

Trabajo Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Industrial

Formulación y Programación de un Flujo de Cargas
Ampliado para Redes Trifásicas a Cuatro Hilos

Autor: Javier Sánchez Reyes

Tutor: Dra. D^a. Esther Romero Ramos

Dep. de Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Trabajo Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Industrial

Formulación y Programación de un Flujo de Cargas Ampliado para Redes Trifásicas a Cuatro Hilos

Autor:

Javier Sánchez Reyes

Tutor:

Dra. D^a. Esther Romero Ramos

Profesor titular

Dep. de Ingeniería Eléctrica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2017

Trabajo Fin de Máster:
Formulación y Programación de un Flujo de Cargas Ampliado para Redes Trifásicas a Cuatro Hilos

Autor: Javier Sánchez Reyes

Tutor: Dra. D^a. Esther Romero Ramos

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo Fin de Máster arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

Agradecimientos

A la primera persona, que se lo quiero agradecer es a mi prima Aurora, apoyo incondicional desde el primer momento, que sin sus consejos y ayudas gran parte de lo que soy hoy en día, no hubiese sido posible.

A mi familia, a todos aquellos que estaban y ahora no están, siempre los tengo presentes y seguro que estén donde estén, se sentirán orgullosos de ver cómo se cierra esta etapa de mi vida con éxito.

A mis amigos, a todos aquellos que he conocido durante esta etapa y junto con los que he compartido tantos buenos momentos. En especial a mis “cinco primaveras”, por estar siempre ahí y por aguantar mis manías y agonías, simplemente los mejores. También mencionar, a Satu e Isa, grandes amigos y sobre todo grandes personas, por sus consejos, por estar siempre ahí, aunque sea desde la distancia. Tampoco puedo olvidar la gran ayuda de mi amiga Luna, que siempre me ha tendido su mano y sin ella, parte de este proyecto no hubiese sido posible.

A todos aquellos que siguen estando cerca de mí y que le regalan a mi vida algo de ellos, GRACIAS.

Montilla, 12 de noviembre de 2017

Resumen

Este documento presenta el desarrollo de una formulación alternativa del algoritmo de *Newton-Raphson*, basada en residuos de intensidades y flujo de potencia, para redes trifásicas a cuatro hilos, en coordenadas cartesianas.

En primer lugar, se introduce una breve explicación del problema del flujo de carga y la formulación que lo define.

En segundo lugar, se presenta como punto de partida la formulación del algoritmo de *Newton-Raphson* clásico en coordenadas polares, basado en residuos de potencia.

A continuación, se amplía este algoritmo clásico, añadiendo al vector de estados y al de residuos las inyecciones de intensidad en los nudos, trabajando el problema en coordenadas cartesianas. Tomando como referencia el desarrollo ampliado anterior, se extrapola el algoritmo al caso de redes trifásicas a cuatro hilos, trabajando con un sistema de mayores dimensiones al hacer distinción entre las distintas fases y el neutro.

Desarrollada la nueva formulación, ésta se lleva a la práctica a través de su programación mediante la herramienta matemática *MATLAB*. Para validar la metodología aplicada, se crea un escenario de prueba del cual se extraen los resultados del problema del flujo de carga y se comparan con los proporcionados por el software comercial de libre distribución “*OpenDSS*”.

Por último, validado el algoritmo matemático, éste se aplica a una red de mayor dimensión de la cual se muestran los principales resultados obtenidos de la resolución del flujo de cargas.

Abstract

This document presents the development of an alternative formulation of the Newton-Raphson algorithm, based on residuals of intensities and power flow, for three-phase four-wire networks, in Cartesian coordinates.

First, a brief explanation of the load flow problem and the formulation that defines it is introduced.

Secondly, the formulation of the classical Newton-Raphson algorithm in polar coordinates, based on power residues, is presented as a starting point.

Then, this classic algorithm is extended, adding intensity injections in the nodes to the state vector and to the residue vector, working the problem in Cartesian coordinates. Taking as a reference the previous extended development, the algorithm is extrapolated to the case of three-phase four-wire networks, working with a system of greater dimensions when distinguishing between the different phases and the neutral.

Developed the new formulation, this is carried out through its programming through the mathematical tool MATLAB. To validate the applied methodology, a test scenario is created from which the results of the load flow problem are extracted and compared with those provided by the commercial software of free distribution "OpenDSS".

Finally, validated the mathematical algorithm, it is applied to a larger network of which the main results obtained from the resolution of the load flow are shown.

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Abstract	xi
Índice	xiii
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xix
1 Introducción [1]	1
1.1 <i>Flujo de carga</i>	1
1.2 <i>Formulación para un sistema trifásico equilibrado</i>	1
1.2.1 Modelo lineal de la red (ecuaciones nodales: fasores)	1
1.2.2 Restricciones no lineales	2
1.2.3 Variables de estado	3
1.3 <i>Herramientas del flujo de carga</i>	3
1.4 <i>Objetivo</i>	4
2 Newton-Raphson Clásico [1]	5
2.1 <i>Ecuaciones de partida</i>	5
2.1.1 Ecuaciones nodales	5
2.1.2 Restricciones no lineales	5
2.2 <i>Sistema a resolver</i>	5
2.2.1 Vector de estado	6
2.2.2 Jacobiano	6
2.2.3 Vector de residuos	6
2.3 <i>Proceso iterativo de resolución</i>	7
3 Newton-Raphson Ampliado [2]	9
3.1 <i>Ecuaciones de partida</i>	9
3.1.1 Modelo lineal de la red	9
3.1.2 Restricciones no lineales	9
3.2 <i>Linealización</i>	10
3.2.1 Modelo lineal de la red	10
3.2.2 Restricciones no lineales	11
3.3 <i>Residuos</i>	12
3.3.1 Residuos en intensidad	12
3.3.2 Residuos en potencia	12
3.4 <i>Sistema a resolver</i>	12
3.5 <i>Proceso iterativo de resolución</i>	13
4 Newton-Raphson Ampliado para Redes Trifásicas a Cuatro Hilos	17
4.1 <i>Ecuaciones de partida</i>	17
4.1.1 Modelo lineal de la red	17
4.1.2 Restricciones no lineales	20

4.2	<i>Linealización</i>	22
4.2.1	Modelo lineal de la red	23
4.2.2	Restricciones no lineales	24
4.3	<i>Residuos</i>	25
4.3.1	Residuos en intensidad	25
4.3.2	Residuos en potencia	26
4.4	<i>Sistema a resolver</i>	26
4.5	<i>Proceso iterativo de resolución</i>	28
5	Herramienta Matemática	33
5.1	<i>Formato de datos de entrada</i>	33
5.1.1	Datos de cargas/generación	33
5.1.2	Datos de los equipos	34
5.1.3	Datos de la topología de la red.	35
5.2	<i>Diagrama de flujo del algoritmo implementado</i>	36
5.2.1	Cargar los datos de entrada	38
5.2.2	Leer datos	38
5.2.3	Perfil inicial sencillo	38
5.2.4	Calcular las submatrices del Jacobiano	39
5.2.5	Calcular los residuos	40
5.2.6	Construir y resolver el sistema de ecuaciones	40
5.2.7	Aumentar contador	40
5.2.8	Actualizar vector de estados	41
5.2.9	Actualizar los residuos	41
5.2.10	Criterio de convergencia	42
5.2.11	Extraer resultados	42
6	Modelo de Validación	45
6.1	<i>Red de estudio</i>	45
6.2	<i>Datos de entrada</i>	47
6.2.1	Datos de Cargas	48
6.2.2	Datos de Equipos	48
6.2.3	Datos de Topología	48
6.3	<i>Validación de resultados del flujo de carga</i>	49
6.3.1	Cargas equilibradas	49
6.3.2	Cargas desequilibradas	53
7	Caso de Aplicación	57
7.1	<i>Topología de la red</i>	57
7.2	<i>Datos de la red</i>	58
7.2.1	Conductores	58
7.2.2	Conexiones	59
7.2.3	Datos de puestas a tierra	61
7.2.4	Datos de cargas	61
7.2.5	Datos del Slack	62
7.3	<i>Resultados</i>	62
7.3.1	Tensiones por nudo	62
7.3.2	Intensidades por ramas	65
7.3.3	Pérdidas por ramas	70
7.4	<i>Presencia de generación</i>	73
7.4.1	Resultados en tensión	74
7.4.2	Intensidades en las ramas	74
7.4.3	Pérdidas de potencia en las ramas	75
8	Conclusiones y Trabajo Futuro	77
9	Anexo I	79

9.1	<i>Modelo lineal de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos</i>	79
9.2	<i>Restricciones no lineales de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos</i>	80
9.3	<i>Modelo linealizado de las ecuaciones nodales de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos</i>	80
9.4	<i>Modelo linealizado de las restricciones no lineales de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos</i>	81
9.5	<i>Residuos de intensidad de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos</i>	82
9.6	<i>Residuos de potencia de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos</i>	82
9.7	<i>Sistema de ecuaciones a resolver del flujo de cargas en la validación de resultados</i>	83
9.7.1	Sistema de ecuaciones a resolver del flujo de carga	83
9.7.2	Obtención de intensidades de nudo slack (restricciones lineales)	84
Referencias		85

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Tensión por fase en el nudo Slack	45
Tabla 2. Impedancias del cable subterráneo para redes europeas de baja tensión definidas por CIGRE	46
Tabla 3. Características de las ramas	46
Tabla 4. Potencia de las cargas para el escenario equilibrado	46
Tabla 5. Potencia de las cargas para el escenario desequilibrado	47
Tabla 6 . Resistencias de puesta a tierra	47
Tabla 7. Caso equilibrado: tensiones del flujo de carga en OpenDSS	50
Tabla 8. Caso equilibrado: ángulos de la tensión del flujo de carga en OpenDSS	50
Tabla 9. Caso equilibrado: tensiones del flujo de carga del modelo propuesto	50
Tabla 10. Caso equilibrado: ángulos de la tensión del flujo de carga del modelo propuesto	50
Tabla 11. Caso equilibrado: intensidades del flujo de carga en OpenDSS	51
Tabla 12. Caso equilibrado: ángulos de la intensidad del flujo de carga en OpenDSS	51
Tabla 13. Caso equilibrado: intensidad del flujo de carga del modelo propuesto	52
Tabla 14. Caso equilibrado: ángulos de la intensidad del flujo de carga del modelo propuesto	52
Tabla 15. Intensidades del nudo slack	53
Tabla 16. Caso desequilibrado: tensiones del flujo de carga en OpensDSS	53
Tabla 17. Caso desequilibrado: ángulos de la tensión el flujo de carga en OpenDSS	53
Tabla 18. Caso desequilibrado: tensiones del flujo de carga del modelo propuesto	54
Tabla 19. Caso desequilibrado: ángulos de la tensión del flujo de carga del modelo propuesto	54
Tabla 20. Caso desequilibrado: intensidades por las ramas en OpenDSS	54
Tabla 21. Caso desequilibrado: ángulos de las intensidades por las ramas en OpenDSS	55
Tabla 22. Caso desequilibrado: intensidades por las ramas del modelo propuesto	55
Tabla 23. Caso desequilibrado: ángulos de las intensidades por las ramas del modelo propuesto	56
Tabla 24. Intensidades del nudo slack	56
Tabla 25. Matrices de impedancia primitiva de líneas subterráneas para redes de referencia europeas de distribución de BT	58
Tabla 26. Matrices de impedancia primitiva de líneas aéreas para redes de referencia europeas de distribución de BT	59
Tabla 27. Conexiones y parámetros de líneas residenciales para redes de refertencia europeas de distribución de BT	60
Tabla 28. Conexiones y parámetros de líneas industriales para redes de refertencia europeas de distribución de BT	60

