traslacional de un cuerpo rígido puede ser definido mediante el desplazamiento de un punto de referencia seleccionado solidario con el cuerpo rígido y el movimiento rotacional puede definirse mediante su matriz de transformación. Como se muestra en la figura 2.2, en la que se tiene un cuerpo rígido i en el espacio tridimensional, el vector de posición global \mathbf{r}_P^i de un punto arbitrario P del cuerpo i se puede escribir como:

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{R}_G^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (2.1)$$

siendo \mathbf{R}_G^i el vector de posición global del origen del sistema de referencia $X^i Y^i Z^i$ del cuerpo i (tomando como origen el centro de gravedad G), \mathbf{A}^i la matriz de transformación del sistema de coordenadas local $X^i Y^i Z^i$ del cuerpo i al sistema

de coordenadas global XYZ , y $\bar{\mathbf{u}}_P^i$ es el vector de posición del punto arbitrario P con respecto al sistema de coordenadas local del cuerpo i .

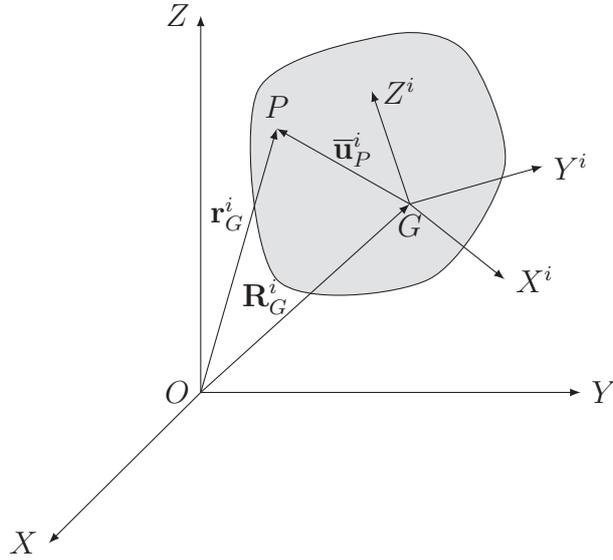


Figura 2.2: Vectores de posición del punto P del cuerpo rígido i

Conocer la cinemática de un sistema consiste en definir un conjunto de coordenadas \mathbf{q} que permitan determinar la posición y orientación de cada uno de los cuerpos del sistema con respecto a un sistema fijo o global. Es decir, para conocer la posición y orientación de cada cuerpo i se deben tener las relaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R}_G^i = \mathbf{R}_G^i(\mathbf{q}) \\ \mathbf{A}^i = \mathbf{A}^i(\mathbf{q}) \end{array} \right\} i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.2)$$

siendo n el número de cuerpos del sistema multicuerpo, sin tener en cuenta el cuerpo fijo asociado al sistema de referencia global.

2.2.2. Determinación de la matriz de transformación

La matriz de transformación \mathbf{A}^i define la orientación del sistema de coordenadas local $X^i Y^i Z^i$ del cuerpo i con respecto al sistema de coordenadas global XYZ .

La orientación del sistema de coordenadas $X^i Y^i Z^i$ del cuerpo i se puede describir mediante el método de los cosenos directores, expresando los vectores unitarios del sistema local en el global. Los cosenos directores α_{ij} representan las componentes de los vectores unitarios del sistema local $X^i Y^i Z^i$, es decir, \mathbf{i}^i , \mathbf{j}^i y \mathbf{k}^i , en los ejes del

sistema global XYZ , resultando ser:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}^i &= \alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{12}\mathbf{j} + \alpha_{13}\mathbf{k} \\ \mathbf{j}^i &= \alpha_{21}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j} + \alpha_{23}\mathbf{k} \\ \mathbf{k}^i &= \alpha_{31}\mathbf{i} + \alpha_{32}\mathbf{j} + \alpha_{33}\mathbf{k}\end{aligned}\tag{2.3}$$

Dado un vector \mathbf{u}^i , éste puede expresarse según sus componentes en el sistema local $X^iY^iZ^i$ o según sus componentes en el sistema global XYZ . Matricialmente, la relación entre las componentes viene dada por:

$$\begin{bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_x^i \\ \bar{u}_y^i \\ \bar{u}_z^i \end{bmatrix}\tag{2.4}$$

siendo:

$$\mathbf{u}^i = \begin{bmatrix} u_x^i & u_y^i & u_z^i \end{bmatrix}^T\tag{2.5}$$

el vector en componentes globales y:

$$\bar{\mathbf{u}}^i = \begin{bmatrix} \bar{u}_x^i & \bar{u}_y^i & \bar{u}_z^i \end{bmatrix}^T\tag{2.6}$$

el vector en componentes locales [3].

Por tanto, usando esta notación se tiene la siguiente relación:

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^i\tag{2.7}$$

donde \mathbf{A}^i es la matriz de transformación definida por los cosenos directores α_{ij} , para $i, j = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^i & \mathbf{j}^i & \mathbf{k}^i \end{bmatrix}\tag{2.8}$$

La matriz de transformación es ortogonal [3], de manera que su traspuesta es igual a su inversa, o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{iT} = \mathbf{I}\tag{2.9}$$

siendo \mathbf{I} la matriz identidad de tamaño 3×3 .

2.2.3. Rotaciones simples

A continuación, se van a escribir las matrices de transformación del sistema de coordenadas local $X^iY^iZ^i$ al sistema de coordenadas global XYZ tras realizar una rotación simple alrededor de uno de sus ejes.

Matriz de transformación resultado de un giro ψ^i alrededor del eje Z^i :

$$\mathbf{A}^{\psi^i} = \begin{bmatrix} \cos\psi^i & -\text{sen}\psi^i & 0 \\ \text{sen}\psi^i & \cos\psi^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Matriz de transformación resultado de un giro θ^i alrededor del eje Y^i :

$$\mathbf{A}^{\theta^i} = \begin{bmatrix} \cos\theta^i & 0 & \text{sen}\theta^i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta^i & 0 & \cos\theta^i \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Matriz de transformación resultado de un giro ϕ^i alrededor del eje X^i :

$$\mathbf{A}^{\phi^i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi^i & -\text{sen}\phi^i \\ 0 & \text{sen}\phi^i & \cos\phi^i \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.2.4. Rotaciones sucesivas

Considérense los sistemas de coordenadas $X^1Y^1Z^1$, $X^2Y^2Z^2$ y $X^3Y^3Z^3$ y un vector $\bar{\mathbf{u}}^3$ fijo al sistema $X^3Y^3Z^3$. El vector expresado en el sistema $X^2Y^2Z^2$ viene dado por la relación:

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{A}^{23}\bar{\mathbf{u}}^3 \quad (2.13)$$

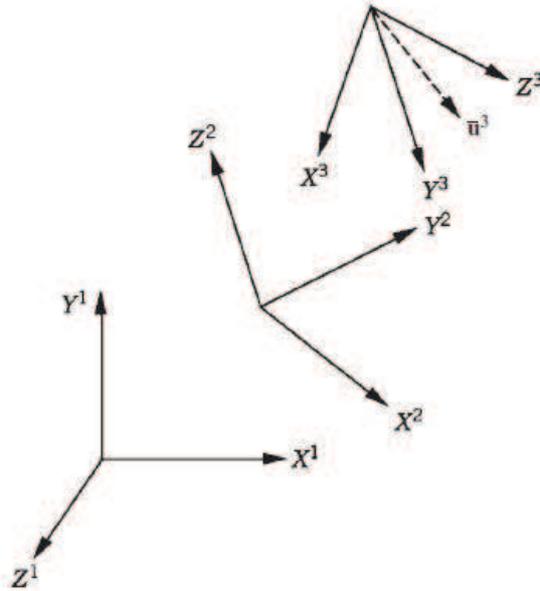


Figura 2.3: Rotaciones sucesivas [3]

Por otro lado, se puede expresar \mathbf{u}^2 en el sistema $X^1Y^1Z^1$ según la relación:

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{A}^{12}\mathbf{u}^2 \quad (2.14)$$

Sustituyendo la ecuación (2.13) en la ecuación (2.14), resulta:

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{A}^{12}\mathbf{A}^{23}\bar{\mathbf{u}}^3 \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) puede escribirse como:

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{A}^{13}\mathbf{u}^3 \quad (2.16)$$

Y por tanto se cumple la relación:

$$\mathbf{A}^{13} = \mathbf{A}^{12}\mathbf{A}^{23} \quad (2.17)$$

siendo \mathbf{A}^{13} la matriz de transformación del sistema $X^3Y^3Z^3$ en el sistema $X^1Y^1Z^1$.

En general, las rotaciones no son conmutativas, es decir:

$$\mathbf{A}^{12}\mathbf{A}^{23} \neq \mathbf{A}^{23}\mathbf{A}^{12} \quad (2.18)$$

salvo casos singulares en los que hay ejes de rotación coincidentes.

2.2.5. Ángulos de Cardan

Para describir la orientación del sistema de referencia local de un cuerpo i del sistema multicuerpo con respecto al sistema global se tendrá en cuenta la secuencia de giros ZXY correspondientes a los ángulos de Cardan, ángulos utilizados en dinámica de vehículos.

Además, en dinámica de vehículos [4], se suele suponer que la dirección longitudinal del vehículo (la dirección de avance) es la dirección x , la dirección transversal es y y z la vertical, como aparece en la figura 2.4. Los ejes xyz definen un triedro a derechas o dextrógiro, al igual que el sistema de ejes global XYZ .

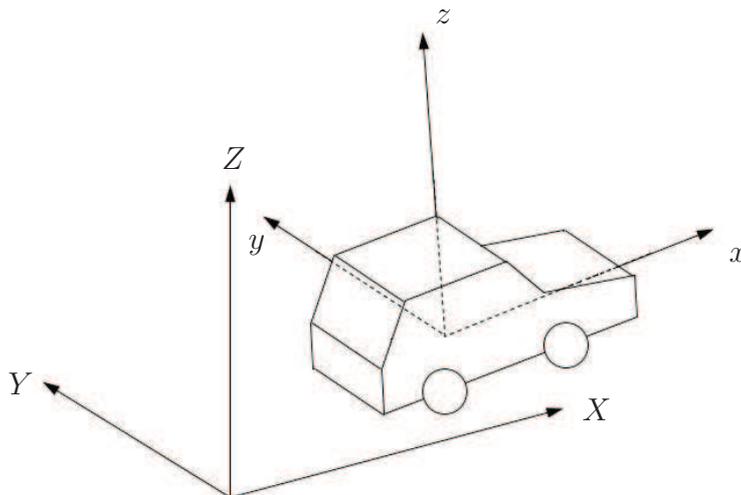


Figura 2.4: Sistema de referencia de un vehículo xyz

Los ángulos de Cardan o ángulos de Tait-Bryan [5], son una secuencia de ángulos girados por el sistema de referencia XYZ hasta hacerlo coincidir con el sistema de referencia del vehículo xyz .

Los ángulos girados ψ , ϕ y θ , se denominan en la literatura inglesa *yaw* (guiñada), *roll* (alabeo o balanceo) y *pitch* (picado o cabeceo), respectivamente.

Esta secuencia consiste en, primero girar el sistema de referencia XYZ alrededor del eje Z el ángulo de *yaw* ψ , luego girar alrededor del eje X , previamente girado, el ángulo de *roll* ϕ , y finalmente girar alrededor del eje Y , que ha sido girado las dos veces anteriores, el ángulo de *pitch* θ .

También pueden definirse a la inversa, es decir, los ángulos de Cardan son los ángulos girados por el sistema de referencia local del vehículo xyz hasta hacerlo coincidir con el sistema de referencia global XYZ . En este caso, las matrices de rotación vienen dadas por las matrices de rotaciones finitas, ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) inversas o, lo que resulta lo mismo, las que resultan de cambiar el signo de los ángulos.

2.2.6. Velocidad

El desplazamiento general de un cuerpo rígido en el espacio es el resultado de los desplazamientos de rotación y traslación, según la ecuación fundamental de la cinemática, ecuación (2.1). Derivando con respecto al tiempo dicha ecuación, se obtiene la velocidad absoluta del punto arbitrario P del cuerpo i :

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{R}}_G^i + \dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (2.19)$$

Debido a que la matriz de transformación es ortogonal, se tiene que:

$$\mathbf{A}^i \mathbf{A}^{iT} = \mathbf{I} \quad (2.20)$$

Derivando la ecuación (2.20) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{A}}^i \mathbf{A}^{iT} + \mathbf{A}^i \dot{\mathbf{A}}^{iT} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

O lo que es lo mismo:

$$\dot{\mathbf{A}}^i \mathbf{A}^{iT} = -\mathbf{A}^i \dot{\mathbf{A}}^{iT} \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) puede escribirse como:

$$\dot{\mathbf{A}}^i \mathbf{A}^{iT} = -(\dot{\mathbf{A}}^i \mathbf{A}^{iT})^T \quad (2.23)$$

Una matriz que es igual a la opuesta de su traspuesta es una matriz antisimétrica. Por lo tanto, de la ecuación (2.23), la matriz antisimétrica $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i$:

$$\dot{\mathbf{A}}^i \mathbf{A}^{iT} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \quad (2.24)$$

se puede definir de la forma:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3^i & \omega_2^i \\ \omega_3^i & 0 & -\omega_1^i \\ -\omega_2^i & \omega_1^i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

siendo ω_1^i , ω_2^i y ω_3^i las componentes del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}^i$, que se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\omega}^i = \begin{bmatrix} \omega_1^i & \omega_2^i & \omega_3^i \end{bmatrix}^T \quad (2.26)$$

Teniendo en cuenta que la matriz de transformación es ortogonal y posmultiplicando ambos lados de la ecuación (2.24) por \mathbf{A}^i , se tiene:

$$\dot{\mathbf{A}}^i = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i \quad (2.27)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.19):

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{R}}_G^i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (2.28)$$

Expresando el vector $\bar{\mathbf{u}}_P^i$ en el sistema de coordenadas global:

$$\mathbf{u}_P^i = \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (2.29)$$

y sustituyendo en la ecuación (2.28), se llega a la expresión de la velocidad del punto P del cuerpo i :

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{R}}_G^i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{u}_P^i \quad (2.30)$$

Usando la notación de producto vectorial, la ecuación (2.30) también puede escribirse como:

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{R}}_G^i + \boldsymbol{\omega}^i \wedge \mathbf{u}_P^i \quad (2.31)$$

Una expresión alternativa se obtiene expresando el vector velocidad angular en coordenadas locales del cuerpo i mediante la matriz de transformación [3]:

$$\boldsymbol{\omega}^i = \mathbf{A}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}^i \quad (2.32)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\dot{\mathbf{A}}^i = \mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \quad (2.33)$$

y sustituyendo en la ecuación (2.19):

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{R}}_G^i + \mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (2.34)$$

Empleando la notación de producto vectorial:

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{R}}_G^i + \mathbf{A}^i (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \wedge \bar{\mathbf{u}}_P^i) \quad (2.35)$$

De la ecuación (2.27) y (2.33) se tiene la igualdad:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i = \mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \quad (2.36)$$

que lleva a las siguientes relaciones:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i = \mathbf{A}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^{iT} \quad (2.37)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i = \mathbf{A}^{iT} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i \quad (2.38)$$

2.2.7. Aceleración

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (2.19) se obtiene la aceleración absoluta del punto arbitrario P del cuerpo i :

$$\ddot{\mathbf{r}}_P^i = \ddot{\mathbf{R}}_G^i + \ddot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (2.39)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (2.27):

$$\ddot{\mathbf{A}}^i = \dot{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \dot{\mathbf{A}}^i \quad (2.40)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (2.27) en la ecuación (2.40):

$$\ddot{\mathbf{A}}^i = \dot{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^i \mathbf{A}^i + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i)^2 \mathbf{A}^i \quad (2.41)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^i$ se ha definido como:

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^i = \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}^i \quad (2.42)$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (2.39) la ecuación (2.41), resulta:

$$\ddot{\mathbf{r}}_P^i = \ddot{\mathbf{R}}_G^i + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^i \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i)^2 \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (2.43)$$

que es la expresión de la aceleración global del punto arbitrario P del cuerpo i .

Empleando la notación del producto vectorial y teniendo en cuenta la ecuación (2.29), la ecuación (2.43) se puede escribir como:

$$\ddot{\mathbf{r}}_P^i = \ddot{\mathbf{R}}_G^i + \boldsymbol{\alpha}^i \wedge \mathbf{u}_P^i + \boldsymbol{\omega}^i \wedge (\boldsymbol{\omega}^i \wedge \mathbf{u}_P^i) \quad (2.44)$$

siendo $\boldsymbol{\alpha}^i$ el vector aceleración angular del cuerpo i , definido por sus componentes como:

$$\boldsymbol{\alpha}^i = [\alpha_1^i \quad \alpha_2^i \quad \alpha_3^i]^T \quad (2.45)$$

Igual que la velocidad, la aceleración global del punto P del cuerpo i se puede escribir de forma alternativa expresando los vectores en el sistema local del cuerpo i :

$$\ddot{\mathbf{r}}_P^i = \ddot{\mathbf{R}}_G^i + \mathbf{A}^i (\bar{\boldsymbol{\alpha}}^i \wedge \bar{\mathbf{u}}_P^i) + \mathbf{A}^i [\bar{\boldsymbol{\omega}}^i \wedge (\bar{\boldsymbol{\omega}}^i \wedge \bar{\mathbf{u}}_P^i)] \quad (2.46)$$

2.3. Metodología empleada para el cálculo de las velocidades y aceleraciones

Conocidas las expresiones de la posición y orientación de cada cuerpo i en función de las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}(t)$, dadas por las relaciones (2.2), es fácil obtener la velocidad y aceleración por derivación con respecto al tiempo.

2.3.1. Velocidad

Considerando como origen del sistema de referencia local el centro de gravedad G del cuerpo i , la velocidad del origen de dicho cuerpo \mathbf{v}_G^i se puede expresar como:

$$\mathbf{v}_G^i = \frac{d\mathbf{R}_G^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}_G^i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}_G^i \dot{\mathbf{q}} \quad (2.47)$$

siendo $\dot{\mathbf{q}}$ el vector de velocidades de las coordenadas generalizadas y \mathbf{H}_G^i la matriz jacobiana de la velocidad del centro de gravedad G del cuerpo i .

Para la velocidad angular del cuerpo $\boldsymbol{\omega}^i$ se llega a una expresión análoga. Partiendo de la matriz antisimétrica $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i$, calculada según la ecuación (2.24), se determinan las componentes de la velocidad angular, ecuaciones (2.25) y (2.26).

Conocida la velocidad angular del cuerpo i , se puede determinar la matriz jacobiana de la velocidad angular del cuerpo \mathbf{G}^i mediante derivación con respecto a las velocidades de las coordenadas generalizadas, es decir:

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.48)$$

Calculada la matriz jacobiana \mathbf{G}^i , se puede expresar la velocidad angular del cuerpo i como:

$$\boldsymbol{\omega}^i = \mathbf{G}^i \dot{\mathbf{q}} \quad (2.49)$$

Empleando componentes locales se llega a una expresión similar pero partiendo de la ecuación (2.33). Premultiplicando dicha ecuación por \mathbf{A}^{iT} , se obtiene la matriz antisimétrica de la velocidad angular del cuerpo i en componentes locales:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i = \mathbf{A}^{iT} \dot{\mathbf{A}}^i \quad (2.50)$$

De esta ecuación se obtiene la velocidad angular en el sistema local a partir de sus componentes locales:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\omega}_3^i & \bar{\omega}_2^i \\ \bar{\omega}_3^i & 0 & -\bar{\omega}_1^i \\ -\bar{\omega}_2^i & \bar{\omega}_1^i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

siendo $\bar{\omega}_1^i$, $\bar{\omega}_2^i$ y $\bar{\omega}_3^i$ las componentes del vector velocidad angular en el sistema local $\bar{\boldsymbol{\omega}}^i$, que se puede escribir como:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^i = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_1^i & \bar{\omega}_2^i & \bar{\omega}_3^i \end{bmatrix}^T \quad (2.52)$$

Conocida la velocidad angular en el sistema local, se determina la matriz jacobiana en el sistema local $\bar{\mathbf{G}}^i$:

$$\bar{\mathbf{G}}^i = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.53)$$

Calculada la matriz jacobiana $\bar{\mathbf{G}}^i$, se puede expresar la velocidad angular del cuerpo i en el sistema local como:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^i = \bar{\mathbf{G}}^i \dot{\mathbf{q}} \quad (2.54)$$

2.3.2. Aceleración

La aceleración del centro de gravedad del cuerpo \mathbf{a}_G^i , teniendo en cuenta la ecuación (2.47) se puede expresar como:

$$\mathbf{a}_G^i = \frac{d\mathbf{v}_G^i}{dt} = \frac{d(\mathbf{H}_G^i \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \frac{d\mathbf{H}_G^i}{dt} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_G^i \ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}_G^i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_G^i \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.55)$$

y teniendo en cuenta que el vector de velocidades de las coordenadas $\dot{\mathbf{q}}$ no depende de las coordenadas \mathbf{q} , se tiene la siguiente relación:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_G^i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial (\mathbf{H}_G^i \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{h}_G^i \quad (2.56)$$

siendo $\ddot{\mathbf{q}}$ el vector de aceleraciones de las coordenadas generalizadas y \mathbf{h}_G^i la matriz jacobiana de la aceleración del centro de gravedad G del cuerpo i que multiplica a las velocidades de las coordenadas $\dot{\mathbf{q}}$.

Por tanto, sustituyendo, la expresión de la aceleración del centro de gravedad del cuerpo i es la siguiente:

$$\mathbf{a}_G^i = \mathbf{H}_G^i \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_G^i \dot{\mathbf{q}} \quad (2.57)$$

La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}^i$ se calcula de forma análoga derivando con respecto del tiempo las velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}^i$:

$$\boldsymbol{\alpha}^i = \frac{d\boldsymbol{\omega}^i}{dt} = \frac{d(\mathbf{G}^i \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \frac{d\mathbf{G}^i}{dt} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}^i \ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{G}^i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}^i \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.58)$$

teniendo en cuenta que el vector de velocidades de las coordenadas $\dot{\mathbf{q}}$ no depende de las coordenadas \mathbf{q} :

$$\frac{\partial \mathbf{G}^i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial (\mathbf{G}^i \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{g}^i \quad (2.59)$$

donde \mathbf{g}^i es la matriz jacobiana de la aceleración angular del cuerpo i que multiplica a las velocidades de las coordenadas $\dot{\mathbf{q}}$.

Sustituyendo, la aceleración angular del origen del cuerpo i es la siguiente:

$$\boldsymbol{\alpha}^i = \mathbf{G}^i \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}^i \dot{\mathbf{q}} \quad (2.60)$$

O bien, en coordenadas locales del cuerpo i la aceleración angular toma la expresión:

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^i = \bar{\mathbf{G}}^i \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}^i \dot{\mathbf{q}} \quad (2.61)$$

2.3.3. Expresiones cinemáticas

En resumen, las expresiones para determinar las velocidades y aceleraciones del centro de gravedad del cuerpo i son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G^i &= \mathbf{H}_G^i \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{a}_G^i &= \mathbf{H}_G^i \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_G^i \dot{\mathbf{q}} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}^i &= \bar{\mathbf{G}}^i \dot{\mathbf{q}} & \bar{\boldsymbol{\alpha}}^i &= \bar{\mathbf{G}}^i \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}^i \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Los valores angulares se consideran en el sistema local, según se verá en la determinación de las ecuaciones de la dinámica.

2.4. Dinámica tridimensional

2.4.1. Ecuaciones de Newton-Euler para un sólido rígido

Conocida la configuración de un cuerpo rígido de un sistema multicuerpo a través del vector de posición global de un punto de referencia del cuerpo (centro de gravedad), así como la matriz de orientación del cuerpo para un determinado valor de las coordenadas generalizadas, y calculadas las velocidades y aceleraciones, la dinámica del cuerpo i viene dada por las ecuaciones de Newton-Euler.

Considérese un cuerpo rígido en el espacio definido por un sistema de referencia global inercial XYZ , sometido a fuerzas y momentos externos en diferentes puntos, y sea $X^i Y^i Z^i$ el sistema de referencia local del cuerpo, véase figura 2.5.

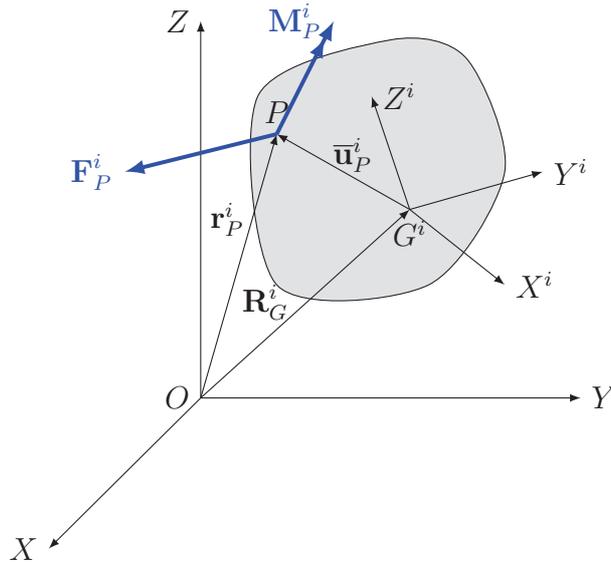


Figura 2.5: Cuerpo rígido i sometido a fuerzas y momentos externos en el punto P

Las ecuaciones de Newton-Euler⁽¹⁾ aplicadas al cuerpo i , considerando como origen del sistema de referencia local del cuerpo su centro de gravedad G , son las siguientes:

$$\text{Ecuaciones de Newton:} \quad \sum_j \mathbf{F}_j^i = m^i \frac{d^2 \mathbf{R}_G^i}{dt^2} \quad (2.63)$$

$$\text{Ecuaciones de Euler:} \quad \sum_j \mathbf{M}_j^i + \sum_j (\mathbf{u}_j^i \wedge \mathbf{F}_j^i) = \frac{d(\mathbf{I}_G^i \boldsymbol{\omega}^i)}{dt} \quad (2.64)$$

siendo \mathbf{F}_j^i la fuerza externa aplicada sobre el cuerpo i en el punto j , \mathbf{R}_G^i el vector de posición del centro de gravedad del cuerpo i respecto del sistema global, \mathbf{M}_j^i el momento externo aplicado en el punto j , \mathbf{u}_j^i el vector de posición respecto del sistema local del punto en el que está aplicada la fuerza \mathbf{F}_j^i , \mathbf{I}_G^i el tensor de inercia del cuerpo calculado en el centro de gravedad G y $\boldsymbol{\omega}^i$ la velocidad angular del cuerpo⁽²⁾.

La ecuación de Euler conviene proyectarla en el sistema local. Esto es porque el tensor de inercia permanece constante en dicho sistema y, por consiguiente, su derivada temporal es nula. Por tanto, resulta:

$$\text{Ecuaciones de Euler:} \quad \sum_j \bar{\mathbf{M}}_j^i + \sum_j (\bar{\mathbf{u}}_j^i \wedge \bar{\mathbf{F}}_j^i) = \frac{d(\bar{\mathbf{I}}_G^i \bar{\boldsymbol{\omega}}^i)}{dt} \quad (2.65)$$

Realizando las derivadas con respecto al tiempo, se tiene:

$$\sum_j \mathbf{F}_j^i = m^i \ddot{\mathbf{R}}_G^i \quad (2.66)$$

$$\sum_j \bar{\mathbf{M}}_j^i + \sum_j (\bar{\mathbf{u}}_j^i \wedge \bar{\mathbf{F}}_j^i) = \bar{\mathbf{I}}_G^i \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i + \bar{\boldsymbol{\omega}}^i \wedge (\bar{\mathbf{I}}_G^i \bar{\boldsymbol{\omega}}^i) \quad (2.67)$$

Matricialmente, las ecuaciones (2.66) y (2.67) se pueden expresar como:

$$\begin{bmatrix} m^i \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_G^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_G^i \\ \boldsymbol{\alpha}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j \mathbf{F}_j^i \\ \sum_j \bar{\mathbf{M}}_j^i + \sum_j (\bar{\mathbf{u}}_j^i \wedge \bar{\mathbf{F}}_j^i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\bar{\boldsymbol{\omega}}^i \wedge (\bar{\mathbf{I}}_G^i \bar{\boldsymbol{\omega}}^i) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad 3×3 y $\mathbf{0}$ una matriz de ceros del tamaño correspondiente para completar la matriz o vector donde aparece.

Se denota \mathbf{F}_P^i a la fuerza resultante de las fuerzas externas aplicadas sobre el cuerpo i reducida en el punto P y $\bar{\mathbf{M}}_P^i$ al momento resultante de las fuerzas externas

¹Los sumatorios se consideran extendidos a todos los puntos j en los que hay aplicada una fuerza o un momento sobre el cuerpo i .

²El producto $\mathbf{I}_G^i \boldsymbol{\omega}^i$ es el momento cinético del cuerpo i calculado en su centro de gravedad G .

y de los momentos externos aplicados sobre el cuerpo i reducido en el punto P y proyectado en el sistema de referencia local del cuerpo, es decir:

$$\mathbf{F}_P^i = \sum_j \mathbf{F}_j^i \quad (2.69)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_P^i = \sum_j \bar{\mathbf{M}}_j^i + \sum_j (\bar{\mathbf{u}}_j^i \wedge \bar{\mathbf{F}}_j^i) = \bar{\mathbf{M}}^i + (\bar{\mathbf{u}}_P^i \wedge \bar{\mathbf{F}}_P^i) \quad (2.70)$$

2.4.2. Ecuaciones de Newton-Euler para un sistema multicuerpo

Considerando los n cuerpos del sistema multicuerpo bajo estudio, las ecuaciones de Newton-Euler [3] resultan ser:

$$\mathbf{M}_{NE} \mathbf{a}_G = \mathbf{Q}_{NE} + \mathbf{Q}_{NEV} \quad (2.71)$$

donde:

$$\mathbf{M}_{NE} = \begin{bmatrix} m^1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m^n \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_G^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_G^n \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

es la matriz de masa de Newton-Euler del sistema multicuerpo,

$$\mathbf{a}_G = \left[\mathbf{a}_G^1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_G^n \quad \bar{\alpha}^1 \quad \dots \quad \bar{\alpha}^n \right]^T \quad (2.73)$$

es el vector de aceleraciones del sistema multicuerpo,

$$\mathbf{Q}_{NE} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_P^1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_P^n \\ \bar{\mathbf{M}}_P^1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{M}}_P^n \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

es el vector de fuerzas generalizadas de Newton-Euler y

$$\mathbf{Q}_{NEV} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ -\bar{\boldsymbol{\omega}}^1 \wedge (\bar{\mathbf{I}}_G^1 \bar{\boldsymbol{\omega}}^1) \\ \vdots \\ -\bar{\boldsymbol{\omega}}^n \wedge (\bar{\mathbf{I}}_G^n \bar{\boldsymbol{\omega}}^n) \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

es el vector de fuerzas de inercia generalizadas de Newton-Euler cuadráticas en velocidad.

Teniendo en cuenta las expresiones de las aceleraciones en función de las velocidades y aceleraciones de las coordenadas del cuerpo i :

$$\mathbf{a}_G^i = \mathbf{H}_G^i \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_G^i \dot{\mathbf{q}} \quad (2.76)$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^i = \bar{\mathbf{G}}^i \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{g}}^i \dot{\mathbf{q}} \quad (2.77)$$

se genera el vector de aceleraciones del sistema multicuerpo, que resulta ser:

$$\mathbf{a}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_G^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_G^n \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}^1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_G^1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_G^n \\ \bar{\mathbf{G}}^1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{G}}^n \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_G^1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_G^n \\ \bar{\mathbf{g}}^1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{g}}^n \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{L}_G \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{l}_G \dot{\mathbf{q}} \quad (2.78)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Newton-Euler para el sistema multicuerpo el vector de aceleraciones dado por la ecuación (2.78) se obtiene:

$$\mathbf{M}_{NE}(\mathbf{L}_G \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{l}_G \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}_{NE} + \mathbf{Q}_{NEV} \quad (2.79)$$

y despejando el término de las aceleraciones de las coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{M}_{NE} \mathbf{L}_G \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_{NE} + \mathbf{Q}_{NEV} - \mathbf{M}_{NE} \mathbf{l}_G \dot{\mathbf{q}} \quad (2.80)$$

Premultiplicando la ecuación (2.80) por \mathbf{L}_G^T , para conseguir un sistema determinado, resulta la ecuación de la dinámica del sistema multicuerpo siendo incógnitas las aceleraciones de las coordenadas generalizadas:

$$(\mathbf{L}_G^T \mathbf{M}_{NE} \mathbf{L}_G) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{L}_G^T \mathbf{Q}_{NE} + \mathbf{L}_G^T (\mathbf{Q}_{NEV} - \mathbf{M}_{NE} \mathbf{l}_G \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.81)$$

Denotando:

$$\mathbf{M}^{SMC} = \mathbf{L}_G^T \mathbf{M}_{NE} \mathbf{L}_G \quad (2.82)$$

como la matriz de masa del sistema multicuerpo,

$$\mathbf{Q}^{SMC} = \mathbf{L}_G^T \mathbf{Q}_{NE} \quad (2.83)$$

como el vector de fuerzas generalizadas del sistema multicuerpo y

$$\mathbf{Q}_V^{SMC} = \mathbf{L}_G^T (\mathbf{Q}_{NEV} - \mathbf{M}_{NE} \mathbf{l}_G \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.84)$$

como el vector de fuerzas de inercia generalizadas cuadráticas en velocidad del sistema multicuerpo, resulta la ecuación:

$$\mathbf{M}^{SMC} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}^{SMC} + \mathbf{Q}_V^{SMC} \quad (2.85)$$

2.4.3. Fuerzas generalizadas sobre un cuerpo rígido

El vector de fuerzas generalizadas aplicadas sobre un cuerpo rígido i es un vector que contiene el efecto que las fuerzas y momentos aplicados sobre el cuerpo tienen en las coordenadas generalizadas, y es función de las coordenadas, las velocidades de las coordenadas y del tiempo:

$$\mathbf{Q}^i = \mathbf{Q}^i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.86)$$

En este vector de fuerzas generalizadas se distinguen dos tipos: las fuerzas generalizadas asociadas a fuerzas y momentos externos aplicados sobre el cuerpo y las fuerzas generalizadas asociadas a las fuerzas de reacción o de contacto.

$$\mathbf{Q}^i = \mathbf{Q}_{aplicada}^i + \mathbf{Q}_{reaccion}^i \quad (2.87)$$

Dentro de la componente del vector de fuerzas generalizadas asociadas a las fuerzas y momentos externos aplicados, se encuentra el efecto que producen las fuerzas que derivan de un potencial, como la fuerza gravitatoria, las fuerzas de suspensión, las fuerzas y momentos de actuación motrices y de control, las fuerzas aerodinámicas, las fuerzas de fricción en los pares cinemáticos y las fuerzas tangenciales de contacto. Las fuerzas normales de contacto son fuerzas de reacción que dependen de las restricciones como se verá más adelante.