Tabla 29. Conexiones y parámetros de líneas comerciales para redes de referencia europeas de distribución de BT	61
Tabla 30. Parámetros de cargas para redes de referencia europeas de distribución de BT	62
Tabla 31. Tensiones complejas del nudo de referencia	62
Tabla 32. Tensiones y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred residencial	63
Tabla 33. Tensiones y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred industrial	63
Tabla 34. Tensiones y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred comercial	64
Tabla 35. Intensidades y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred residencial (i_j/j_i)	67
Tabla 36. Intensidades y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred industrial (i_j/j_i)	67
Tabla 37. Intensidades y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred comercial (i_j/j_i)	69
Tabla 38. Intensidades y ángulos del nudo de referencia	69
Tabla 39. Pérdidas de potencia por rama para la subred residencial	71
Tabla 40. Pérdidas de potencia por rama para la subred industrial	71
Tabla 41. Pérdidas de potencia por rama para la subred comercial	72
Tabla 42. Pérdidas de potencia del sistema	73
Tabla 43. Generación presente en el sistema	73

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Modelo lineal de la red	1
Figura 2. Proceso iterativo del algoritmo de Newton-Raphson clásico	8
Figura 3. Restricciones no lineales, potencia compleja inyectada en el nudo i .	21
Figura 4. Diagrama de flujo del modelo propuesto implementado en MATLAB	37
Figura 5. Esquema unifilar de la red de estudio	47
Figura 6. Topología de referencia para redes europeas de distribución de BT (modificada)	57
Figura 7. Tensiones nodales del sistema (fase a)	64
Figura 8. Intensidades por rama ij del sistema (fase a)	70
Figura 9. Pérdidas de potencia activa por rama del sistema (fase a)	72
Figura 10. Pérdidas de potencia reactiva por rama del sistema (fase a)	73
Figura 11. Tensiones nodales del sistema con generación (fase a)	74
Figura 12. Intensidades por rama ij del sistema con generación (fase a)	75
Figura 13. Pérdidas de potencia activa por rama del sistema con generación (fase a)	75
Figura 14. Pérdidas de potencia reactiva por rama del sistema con generación (fase a)	76

1 INTRODUCCIÓN [1]

1.1 Flujo de carga

El flujo de carga es una herramienta que involucra un análisis numérico aplicado a un sistema eléctrico de potencia. Su estudio se centra en voltajes, ángulos de los voltajes, potencia activa y reactiva. Normalmente, el flujo de carga analiza los sistemas operando en un estado equilibrado. Existen varios algoritmos matemáticos que implementan el problema del flujo de carga.

Los estudios que lleva a cabo esta herramienta son importantes en los sistemas eléctricos de potencia para:

- Planificación: permite la comparación de diferentes alternativas.
- Explotación: uso en estrategias de control, análisis de seguridad, reducción de costes, etc.

La principal información obtenida del problema de flujo de carga es la magnitud y ángulo de la fase de la tensión en cada nudo, así como la potencia activa y reactiva que fluye por cada línea.

1.2 Formulación para un sistema trifásico equilibrado

Como punto de partida, se supone un sistema trifásico equilibrado y por lo tanto se puede aplicar el circuito monofásico equivalente para su análisis. Así, el flujo de carga supone un problema complejo comprendido por:

1.2.1 Modelo lineal de la red (ecuaciones nodales: fasores)

El modelo lineal de la red, que representa las ecuaciones en los nudos, se muestra para un nudo cualquiera i a través de la figura 1:

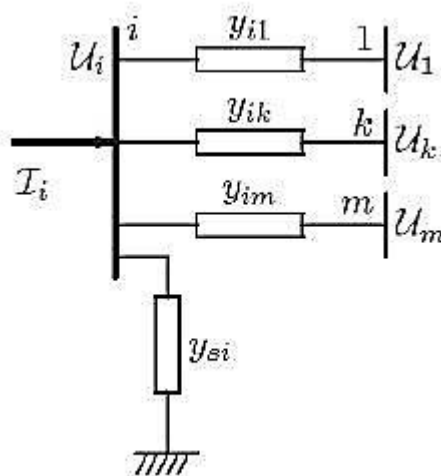


Figura 1. Modelo lineal de la red

Tomando la figura anterior como punto de partida, las ecuaciones que definen este modelo se detallan a continuación:

$$I_i = \sum_{i=1}^n Y_{BUS} \cdot U_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$I_i = \sum_{j \in i} (y_{ij} + y_{si}) \cdot V_i - \sum_{j \in i} y_{ij} \cdot V_j \quad (2)$$

$$Y_{ii} = \sum_{j \in i} y_{ij} + y_{si} \quad (3)$$

$$Y_{ij} = -y_{ij} \quad (4)$$

Donde,

- Y_{BUS} , es la matriz de admitancia de nudos de dimensión [número de nudos x número de nudos]. Esta matriz es simétrica y relaciona la tensión e intensidad en los nudos. Los elementos que la componen son:
 - Elementos diagonales (para cada nudo $j=i$):

$$y_{ii} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R + jX} + \frac{Y}{2} + \frac{1}{R_g} \quad (5)$$

Tomando un modelo en π de la línea, se ha incluido el término correspondiente a la admitancia paralelo ($Y/2$) y el que hace referencia a la puesta a tierra ($y_{si} = 1/R_g$).

- Elementos no diagonales (para cada nudo $j \neq i$):

$$y_{ij} = -\frac{1}{R + jX} \quad (6)$$

- I_i , es la intensidad en el nudo i .
- U_i , es la tensión en el nudo i .

En transpone las admitancias nodales son prácticamente imaginarias: $X \gg R$.

1.2.2 Restricciones no lineales

En el flujo de carga no se conocen las intensidades inyectadas en los nudos, sino las potencias consumidas y/o inyectadas, dando lugar a un problema no lineal.

La potencia compleja neta inyectada en los nudos es:

$$S_i = S_{Gi} - S_{Li} = U_i \cdot I_i^* \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Donde,

- S_G , potencia compleja generada en el nudo i .
- S_L , potencia compleja consumida en el nudo i .

Descomponiendo la potencia y admitancia en parte real e imaginaria se tiene:

$$S = P + jQ$$

$$Y = G + jB$$

Sustituyendo en (7):

$$P_i + jQ_i = V_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} + jB_{ij}) \cdot V_j^* \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Tomando coordenadas polares para la tensión ($V = V \angle \theta$), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones reales en coordenadas polares:

$$P_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \sin\theta_{ij}) \quad (8)$$

$$Q_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j \cdot (G_{ij} \cdot \sin\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos\theta_{ij}) \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$$

Se tratan de ecuaciones de fuerte carácter no lineal, con dos ecuaciones (P_i y Q_i) y cuatro variables (P_i, Q_i, V_i, θ_i) por cada nudo. Estas además, permiten obtener diferencias de ángulos.

1.2.3 Variables de estado

Las variables de estado del problema del flujo de carga son las tensiones en módulo (V_i) y fase (θ_i) en todos los nudos. Estas serán las incógnitas del problema a resolver.

En general, conocidas P_i y Q_i , se pueden calcular V_i y θ_i .

1.3 Herramientas del flujo de carga

Existen una serie de algoritmos de aplicación al flujo de carga en los sistemas eléctricos de potencia. Estas herramientas persiguen la robustez, que estos algoritmos no diverjan, la rapidez para su aplicación en tiempo real y la fiabilidad para que las soluciones que proporcionen sean reales y factibles. Entre los distintos algoritmos destacan:

- Algoritmos habituales en redes de transporte:
 - *Newton-Raphson* aplicado a los residuos de potencia.

Algoritmo bastante robusto y de convergencia cuadrática. Posee el inconveniente de que presenta un alto coste computacional al tener que calcular y factorizar el jacobiano en cada iteración. Tiene términos comunes entre el jacobiano y el vector de residuos.

- *Fast Decoupled Load Flow* (Desacoplado Rápido).
Algoritmo que puede llegar a divergir. Es más rápido y de menor cote computacional que el anterior, aunque presenta un mayor número de iteraciones. Las aproximaciones en el cálculo del jacobiano dificultan su uso en redes de distribución, siendo una herramienta inapropiada para redes de media y baja tensión.
 - *DC-Load Flow*.
Algoritmo que proporciona una solución aproximada para el problema activo cuando $X \gg R$.
- Algoritmos habituales en redes de distribución:
- Basados en barridos del árbol, mediante un barrido aguas arriba para actualizar intensidades o flujos, o un barrido aguas abajo para actualizar tensiones.
 - Basados en la aplicación de *Newton-Raphson* a los residuos de intensidad.
 - Formulaciones alternativas.

1.4 Objetivo

El objetivo del documento es el desarrollo de una formulación alternativa del algoritmo de *Newton-Raphson* para una red trifásica a cuatro hilos, basada en coordenadas cartesianas. Este desarrollo también incluye la presencia de posibles desequilibrios en la red.

Desarrollada la nueva formulación, ésta se lleva a la práctica a través de su programación mediante la herramienta matemática *MATLAB*. Para ello se crea un escenario de prueba, del cual se extraen los resultados del problema del flujo de carga y así poder validar la metodología aplicada, comparando esos resultados con los obtenidos por la aplicación (“*OpenDSS*”).

2 NEWTON-RAPHSON CLÁSICO [1]

2.1 Ecuaciones de partida

2.1.1 Ecuaciones nodales

Se tratan de las ecuaciones del modelo lineal de la red, que relacionan las intensidades con las tensiones a través de la matriz de admitancia de nudos. Estas ecuaciones ya han sido definidas anteriormente en (1), las cuales recordando su formulación son de la siguiente forma:

$$I_i = Y_{BUS} \cdot U_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Donde,

- I_i , es la intensidad en el nudo i .
- Y_{BUS} , es la matriz de admitancia de nudos.
- U_i , es la tensión en el nudo i .