2.4.4. Fuerzas generalizadas aplicadas

Fuerza generalizada asociada a la gravedad sobre el cuerpo i

Para determinar la fuerza generalizada asociada a la gravedad se hace uso del principio de las potencias virtuales, que establece que el trabajo realizado por las

fuerzas generalizadas es igual al trabajo realizado por las fuerzas y pares externos aplicados asociados.

La potencia desarrollada por la fuerza de la gravedad sobre el cuerpo i aplicada en el punto G es, teniendo en cuenta la ecuación (2.47):

$$\mathbf{F}_{grav}^i \cdot \mathbf{v}_G^i = \mathbf{v}_G^{iT} \mathbf{F}_{grav}^i = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}_G^i \mathbf{F}_{grav}^i = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}_{grav}^i \quad (2.88)$$

Por tanto, la fuerza generalizada asociada a la gravedad sobre el cuerpo i es:

$$\mathbf{Q}_{grav}^i = \mathbf{H}_G^i \mathbf{F}_{grav}^i \quad (2.89)$$

Fuerza generalizada asociada a los momentos de actuación motrices y de control sobre el cuerpo i

Aplicando de nuevo el principio de las potencias virtuales, la potencia desarrollada por un momento o par sobre el cuerpo i , proyectada en el sistema local del cuerpo es⁽³⁾, teniendo en cuenta la ecuación (2.54):

$$\overline{\mathbf{M}}^i \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}}^i = \overline{\boldsymbol{\omega}}^{iT} \overline{\mathbf{M}}^i = \dot{\mathbf{q}}^T \overline{\mathbf{G}}^{iT} \overline{\mathbf{M}}^i = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}_M^i \quad (2.90)$$

Por tanto, la fuerza generalizada asociada a un momento M sobre el cuerpo i es:

$$\mathbf{Q}_M^i = \overline{\mathbf{G}}^{iT} \overline{\mathbf{M}}^i \quad (2.91)$$

Fuerza generalizada asociada a los muelles y amortiguadores de la suspensión entre los cuerpos i y j

Sean dos puntos P y Q , de los cuerpos i y j , respectivamente, enlazados por una suspensión de tipo muelle más amortiguador, siendo k la constante de rigidez, l_0 la longitud natural del muelle y c la constante de amortiguamiento viscoso, figura 2.6.

³No hay que olvidar, al escribir las ecuaciones del sistema multicuerpo, el par de reacción que aparece consecuencia de aplicar el par de actuación, siempre y cuando dicho par esté aplicado sobre otro cuerpo del sistema.

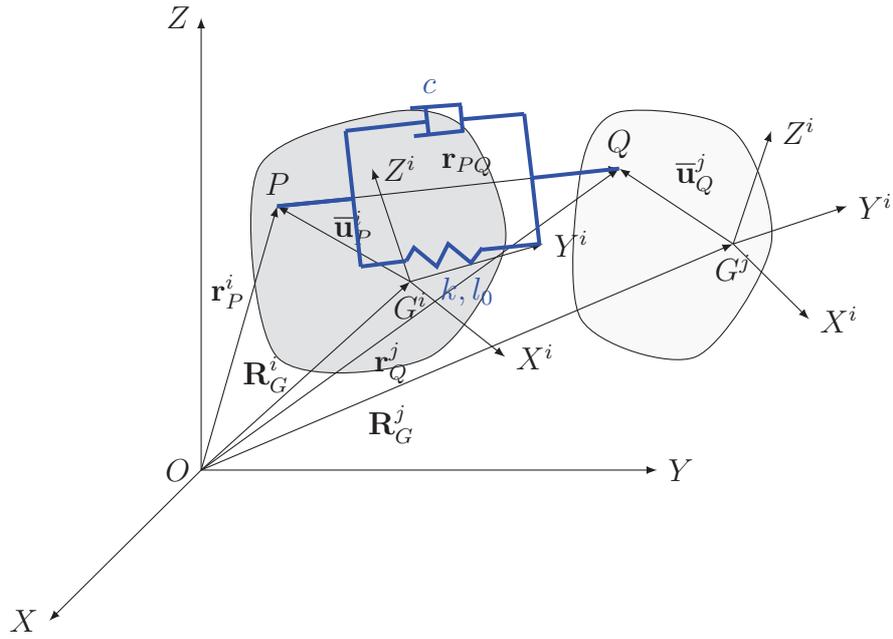


Figura 2.6: Cuerpos rígidos i y j enlazados mediante suspensión

En lugar de aplicar el principio de las potencias virtuales se aplica el principio de la energía potencial del muelle U_m , para el muelle, y la función de disipación viscosa de Rayleigh F_c , para el amortiguador.

La energía de deformación almacenada por el muelle viene dada por $U_m(\mathbf{q})$ y es una función potencial que depende única y exclusivamente de las coordenadas generalizadas:

$$U_m(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}k(l(\mathbf{q}) - l_0)^2 \quad (2.92)$$

La fuerza generalizada del muelle, al ser conservativa, deriva de la función potencial U_m , luego:

$$\mathbf{Q}_{muelle} = -\frac{\partial U_m(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.93)$$

Aplicando la regla de la cadena de la derivación a la derivada de la función potencial con respecto de las coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{Q}_{muelle} = -\frac{\partial U_m(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial U_m}{\partial l} \frac{\partial l(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.94)$$

Teniendo en cuenta que:

$$l(\mathbf{q}) = (\mathbf{r}_{PQ}^T \mathbf{r}_{PQ})^{\frac{1}{2}} \quad (2.95)$$

siendo:

$$\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q^j - \mathbf{r}_P^i = (\mathbf{R}_G^j + \mathbf{A}^j \bar{\mathbf{u}}_Q^j) - (\mathbf{R}_G^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i) \quad (2.96)$$

se llega a la siguiente expresión para la fuerza generalizada del muelle:

$$\mathbf{Q}_{muelle} = -k \left(\frac{l - l_0}{l} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{PQ}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{r}_{PQ} \quad (2.97)$$

La función de disipación viscosa de Rayleigh F_c del amortiguador, es:

$$F_c(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} c (l(\dot{\mathbf{q}}))^2 \quad (2.98)$$

Por tanto, por analogía con el muelle, la fuerza generalizada del amortiguador resulta ser:

$$\mathbf{Q}_{amortiguador} = - \frac{\partial F_c(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.99)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\mathbf{Q}_{amortiguador} = - \frac{\partial F_c(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = - \frac{\partial F_c}{\partial l} \frac{\partial l(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.100)$$

Teniendo en cuenta que [7]:

$$\frac{\partial l(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial l(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.101)$$

resulta que la fuerza generalizada del amortiguador vale:

$$\mathbf{Q}_{amortiguador} = -c \left(\frac{l}{\bar{l}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{PQ}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{r}_{PQ} \quad (2.102)$$

Fuerza generalizada asociada a una fuerza aplicada en un punto P del cuerpo i

Sea el cuerpo de la figura 2.5 sometido en el punto P a una fuerza \mathbf{F}_P^i .

Teniendo en cuenta la expresión de la velocidad del punto P , ecuación (2.31), se tiene que:

$$\mathbf{v}_P^i = \dot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{R}}_G^i + \boldsymbol{\omega}^i \wedge \mathbf{u}_P^i = \mathbf{v}_G^i - \mathbf{u}_P^i \wedge \boldsymbol{\omega}^i = \mathbf{v}_G^i - \tilde{\mathbf{u}}_P^i \boldsymbol{\omega}^i \quad (2.103)$$

Aplicando el principio de las potencias virtuales:

$$\mathbf{F}_P^i \cdot \mathbf{v}_P^i = \mathbf{v}_P^{iT} \mathbf{F}_P^i = (\mathbf{v}_G^i - \tilde{\mathbf{u}}_P^i \boldsymbol{\omega}^i)^T \mathbf{F}_P^i = \mathbf{v}_G^{iT} \mathbf{F}_P^i - \boldsymbol{\omega}^{iT} (\tilde{\mathbf{u}}_P^i)^T \mathbf{F}_P^i \quad (2.104)$$

y sustituyendo \mathbf{v}_G^i según la ecuación (2.47) y $\boldsymbol{\omega}^i$ según la ecuación (2.49), resulta:

$$\mathbf{F}_P^i \cdot \mathbf{v}_P^i = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}_G^{iT} \mathbf{F}_P^i - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}^{iT} (\tilde{\mathbf{u}}_P^i)^T \mathbf{F}_P^i \quad (2.105)$$

Sacando factor común el vector de velocidades de las coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{F}_P^i \cdot \mathbf{v}_P^i = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{H}_G^{iT} \mathbf{F}_P^i - \mathbf{G}^{iT} (\tilde{\mathbf{u}}_P^i)^T \mathbf{F}_P^i) \quad (2.106)$$

Por tanto, la fuerza generalizada asociada a la fuerza \mathbf{F}_P^i vale:

$$\mathbf{Q}_{F_P}^i = \mathbf{H}_G^{iT} \mathbf{F}_P^i - \mathbf{G}^{iT} (\tilde{\mathbf{u}}_P^i)^T \mathbf{F}_P^i \quad (2.107)$$

Expresando la matriz \mathbf{G}^i en el sistema local:

$$\mathbf{Q}_{F_P}^i = \mathbf{H}_G^{iT} \mathbf{F}_P^i - \overline{\mathbf{G}}^{iT} \mathbf{A}^{iT} (\tilde{\mathbf{u}}_P^i)^T \mathbf{F}_P^i \quad (2.108)$$

y como $\tilde{\mathbf{u}}_P^i = -(\tilde{\mathbf{u}}_P^i)^T$:

$$\mathbf{Q}_{F_P}^i = \mathbf{H}_G^{iT} \mathbf{F}_P^i + \overline{\mathbf{G}}^{iT} \mathbf{A}^{iT} (\tilde{\mathbf{u}}_P^i)^T \mathbf{F}_P^i \quad (2.109)$$

Fuerza generalizada asociada a la fuerza de resistencia aerodinámica sobre el cuerpo i

La fuerza de resistencia aerodinámica sobre el cuerpo i se considera aplicada en el centro de gravedad del cuerpo, es proporcional al cuadrado de la velocidad relativa entre el cuerpo y la corriente de fluido incidente sobre la superficie del cuerpo y su dirección es contraria a la velocidad del cuerpo [4].

Por tanto, se puede escribir:

$$\mathbf{F}_{aero}^i = -\frac{1}{2} \rho A C_D \mathbf{v}_G^i \frac{\mathbf{v}_G^i}{|\mathbf{v}_G^i|} \quad (2.110)$$

siendo ρ la densidad del fluido (en este caso aire), A la superficie frontal del cuerpo i y C_D el coeficiente de resistencia aerodinámica del cuerpo i .

Teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{v}_G^i \cdot \mathbf{v}_G^i = \mathbf{v}_G^{iT} \mathbf{v}_G^i = |\mathbf{v}_G^i|^2 \quad (2.111)$$

La fuerza de resistencia aerodinámica toma la expresión siguiente:

$$\mathbf{F}_{aero}^i = -\frac{1}{2} \rho A C_D |\mathbf{v}_G^i|^2 \frac{\mathbf{v}_G^i}{|\mathbf{v}_G^i|} = -\frac{1}{2} \rho A C_D |\mathbf{v}_G^i| \mathbf{v}_G^i \quad (2.112)$$

Aplicando el principio de las potencias virtuales, teniendo en cuenta la expresión de la velocidad del centro de gravedad del cuerpo i en función de las velocidades

de las coordenadas generalizadas, ecuación (2.47), la potencia desarrollada por la fuerza de resistencia aerodinámica vale:

$$\mathbf{F}_{aero}^i \cdot \mathbf{v}_G^i = \mathbf{v}_G^{i T} \mathbf{F}_{aero}^i = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}_G^{i T} \left(-\frac{1}{2} \rho A C_D |\mathbf{v}_G^i| \mathbf{v}_G^i \right) \quad (2.113)$$

Por tanto, la fuerza generalizada de resistencia aerodinámica vale:

$$\mathbf{Q}_{aero}^i = \mathbf{H}_G^{i T} \left(-\frac{1}{2} \rho A C_D |\mathbf{v}_G^i| \mathbf{v}_G^i \right) \quad (2.114)$$

Fuerza generalizada asociada a las fuerzas tangenciales de contacto entre los cuerpos i y el cuerpo fijo 0

Se considera que el contacto entre los cuerpos es puntual y se denota por \mathbf{v}_C la velocidad del punto de contacto. Para determinar la fuerza tangencial de contacto \mathbf{F}_t se considera la siguiente ley simplificada dependiente de dos parámetros [10], el coeficiente de rozamiento entre los cuerpos μ y la velocidad límite o velocidad de saturación v_{lim} :

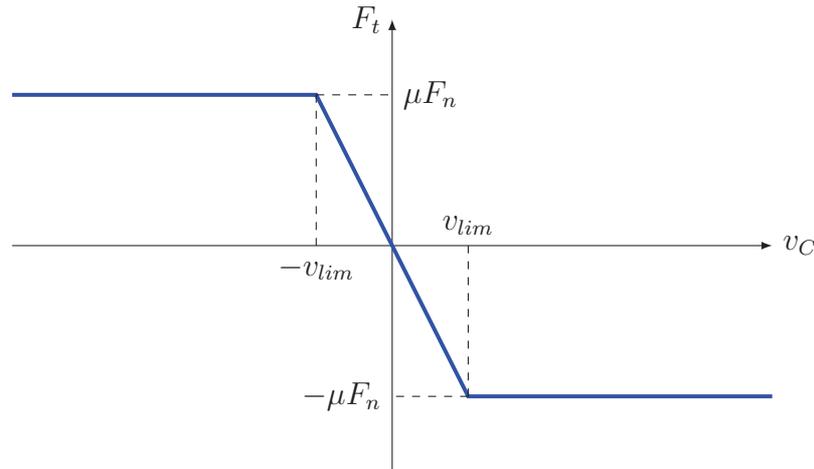


Figura 2.7: Fuerza tangencial de contacto F_t en función de la velocidad del punto de contacto v_C

El módulo de la fuerza tangencial F_t , según esta ley, es por tanto:

$$F_t = \begin{cases} \mu F_n \frac{v_c}{v_{lim}} & \text{si } v_c < v_{lim} \\ \mu F_n & \text{si } v_c \geq v_{lim} \end{cases} \quad (2.115)$$

Para determinar el módulo de la fuerza tangencial F_t es necesario conocer el valor de la fuerza normal F_n , que es una fuerza de reacción que se calcula a partir de las

restricciones y del multiplicador de Lagrange asociado, como se verá más adelante. La fuerza tangencial es:

$$\mathbf{F}_t = -F_t \frac{\mathbf{v}_C}{|\mathbf{v}_C|} = -F_t \frac{\mathbf{v}_C}{v_C} \quad (2.116)$$

Aplicando el principio de las potencias virtuales a la fuerza tangencial \mathbf{F}_t aplicada en el punto C con velocidad \mathbf{v}_C , la fuerza tangencial generalizada sobre el cuerpo i toma el valor:

$$\mathbf{Q}_{F_t}^i = \mathbf{H}_G^{iT} \mathbf{F}_t + \overline{\mathbf{G}}^{iT} \tilde{\mathbf{u}}_C^i \mathbf{A}^{iT} \mathbf{F}_t \quad (2.117)$$

Para modelos más complejos puede estudiarse la referencia [22].

2.4.5. Fuerzas generalizadas de reacción

Las fuerzas generalizadas de reacción son las fuerzas generalizadas asociadas a las fuerzas normales de contacto que dependen de las restricciones de contacto. Se introducen en el sistema de ecuaciones mediante los multiplicadores de Lagrange [3], de tal forma que, se pueden expresar como:

$$\mathbf{Q}_{reaccion} = -\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.118)$$

donde \mathbf{C}_q es la matriz jacobiana de las restricciones con respecto al vector de coordenadas $\mathbf{q}^{(4)}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange.

Al introducir fuerzas de contacto se reduce el número de grados de libertad del sistema bajo estudio en tantas dimensiones como restricciones se impongan al sistema.

2.4.6. Sistema de ecuaciones diferenciales y algebraicas del movimiento

Introduciendo el valor de las fuerzas generalizadas de reacción en la ecuación (2.85) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{M}^{SMC} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{aplicada}^{SMC} + \mathbf{Q}_V^{SMC} \quad (2.119)$$

que junto con las ecuaciones de restricción $\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales y algebraicas de índice 3.

⁴Esto es así para restricciones holónomas, es decir restricciones del tipo $f(t, q, \dot{q}) = 0$ integrables. Además se consideran restricciones independientes del tiempo. Para más detalle sobre los tipos de restricciones o ligaduras véase [7].

Para resolver este sistema de ecuaciones, se pueden derivar con respecto al tiempo, dos veces, las ecuaciones de restricción cinemática, obteniendo como resultado la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{C}}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.120)$$

Las ecuaciones (2.119) y (2.120) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales y algebraicas de índice 1, que puede expresarse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{SMC} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{aplicada}^{SMC} + \mathbf{Q}_V^{SMC} \\ -\dot{\mathbf{C}}_q \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

Este sistema se puede resolver como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siempre que la matriz jacobiana sea no singular, es decir, su determinante sea no nulo.

2.4.7. Integración del sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento

Para la integración del sistema de ecuaciones diferenciales (2.121) se emplea el método de Shabana de partición de coordenadas [3], el cual se describe a continuación. En este método se consideran tantas variables dependientes como restricciones existen, de tal forma que la matriz jacobiana de dichas variables sea no singular y el resto se denominan variables independientes. El conjunto de variables independientes para un problema dado no es único, pudiéndose encontrar conjuntos distintos de variables independientes y por tanto también de las coordenadas dependientes.

El primer paso consiste en realizar una estimación de las condiciones iniciales que define la configuración inicial del sistema multicuerpo. Las condiciones iniciales que representan las coordenadas y velocidades iniciales debe ser una buena aproximación de la configuración inicial exacta de la que parta el sistema.

Usando las condiciones iniciales se determina la matriz jacobiana de las restricciones así como un conjunto válido de coordenadas independientes.

La formulación de las ecuaciones de la dinámica usando variables independientes lleva al sistema de ecuaciones fuertemente acopladas más pequeño posible. Sin embargo, la formulación considerando las ecuaciones de restricción cinemática mediante los multiplicadores de Lagrange, formulación aumentada, lleva a un sistema de ecuaciones pobremente acopladas que puede resolverse para las aceleraciones

generalizadas y los multiplicadores de Lagrange. El vector de multiplicadores de Lagrange se utiliza para determinar las fuerzas de reacción generalizadas mientras que las aceleraciones generalizadas independientes se integran en el tiempo para determinar las velocidades y coordenadas generalizadas independientes. Determinadas las coordenadas y velocidades generalizadas independientes, para calcular las coordenadas y velocidades generalizadas dependientes se parte del sistema algebraico de ecuaciones de restricción no lineal:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.122)$$

Se puede emplear el algoritmo iterativo de Newton-Raphson para resolver el sistema de ecuaciones (2.122) para las variables dependientes. Para ello se fijan las variables independientes a sus valores obtenidos de la integración numérica y por tanto las diferencias de Newton asociadas $\Delta\mathbf{q}_i$ son nulas. Las coordenadas dependientes se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones algebraico no lineal de las restricciones mediante el procedimiento iterativo de Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{q}} \\ \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \Delta\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

Donde $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$ es la matriz jacobiana de las restricciones, \mathbf{I}_d es una matriz Booleana que tiene solamente zeros y unos, estando los unos en los lugares que corresponden a las variables independientes, y $\Delta\mathbf{q}$ es el vector de diferencias de Newton de todas las coordenadas.

El sistema anterior se puede escribir también como:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d} \Delta\mathbf{q}_d = -\mathbf{C} \quad (2.124)$$

Donde $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d}$ es la matriz jacobiana de las restricciones con respecto a las variables dependientes y $\Delta\mathbf{q}_d$ es el vector de diferencias de Newton de las variables dependientes.

A continuación, se determinan las velocidades generalizadas de las coordenadas dependientes según la derivada temporal de las restricciones:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d} \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}_{\mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \quad (2.125)$$

Despejando las velocidades dependientes:

$$\dot{\mathbf{q}}_d = -(\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d})^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \quad (2.126)$$

Conocidas las coordenadas y las velocidades se procede a la integración numérica del sistema compuesto por las ecuaciones de Newton-Euler y las ecuaciones de restricción introducidas mediante los multiplicadores de Lagrange, sistema de ecuaciones aumentado (2.121). Para ello se emplea un método de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este trabajo se han utilizado los siguientes: el método de Euler, el método de Runge-Kutta de segundo orden, el método de Runge-Kutta de cuarto orden y el método de Adams-Bashforth de segundo orden. Estos métodos son ampliamente utilizados para obtener la solución numérica de de las ecuaciones diferenciales no lineales de los sistemas mecánicos [3]. De entre todos ellos, se ha definido por defecto el de Adams-Bashforth por ser el más rápido y de menor error, sin embargo es más sensible a las condiciones iniciales.

Para la aplicación de estos métodos se define el vector de estado \mathbf{y} como:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \dot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

cuya dimensión es el doble del número de grados de libertad o coordenadas generalizadas independientes del sistema bajo estudio.

Derivando respecto del tiempo se tiene que:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

que puede escribirse simplemente como:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (2.129)$$

donde:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

La ecuación (2.129) representa a las ecuaciones del espacio de estados del sistema multicuerpo. Estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales de primer orden y su número es igual al doble del número de grados de libertad del sistema. Por tanto, en la formulación del espacio de estados, las ecuaciones diferenciales de segundo orden asociadas con las coordenadas independientes son reemplazadas por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que tiene un número de ecuaciones igual al doble del número de grados de libertad del sistema.

Sólo se requiere determinar la función $\mathbf{f}(\mathbf{y},t)$ puesto que son métodos explícitos que no requieren determinar las derivadas de la función $\mathbf{f}(\mathbf{y},t)$.

Considérese que \mathbf{y}_n e \mathbf{y}_{n+1} son las soluciones en el tiempo t_n y t_{n+1} , respectivamente, y h es el tamaño del paso de tiempo, es decir, $h = t_{n+1} - t_n$.

La fórmula de Euler es la siguiente:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}_1 \quad (2.131)$$

siendo:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) \quad (2.132)$$

La fórmula de Runge-Kutta de segundo orden es la siguiente:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2\right) \quad (2.133)$$

siendo:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) \quad (2.134)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + h\mathbf{f}_1, t_{n+1}) \quad (2.135)$$

La fórmula de Runge-Kutta de cuarto orden es la siguiente:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\left(\frac{1}{6}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{f}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{f}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{f}_4\right) \quad (2.136)$$

siendo:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) \quad (2.137)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{f}_1, t_n + \frac{h}{2}\right) \quad (2.138)$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{f}_2, t_n + \frac{h}{2}\right) \quad (2.139)$$

$$\mathbf{f}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + h\mathbf{f}_3, t_n + h) \quad (2.140)$$

Finalmente, la fórmula de Adams-Bashforth es la siguiente:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\left(-\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{f}_2\right) \quad (2.141)$$

siendo:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) \quad (2.142)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + h\mathbf{f}_1, t_n + h) \quad (2.143)$$

Existen más fórmulas de integración, para ello pueden consultarse las referencias [17], [18], [19] y [20].

2.5. Sistema de ecuaciones diferenciales para el simulador interactivo

Para el simulador interactivo hay que condensar el sistema de ecuaciones diferenciales del sistema, eliminando el grado de libertad asociado a la coordenada generalizada del giro del volante de dirección que es una variable guiada. Esta reducción o condensación de grados de libertad se realiza en el archivo *EcMovCamionInteractiva.m*.

Capítulo 3

Modelo multicuerpo del vehículo articulado

3.1. Introducción

El vehículo del que se pretende obtener su dinámica, es un camión articulado formado por una cabeza tractora y un semirremolque, figura 3.1. La unión entre ambos se realiza en la *quinta rueda* a través del *king pin*, unión que se supone cinemáticamente equivalente a una articulación esférica.

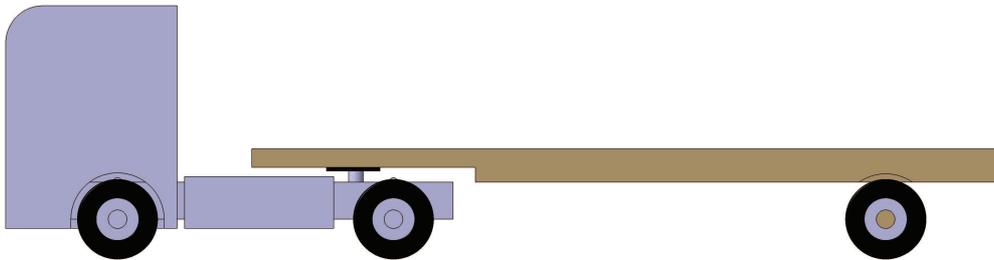


Figura 3.1: Camión articulado bajo estudio

Las ruedas delanteras de la cabeza tractora son las ruedas directrices cuyo giro directriz o pivotamiento está relacionado mediante un mecanismo capaz de asumir el giro exacto de cada una de las ruedas. Las ruedas traseras son las ruedas motrices y su giro está relacionado mediante un diferencial clásico. Las ruedas del semirremolque son ruedas libres cada una de ellas. Del modelado de la dirección y de la tracción se hablará más adelante.

La *quinta rueda* es el soporte unido solidariamente a la cabeza tractora que sirve de acoplamiento para el *king pin*, que no es más que un pivote ranurado unido

solidariamente al semirremolque. Ambos términos *quinta rueda* y *king pin*, véase figura 3.2, pertenecen al argot característico del mundo del camión.



Figura 3.2: *Quinta rueda* y *king pin* típicos [6]

3.2. Modelo del sistema multicuerpo

3.2.1. Definición del sistema multicuerpo

De aquí en adelante se hablará de sistema multicuerpo en lugar de vehículo articulado. Pues bien, el sistema multicuerpo bajo estudio, está constituido por 8 cuerpos, figura 3.3, –sin tener en cuenta el cuerpo fijo con sistema de referencia inercial fijo XYZ –, que se enumeran a continuación:

- Cuerpo 1: cabeza tractora.
- Cuerpo 2: semirremolque.
- Cuerpo 3: rueda izquierda del semirremolque.
- Cuerpo 4: rueda derecha del semirremolque.
- Cuerpo 5: rueda izquierda trasera de la cabeza tractora.
- Cuerpo 6: rueda derecha trasera de la cabeza tractora.
- Cuerpo 7: rueda izquierda delantera de la cabeza tractora.
- Cuerpo 8: rueda derecha delantera de la cabeza tractora.

Las figuras siguientes, figura 3.3 y figura 3.4, muestran vistas de la cabeza tractora y del semirremolque. En ellas pueden verse la situación de la *quinta rueda* y del *king pin*, así como detalles de las ruedas y de la suspensión.

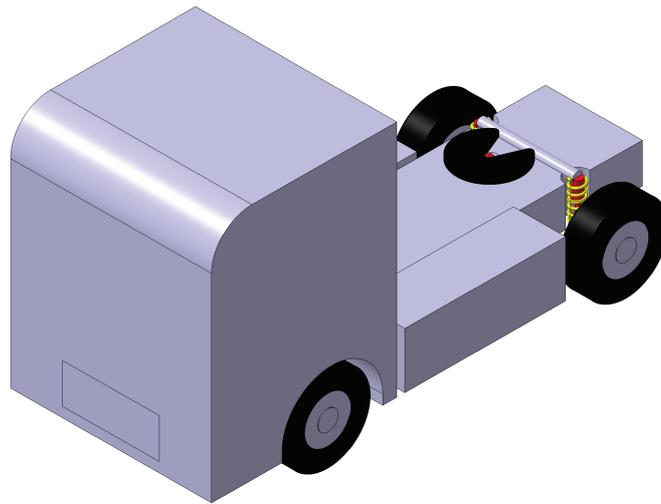


Figura 3.3: Perspectiva superior de la cabeza tractora

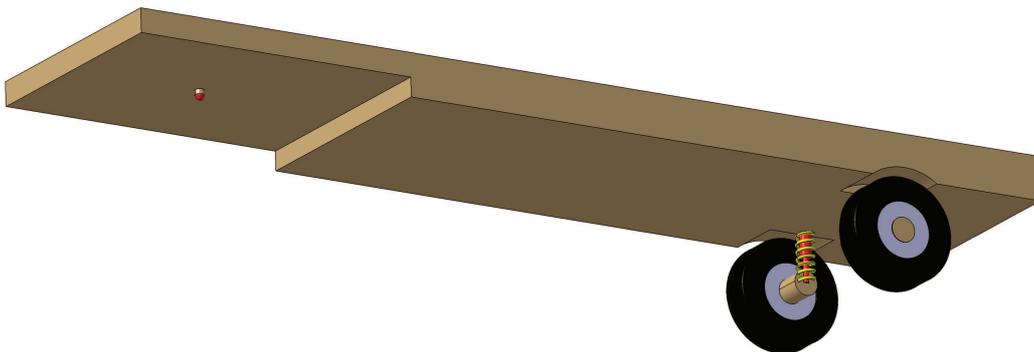


Figura 3.4: Perspectiva inferior del semirremolque

3.2.2. Dimensiones del sistema multicuerpo

Algo fundamental a la hora de modelar un sistema es realizar un buen dibujo del mismo en el que queden perfectamente definidos cada uno de los elementos que lo constituyen, además al trabajar con sistemas multicuerpo conviene llevar un orden y una metodología para elegir los cuerpos correctamente y así evitar errores de cálculo que acarrearían posteriores errores de diseño o programación del sistema que se está modelando, y al que se le va a calcular su dinámica.

En la figura 3.5, correspondiente a una posición arbitraria del sistema multicuerpo, se ha situado un sistema de referencia local $X^i Y^i Z^i$ en el centro de

gravedad de cada cuerpo i y el sistema de referencia global XYZ .

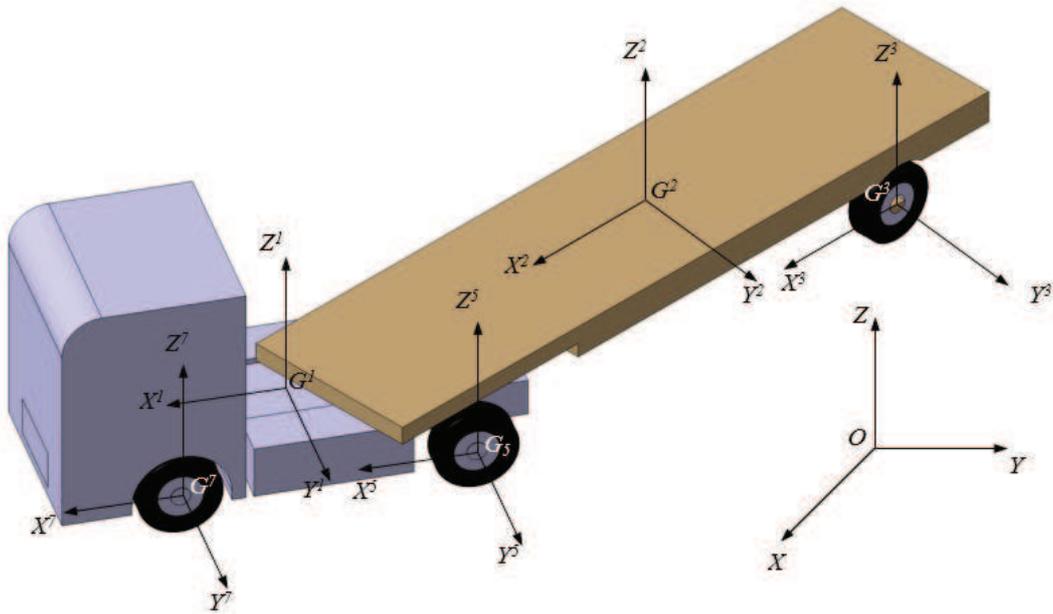


Figura 3.5: Sistema multicuerpo con ejes de referencia

Como ya se ha indicado, los cuerpos 1 y 2, cabeza tractora y semirremolque, respectivamente, se consideran articulados mediante un par esférico, que modela la unión de la junta de acoplamiento o *quinta rueda* de la cabeza tractora, con el pivote de acoplamiento o *king pin* del semirremolque. Por otro lado, todas las ruedas se consideran articuladas mediante pares de rotación en el grado de libertad de rodadura (ángulo θ), salvo las directrices que además están articuladas mediante pares de rotación en el grado de libertad de pivotamiento o de direccionamiento (ángulo ψ).