2.1.2 Restricciones no lineales

Estas restricciones hacen referencia a la potencia compleja neta inyectada en los nudos. Como se mencionó en la sección anterior, estos términos de potencia son los que se conocen, al contrario que los de intensidad que da lugar al carácter cuadrático de las ecuaciones. Así, recordando según la ecuación (7):

$$S_i = S_{Gi} - S_{Li} = U_i \cdot I_i^* \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Donde,

- S_G , potencia compleja generada en el nudo i .
- S_L , potencia compleja consumida en el nudo i .

2.2 Sistema a resolver

Para obtener el sistema de ecuaciones que permita la resolución del flujo de carga es necesario linealizar las ecuaciones de partida. Esto va a permitir transformar las ecuaciones cuadráticas de potencia en lineales y junto con las ecuaciones nodales de la red, formar el sistema a resolver.

Para llevar a cabo la linealización se parte de un desarrollo en *series de Taylor*:

$$f(X) \cong f(X|_o) + \frac{\partial f(X)}{\partial X} \cdot \Delta X \quad (10)$$

En esta ecuación, X hace referencia al vector de estados (incógnitas), compuesto por las tensiones y sus

respectivos ángulos.

Teniendo en cuenta el desarrollo anterior y sustituyendo (7) en (1) y despejando, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta V/V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

A continuación, se hace una breve explicación de cada uno de los elementos que configuran el sistema (11).

2.2.1 Vector de estado

El vector de estados hace referencia a las incógnitas del sistema a resolver. En este caso, se trata del módulo de la tensión y su ángulo. La tensión se trabaja con $\Delta V/V_i$ para conseguir términos numéricamente más simétricos. Así, el vector de estados queda definido por la ecuación que sigue:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta V/V_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

2.2.2 Jacobiano

El jacobiano queda definido según (11) por la siguiente expresión:

$$J = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \quad (13)$$

Donde los términos que lo componen, teniendo en cuenta las expresiones de la potencia activa y reactiva, dadas por (8) y (9) respectivamente, son:

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \quad (14)$$

$$N_{ij} = V_j \cdot \frac{\partial P_i}{\partial V_j} \quad (15)$$

$$M_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} \quad (16)$$

$$L_{ij} = V_j \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial V_j} \quad (17)$$

2.2.3 Vector de residuos

Los residuos del sistema de ecuaciones mostrado en (11) son los denominados residuos en potencia, cuya formulación viene dada por el siguiente conjunto de expresiones:

$$\Delta P_i = P_i^{esp} - P_i^{cal} = P_i^{esp} - [V_i \sum_{j=1}^n V_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \sin\theta_{ij})] \quad (18)$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{esp} - Q_i^{cal} = Q_i^{esp} - [V_i \sum_{j=1}^n V_j \cdot (G_{ij} \cdot \sin\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos\theta_{ij})] \quad (19)$$

Donde,

- El superíndice “*esp*” hace referencia a la potencia activa/reactiva especificada, la cual puede ser o no conocida.
- El súper índice “*cal*” se refiere a la potencia calculada, cuya expresión se observa que corresponde a la de las ecuaciones (8) y (9).

Cada nudo en el que P_i^{esp} o Q_i^{esp} sean conocidas, es decir, en nudos de consumo denominados PQ , se debe de cumplir:

$$\Delta P_i \approx 0 ; \quad \Delta Q_i \approx 0$$

Los nudos PV requieren de un tratamiento especial.

2.3 Proceso iterativo de resolución

La resolución del sistema de ecuaciones dado por (11) se lleva a cabo a través de un proceso iterativo en el que se persigue la convergencia del sistema. Para conseguir que el sistema alcance dicha convergencia es necesario establecer un criterio de finalización, el cual está basado en la acotación del error (ϵ) en los residuos de potencia:

$$|\Delta P_i| < \epsilon \tag{20}$$

$$|\Delta Q_i| < \epsilon \tag{21}$$

El proceso iterativo de resolución del sistema sigue el siguiente esquema de la figura 2:

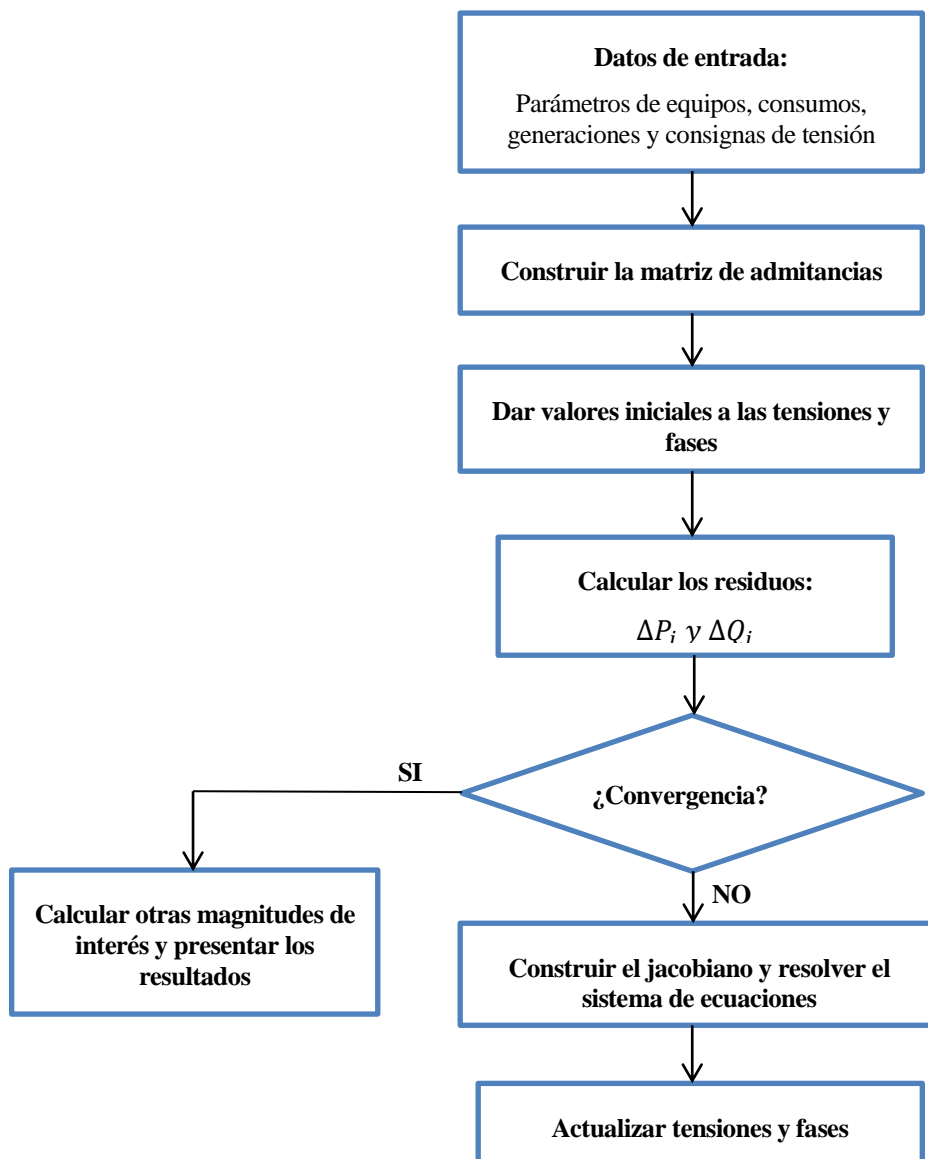


Figura 2. Proceso iterativo del algoritmo de Newton-Raphson clásico

3 NEWTON-RAPHSON AMPLIADO ^[2]

Este método surge con la motivación de mejorar la solución del flujo de carga, empleando coordenadas cartesianas en sistemas equilibrados de potencia. La idea consiste en resolver un sistema de ecuaciones aumentado, en el cual aparezcan las tensiones y las inyecciones de intensidad como variables de estado. Esto da lugar, a que el vector de residuos en potencia del problema también se vea ampliado con la presencia de las inyecciones nodales de intensidad.

En lo que sigue en esta sección, el algoritmo que se muestra es para redes que comprendan sólo nudos PQ , ya que se trata del caso más común en redes de distribución. Los nudos PV requieren de un tratamiento especial.

La notación adoptada para las coordenadas cartesianas en tensión e inyecciones de intensidad es la siguiente:

$V_i \angle \theta_i = e_i + jf_i$	Tensión compleja en el nudo i ;
$I_i \angle \varphi_i = I_{ai} + jI_{bi}$	Intensidad compleja inyectada en el nudo i ;
$G_{ij} + jB_{ij}$	Elemento ij de la matriz de admitancia de nudos;
$P_i + jQ_i$	Potencia compleja inyectada en el nudo i ;
sp	Denota que se trata de un magnitud especificada;
n	Número de nudos que componen la red.

3.1 Ecuaciones de partida

3.1.1 Modelo lineal de la red

Tomando como punto de partida la ecuación dada por (1), que hace referencia a las ecuaciones nodales de la red y adaptando dicha ecuación a la nomenclatura anterior, referida a coordenadas cartesianas, se tiene:

$$\begin{bmatrix} I_{ai} \\ I_{bi} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} -B_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & B_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_i \\ e_i \end{bmatrix} \quad (22)$$

3.1.2 Restricciones no lineales

A partir de la ecuación (7), sobre la potencia compleja inyectada en los nudos del algoritmo de *Newton-Raphson* clásico, y haciendo distinción entre parte real e imaginaria para conseguir expresar dicha ecuación en coordenadas cartesianas, se obtiene operando las siguientes formulaciones:

$$S_i = (e_i + jf_i) \cdot (I_{ai} - jI_{bi})$$

$$S_i = (e_i \cdot I_{ai}) - j(e_i \cdot I_{bi}) + j(f_i \cdot I_{ai}) + (f_i \cdot I_{bi})$$

$$S_i = [(e_i \cdot I_{ai}) + (f_i \cdot I_{bi})] + j[(f_i \cdot I_{ai}) - (e_i \cdot I_{bi})]$$

Separando parte real e imaginaria del desarrollo anterior y expresando el resultado matricialmente, el sistema queda tal y como se muestra en (23):

$$\begin{bmatrix} P_i^{sp} \\ Q_i^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{bi} & I_{ai} \\ I_{ai} & -I_{bi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_i \\ e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i & f_i \\ f_i & -e_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{ai} \\ I_{bi} \end{bmatrix} \quad (23)$$

3.2 Linealización

A continuación, se linealizan las ecuaciones de partida como procedimiento adoptado para la resolución del problema de flujo de carga, dado que las ecuaciones dadas por (22) presentan un carácter lineal, frente al carácter cuadrático de (23). La linealización permite tomar las dos expresiones anteriores y trabajar con un único sistema que las englobe.