En la figura 3.6, se establecen las dimensiones geométricas del sistema multicuerpo, cuyo valor se indica en la tabla 3.1, a excepción de las alturas.

Las cotas de alturas de los centros de gravedad, de las alturas de los puntos de sujeción de la amortiguación y de la articulación, tomando como referencia la posición indeformada para la amortiguación, se especifican en la tabla 3.2.

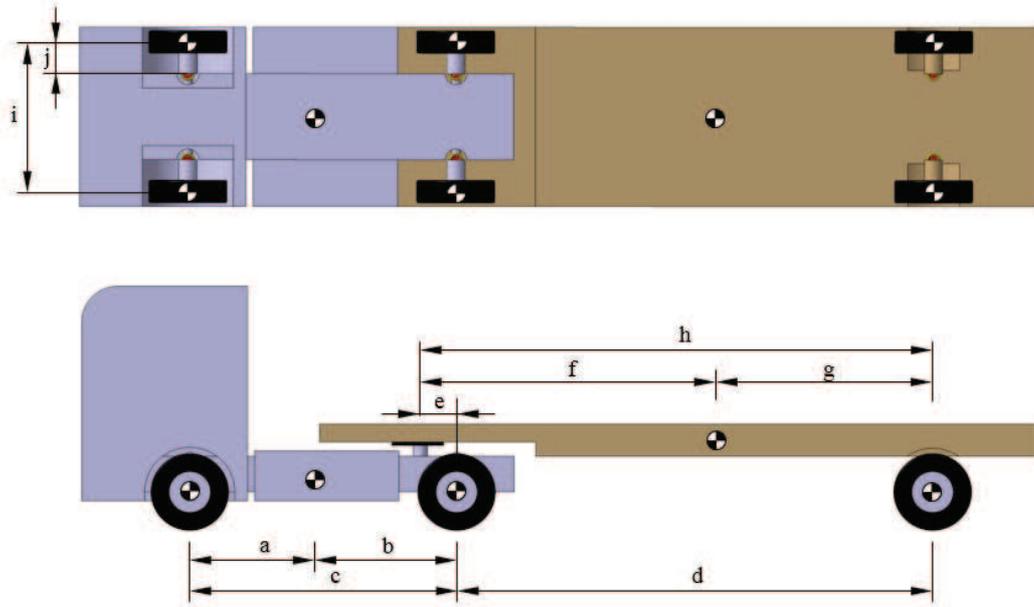


Figura 3.6: Acotación del sistema multicuerpo

Tabla 3.1: Acotación de longitudes

Longitud	Valor (<i>mm</i>)
a	1850,00
b	1850,00
c	3700,00
d	6600,00
e	500,00
f	3600,00
g	3000,00
h	7100,00
i	2085,00
j	442,50

Tabla 3.2: Acotación de alturas

Punto	Altura (<i>mm</i>)
h_G^1	600,00
h_G^2	1300,00
h_G^3	537,75
h_G^4	537,75
h_G^5	537,75
h_G^6	537,75
h_G^7	537,75
h_G^8	537,75
h_S^S	1075,50
h_S^I	537,75
h_A	1187,75

En la suspensión, el superíndice S indica superior y el superíndice I indica inferior, para hacer referencia a los puntos de sujeción superior e inferior, respectivamente. El punto A es el punto de la articulación entre cabeza tractora y semirremolque.

3.2.3. Coordenadas generalizadas del sistema multicuerpo

El vector de coordenadas generalizadas seleccionado para el sistema multicuerpo está constituido por 26 componentes:

- las coordenadas de posición $R_{G_x}^1, R_{G_y}^1, R_{G_z}^1$ y orientación ψ^1, ϕ^1, θ^1 de la cabeza tractora,
- las coordenadas de posición $R_{G_x}^2, R_{G_y}^2, R_{G_z}^2$ y orientación ψ^2, ϕ^2, θ^2 del semirremolque,
- los ángulos de rodadura $\theta^3, \theta^4, \theta^5, \theta^6, \theta^7, \theta^8$ de las ruedas,
- los grados de libertad traslacionales $s^3, s^4, s^5, s^6, s^7, s^8$ de las suspensiones,
- el ángulo δ del giro del volante de la dirección y
- el ángulo θ^m del giro del eje motriz.

Por tanto, el vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} resulta ser el siguiente:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} R_{G_x}^1 \\ R_{G_y}^1 \\ R_{G_z}^1 \\ \psi^1 \\ \phi^1 \\ \theta^1 \\ R_{G_x}^2 \\ R_{G_y}^2 \\ R_{G_z}^2 \\ \psi^2 \\ \phi^2 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \\ \theta^4 \\ \theta^5 \\ \theta^6 \\ \theta^7 \\ \theta^8 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \\ s^6 \\ s^7 \\ s^8 \\ \delta \\ \theta^m \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para definir la posición de cada cuerpo se sigue la siguiente metodología: la posición de un cuerpo que está ligado a otro cuerpo se refiere a la de éste. Así, la posición de los cuerpos que pertenecen a la cabeza tractora está referida a la posición de la cabeza tractora y la posición de los cuerpos que pertenecen al semirremolque se refieren a la posición del semirremolque. Para ello se toman las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo \mathbf{R}_G^i . Igualmente, la orientación de un cuerpo que está ligado a otro cuerpo se refiere a la de éste a través de las matrices de orientación de cada cuerpo \mathbf{A}^i .

No hay que olvidar que finalmente se deben imponer las ecuaciones de restricción

entre los cuerpos no definidas por variables, en este caso la ecuación de restricción del par esférico en el punto A , que vincula el semirremolque con la cabeza tractora.

3.2.4. Orientación de los cuerpos en función de las coordenadas generalizadas

Para determinar la orientación de la cabeza tractora, cuerpo 1, y del semirremolque, cuerpo 2, se considera la secuencia de giros ZXY correspondientes a los ángulos de Cardan. Las ruedas directrices tienen además un grado de libertad asociado al ángulo de pivotamiento o direccionamiento ψ^i , relativo a la cabeza tractora. Por último, todas las ruedas, poseen un ángulo de rodadura θ^i relativo al sistema de referencia del cuerpo al que pertenecen.

Teniendo en cuenta estos datos, y la definición de las matrices de rotación simple, ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12), las matrices de orientación de cada uno de los cuerpos del sistema multicuerpo son las siguientes:

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^{\psi^1} \mathbf{A}^{\phi^1} \mathbf{A}^{\theta^1} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{\psi^2} \mathbf{A}^{\phi^2} \mathbf{A}^{\theta^2} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A}^{\theta^3} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A}^{\theta^4} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^1 \mathbf{A}^{\theta^5} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{A}^6 = \mathbf{A}^1 \mathbf{A}^{\theta^6} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A}^7 = \mathbf{A}^1 \mathbf{A}^{\psi^7} \mathbf{A}^{\theta^7} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A}^8 = \mathbf{A}^1 \mathbf{A}^{\psi^8} \mathbf{A}^{\theta^8} \quad (3.9)$$

3.2.5. Posición de los cuerpos en función de las coordenadas generalizadas

Conocida la posición del centro de gravedad del cuerpo 1 se determina la del resto de cuerpos. Posición de la articulación entre la cabeza tractora y el semirremolque, respecto de la cabeza tractora:

$$\mathbf{R}_A^1 = \mathbf{R}_G^1 + \mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{u}}_A^1; \quad \bar{\mathbf{u}}_A^1 = [-(b-e) \quad 0 \quad (h_A - h_G^1)]^T \quad (3.10)$$

siendo $\bar{\mathbf{u}}_A^1$ el vector en coordenadas locales del punto A respecto del cuerpo 1.

Posición de la articulación entre la cabeza tractora y el semirremolque, respecto del semirremolque:

$$\mathbf{R}_A^2 = \mathbf{R}_G^2 + \mathbf{A}^2 \bar{\mathbf{u}}_A^2; \quad \bar{\mathbf{u}}_A^2 = [+f \quad 0 \quad -(h_G^2 - h_A)]^T \quad (3.11)$$

siendo $\bar{\mathbf{u}}_A^2$ el vector en coordenadas locales del punto A respecto del cuerpo 2.

De las ecuaciones (3.10) y (3.11) se obtiene la ecuación de restricción del par esférico en el punto A , como se verá más adelante.

Para el resto de cuerpos se tiene:

$$\mathbf{R}_G^3 = \mathbf{R}_G^2 + \mathbf{A}^2 \bar{\mathbf{u}}_G^3; \quad \bar{\mathbf{u}}_G^3 = [-g \quad +\frac{i}{2} \quad -(h_G^2 - h_S^S) - s^3]^T \quad (3.12)$$

$$\mathbf{R}_G^4 = \mathbf{R}_G^2 + \mathbf{A}^2 \bar{\mathbf{u}}_G^4; \quad \bar{\mathbf{u}}_G^4 = [-g \quad -\frac{i}{2} \quad -(h_G^2 - h_S^S) - s^4]^T \quad (3.13)$$

$$\mathbf{R}_G^5 = \mathbf{R}_G^1 + \mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{u}}_G^5; \quad \bar{\mathbf{u}}_G^5 = [-b \quad +\frac{i}{2} \quad -(h_G^1 - h_S^S) - s^5]^T \quad (3.14)$$

$$\mathbf{R}_G^6 = \mathbf{R}_G^1 + \mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{u}}_G^6; \quad \bar{\mathbf{u}}_G^6 = [-b \quad -\frac{i}{2} \quad -(h_G^1 - h_S^S) - s^6]^T \quad (3.15)$$

$$\mathbf{R}_G^7 = \mathbf{R}_G^1 + \mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{u}}_G^7; \quad \bar{\mathbf{u}}_G^7 = [+a \quad +\frac{i}{2} \quad -(h_G^1 - h_S^S) - s^7]^T \quad (3.16)$$

$$\mathbf{R}_G^8 = \mathbf{R}_G^1 + \mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{u}}_G^8; \quad \bar{\mathbf{u}}_G^8 = [+a \quad -\frac{i}{2} \quad -(h_G^1 - h_S^S) - s^8]^T \quad (3.17)$$

3.2.6. Configuración inicial de referencia

La configuración inicial del sistema multicuerpo es la que aparece en la figura 3.7, correspondiente a la posición indeformada para la amortiguación, estando el origen del sistema de coordenadas global XYZ situado entre las dos ruedas directrices y a nivel del suelo, como se indica en la misma. En esta figura se tiene una representación gráfica de la posición de todos los cuerpos (posición de sus centros de gravedad G_i) y, en este caso, del punto A , punto que vincula la cabeza tractora con el semirremolque. Además aparecen representados los vectores de posición locales de dichos puntos respecto del cuerpo al que se referencian.

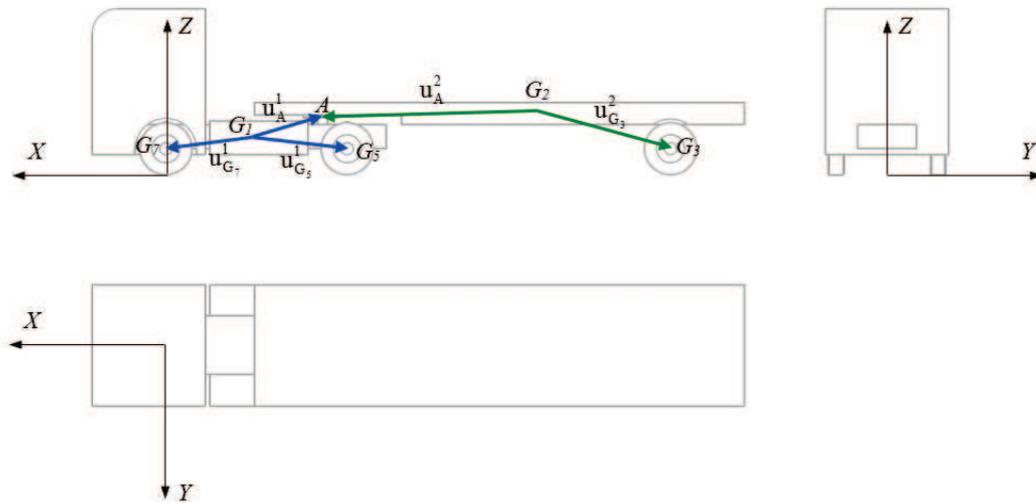


Figura 3.7: Configuración inicial de referencia

Teniendo en cuenta esta configuración inicial, es decir, a partir de las figuras 3.6 y 3.7, se procede a determinar el valor de las variables en el instante inicial.

De este modo, el vector de coordenadas generalizadas en la configuración inicial $\mathbf{q}_{referencia}$ resulta ser el siguiente:

$$\mathbf{q}_{referencia} = \begin{bmatrix} R_{G_x}^1 \\ R_{G_y}^1 \\ R_{G_z}^1 \\ \psi^1 \\ \phi^1 \\ \theta^1 \\ R_{G_x}^2 \\ R_{G_y}^2 \\ R_{G_z}^2 \\ \psi^2 \\ \phi^2 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \\ \theta^4 \\ \theta^5 \\ \theta^6 \\ \theta^7 \\ \theta^8 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \\ s^6 \\ s^7 \\ s^8 \\ \delta \\ \theta^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ h_G^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(c - e + f) \\ 0 \\ h_G^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_0 \\ l_0 \\ l_0 \\ l_0 \\ l_0 \\ l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Esta configuración inicial de referencia es la configuración que se toma de partida para determinar la posición de equilibrio estático del sistema, posición que será tomada como condición inicial para realizar la simulación.

3.3. Propiedades del sistema multicuerpo

3.3.1. Propiedades mecánicas

Las propiedades mecánicas⁽¹⁾ de los cuerpos del sistema multicuerpo son la masa y el tensor de inercia y los valores estimados son los que aparecen en la tabla 3.3⁽²⁾:

Tabla 3.3: Propiedades mecánicas

Propiedad	Cabeza tractora	Semirremolque	Rueda
Masa (kg)	8000	10000	120
$I_{xx}(kg \cdot m^2)$	1300	5300	6
$I_{yy}(kg \cdot m^2)$	22700	68100	12
$I_{zz}(kg \cdot m^2)$	24000	73400	6
$I_{xy}(kg \cdot m^2)$	0	0	0
$I_{xz}(kg \cdot m^2)$	0	0	0
$I_{yz}(kg \cdot m^2)$	0	0	0

Para el motor se considera masa despreciable y una inercia $I_{mot} = 1000kg \cdot m^2$. Esta inercia es necesaria para plantear las ecuaciones del movimiento al incluir un nuevo grado de libertad correspondiente al giro del eje motriz.

3.3.2. Suspensión

La suspensión de cada rueda está modelada por un conjunto muelle-amortiguador, figura 3.8, de parámetros k_m , l_0 y c_a siendo k_m la constante de rigidez del muelle, l_0 la longitud natural del muelle y c_a la constante de amortiguamiento o constante de disipación viscosa. Los valores de estos parámetros son los que aparecen en la tabla 3.4.

Tabla 3.4: Parámetros de la suspensión

Parámetro	Valor
$k_m(\frac{N}{m})$	$5 \cdot 10^6$
$l_0(m)$	0,53775
$c_a(\frac{Ns}{m})$	$5 \cdot 10^4$

¹Estas propiedades son una estimación de las mismas y por tanto, pueden diferir considerablemente con respecto a las de un vehículo real de dimensiones similares.

²Los productos de inercia I_{xy} e I_{yz} son nulos considerando el plano xz como plano de simetría.

En la figura 3.8, se muestra un detalle de la suspensión.

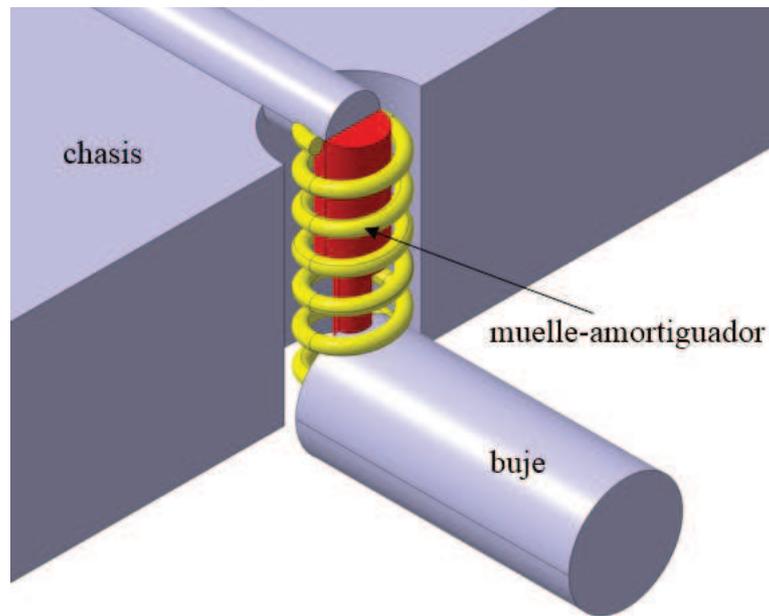


Figura 3.8: Detalle de la suspensión

3.3.3. Dirección

La dirección en las ruedas directrices es función del radio de giro del volante. La expresión que relaciona el ángulo de giro de cada rueda dada una curva con un radio de giro determinado [4] [8] [9], figura 3.9, es la siguiente:

$$\frac{1}{\tan\delta_D} - \frac{1}{\tan\delta_I} = \frac{i}{c} \quad (3.19)$$

siendo δ_I el ángulo girado por la rueda izquierda, δ_D el ángulo girado por la rueda derecha, i la distancia entre los ejes de giro (ejes de pivotamiento) de las ruedas directrices y c la distancia entre eje delantero y eje trasero de la cabeza tractora. Se han considerado valores positivos para ambos ángulos. Para valores negativos, tal como viene en la figura 3.9, la expresión que los relaciona viene dada por la ecuación (3.20):

$$\frac{1}{\tan\delta_I} - \frac{1}{\tan\delta_D} = \frac{i}{c} \quad (3.20)$$

tabla 3.6⁽³⁾:

Tabla 3.6: Parámetro de la tracción

Parámetro	Valor
r_t	1

3.3.5. Aerodinámica

El estudio de la aerodinámica de un vehículo es en general una parte compleja de su diseño.

Los vehículos de todo tipo se mueven en el seno de fluidos. El movimiento del fluido alrededor del vehículo provoca una serie de fuerzas sobre el mismo que pueden llegar a tomar valores muy considerables. En el caso de vehículos automóviles, el interés fundamental sobre estas fuerzas se ha centrado tradicionalmente en la reducción de la fuerza aerodinámica que se opone al movimiento [12].

Para el sistema multicuerpo de este vehículo articulado se considerará que la fuerza de resistencia aerodinámica está aplicada en el centro de gravedad de la cabeza tractora, cuerpo 1, siendo el coeficiente de resistencia aerodinámica el que tiene en cuenta la geometría de todo el vehículo y que la velocidad de la corriente de fluido incidente es la velocidad de la cabeza tractora, cuerpo 1. Además, se consideran despreciables la fuerza de sustentación aerodinámica y el momento aerodinámico.

En realidad, las fuerzas aerodinámicas están aplicadas en el centro de presiones aerodinámico del vehículo, que no coincide con el centro de gravedad pero está muy próximo a éste.

La fuerza de resistencia aerodinámica sobre el sistema multicuerpo viene dada por la ecuación (2.110) y su módulo es:

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho A C_D (v_G^1)^2 \quad (3.24)$$

siendo v_G^1 el módulo de la velocidad del centro de gravedad de la cabeza tractora.

En la tabla 3.7 se detallan los valores de los parámetros aerodinámicos del sistema multicuerpo, a saber: la densidad del aire típica ρ (se considera aire como fluido del medio gaseoso que rodea al vehículo), la superficie frontal de la cabeza tractora A y el coeficiente de resistencia aerodinámica C_D ⁽⁴⁾.

³Se considera un valor unitario para el coeficiente de relación de transmisión, por simplicidad.

⁴Para el coeficiente de resistencia aerodinámica se considera un valor estimado. En la realidad dicho coeficiente depende de la geometría de los cuerpos sobre los que incide la corriente de fluido.

Tabla 3.7: Parámetros aerodinámicos

Parámetro	Valor
$\rho(\frac{kg}{m^3})$	1,2
$A(m^2)$	7,5
C_D	1,0

3.3.6. Fuerzas tangenciales de contacto

En términos generales, las fuerzas tangenciales de contacto son fuerzas aplicadas que dependen de varios parámetros. La mejor estimación hoy en día de las mismas se consigue con la famosa fórmula mágica de Pacejka [14], fórmula heurística semiempírica que describe con exactitud el valor de las fuerzas de contacto para el contacto neumático-suelo (para la interacción rueda-carril en ferrocarriles se emplea la teoría de Kalker [15]).

Sin embargo, en este trabajo se considera un modelo simplificado de un parámetro, la velocidad límite de deslizamiento v_{lim} , además del coeficiente de rozamiento μ entre neumático y suelo, definido por la ecuación (2.115) y la figura 2.7. Los valores de dichos parámetros se recogen en la tabla 3.8. Evidentemente, al ser un modelo simplificado es menos preciso [10].

Tabla 3.8: Parámetros de la fuerza tangencial de contacto

Parámetro	Valor
$v_{lim}(\frac{m}{s})$	5,0
μ	0,8

No se han tenido en cuenta los efectos asociados a las fuerzas laterales de contacto y a los momentos de contacto [12] [13].

3.3.7. Fuerza de la gravedad

Finalmente queda por definir la fuerza de la gravedad. El parámetro asociado a dicha fuerza es la aceleración de la gravedad \mathbf{g} , en el lugar donde se encuentra el vehículo. El valor escogido para dicho parámetro se recoge en la tabla 3.9⁽⁵⁾ [16]:

⁵Se considera la aceleración de la gravedad terrestre redondeada al segundo decimal, a nivel del mar y latitud 37,39°.

Tabla 3.9: Parámetro de la fuerza gravitatoria

Parámetro	Valor
$g(\frac{m}{s^2})$	9,80

3.3.8. Determinación de las coordenadas dependientes e independientes del sistema

El método de Shabana de partición de coordenadas distingue entre coordenadas dependientes e independientes. Para seleccionarlas, este método considera tantas variables dependientes como restricciones haya de tal forma que la matriz jacobiana de dichas variables sea no singular. Al resto de variables se les llama independientes. Este conjunto de variables no es único, como ya se ha indicado en la sección 2.4.7. Una forma práctica de encontrar un conjunto de variables dependientes es teniendo en cuenta la siguiente consideración intuitiva: el conjunto de variables independientes debe ser tal que geoméricamente sea posible determinar el conjunto del resto de variables conocido el valor del primero.

Para la simulación llevada a cabo en este trabajo se han considerado las siguientes variables independientes y dependientes, definidas en los vectores \mathbf{q}_i y \mathbf{q}_d , respectivamente:

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} R_{G_x}^1 \\ R_{G_y}^1 \\ R_{G_z}^1 \\ \psi^1 \\ \phi^1 \\ \theta^1 \\ \psi^2 \\ \phi^2 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \\ \theta^4 \\ \theta^5 \\ \theta^7 \\ \theta^8 \\ \delta \\ \theta^m \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Las variables independientes escogidas son las 6 coordenadas que definen la

posición y orientación del sólido 1 ($R_{G_x}^1, R_{G_y}^1, R_{G_z}^1, \psi^1, \phi^1, \theta^1$), las 3 coordenadas que definen la orientación del sólido 2 (ψ^2, ϕ^2, θ^2), las coordenadas de giro alrededor del eje Y de las ruedas correspondientes a los sólidos 3,4,5,7 y 8 ($\theta^3, \theta^4, \theta^5, \theta^7, \theta^8$), el ángulo de giro del volante de la dirección (δ) y el ángulo de giro del motor (θ^m).

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} R_{G_x}^2 \\ R_{G_y}^2 \\ R_{G_z}^2 \\ \theta^6 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \\ s^6 \\ s^7 \\ s^8 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Las variables dependientes son el resto: las 3 coordenadas de posición del sólido 2 ($R_{G_x}^2, R_{G_y}^2, R_{G_z}^2$), la coordenada del ángulo de giro respecto alrededor del eje Y de la rueda correspondiente al sólido 6 (θ^6) y las 6 coordenadas de la suspensión de cada una de las ruedas ($s^3, s^4, s^5, s^6, s^7, s^8$).

3.3.9. Restricciones cinemáticas

No sólo bastan las ecuaciones de Newton-Euler sino que además se deben imponer las ecuaciones de restricción, tal como se indica en la ecuación (2.121). En dinámica restringida, las ecuaciones de restricción cinemática son tan importantes como las ecuaciones de Newton-Euler.

Las ecuaciones correspondientes a las restricciones cinemáticas vienen expresadas por la relación (2.122). A continuación se desarrolla esa expresión.

Las restricciones cinemáticas a imponer al movimiento son: las restricciones de contacto entre ruedas y terreno, la restricción debida al diferencial de la transmisión y la restricción de posición en la rótula esférica correspondiente a la unión entre *quinta rueda* y *king pin*.

Las restricciones de contacto indican cuanto debe valer la componente global z del centro de gravedad de cada rueda, por tanto vendrán dadas por:

$$\mathbf{C}_{contacto} = \begin{bmatrix} R_{G_z}^3 - R \\ R_{G_z}^4 - R \\ R_{G_z}^5 - R \\ R_{G_z}^6 - R \\ R_{G_z}^7 - R \\ R_{G_z}^8 - R \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Estos valores de las componentes del vector de restricciones cinemáticas de contacto se corresponden con un perfil plano del terreno sobre el que rueda el vehículo.

La restricción del diferencial viene dada por la relación cinemática (3.23). Expresada correctamente establece la siguiente relación:

$$\mathbf{C}_{diferencial} = \left[\theta^m - r_t \frac{\theta^5 + \theta^6}{2} \right] \quad (3.28)$$

Por último, las restricciones de posición en la rótula esférica correspondiente a la articulación entre *quinta rueda* y *king pin* son las tres restricciones siguientes:

$$\mathbf{C}_{articulacion} = \begin{bmatrix} R_{A_x}^1 - R_{A_x}^2 \\ R_{A_y}^1 - R_{A_y}^2 \\ R_{A_z}^1 - R_{A_z}^2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Agrupando todas las restricciones, resulta:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} R_{G_z}^3 - R \\ R_{G_z}^4 - R \\ R_{G_z}^5 - R \\ R_{G_z}^6 - R \\ R_{G_z}^7 - R \\ R_{G_z}^8 - R \\ \theta^m - r_t \frac{\theta^5 + \theta^6}{2} \\ R_{A_x}^1 - R_{A_x}^2 \\ R_{A_y}^1 - R_{A_y}^2 \\ R_{A_z}^1 - R_{A_z}^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

que es un conjunto de restricciones que depende exclusivamente de las coordenadas generalizadas -sustituyendo cada término por su valor en función de las mismas-.

Tan importantes como las ecuaciones de restricción son las ecuaciones correspondientes a la matriz jacobiana de las restricciones así como su derivada, necesarias para obtener las ecuaciones del movimiento del sistema multicuerpo.

3.3.10. Posición de equilibrio estático

Un concepto importante a tener en cuenta a la hora de realizar una simulación es el de las condiciones iniciales para integrar las ecuaciones de movimiento.

Como en todo problema de ecuaciones diferenciales de valores iniciales, es necesario dar a las variables unos valores iniciales para el comienzo de la integración del sistema de ecuaciones. Y para que la integración sea posible y no se produzca divergencia en la misma, una condición necesaria es que los valores iniciales que se proporcionen a las coordenadas generalizadas estén próximos a los valores de las coordenadas generalizadas correspondientes a la posición de equilibrio estático de la que parte el sistema en la realidad. De aquí la importancia de encontrar esa posición y proporcionarla como valor inicial en la simulación interactiva, simulación que utiliza un integrador de paso constante definido por el usuario en la función del integrador utilizada, por defecto el integrador de segundo orden de Adams-Bashforth.

Para obtener las condiciones iniciales correspondientes a la posición de equilibrio estático, se emplea el simulador no interactivo con el integrador *ode45* de *Matlab*, que es un integrador de paso variable que permite realizar integraciones con variaciones temporales de las coordenadas generalizadas más acusadas y con ello no se produce divergencia en el método de integración. Por poner un caso particular, el integrador *ode45* permite recoger las oscilaciones de inestabilidad correspondientes a una situación inicial de no equilibrio, de tal forma que sea convergente el método de integración [18] [19] [20].

Capítulo 4

Desarrollo del código en Matlab para la simulación

4.1. Introducción

El proceso de generación del simulador en el programa Matlab ha consistido en generar un programa que realice una simulación, del sistema mecánico bajo estudio, de forma no interactiva. Se ha basado el trabajo en el artículo [21]. Con este simulador se pueden realizar estudios particulares del sistema mecánico, tales como obtener las fuerzas sobre el sistema o el cálculo de la posición, la velocidad y la aceleración de los cuerpos del mismo. Previamente se ha utilizado el cálculo simbólico para obtener los valores de todas las matrices de transformación \mathbf{A}^i , todas las matrices jacobianas traslacionales y rotacionales \mathbf{H}_G^i , \mathbf{h}_G^i , \mathbf{G}^i y \mathbf{g}^i , todas las restricciones, la matriz jacobiana de las restricciones, la derivada temporal de la matriz jacobiana de las restricciones y la matriz de masa y fuerzas. Todo ello se ha implementado en el archivo *calculosimbolico.m*. Con el cálculo simbólico se ha conseguido obtener expresiones más compactas y rápidas computacionalmente, mediante el proceso conocido por atomización. De esta manera se ejecutan las funciones menos veces y se consigue acelerar el proceso de cálculo.

Para la simulación no interactiva, la entrada es el par motor y el valor del ángulo de giro del volante de la dirección se deja libre. Esta simulación se utiliza para obtener la posición de equilibrio estático utilizada para iniciar la simulación interactiva y posteriores análisis mediante simulación no interactiva. Es necesario que sea así, para que el integrador parta de una solución estática próxima a la real y de esta forma no diverja la integración en el primer paso de integración.

Posteriormente, se ha generado el simulador interactivo, que tiene dos entradas controladas por el usuario, desde un mando instalado por el puerto USB al

computador donde se realiza la simulación, que son el par motor y el ángulo de giro del volante de la dirección (variable guiada).

El valor de las coordenadas generalizadas en la posición inicial para el simulador interactivo se ha obtenido considerando un tiempo de 100s de simulación no interactiva con par motor nulo, redondeando a cero las coordenadas no significativas y considerando iguales las coordenadas de la suspensión dos a dos, resultando los siguientes valores para las coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q}(t = 0) = \begin{bmatrix} R_{G_x}^1 \\ R_{G_y}^1 \\ R_{G_z}^1 \\ \psi^1 \\ \phi^1 \\ \theta^1 \\ R_{G_x}^2 \\ R_{G_y}^2 \\ R_{G_z}^2 \\ \psi^2 \\ \phi^2 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \\ \theta^4 \\ \theta^5 \\ \theta^6 \\ \theta^7 \\ \theta^8 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \\ s^6 \\ s^7 \\ s^8 \\ \delta \\ \theta^m \end{bmatrix}_{(t=0)} = \begin{bmatrix} -1,855610597796505 \\ 0 \\ +0,593852604187865 \\ 0 \\ -0,000879008892232 \\ 0 \\ -6,806092721969139 \\ 0 \\ +1,293750624023297 \\ 0 \\ +0,000301364962591 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +0,5324047530 \\ +0,5324047530 \\ +0,5299764600 \\ +0,5299764600 \\ +0,5332287900 \\ +0,5332287900 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Estos valores se introducen en el archivo *CalculaCoordRefInteractiva.m* tomado por la simulación interactiva como punto de inicio de la simulación. Si se desean realizar simulaciones no interactivas, igualmente deben introducirse estos

valores en el archivo *CalculaCoordRef.m* tomado por la simulación no interactiva como punto de inicio, salvo que se desee iniciar la simulación desde otra posición de referencia.

4.2. Archivos de programación definidos

A continuación, se van a listar cada uno de los archivos *Matlab* generados para construir el simulador.

Se ha generado un bloque de cálculo simbólico en el que se aglutinan el archivo para generar los archivos de forma simbólica: *calculosimbolico.m*, y los archivos generados: *TodosA.m*, *TodosGyH.m*, *Restricciones.m*, *JacobRestricciones.m*, *DJacobRestricciones.m* y *MatMasaFuerzas.m*. El resto de funciones pertenecen al bloque de simulación, bloque que a su vez incluye a las funciones generadas por cálculo simbólico.