Para ello, en ambas formulaciones se parte de un desarrollo en *series de Taylor*. Aplicando la misma expresión que se empleó en (10) y despejando de la misma se obtiene:

$$f(X) \cong f(X|_0) + \frac{\partial f(X)}{\partial X} \cdot \Delta X = 0$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} \cdot \Delta X = -f(X|_0) \quad (24)$$

Donde,

- X es el vector de estados que incluye las variables de interés, asociadas a tensión e intensidad inyectada.
- La notación “ $|_0$ ”, indica los mejores valores del vector X de los que se dispone hasta el momento en el proceso iterativo de resolución.

3.2.1 Modelo lineal de la red

Para el caso de las ecuaciones nodales de la red, la función $f(X)$ a linealizar se extrae de (1), presentando la siguiente forma:

$$f(X) = Y_{BUS} \cdot U_i - I_i \quad (25)$$

Sustituyendo la expresión dada por (25) en (24) y operando se tiene:

$$Y_{BUS} \cdot \Delta U_i - Ident. \cdot \Delta I_i = -(Y_{BUS} \cdot U_i|_0) + I_i|_0$$

$$Y_{BUS} \cdot \Delta U_i - \Delta I_i = I_i|_0 - (Y_{BUS} \cdot U_i|_0) = \Delta \Lambda_i \quad (26)$$

$$Y_{BUS} \cdot \Delta U_i - \Delta I_i = \Delta \Lambda_i \quad (27)$$

Donde $\Delta \Lambda_i$ hace referencia al vector de residuos de intensidad, cuya expresión en forma compleja es:

$$\Delta \Lambda_i = \begin{bmatrix} \Delta \alpha_i \\ \Delta \beta_i \end{bmatrix} \quad (28)$$

Tras el desarrollo llevado a cabo, descomponiendo en forma compleja los elementos que componen (27), el sistema linealizado de las ecuaciones nodales expresado matricialmente es el siguiente:

$$\sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} -B_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & B_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta f_i \\ \Delta e_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta I_{ai} \\ \Delta I_{bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \alpha_i \\ \Delta \beta_i \end{bmatrix} \quad (29)$$

3.2.2 Restricciones no lineales

Para estas ecuaciones asociadas a la potencia compleja inyectada en el nudo, la función $f(X)$ a sustituir en (24) es:

$$f(X) = S_i^{sp} - U_i \cdot I_i \quad (30)$$

Seguindo el procedimiento anterior, pero sustituyendo en este caso (30) en el desarrollo en series, se tiene:

$$-I_i \cdot \Delta U_i - U_i \cdot \Delta I_i = -(S_i^{sp} - U_i|_0 \cdot I_i|_0)$$

$$I_i \cdot \Delta U_i + U_i \cdot \Delta I_i = S_i^{esp} - U_i|_0 \cdot I_i|_0 = \Delta S_i \quad (31)$$

$$I_i \cdot \Delta U_i + U_i \cdot \Delta I_i = \Delta S_i \quad (32)$$

Donde ΔS_i hace referencia al vector de residuos de potencia, cuya composición de forma compleja distinguiendo en parte real e imaginaria es:

$$\Delta S_i = \begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} \quad (33)$$

Así, el sistema linealizado de las restricciones cuadráticas de potencia, teniendo en cuenta los distintos componentes de cada uno de los términos de (32), viene dado matricialmente por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} I_{bi} & I_{ai} \\ I_{ai} & -I_{bi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta f_i \\ \Delta e_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i & f_i \\ f_i & -e_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_{ai} \\ \Delta I_{bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} \quad (34)$$

3.3 Residuos

3.3.1 Residuos en intensidad

De la linealización de las ecuaciones en los nudos, a partir la expresión (26), tomando parte real e imaginaria en dicha ecuación, se tiene que los residuos en intensidad son de la forma que se presenta a continuación:

$$\Delta\Lambda_i = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i \\ \Delta\beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ai}|_0 \\ I_{bi}|_0 \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} -B_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & B_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_i|_0 \\ e_i|_0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Estos residuos serán nulos tras la primera iteración en la resolución del problema, dado el carácter lineal de la ecuación (1).

3.3.2 Residuos en potencia

A partir de la ecuación (31), la expresión en forma compleja de los residuos en potencia es la siguiente:

$$\Delta S_i = \begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i^{sp} \\ Q_i^{sp} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_i|_0 & f_i|_0 \\ f_i|_0 & -e_i|_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{ai}|_0 \\ I_{bi}|_0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

3.4 Sistema a resolver

Una vez linealizadas las ecuaciones de partida del problema del flujo de carga y conocidas las expresiones de los residuos en potencia y en intensidad, se pueden unificar dichas ecuaciones en un único sistema más compacto. Este sistema incluye, tanto las tensiones como intensidades en el vector de estados, lo cual se refleja también en los residuos, incluyendo tanto los de potencia como los de intensidad.

Así, el sistema a resolver queda como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -B_{ij} & G_{ij} & -1 & 0 \\ G_{ij} & B_{ij} & 0 & -1 \\ \hline I_{bi} & I_{ai} & e_i & f_i \\ I_{ai} & -I_{bi} & f_i & -e_i \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta f_i \\ \Delta e_i \\ \Delta I_{ai} \\ \Delta I_{bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i \\ \Delta\beta_i \\ \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} \quad (37)$$

El nudo *slack* o de referencia será excluido en la resolución de este sistema (se eliminan las filas y columnas relacionadas con él), ya que su tensión es conocida. Este nudo no sólo se elimina en esta expresión (37), ya que en el cálculo de los residuos de potencia (36), también se eliminan las filas y columnas de las matrices y vectores relacionadas con dicho nudo. Por el contrario, en los residuos de intensidad (35), se excluye la referencia en el vector de intensidades, permaneciendo ésta en el de tensiones y sólo eliminado la fila correspondiente al *slack* en la matriz Y_{BUS} .

Para simplificar el manejo de las ecuaciones del sistema (37), se toma la siguiente notación sobre las submatrices que componen el jacobiano:

$$Y_{BUS} = \begin{bmatrix} -B_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & B_{ij} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$-Ident. = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$D_I = \begin{bmatrix} I_{bi} & I_{ai} \\ I_{ai} & -I_{bi} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$D_V = \begin{bmatrix} e_i & f_i \\ f_i & -e_i \end{bmatrix} \quad (41)$$

Así, teniendo en cuenta la notación anterior, el sistema de ecuaciones a resolver queda simplificado de la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} Y_{BUS} & -Ident \\ \hline D_I & D_V \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \Lambda \\ \Delta S \end{bmatrix} \quad (42)$$

Llegado a este punto, la resolución del sistema dado por (42) sigue los siguientes pasos:

- Sustituir los residuos de potencia(36) en los de intensidad (35), con lo que se eliminan los ΔI_i :

$$(Y_{BUS} + D_V^{-1} \cdot D_I) \cdot \Delta U = \Delta \Lambda + D_V^{-1} \cdot \Delta S \quad (43)$$

D_V^{-1}, D_I , sólo modifica los bloques diagonales de Y_{BUS} .

- Despejar de (36) ΔI :

$$\Delta I = D_V^{-1} \cdot \Delta S - (D_V^{-1} \cdot \Delta S) \cdot \Delta U \quad (44)$$

3.5 Proceso iterativo de resolución

El proceso iterativo de resolución consta de las siguientes etapas:

- Partir de un perfil inicial.

En este perfil se tendrán de dato las potencias activas y reactivas especificadas en cada nudo:

$$S_i^{sp} = P_i^{sp} + jQ_i^{sp}$$

Asignar valores iniciales sencillos a las tensiones:

$$U_i|_0 = e_i|_0 + jf_i|_0 = 1 + j0$$

Conocida la tensión y haciendo uso de la expresión de la potencia compleja, se obtienen los valores de partida de la intensidad:

$$I_i|_0 = \left(\frac{S_i^{sp}}{U_i|_0} \right)^* = \frac{P_i^{sp} - jQ_i^{sp}}{1 + j0}$$

$$I_{ai}|_0 = \frac{P_i^{sp}}{1} = P_i^{sp}$$

$$I_{bi}|_0 = \frac{-Q_i^{sp}}{1} = -Q_i^{sp}$$

- Calcular las submatrices que componen el jacobiano: Y_{BUS}, D_V, D_I .
- A partir de las submatrices del jacobiano, obtener los vectores de residuos: $\Delta\Lambda_i, \Delta S_i$.
- Resolver el sistema definido en (42), teniendo como resultado $\Delta U_i, \Delta I_i$, cuyos elementos en forma compleja son:

$$\Delta U_i = \begin{bmatrix} \Delta f_i \\ \Delta e_i \end{bmatrix}$$

$$\Delta I_i = \begin{bmatrix} \Delta I_{ai} \\ \Delta I_{bi} \end{bmatrix}$$

- Actualizar tensiones:

$$\begin{bmatrix} \Delta f_i = f_i|_1 - f_i|_0 \\ \Delta e_i = e_i|_1 - e_i|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_i|_1 = \Delta f_i + f_i|_0 \\ e_i|_1 = \Delta e_i + e_i|_0 \end{bmatrix}$$

- Actualizar intensidades:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{ai} = I_{ai}|_1 - I_{ai}|_0 \\ \Delta I_{bi} = I_{bi}|_1 - I_{bi}|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_{ai}|_1 = \Delta I_{ai} + I_{ai}|_0 \\ I_{bi}|_1 = \Delta I_{bi} + I_{bi}|_0 \end{bmatrix}$$

La notación “]?” hace referencia al número de iteración en el que se encuentra el proceso iterativo en ese momento.

- Actualizar residuos:

Con estos nuevos valores de los incrementos de tensión e intensidad, se vuelven a calcular $\Delta\Lambda_i, \Delta S_i$.

Como se mencionó anteriormente, dado el carácter lineal de las ecuaciones del modelo lineal de la red, tras la primera iteración los residuos de intensidad se hacen nulos o próximos a cero:

$$\Delta\Lambda_i = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i \\ \Delta\beta_i \end{bmatrix} \cong 0$$

- Comprobar si se cumple el criterio de convergencia.

Este criterio de finalización, al igual que se mencionó en el método de *Newton-Raphson* clásico, se trata de un método basado en la acotación del error en los residuos de potencia, ecuaciones (20) y (21). Los residuos de intensidad no se tienen en cuenta por su nulidad pasada la primera iteración.