Bloque de cálculo simbólico:

- *calculosimbolico.m*: el contenido de este archivo es el siguiente:
 - definición de las variables simbólicas:
 - definición de las variables de posición y sus derivadas como variables simbólicas,
 - definición del vector de coordenadas generalizadas y su derivada,
 - definición de los parámetros geométricos como variables simbólicas,
 - definición de los vectores de posición en coordenadas locales,
 - definición de los parámetros inerciales como variables simbólicas,
 - definición de los tensores de inercia,
 - definición de la aceleración de la gravedad como variable simbólica,
 - definición del parámetro de la dirección como variable simbólica,
 - definición de los parámetros de la suspensión como variables simbólicas.
 - definición de la cinemática rotacional:
 - relaciones cinemáticas entre los giros de las ruedas y el ángulo de giro del volante,
 - definición de las matrices de rotación simple,
 - cálculo de las matrices de rotación de los sistemas de referencia de los sólidos,

- cálculo de las velocidades angulares en coordenadas locales.
- definición de la cinemática traslacional:
 - definición de los centros de gravedad en coordenadas globales,
 - cálculo de las matrices jacobianas traslacionales y rotacionales,
 - generación de la matriz con las matrices de transformación de cada uno de los sólidos,
 - generación de la matriz con las matrices \mathbf{G}^i y \mathbf{H}_G^i de cada uno de los sólidos.
 - generación de los archivos *TodosA.m*, con todas las matrices de transformación de los sólidos, y *TodosGyH.m* con las matrices \mathbf{G}^i y \mathbf{H}_G^i de cada uno de los sólidos.
- determinación de las ecuaciones de Newton-Euler:
 - cálculo de la matriz de Newton-Euler,
 - cálculo de las fuerzas inerciales, generalizadas de Newton-Euler cuadráticas en velocidad,
 - cálculo de la fuerza de la gravedad generalizada,
 - cálculo de las matrices de transformación cinemática \mathbf{L} y \mathbf{l} ,
 - determinación de la fuerza motriz generalizada:
 - ◇ definición de la inercia del motor y el par motor como variables simbólicas,
 - ◇ cálculo de la fuerza motriz generalizada.
- definición del sistema de ecuaciones añadiendo la ecuación del par motor,
- definición de las fuerzas de suspensión generalizadas:
 - cálculo de los vectores de posición en coordenadas locales de los extremos de cada una de las suspensiones,
 - cálculo de los vectores de posición en coordenadas globales de los extremos de cada una de las suspensiones,
 - cálculo de la longitud de los muelles y sus derivadas⁽¹⁾,
 - cálculo de las matrices jacobianas de las suspensiones y sus derivadas,
 - cálculo del vector de las fuerzas de suspensión generalizadas.
- determinación de la fuerza aerodinámica generalizada:

¹La longitud de los muelles y amortiguadores se supone idéntica para cada una de las suspensiones.

- definición de los parámetros, aerodinámicos como variables simbólicas,
 - cálculo de la fuerza aerodinámica generalizada.
- definición de las restricciones de contacto:
 - cálculo del vector de restricciones de contacto, de su matriz jacobiana y su derivada.
- definición de la restricción del diferencial:
 - definición del parámetro del diferencial como variable simbólica,
 - cálculo de la restricción del diferencial, de su matriz jacobiana y su derivada.
- determinación del vector de restricciones total:
 - cálculo del vector de restricciones, de su matriz jacobiana y su derivada,
 - generación de los archivos *Restricciones.m*, *JacobRestricciones* y *DJacobRestricciones.m*, con el vector de restricciones, la matriz jacobiana y su derivada, respectivamente.
- definición de la matriz de masa y de todas las fuerzas generalizadas
 - cálculo de la matriz de masa y fuerzas generalizadas,
 - generación del archivo *MatMasaFuerzas.m* con la matriz de masa y fuerzas generalizadas.
- *TodosA.m*: archivo con la función que calcula los valores de todas las matrices de transformación de los cuerpos del sistema multicuerpo.
- *TodosGyH.m*: archivo con la función que calcula los valores de todas las matrices \mathbf{G}^i y \mathbf{H}_G^i de los cuerpos del sistema multicuerpo.
- *Restricciones.m*: archivo con la función que determina el vector de restricciones del sistema multicuerpo.
- *JacobRestricciones.m*: archivo con la función que calcula la matriz jacobiana de las restricciones del sistema multicuerpo.
- *DJacobRestricciones.m*: archivo con la función que calcula la derivada de la matriz jacobiana de las restricciones del sistema multicuerpo.

- ***MatMasaFuerzas.m***: archivo con la función que determina los valores de la matriz de masa y las fuerzas generalizadas del sistema multicuerpo⁽²⁾.

Bloque de simulación:

- ***AnimaCamion.m***: archivo con la función generadora de gráficos.
- ***CalculaCoordRef.m***: archivo con la función que genera el vector de coordenadas correspondiente a la posición de referencia del sistema, almacenado en la variable tipo estructura *ParamCam*.
- ***CalculaCoordRefInteractiva.m***: archivo con la función que genera el vector de coordenadas correspondiente a la posición inicial del sistema para la simulación interactiva, almacenado en la variable tipo estructura *ParamCam*.
- ***cross.m***: archivo con la función que calcula el producto vectorial de dos vectores.
- ***EcMovCamion.m***: archivo con la función que determina el movimiento del sistema de manera no interactiva.
- ***EcMovCamionInteractiva.m***: archivo con la función que determina el movimiento del sistema de manera interactiva.
- ***FuerzasTangencialesContacto.m***: archivo con la función para calcular el valor de las fuerzas tangenciales de contacto a partir de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y las fuerzas normales de contacto.
- ***ParametrosCamion.m***: archivo con la función en la que se indican los valores de los parámetros del sistema en la variable tipo estructura *ParamCam*.
- ***ParametrosCamionInteractiva.m***: archivo con la función en la que se indican los valores de los parámetros del sistema en la variable tipo estructura *ParamCam* para la simulación interactiva.
- ***PasoEuler.m***: archivo con la función que integra un paso de tiempo la ecuación diferencial del movimiento aplicando el método de Euler.
- ***PasoRungeKutta21.m***: archivo con la función que integra un paso de tiempo la ecuación diferencial del movimiento aplicando el método de Runge-Kutta de segundo orden.

²En todos los archivos generados simbólicamente se deben cambiar las variables al número de las que dependa cada función, eliminando el resto. Además, se han de definir como variables globales todas las que necesite cada función.

- *PasoRungeKutta41.m*: archivo con la función que integra un paso de tiempo la ecuación diferencial del movimiento aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.
- *PasoAdamsBashforth2.m*: archivo con la función que integra un paso de tiempo la ecuación diferencial del movimiento aplicando el método de Adams-Bashforth de segundo orden.
- *Simulacion.m*: archivo en el que se ejecuta la simulación del movimiento del sistema de forma no interactiva.
- *SimulacionInteractiva.m*: archivo en el que se ejecuta la simulación del movimiento del sistema de forma interactiva.

4.3. Diagramas de flujo de las llamadas a las funciones en las simulaciones

4.3.1. Simulación no interactiva

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestra el diagrama de flujo con el orden de llamada a las funciones para la simulación no interactiva, detallándose en la figura 4.2 el bloque correspondiente al integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias empleado, en este caso la función *ode45.m* de *Matlab*:

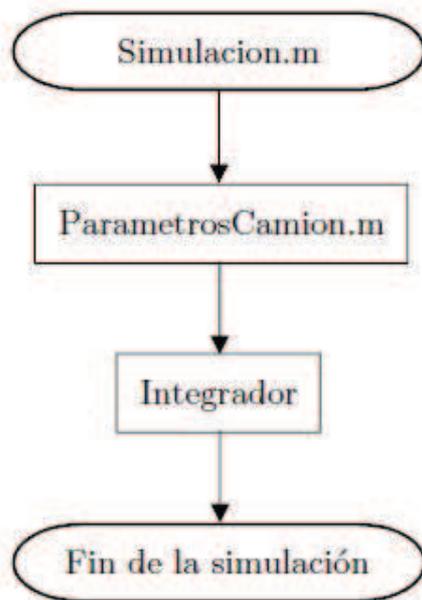


Figura 4.1: Diagrama de flujo de la simulación no interactiva

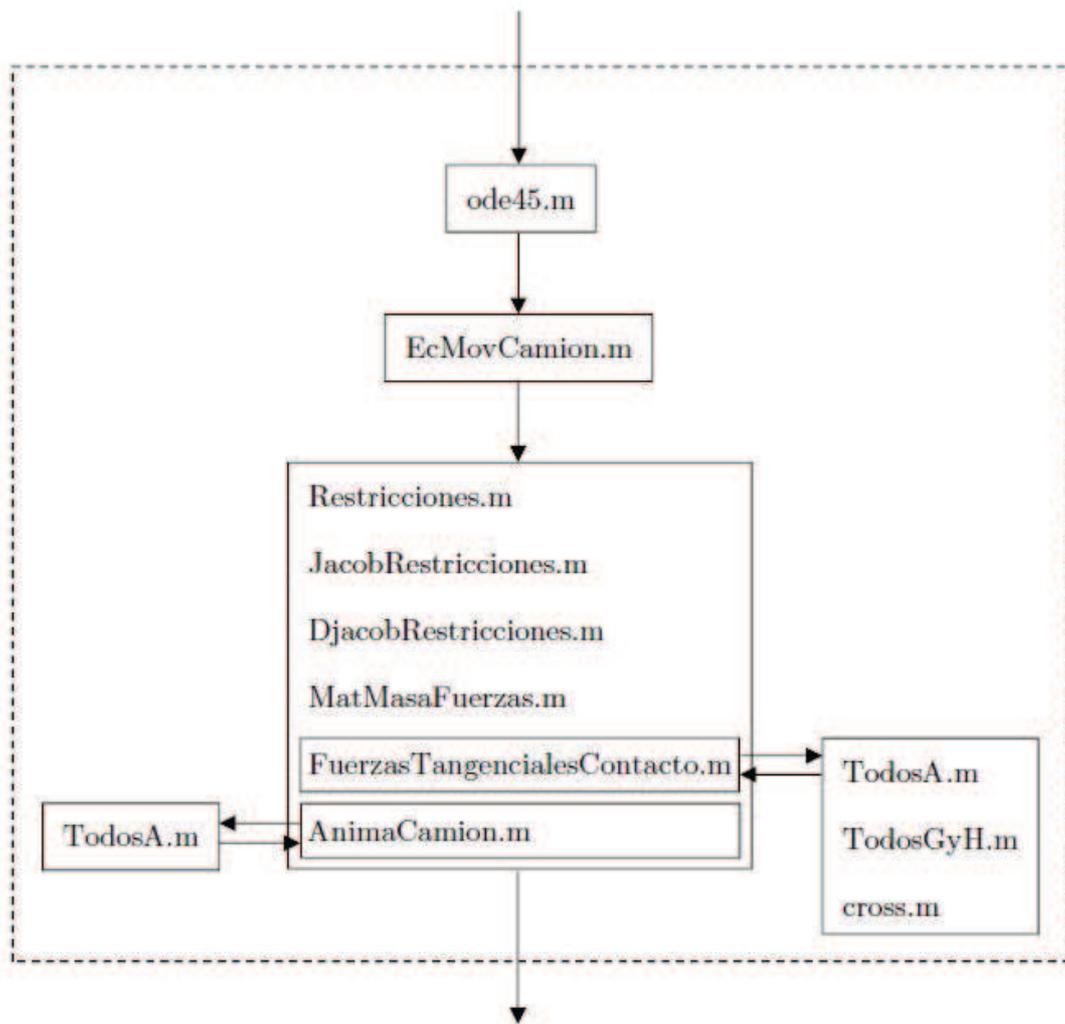


Figura 4.2: Diagrama de flujo del bloque integrador

4.3.2. Simulación interactiva

A continuación, en las figuras 4.3 y 4.4 se muestra el diagrama de flujo con el orden de llamada a las funciones para la simulación interactiva. En la figura 4.4 se detalla el bloque correspondiente al integrador que por defecto se considera el correspondiente al método de Adams-Bashforth:

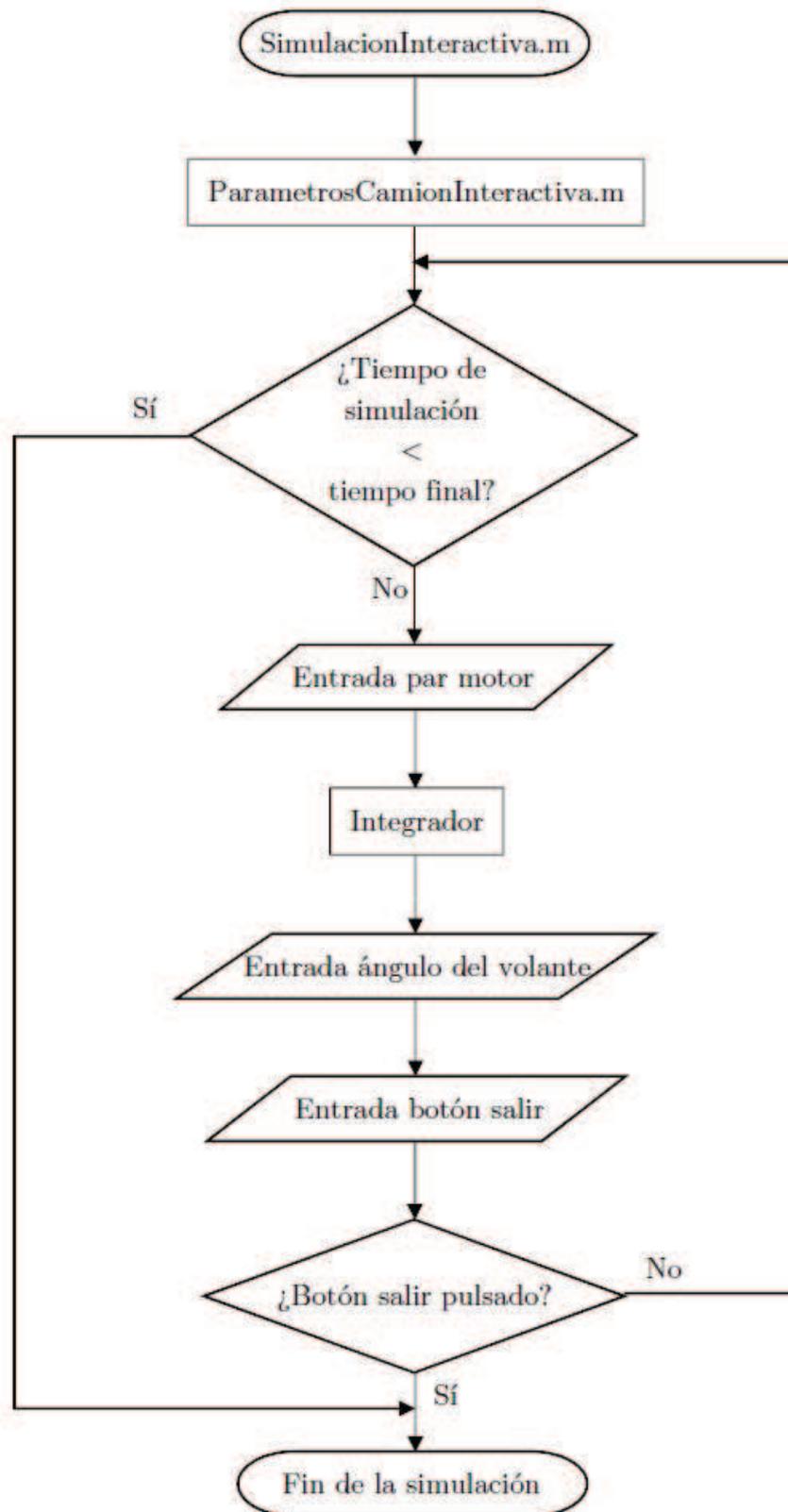


Figura 4.3: Diagrama de flujo de la simulación interactiva

4.4. Ejecución de la simulación

4.4.1. Mando de control

Para comenzar la simulación se debe ejecutar el archivo *SimulacionInteractiva.m*, de esta manera se reproduce la simulación interactiva.

Las señales de entrada son dos: el par motor como fuerza externa y el ángulo del volante de la dirección que es la variable guiada. Estas señales de entrada se introducen en el sistema mediante un mando de control. En este caso, se ha utilizado un mando de la marca NGS modelo MAVERICK, véase figura 4.5.



Figura 4.5: Mando de control NGS-Maverick

4.4.2. Controles

En la figura 4.6, obtenida del manual de instrucciones del mando de control, se tienen los códigos de referencia de los botones de control. En la simulación de este trabajo se han empleado los botones número 3, 12 y 13.