En caso de no cumplir el criterio de convergencia, volver al segundo punto de la iteración con los mejores valores de tensión e intensidad obtenidos hasta el momento. En este punto sólo es necesario volver a calcular D_V y D_I , puesto que Y_{BUS} se mantiene constante en el proceso iterativo.

4 NEWTON-RAPHSON AMPLIADO PARA REDES TRIFÁSICAS A CUATRO HILOS

En esta sección, se toman como punto de partida las ecuaciones del capítulo anterior del algoritmo ampliado de *Newton-Raphson*. Estas ecuaciones añaden las intensidades a las tensiones en el vector de estados, dando lugar a un vector de residuos compuesto tanto por potencias, como por intensidades.

Conocida esta formulación, se desarrolla un modelo similar para redes trifásicas a cuatro hilos, teniendo en cuenta la presencia de posibles desequilibrios en las mismas.

Esta nueva formulación obliga a incluir una distinción entre las distintas fases y el neutro, provocando un consecuente aumento de las dimensiones del problema.

Para este desarrollo se vuelve a emplear una notación basada en coordenadas cartesianas, tal y como se muestra a continuación:

$V_i^{ph} \angle \theta_i^{ph} = e_i^{ph} + jf_i^{ph}$	Tensión compleja en el nudo i en la fase ph ;
$I_i^{ph} \angle \phi_i^{ph} = I_{ri}^{ph} + jI_{xi}^{ph}$	Intensidad compleja inyectada en el nudo i en la fase ph ;
$G_{ij}^{ph} + jB_{ij}^{ph}$	Elemento ij de la matriz de admitancia de nudos en la fase ph ;
$P_i^{ph} + jQ_i^{ph}$	Potencia compleja inyectada en el nudo i en la fase ph ;
ph	Fase: a, b, c o n (neutro);
sp	Denota que se trata de un magnitud especificada;
n	Número de nudos.

4.1 Ecuaciones de partida

4.1.1 Modelo lineal de la red

Al igual que en secciones anteriores, se toma como punto de partida la ecuación (1), junto con su desarrollo complejo dado por (22) del algoritmo ampliado.

En esta ocasión, además de cómo cada nudo se ve afectado por sí mismo, también se tiene en cuenta cómo este se ve afectado por el resto de nudos que componen la red.

La expresión para cada nudo i se puede formular a través de la siguiente ecuación:

$$I_i = y_{ii} \cdot U_i + \sum_{j \neq i}^n y_{ij} \cdot U_j \quad (45)$$

Esta expresión desarrollada matricialmente de forma compacta e incorporando las distintas fases más el neutro queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} I_i^a \\ I_i^b \\ I_i^c \\ I_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{ii}^{aa} & y_{ii}^{ab} & y_{ii}^{ac} & y_{ii}^{an} \\ y_{ii}^{ba} & y_{ii}^{bb} & y_{ii}^{bc} & y_{ii}^{bn} \\ y_{ii}^{ca} & y_{ii}^{cb} & y_{ii}^{cc} & y_{ii}^{cn} \\ y_{ii}^{na} & y_{ii}^{nb} & y_{ii}^{nc} & y_{ii}^{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_i^a \\ U_i^b \\ U_i^c \\ U_i^n \end{bmatrix} + \sum_{j \neq i}^n \begin{bmatrix} y_{ij}^{aa} & y_{ij}^{ab} & y_{ij}^{ac} & y_{ij}^{an} \\ y_{ij}^{ba} & y_{ij}^{bb} & y_{ij}^{bc} & y_{ij}^{bn} \\ y_{ij}^{ca} & y_{ij}^{cb} & y_{ij}^{cc} & y_{ij}^{cn} \\ y_{ij}^{na} & y_{ij}^{nb} & y_{ij}^{nc} & y_{ij}^{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_j^a \\ U_j^b \\ U_j^c \\ U_j^n \end{bmatrix} \quad (46)$$

Cada uno de los términos de la expresión anterior está compuesto por una parte real e imaginaria. Esto da lugar para cada nudo i a un vector de intensidades de dimensión $[1 \times 8]$, una matriz de admitancias simétrica en los nudos de $[8 \times 8]$ y un vector de tensiones de igual dimensión que el de intensidades. A continuación, se muestran como están constituidos cada uno de estos elementos que conforman (46):

- $I_i^a = \begin{bmatrix} I_{ri}^a \\ I_{xi}^a \end{bmatrix}; I_i^b = \begin{bmatrix} I_{ri}^b \\ I_{xi}^b \end{bmatrix}; I_i^c = \begin{bmatrix} I_{ri}^c \\ I_{xi}^c \end{bmatrix}; I_i^n = \begin{bmatrix} I_{ri}^n \\ I_{xi}^n \end{bmatrix}$
- $U_i^a = \begin{bmatrix} e_i^a \\ f_i^a \end{bmatrix}; U_i^b = \begin{bmatrix} e_i^b \\ f_i^b \end{bmatrix}; U_i^c = \begin{bmatrix} e_i^c \\ f_i^c \end{bmatrix}; U_i^n = \begin{bmatrix} e_i^n \\ f_i^n \end{bmatrix}$
- $U_j^a = \begin{bmatrix} e_j^a \\ f_j^a \end{bmatrix}; U_j^b = \begin{bmatrix} e_j^b \\ f_j^b \end{bmatrix}; U_j^c = \begin{bmatrix} e_j^c \\ f_j^c \end{bmatrix}; U_j^n = \begin{bmatrix} e_j^n \\ f_j^n \end{bmatrix}$
- $y_{ii}^{aa} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{aa} & G_{ii}^{aa} \\ G_{ii}^{aa} & B_{ii}^{aa} \end{bmatrix}; y_{ii}^{ab} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{ab} & G_{ii}^{ab} \\ G_{ii}^{ab} & B_{ii}^{ab} \end{bmatrix}; y_{ii}^{ac} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{ac} & G_{ii}^{ac} \\ G_{ii}^{ac} & B_{ii}^{ac} \end{bmatrix}; y_{ii}^{an} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{an} & G_{ii}^{an} \\ G_{ii}^{an} & B_{ii}^{an} \end{bmatrix}$
- $y_{ii}^{ba} = y_{ii}^{ab}; y_{ii}^{bb} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{bb} & G_{ii}^{bb} \\ G_{ii}^{bb} & B_{ii}^{bb} \end{bmatrix}; y_{ii}^{bc} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{bc} & G_{ii}^{bc} \\ G_{ii}^{bc} & B_{ii}^{bc} \end{bmatrix}; y_{ii}^{bn} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{bn} & G_{ii}^{bn} \\ G_{ii}^{bn} & B_{ii}^{bn} \end{bmatrix}$
- $y_{ii}^{ca} = y_{ii}^{ac}; y_{ii}^{cb} = y_{ii}^{bc}; y_{ii}^{cc} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{cc} & G_{ii}^{cc} \\ G_{ii}^{cc} & B_{ii}^{cc} \end{bmatrix}; y_{ii}^{cn} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{cn} & G_{ii}^{cn} \\ G_{ii}^{cn} & B_{ii}^{cn} \end{bmatrix}$

- $y_{ii}^{na} = y_{ii}^{an}; y_{ii}^{nb} = y_{ii}^{bn}; y_{ii}^{nc} = y_{ii}^{cn}; y_{ii}^{nn} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{nn} & G_{ii}^{nn} + \frac{1}{R_g} \\ G_{ii}^{nn} + \frac{1}{R_g} & B_{ii}^{nn} \end{bmatrix}$
- $y_{ij}^{aa} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{aa} & G_{ij}^{aa} \\ G_{ij}^{aa} & B_{ij}^{aa} \end{bmatrix}; y_{ij}^{ab} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{ab} & G_{ij}^{ab} \\ G_{ij}^{ab} & B_{ij}^{ab} \end{bmatrix}; y_{ij}^{ac} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{ac} & G_{ij}^{ac} \\ G_{ij}^{ac} & B_{ij}^{ac} \end{bmatrix};$
 $y_{ij}^{an} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{an} & G_{ij}^{an} \\ G_{ij}^{an} & B_{ij}^{an} \end{bmatrix}$
- $y_{ij}^{ba} = y_{ij}^{ab}; y_{ij}^{bb} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{bb} & G_{ij}^{bb} \\ G_{ij}^{bb} & B_{ij}^{bb} \end{bmatrix}; y_{ij}^{bc} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{bc} & G_{ij}^{bc} \\ G_{ij}^{bc} & B_{ij}^{bc} \end{bmatrix}; y_{ij}^{bn} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{bn} & G_{ij}^{bn} \\ G_{ij}^{bn} & B_{ij}^{bn} \end{bmatrix}$
- $y_{ij}^{ca} = y_{ij}^{ac}; y_{ij}^{cb} = y_{ij}^{bc}; y_{ij}^{cc} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{cc} & G_{ij}^{cc} \\ G_{ij}^{cc} & B_{ij}^{cc} \end{bmatrix}; y_{ij}^{cn} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{cn} & G_{ij}^{cn} \\ G_{ij}^{cn} & B_{ij}^{cn} \end{bmatrix}$
- $y_{ij}^{na} = y_{ij}^{an}; y_{ij}^{nb} = y_{ij}^{bn}; y_{ij}^{nc} = y_{ij}^{cn}; y_{ij}^{nn} = -\begin{bmatrix} -B_{ij}^{nn} & G_{ij}^{nn} \\ G_{ij}^{nn} & B_{ij}^{nn} \end{bmatrix}$

Se observa en el elemento y_{ii}^{nn} , cómo en la parte real de la admitancia del nudo se ha añadido la resistencia de puesta a tierra, denotada por R_g . En adelante se denotará a esta componente de la admitancia que incluye la resistencia de puesta a tierra como $G_{ii_rg}^{nn}$.

Sustituyendo las formulaciones anteriores en el sistema (46), se obtiene la expresión (47) mostrada en el Anexo I, que define el modelo lineal de la red para el nudo i .

Definido el desarrollo anterior para el nudo i , se puede generalizar (47) para un conjunto de nudos, dado por una red cualquiera. Así, el sistema que representa las ecuaciones nodales de forma compacta para una red con n nudos tiene la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad (48)$$

De esta expresión se extrae la matriz Y_{BUS} , simétrica de dimensión $[(8 \times n) \times (8 \times n)]$, siendo esta la que relaciona el vector de tensiones con el de intensidades, ambos de igual dimensión, $[(8 \times n) \times 1]$.