El botón número 3 se emplea para salir de la simulación cerrando la ventana de animación. El control de la dirección se realiza mediante el mando analógico número 12. Desplazándolo hacia la izquierda se produce un giro hacia la izquierda de la dirección y desplazándolo hacia la derecha se produce un giro hacia la derecha de la

dirección.

El control del par motor se realiza mediante el mando analógico número 13. Desplazándolo hacia arriba se aplica un par positivo de aceleración con lo que el vehículo comenzará a moverse hacia adelante, mientras que si se desplaza hacia abajo se aplica un par negativo de desaceleración.

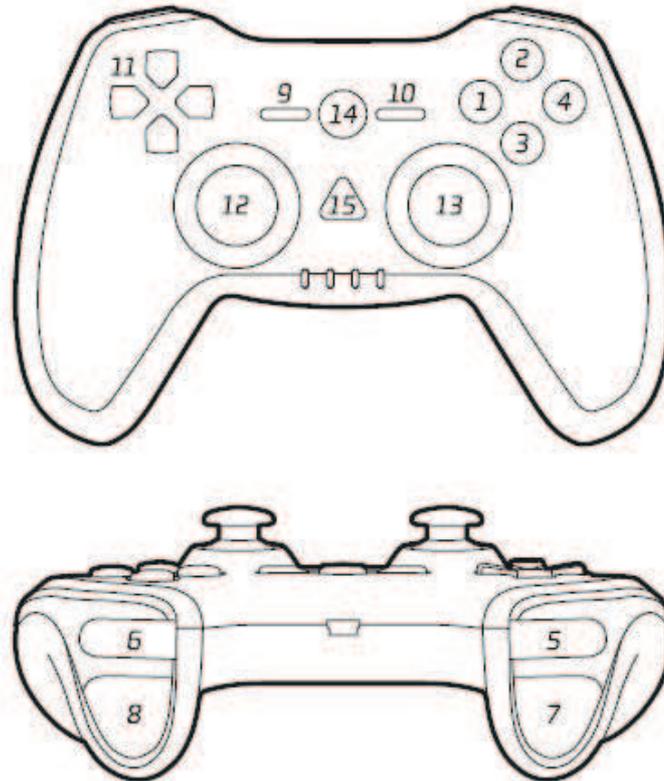


Figura 4.6: Controles del mando de control NGS-Maverick

4.5. Listado de los códigos de los archivos

En la carpeta *Anexo* del CD adjunto a la memoria en el anexo I, se incluye el listado con los códigos en *Matlab* de los archivos, antes mencionados, para la simulación del sistema multicuerpo bajo estudio. Se incluyen dos subcarpetas a su vez: *Calculosimbolico* y *Simulacion*. La carpeta *Calculosimbolico* contiene el archivo necesario para la generación de los archivos en cálculo simbólico:

- *calculosimbolico.m*

Y la carpeta *Simulacion* contiene el resto de archivos para las simulaciones:

- *TodosA.m*
- *TodosGyH.m*
- *Restricciones.m*
- *JacobRestricciones.m*
- *DJacobRestricciones.m*
- *MatMasaFuerzas.m*
- *AnimaCamion.m*
- *CalculaCoordRef.m*
- *CalculaCoordRefInteractiva.m*
- *cross.m*
- *EcMovCamion.m*
- *EcMovCamionInteractiva.m*
- *FuerzasTangencialesContacto.m*
- *ParametrosCamion.m*
- *ParametrosCamionInteractiva.m*
- *PasoEuler.m*
- *PasoRungeKutta21.m*

- *PasoRungeKutta41.m*
- *PasoAdamsBashforth2.m*
- *Simulacion.m*
- *SimulacionInteractiva.m*

Capítulo 5

Resultados y animación

5.1. Resultados

Una forma de obtener resultados, para un posterior análisis, como los valores de fuerzas o de las coordenadas generalizadas, es considerar el simulador no interactivo posteriormente a la simulación interactiva, utilizando como datos los de la simulación interactiva previamente guardados en un archivo de texto, o bien utilizando tablas precalculadas que impongan los valores de las fuerzas o pares de entrada y los valores de las variables guiadas.

Debido a la gran variedad de resultados, no se han expuesto en este trabajo gráficas que representen las posibles variables a estudiar, sino que sólo se expone la representación gráfica resultado de la simulación.

5.2. Vistas de animación

Para la representación gráfica y animación del movimiento del vehículo se han utilizado diferentes vistas: vista tridimensional, vista de planta, vista de perfil y vista frontal. Para cambiar las vistas se emplea el comando *view* de *Matlab* en el archivo *AnimaCamion.m*

5.2.1. Vista tridimensional

Esta vista se reproduce al introducir la orden *view(-35,35)* en *Matlab*. El resultado por pantalla para el instante inicial es el de la figura 5.1.

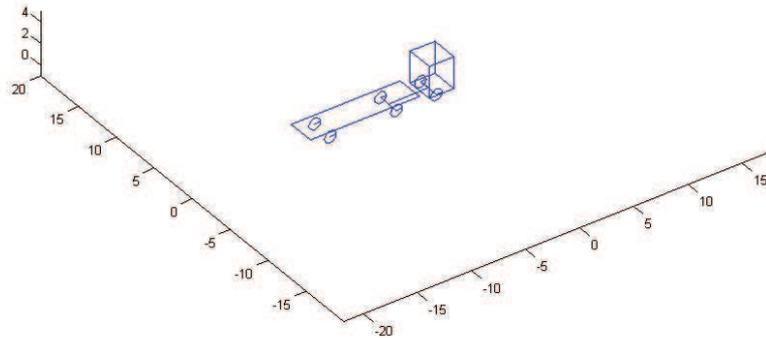


Figura 5.1: Vista tridimensional de la simulación

5.2.2. Vista de planta

Esta vista se reproduce al introducir la orden `view(0,90)` en *Matlab*. El resultado por pantalla para el instante inicial es el de la figura 5.2.

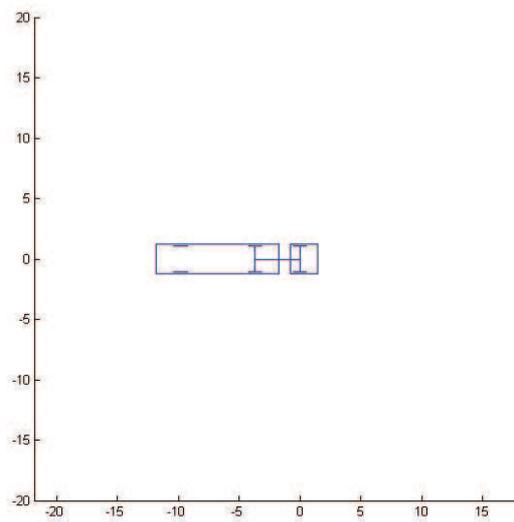


Figura 5.2: Vista de planta de la simulación

5.2.3. Vista de perfil

Esta vista se reproduce al introducir la orden $view(0,0)$ en *Matlab*. El resultado por pantalla para el instante inicial es el de la figura 5.3.

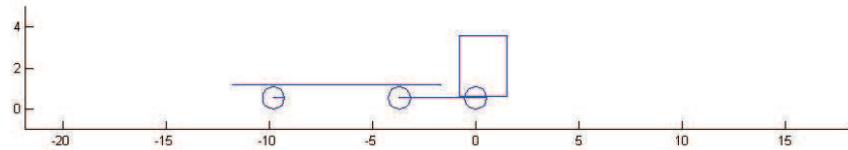


Figura 5.3: Vista de perfil de la simulación

5.2.4. Vista frontal

Esta vista se reproduce al introducir la orden $view(90,0)$ en *Matlab*. El resultado por pantalla para el instante inicial es el de la figura 5.4.

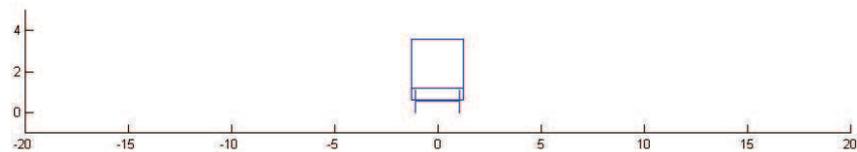


Figura 5.4: Vista frontal de la simulación

Capítulo 6

Resumen, conclusiones y trabajos futuros

6.1. Resumen

El objetivo de este trabajo ha sido obtener un simulador en tiempo real de la dinámica de un camión articulado constituido por cabeza tractora y semirremolque que rueda sobre un perfil plano con contacto puntual en cada una de sus ruedas.

Para ello, se ha creado un modelo no interactivo mediante dinámica de sistemas multicuerpo del sistema para obtener las condiciones iniciales del modelo interactivo, correspondientes a la solución de equilibrio estático.

Finalmente, se ha generado el modelo del sistema considerando como variable guiada el ángulo de giro del volante de la dirección y con ello se ha conseguido obtener el simulador interactivo.

Se ha implementado el trabajo en lenguaje de programación *Matlab* y la representación y animación también se ha llevado a cabo en este entorno.

6.2. Conclusiones

Inicialmente, para la definición de las matrices de giro del sistema se consideraron ángulos de giro del semirremolque relativos a la cabeza tractora y por consiguiente no tener en cuenta la restricción de la articulación esférica. Sin embargo, se obtuvo que el tiempo de cálculo de las funciones simbólicas era muy superior al que se obtenía si se consideraban ángulos independientes para cabeza tractora y semirremolque y se introducía la restricción de articulación esférica correspondiente a la quinta rueda.

También se generaron funciones MEX en *Matlab* para acelerar la ejecución,

pero no eran necesarias pues la simulación se ejecuta correctamente sin necesidad de acelerar el proceso.

El integrador más eficaz, rápido y preciso implementado es el de Adams-Bashforth sin embargo es el más sensible a las condiciones iniciales. Por contra, el del método de Euler es más robusto pero más lento y con mayores errores de integración.

6.3. Trabajos futuros

Son muchas las modificaciones que se pueden introducir en el presente modelo en trabajos futuros. A continuación, se listan las más interesantes desde el punto de vista técnico:

- Introducir en el modelo caja de cambios con embrague.
- Realizar un postprocesador de modo que se puedan obtener más fácilmente datos de la simulación como: fuerzas, coordenadas generalizadas, etc.
- Modelar el vehículo con ruedas dobles en eje trasero del semirremolque y cabeza tractora, e incluso introducir un número mayor de ejes en el semirremolque.
- Realizar un modelo de contacto más complejo y realista, como puede ser un modelo de contacto elástico.
- Introducir distintos tipos de perfiles de contacto para estudiar el comportamiento del vehículo frente a diferentes tipos de terreno.
- Sustituir el modelo esférico de la articulación de la quinta rueda por un modelo más realista constituido por pares cilíndricos.
- Crear una interfaz gráfica con visualización en realidad virtual para dar más calidad gráfica a los resultados.
- Generar un modelo multicuerpo más complejo que incluya la caja de semirremolque elevable.

Anexo

Anexo I: Listado de los códigos de los archivos Matlab del simulador

El conjunto de archivos generados en este trabajo están contenidos en este CD adjunto a la memoria:

Bibliografía y referencias

- [1] Jens Wittenburg: *Dynamics of Multibody Systems*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2008)
- [2] Parviz E. Nikravesh: *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice Hall, New Jersey (1988).
- [3] Ahmed A. Shabana: *Computational Dynamics*, 3rd ed. WILEY, Singapore (2010).
- [4] José Font Mezquita y Juan Fco. Dols Ruiz: *Tratado sobre automóviles. Tomo IV: La dinámica del automóvil*, Editorial de la UPV, Valencia (2006).
- [5] H. Goldstein: *Mecánica Clásica*, 2ª ed. Editorial Reverté S.A., Barcelona (2006).
- [6] <http://www.talleresbalter.com>: *Talleres Balter S.L.*
- [7] F. R. Gantmájner: *Mecánica Analítica*, URSS, Moscú (1996).
- [8] J. Parraga: *Automoción 1*, Ediciones del Castillo, Madrid (1979)
- [9] J. Y. Wong: *Theory of Ground Vehicles*, 2nd. ed. WILEY, New York (1993)
- [10] Karl Popp and Werner Schiehlen: *Ground Vehicle Dynamics* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2010)
- [11] M. Arias-Paz: *Manual de Automóviles*, 55ª ed. DOSSAT, Madrid (2004)
- [12] Publio Pintado: *Un curso de automoción*, Universidad de Sevilla (1994)
- [13] Pablo Luque, Daniel Álvarez, Carlos Vera: *Ingeniería del Automóvil: Sistemas y Comportamiento Dinámico*, Thomson , Madrid (2005)
- [14] H. Pacejka: *Tire and Vehicle Dynamics*, Elsevier (2012)
- [15] J.J. Kalker: *Survey of Wheel-Rail Rolling Contact Theory*, Vehicle System Dynamics v. 8, n. 4, ps. 317-358 (1979)

- [16] H.D. Young y R.A. Freedman: *Física Universitaria*, Pearson, Estado de México (2009)
- [17] Arieh Iserles: *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge University Press, Glasgow (1996)
- [18] J.C. Butcher: *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. WILEY, Chichester (2008)
- [19] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner: *Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems*, Springer-Verlag, Berlin (1993)
- [20] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner: *Solving ordinary differential equations II: stiff and differential-algebraic problems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2010)
- [21] Marco Cipelli, Werner Schiehlen, Federico Cheli: *Driver-in-the-loop simulations with parametric car models: Vehicle System Dynamics*, Taylor and Francis 46:1,33—48 (2008)
- [22] K.L. Johnson: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985)
- [23] <http://www.landertsimulation.com>: *Lander: Simulation and Training Solutions*
- [24] <http://www.thoroughtec.com>: *Thoroughtec simulation*
- [25] <http://mag.volvotrucks.com/es-es/spain/article/?art=3966>: *El simulador de conducción: un camión virtual del futuro*
- [26] <http://simumak.com/es/simestruck>: *Conducción de vehículos pesados: simestruck*
- [27] <http://www.mssoftware.com>: *MSC Software Corporation*
- [28] <https://es.mathworks.com/products/simmechanics.html>: *SimMechanics*
- [29] <http://www.simpack.com>: *SimPack*
- [30] <https://www.design-simulation.com>: *SimWise*
- [31] <http://es.rockybytes.com/scania-truck-driving-simulator> *Scania Truck Driving Simulator 1.5.0*
- [32] <http://simulacionis.es.tl>: *Simulacionis*

- [33] T.J. Naylor, J.L. Balintfy, D.S. Burdick and K. Chu: *Computer Simulation Techniques*, WILEY, New York (1966)
- [34] Averill M. Law and W. David Kelton: *Simulation Modeling and Analysis*, 2nd edition, McGraw-Hill, USA (1991)
- [35] <https://www.nads-sc.uiowa.edu>: *National Advanced Driving Simulator*
- [36] <http://www.uv.es/uvweb/instituto-universitario-investigacion-transito-seguridad-vial-INTRAS/es/grupos-investigacion/sintec/simulador-conduccion-1285892946085.html>: Universidad de Valencia, *Simuveg*
- [37] <http://www.uolds.leeds.ac.uk>: University of Leeds Driving Simulator, *UoLDS*
- [38] J.L. Escalona: *Dinámica de una bicicleta*
- [39] A. Martín, J.L. Escalona: *Estudio analítico y experimental de la dinámica propia de una bicicleta*, Universidad de Sevilla (2009)
- [40] A. Martín, J.L. Escalona: *Contrastación experimental de un modelo analítico de la dinámica propia de una bicicleta*, Universidad de Sevilla (2009)
- [41] Manuel Cornax, J.L. Escalona: *Simulación y análisis de la dinámica de una bicicleta*, Universidad de Sevilla (2011)
- [42] Jesús Alcocer, J.L. Escalona: *Modelado computacional de la interacción neumático-terreno de una bicicleta para su simulación en tiempo real*, Universidad de Sevilla (2014)
- [43] Jesús Almirón, J.L. Escalona: *Simulación computacional interactiva en tiempo real de una bicicleta con suspensión sobre terreno irregular*, Universidad de Sevilla (2014)
- [44] J.F. Rivero, D. García: *Herramienta de Simulación Cinemática y Dinámica de una Motocicleta de Competición*, Universidad de Sevilla (2015)
- [45] H. Klee: *Simulation of Dynamic Systems with MATLAB and SIMULINK*, CRC Press: Taylor and Francis Group (2007)
- [46] Nancy Roberts, David Andersen, Ralph Deal, Michael Garet, William Shaffer: *Introduction to computer simulation: a system dynamics modeling approach*, Addison-Wesley (1983)

- [47] J.E. Shigley: *Simulation of Mechanical Systems: An Introduction*, McGraw-Hill (1967)
- [48] Bernard P. Zeigler: *Theory of modelling and simulation*, Robert E. Krieger Publishing Company, Florida (1976)