Los términos que componen la matriz de admitancia son de la siguiente forma:

- Elementos diagonales:

$$y_{ii} = \begin{bmatrix} y_{ii}^{aa} & y_{ii}^{ab} & y_{ii}^{ac} & y_{ii}^{an} \\ y_{ii}^{ba} & y_{ii}^{bb} & y_{ii}^{bc} & y_{ii}^{bn} \\ y_{ii}^{ca} & y_{ii}^{cb} & y_{ii}^{cc} & y_{ii}^{cn} \\ y_{ii}^{na} & y_{ii}^{nb} & y_{ii}^{nc} & y_{ii}^{nn} \end{bmatrix} \quad (49)$$

- Elementos no diagonales:

$$y_{ij} = \begin{bmatrix} y_{ij}^{aa} & y_{ij}^{ab} & y_{ij}^{ac} & y_{ij}^{an} \\ y_{ij}^{ba} & y_{ij}^{bb} & y_{ij}^{bc} & y_{ij}^{bn} \\ y_{ij}^{ca} & y_{ij}^{cb} & y_{ij}^{cc} & y_{ij}^{cn} \\ y_{ij}^{na} & y_{ij}^{nb} & y_{ij}^{nc} & y_{ij}^{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{con } j \neq i) \quad (50)$$

- Resistencias de puesta a tierra.

Estos elementos sólo afectan al neutro de las componentes y_{ii} , es decir a y_{ii}^{nn} , de la matriz de admitancia, no modificando los términos y_{ij} . En la expresión dada por (51), se muestra cómo se introducen en el modelo estas puestas a tierra para cada elemento y_{ii} que las contenga.

$$y_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/Rg_i \end{bmatrix} \quad (51)$$

Se observa que al igual que y_{ii} e y_{ij} , la matriz que contiene las resistencias de puesta a tierra es de dimensión $[8 \times 8]$, para cada nudo de la red que presente este tipo de componente.

Cada elemento de y_{ii} e y_{ij} se desarrolló anteriormente teniendo en cuenta su descomposición en conductancia (G) y susceptancia (B), de ahí que la matriz Y_{BUS} presente una elevada dimensión.

4.1.2 Restricciones no lineales

Las restricciones en los nudos van ligadas a las cargas y/o generación existentes. Éstos se modelan como potencias constantes.

Para definir el conjunto de restricciones no lineales es necesario partir de la ecuación (7), potencia compleja neta inyectada en los nudos:

$$S_i = U_i \cdot I_i^*$$

Tal y como se representa en la figura 3, se ha de tener en cuenta para el desarrollo de estas restricciones que la tensión en el nudo i para la fase ph está definida como:

$$U_i^{ph} = U_i^{ph} - U_i^n$$

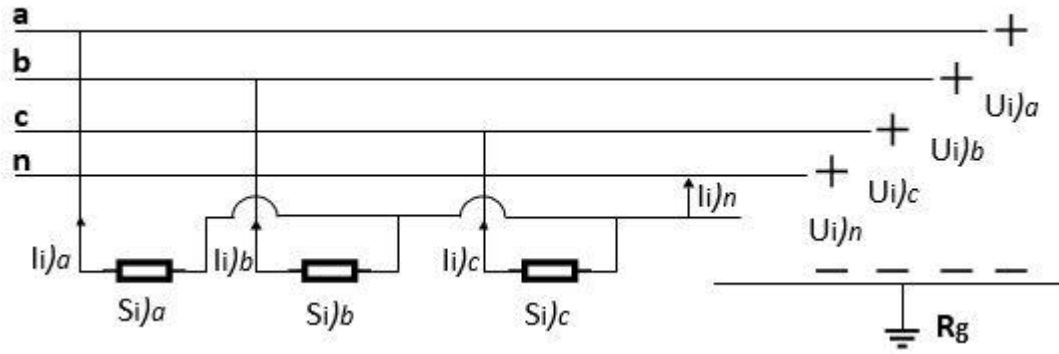


Figura 3. Restricciones no lineales, potencia compleja inyectada en el nudo i .

Conocida la potencia inyectada en los nudos, potencia especificada, y despejando la intensidad de la expresión (7), se tiene para cada fase en el nudo i :

$$I_i^a = \left[\frac{S_i^{sp}]^a}{U_i^a - U_i^n} \right]^* = \frac{P_i^{sp}]^a - jQ_i^{sp}]^a}{(e_i^a - e_i^n) - j(f_i^a - f_i^n)} \quad (52)$$

$$I_i^b = \left[\frac{S_i^{sp}]^b}{U_i^b - U_i^n} \right]^* = \frac{P_i^{sp}]^b - jQ_i^{sp}]^b}{(e_i^b - e_i^n) - j(f_i^b - f_i^n)} \quad (53)$$

$$I_i^c = \left[\frac{S_i^{sp}]^c}{U_i^c - U_i^n} \right]^* = \frac{P_i^{sp}]^c - jQ_i^{sp}]^c}{(e_i^c - e_i^n) - j(f_i^c - f_i^n)} \quad (54)$$

El valor de la intensidad que circula por el neutro, se puede obtener a partir de la condición que indica que la suma de las intensidades que circulan a través de las cuatro fases ha de ser nula:

$$I_i^a + I_i^b + I_i^c + I_i^n = 0 \quad (55)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar matricialmente, distinguiendo entre parte real e imaginaria, tal y como se muestra en el siguiente conjunto de expresiones:

$$\begin{bmatrix} P_i^{sp}]^a \\ Q_i^{sp}]^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e_i^a - e_i^n) & (f_i^a - f_i^n) \\ (f_i^a - f_i^n) & -(e_i^a - e_i^n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{ri}^a \\ I_{xi}^a \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\begin{bmatrix} P_i^{sp}]^b \\ Q_i^{sp}]^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e_i^b - e_i^n) & (f_i^b - f_i^n) \\ (f_i^b - f_i^n) & -(e_i^b - e_i^n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{ri}^b \\ I_{xi}^b \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} P_i^{sp}]^c \\ Q_i^{sp}]^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e_i^c - e_i^n) & (f_i^c - f_i^n) \\ (f_i^c - f_i^n) & -(e_i^c - e_i^n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{ri}^c \\ I_{xi}^c \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ri}^a + I_{ri}^b + I_{ri}^c + I_{ri}^n \\ I_{xi}^a + I_{xi}^b + I_{xi}^c + I_{xi}^n \end{bmatrix} \quad (59)$$

Agrupando las expresiones (56) a (59) para obtener una expresión compacta, se obtiene el sistema dado por (60) del Anexo I, el cual representa el conjunto de restricciones no lineales para el nudo i .

Este sistema para su mejor manejo en cálculos posteriores, se denotará en lo que sigue como:

$$V_{Si} = M_{Vi} \cdot I_i \quad (61)$$

Donde,

- V_{Si} , representa el vector de potencias especificadas, potencias inyectadas, de dimensión $[8 \times 1]$ para cada nudo i .
- I_i , es el vector de intensidades complejas por fase, de dimensión $[8 \times 1]$ para cada nudo i .
- M_{Vi} , es la matriz de tensiones por fase que relaciona la potencia especificada con la intensidad, de dimensión $[8 \times 8]$ para cada nudo i .

Conocida la formulación para el nudo i , esta se puede generalizar para un conjunto n de nudos, dado por una red cualquiera, obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} V_{S1} \\ V_{S2} \\ V_{S3} \\ \vdots \\ V_{Sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{V1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{V2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_{V3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{Vn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (62)$$

La generalización de la ecuación (60) a la (62), provoca un aumento de las dimensiones de los elementos de dicha ecuación, siendo esta de $[(8 \times n) \times 1]$ para los vectores de potencia e intensidad y de $[(8 \times n) \times (8 \times n)]$ para la matriz M_V . Esta matriz, al ser ampliada a un conjunto determinado de nudos, ha adquirido un carácter diagonal, cuyos elementos siguen la formulación dada en (60) para cada nudo.

4.2 Linealización

Al igual que en secciones anteriores, para la resolución del problema es necesario obtener un sistema en el que se incluyan las dos formulaciones que definen el flujo de carga, es decir, las ecuaciones en los nudos y las restricciones no lineales. Para poder combinar la formulación lineal del modelo de la red y las restricciones cuadráticas de potencia en una misma expresión, se ha de unificar el carácter lineal y no lineal de ambas. Mediante la linealización del conjunto de expresiones que conforman el problema, se obtiene un mismo carácter lineal de ambas ecuaciones, permitiendo expresarlas de forma conjunta.

La linealización se obtiene como se hizo en los dos capítulos anteriores a través de un desarrollo en *series de Taylor*.

4.2.1 Modelo lineal de la red

La función a linealizar $f(X)$, que va a representar las ecuaciones nodales del sistema, se toma de la ecuación (45), cuya expresión es la siguiente:

$$f(X) = y_{ii} \cdot U_i + \sum_{j \neq i}^n y_{ij} \cdot U_j \quad (63)$$

Al igual que en la sección anterior, la variable X hace referencia a las tensiones e intensidades en los nudos.

Aplicando el desarrollo en *series de Taylor* dado por la ecuación (24) a la función descrita y operando se obtiene:

$$y_{ii} \cdot \Delta U_i + \sum_{j \neq i}^n y_{ij} \cdot \Delta U_j - I_{dent.} \cdot \Delta I_i = -(y_{ii} \cdot \Delta U_i|_0 + \sum_{j \neq i}^n y_{ij} \cdot \Delta U_j|_0 - I_i|_0)$$

$$y_{ii} \cdot \Delta U_i + \sum_{j \neq i}^n y_{ij} \cdot \Delta U_j - \Delta I_i = I_i|_0 - y_{ii} \cdot \Delta U_i|_0 - \sum_{j \neq i}^n y_{ij} \cdot \Delta U_j|_0 = \Delta \Lambda_i \quad (64)$$

$$y_{ii} \cdot \Delta U_i + \sum_{j \neq i}^n y_{ij} \cdot \Delta U_j - \Delta I_i = \Delta \Lambda_i \quad (65)$$

Como ya se comentó, $\Delta \Lambda_i$ son los residuos en intensidad y la notación “ $|_0$ ” corresponde a los mejores valores de X de los que se dispone hasta el momento, en el proceso iterativo de resolución.

La expresión (65) desarrollada matricialmente para el nudo i e incorporando las distintas fases a, b, c y neutro, queda reflejada en el sistema dado por (66) del Anexo I.

Cada uno de los elementos que forman (66), están compuestos por una parte real y una imaginaria. Estos elementos son de la siguiente forma:

- y_{ii}, y_{ij} mantienen la misma formulación que en (47), siendo cada elemento un bloque de dimensión $[2 \times 2]$.
- $\Delta U_i^a = \begin{bmatrix} \Delta e_i^a \\ \Delta f_i^a \end{bmatrix}; \Delta U_i^b = \begin{bmatrix} \Delta e_i^b \\ \Delta f_i^b \end{bmatrix}; \Delta U_i^c = \begin{bmatrix} \Delta e_i^c \\ \Delta f_i^c \end{bmatrix}; \Delta U_i^n = \begin{bmatrix} \Delta e_i^n \\ \Delta f_i^n \end{bmatrix}$
- $\Delta U_j^a = \begin{bmatrix} \Delta e_j^a \\ \Delta f_j^a \end{bmatrix}; \Delta U_j^b = \begin{bmatrix} \Delta e_j^b \\ \Delta f_j^b \end{bmatrix}; \Delta U_j^c = \begin{bmatrix} \Delta e_j^c \\ \Delta f_j^c \end{bmatrix}; \Delta U_j^n = \begin{bmatrix} \Delta e_j^n \\ \Delta f_j^n \end{bmatrix}$
- $\Delta I_i^a = \begin{bmatrix} \Delta I_{ri}^a \\ \Delta I_{xi}^a \end{bmatrix}; \Delta I_i^b = \begin{bmatrix} \Delta I_{ri}^b \\ \Delta I_{xi}^b \end{bmatrix}; \Delta I_i^c = \begin{bmatrix} \Delta I_{ri}^c \\ \Delta I_{xi}^c \end{bmatrix}; \Delta I_i^n = \begin{bmatrix} \Delta I_{ri}^n \\ \Delta I_{xi}^n \end{bmatrix}$

$$\blacksquare \quad \Delta\Lambda_i^a = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i^a \\ \Delta\beta_i^a \end{bmatrix}; \quad \Delta\Lambda_i^b = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i^b \\ \Delta\beta_i^b \end{bmatrix}; \quad \Delta\Lambda_i^c = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i^c \\ \Delta\beta_i^c \end{bmatrix}; \quad \Delta\Lambda_i^n = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i^n \\ \Delta\beta_i^n \end{bmatrix}$$

Conocida la formulación para el nudo i , se puede generalizar la expresión (66) para un conjunto de nudos n , dados por una red cualquiera. De forma simplificada la ecuación linealizada del modelo de las ecuaciones en los nudos de la red queda:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \vdots \\ \Delta U_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \\ \Delta I_3 \\ \vdots \\ \Delta I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\Lambda_1 \\ \Delta\Lambda_2 \\ \Delta\Lambda_3 \\ \vdots \\ \Delta\Lambda_n \end{bmatrix} \quad (67)$$

Al incluir las componentes complejas y generalizar para n nudos, la dimensión del vector de residuos en intensidad se ve aumentada a $[(8 \times n) \times 1]$. Esto mismo ocurre con el resto de elementos, quedando su dimensión multiplicada por el número de nudos que intervengan en la red.

La matriz Y_{BUS} no se ve modificada en la linealización de las ecuaciones nodales, por lo que cada uno de sus elementos será un bloque de $[8 \times 8]$. Esta matriz de admitancias de nudos va ser una de las submatrices que van a formar parte del jacobiano del sistema a resolver del flujo de carga.

4.2.2 Restricciones no lineales

Para estas ecuaciones se va a emplear la nomenclatura aplicada en la definición de éstas de forma simplificada, dada por (61). Esta expresión es la que proporciona la función a linealizar:

$$f(X) = V_{Si} - M_{Vi} \cdot I_i \quad (68)$$

Aplicando la función anterior al desarrollo en series expuesto en (24):

$$-I_i \cdot \Delta U_i - M_{Vi} \cdot \Delta I_i = -(V_{Si} - M_{Vi}|_0 \cdot I_i|_0)$$

$$I_i \cdot \Delta U_i + M_{Vi} \cdot \Delta I_i = V_{Si} - M_{Vi}|_0 \cdot I_i|_0$$

Renombrando,

$$\frac{\partial f(X)}{\partial U} = I_i = D_{Ii}$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial I} = M_{Vi} = D_{Vi}$$

Sustituyendo la nueva terminología se tiene:

$$D_{Ii} \cdot \Delta U_i + D_{Vi} \cdot \Delta I_i = V_{Si} - D_{Vi}|_0 \cdot I_i|_0 = \Delta S_i \quad (69)$$

$$D_{Ii} \cdot \Delta U_i + D_{Vi} \cdot \Delta I_i = \Delta S_i \quad (70)$$

El vector V_{Si} no cambia durante el proceso iterativo puesto que hace referencia a las potencias complejas especificadas, que son dato del problema del flujo de carga.

Las matrices D_{Ii} y D_{Vi} , al descomponer sus elementos en parte real e imaginaria y al distinguir entre las tres fases más el neutro, tendrán una dimensión de $[8 \times 8]$ cada una, para cada nudo i .

Teniendo en cuenta lo anterior respecto a los elementos que componen la ecuación (70), ésta se presenta desarrollada matricialmente para el nudo i en el Anexo I, en el sistema dado por (71).

Tomando la ecuación (71) para el nudo i , esta puede ampliarse para una red compuesta por un número n de nudos. La expresión linealizada de las restricciones no lineales, generalizada para un conjunto de nudos queda:

$$\begin{bmatrix} D_{I1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{I2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D_{I3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{In} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \vdots \\ \Delta U_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{V1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{V2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D_{V3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{Vn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \\ \Delta I_3 \\ \vdots \\ \Delta I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta S_2 \\ \Delta S_3 \\ \vdots \\ \Delta S_n \end{bmatrix} \quad (72)$$

Las matrices correspondientes a D_I y D_V , han pasado a ser matrices diagonales en la generalización a n nudos, donde cada uno de sus elementos tendrá la forma descrita en (71), siendo éstos bloques de $[8 \times 8]$. Esta generalización da lugar a un aumento notable de la dimensión de cada una de estas matrices, pasando a ser de $[(8 \times n) \times (8 \times n)]$ para cada una de ellas.

La ecuación (72) será de gran utilidad para la resolución del problema de flujo de cargas, dado que tanto D_I como D_V , van a ser submatrices que compondrán el jacobiano del sistema final a resolver.

4.3 Residuos

4.3.1 Residuos en intensidad

La linealización de las ecuaciones nodales de la red, permite extraer de la expresión (64) los residuos en intensidad del problema del flujo de carga. La formulación de estos residuos para el nudo i , viene dada por:

$$\Delta \Lambda_i = I_i|_0 - y_{ii} \cdot \Delta U_i|_0 - \sum_{j \neq i}^n y_{ij} \cdot \Delta U_j|_0 \quad (73)$$

El desarrollo matricial de (73), incluyendo la distinción entre las distintas fases, se muestra en el Anexo I, en la expresión (74).

Los elementos de esta expresión están compuestos por parte real e imaginaria, cuyo desarrollo ya ha sido formulado en apartados anteriores.

Una vez conocida la definición de los residuos para el nudo i , esta se puede extrapolar a una red de un número determinado n de nudos:

$$\begin{bmatrix} \Delta\Lambda_1 \\ \Delta\Lambda_2 \\ \Delta\Lambda_3 \\ \vdots \\ \Delta\Lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1|_0 \\ I_2|_0 \\ I_3|_0 \\ \vdots \\ I_n|_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1|_0 \\ U_2|_0 \\ U_3|_0 \\ \vdots \\ U_n|_0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

El aumento del número de nudos, tiene la consecuencia de un incremento en el tamaño de las dimensiones del vector de residuos, pasando a ser de $[(8 \times n) \times 1]$. Este vector, al igual que el de tensiones e intensidades, se irá actualizando a medida que el proceso iterativo de resolución avance.

Estos residuos de intensidad tenderán a ser nulos tras la primera iteración, puesto que la ecuación de la que parten es lineal en su origen.

4.3.2 Residuos en potencia

La expresión linealizada de las restricciones de potencia compleja de los nudos de la red, proporciona a través de la ecuación (69) los residuos en potencia del problema, cuya formulación es:

$$\Delta S_i = V_{Si} - D_{Vi}|_0 \cdot I_i|_0 \quad (76)$$

Matricialmente, haciendo distinción entre las fases *a*, *b*, *c* y neutro, la ecuación (76) de forma compleja queda descrita tal y como se expone en el Anexo I, en la ecuación (77).

Tomando la expresión (77) como referencia, esta se puede ampliar para una red compuesta por un conjunto cualquiera de nudos. Así, los residuos de potencia para un sistema con *n* nudos quedan definidos por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta S_2 \\ \Delta S_3 \\ \vdots \\ \Delta S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S1}|_0 \\ V_{S2}|_0 \\ V_{S3}|_0 \\ \vdots \\ V|_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_{V1}|_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{V2}|_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D_{V3}|_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{Vn}|_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1|_0 \\ I_2|_0 \\ I_3|_0 \\ \vdots \\ I_n|_0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

El conjunto de vectores y matrices definidos en (78), verán sus valores modificados en cada paso del proceso iterativo de resolución, siendo su valor definitivo aquel que proporcione un mejor resultado para el flujo de carga. Cabe a destacar la diagonalidad de la matriz D_V , compuesta por bloques de $[8 \times 8]$ en sus elementos.

4.4 Sistema a resolver

El sistema sobre el que se lleva a cabo el proceso iterativo para la resolución del problema del flujo de carga, toma como punto de partida las ecuaciones linealizadas expuestas con anterioridad, incluyendo los modelos linealizados de nudos y de restricciones de potencia de la red, así como sus respectivos residuos.

Unificando las ecuaciones (67) y (72) en una misma expresión, se obtiene el sistema a resolver para una red compuesta de *n* nudos. Este sistema viene dado por:

$$\begin{bmatrix}
 y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
 y_{31} & y_{32} & y_{33} & \cdots & y_{3n} & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\
 \hline
 D_{I1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{V1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & D_{I2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & D_{V2} & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & D_{I3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & D_{V3} & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & D_{In} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{Vn}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \vdots \\ \Delta U_n \\ \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \\ \Delta I_3 \\ \vdots \\ \Delta I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \Lambda_1 \\ \Delta \Lambda_2 \\ \Delta \Lambda_3 \\ \vdots \\ \Delta \Lambda_n \\ \Delta S_1 \\ \Delta S_2 \\ \Delta S_3 \\ \vdots \\ \Delta S_n \end{bmatrix} \quad (79)$$

El sistema se puede expresar de forma simplificada, con el objetivo de manejar una expresión más reducida en la descripción del proceso iterativo:

$$\left[\begin{array}{c|c} Y_{BUS} & -Ident \\ \hline D_I & D_V \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \Lambda \\ \Delta S \end{bmatrix} \quad (80)$$

Operando, se tiene el conjunto de ecuaciones que en la sección anterior se defirieron como (43) y (44), cuyas expresiones venían dadas sucesivamente por:

$$(Y_{BUS} + D_V^{-1} \cdot D_I) \cdot \Delta U = \Delta \Lambda + D_V^{-1} \cdot \Delta S$$

$$\Delta I = D_V^{-1} \cdot \Delta S - (D_V^{-1} \cdot \Delta S) \cdot \Delta U$$

Definido el conjunto de ecuaciones a resolver, se ha de destacar:

- El jacobiano adquiere una dimensión de $[2*(8 \times n) \times 2*(8 \times n)]$, donde cada una de las submatrices que lo componen tienen un tamaño de $[(8 \times n) \times (8 \times n)]$.
- El vector de estados, formado por los incrementos de tensión e intensidad tiene una dimensión de $[2*(8 \times n) \times 1]$. Este vector será la incógnita del problema a resolver.
- El vector que contiene los residuos presenta la misma dimensión que el vector de estados.
- El cálculo de los residuos de potencia es inmediato, ya que se obtienen de las tensiones e intensidades y sus residuos, variables que se determinan en cada iteración.
- En la resolución del sistema la ecuación (44) contiene operaciones previamente obtenidas para resolver (43).
- Sólo se modifican los bloques diagonales de la matriz de admitancia de nudos. Ésta se ve afectada por D_V^{-1} y D_I , tal y como se muestra en (43).
- Residuos de intensidad nulos tras la primera iteración, debido al carácter lineal de las ecuaciones de las que provienen, tal y como se mencionó en secciones anteriores.

4.5 Proceso iterativo de resolución

El proceso iterativo de resolución sigue los mismos pasos que en el caso ampliado anterior, con la salvedad de que en sistemas trifásicos a cuatro hilos hay que tomar en consideración los efectos de las distintas fases, a , b y c , más el neutro.

Así, el proceso consta de las siguientes etapas:

- Partir de un perfil inicial.

En este perfil se tendrán de dato las potencias activas y reactivas especificadas en cada nudo:

$$S_i^{sp}]^a = P_i^{sp}]^a + jQ_i^{sp}]^a = (P_i^G - P_i^L)^{sp}]^a + (Q_i^G - Q_i^L)^{sp}]^a$$

$$S_i^{sp}]^b = P_i^{sp}]^b + jQ_i^{sp}]^b = (P_i^G - P_i^L)^{sp}]^b + (Q_i^G - Q_i^L)^{sp}]^b$$

$$S_i^{sp}]^c = P_i^{sp}]^c + jQ_i^{sp}]^c = (P_i^G - P_i^L)^{sp}]^c + (Q_i^G - Q_i^L)^{sp}]^c$$

Asignar valores iniciales sencillos a las tensiones en cada nudo:

$$U_i^a]_0 = e_i^a]_0 + jf_i^a]_0$$

$$U_i^b]_0 = e_i^b]_0 + jf_i^b]_0$$

$$U_i^c]_0 = e_i^c]_0 + jf_i^c]_0$$

$$U_i^n]_0 = e_i^n]_0 + jf_i^n]_0$$

Conocida la tensión y haciendo uso de la expresión de la potencia compleja se obtienen los valores de partida de la intensidad para cada nudo:

$$I_i^a]_0 = \left(\frac{S_i^{sp}]^a}{U_i^a]_0} \right)^* = \frac{P_i^{sp}]^a - jQ_i^{sp}]^a}{e_i^a]_0 + jf_i^a]_0}$$

$$I_i^b]_0 = \left(\frac{S_i^{sp}]^b}{U_i^b]_0} \right)^* = \frac{P_i^{sp}]^b - jQ_i^{sp}]^b}{e_i^b]_0 + jf_i^b]_0}$$

$$I_i^c]_0 = \left(\frac{S_i^{sp}]^c}{U_i^c]_0} \right)^* = \frac{P_i^{sp}]^c - jQ_i^{sp}]^c}{e_i^c]_0 + jf_i^c]_0}$$

$$I_i^n = -I_i^a - I_i^b - I_i^c$$

- Calcular las submatrices que componen el jacobiano:

$$Y_{BUS} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{2n} & y_{3n} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D_I = \begin{bmatrix} D_{I1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{I2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D_{I3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{In} \end{bmatrix}$$

$$D_V = \begin{bmatrix} D_{V1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{V2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D_{V3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{Vn} \end{bmatrix}$$

En el cálculo del jacobiano los elementos correspondientes al nudo *slack* se eliminan de dicha matriz, ya que las tensiones en este nudo son conocidas, es decir, se eliminan las filas y columnas relacionadas con el nudo de referencia.

- A partir de las submatrices del jacobiano, obtener los residuos, $\Delta\Lambda$ (75) y ΔS (78).

En este caso, se tendrán en cuenta los elementos relacionados con el nudo de referencia sólo en los residuos de intensidad (ΔS), en los que el *slack* aparecerá en vector de tensiones y en las columnas de la matriz de admitancias.

- Resolver el sistema definido en (79), teniendo como resultado $\Delta U_i, \Delta I_i$, cuyos elementos son:

$$\Delta U_i = \begin{bmatrix} \Delta f_i^a \\ \Delta e_i^a \\ \Delta f_i^b \\ \Delta e_i^b \\ \Delta f_i^c \\ \Delta e_i^c \\ \Delta f_i^n \\ \Delta e_i^n \end{bmatrix}; \quad \Delta I_i = \begin{bmatrix} \Delta I_{ri}^a \\ \Delta I_{xi}^a \\ \Delta I_{ri}^b \\ \Delta I_{xi}^b \\ \Delta I_{ri}^c \\ \Delta I_{xi}^c \\ \Delta I_{ri}^n \\ \Delta I_{xi}^n \end{bmatrix}$$

En estos vectores no aparecerá el nudo de referencia cuando sean calculados.

- Actualizar tensiones:

$$\begin{bmatrix} \Delta f_i^a = f_i^a|_1 - f_i^a|_0 \\ \Delta e_i^a = e_i^a|_1 - e_i^a|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_i^a|_1 = \Delta f_i^a + f_i^a|_0 \\ e_i^a|_1 = \Delta e_i^a + e_i^a|_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta f_i^b = f_i^b|_1 - f_i^b|_0 \\ \Delta e_i^b = e_i^b|_1 - e_i^b|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_i^b|_1 = \Delta f_i^b + f_i^b|_0 \\ e_i^b|_1 = \Delta e_i^b + e_i^b|_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta f_i^c = f_i^c|_1 - f_i^c|_0 \\ \Delta e_i^c = e_i^c|_1 - e_i^c|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_i^c|_1 = \Delta f_i^c + f_i^c|_0 \\ e_i^c|_1 = \Delta e_i^c + e_i^c|_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta f_i^n = f_i^n|_1 - f_i^n|_0 \\ \Delta e_i^n = e_i^n|_1 - e_i^n|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_i^n|_1 = \Delta f_i^n + f_i^n|_0 \\ e_i^n|_1 = \Delta e_i^n + e_i^n|_0 \end{bmatrix}$$

- Actualizar intensidades:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_i^a = I_i^a|_1 - I_i^a|_0 \\ \Delta I_{xi}^a = I_{xi}^a|_1 - I_{xi}^a|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_i^a|_1 = \Delta I_i^a + I_i^a|_0 \\ I_{xi}^a|_1 = \Delta I_{xi}^a + I_{xi}^a|_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta I_i^b = I_i^b|_1 - I_i^b|_0 \\ \Delta I_{xi}^b = I_{xi}^b|_1 - I_{xi}^b|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_i^b|_1 = \Delta I_i^b + I_i^b|_0 \\ I_{xi}^b|_1 = \Delta I_{xi}^b + I_{xi}^b|_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta I_i^c = I_i^c|_1 - I_i^c|_0 \\ \Delta I_{xi}^c = I_{xi}^c|_1 - I_{xi}^c|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_i^c|_1 = \Delta I_i^c + I_i^c|_0 \\ I_{xi}^c|_1 = \Delta I_{xi}^c + I_{xi}^c|_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta I_i^n = I_i^n|_1 - I_i^n|_0 \\ \Delta I_{xi}^n = I_{xi}^n|_1 - I_{xi}^n|_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_i^n|_1 = \Delta I_i^n + I_i^n|_0 \\ I_{xi}^n|_1 = \Delta I_{xi}^n + I_{xi}^n|_0 \end{bmatrix}$$

La notación “]?” hace referencia al número de iteración en el que se encuentra el proceso iterativo en ese momento.

- Actualizar residuos:

Con estos nuevos valores de tensión e intensidad, se vuelven a calcular los residuos $\Delta\Lambda$ y ΔS .

Como ya se mencionó, dado el carácter lineal de las ecuaciones del modelo lineal de la red, terminada la primera iteración, los residuos de intensidad se hacen aproximadamente nulos en cada nudo:

$$\Delta\Lambda = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i^a \\ \Delta\beta_i^a \\ \Delta\alpha_i^b \\ \Delta\beta_i^b \\ \Delta\alpha_i^c \\ \Delta\beta_i^c \\ \Delta\alpha_i^n \\ \Delta\beta_i^n \end{bmatrix} \cong 0$$

- Comprobar si se cumple el criterio de convergencia.

Este criterio de finalización, al igual que se mencionó en los dos algoritmos anteriores, se trata de un método basado en la acotación del error en los residuos de potencia en cada nudo:

$$|\Delta S_i| = \frac{\begin{bmatrix} |\Delta P_i^a| \\ |\Delta Q_i^a| \\ |\Delta P_i^b| \\ |\Delta Q_i^b| \\ |\Delta P_i^c| \\ |\Delta Q_i^c| \\ |\Delta P_i^c| \\ |\Delta Q_i^c| \end{bmatrix}}{|\Delta P_i^c|} < \varepsilon$$

Los residuos de intensidad no se tienen en cuenta por su nulidad pasada la primera iteración

En caso de no cumplir el criterio, volver al segundo punto de la iteración con los mejores valores de tensión e intensidad obtenidos hasta el momento.

5 HERRAMIENTA MATEMÁTICA

Tomando como punto de partida la formulación desarrollada en la sección anterior, junto con los distintos pasos que conforman el proceso de resolución del problema del flujo de carga, se implementa esta metodología a través de la herramienta matemática *MATLAB*.

Este programa matemático permite modelar la resolución del sistema de ecuaciones (79), a través de un algoritmo iterativo, que proporcione para una determinada red las tensiones e intensidades en cada nudo. Los resultados obtenidos estarán sujetos a un criterio de convergencia establecido.

En la programación de esta herramienta matemática, se ha tenido en cuenta la característica de que la red bajo estudio no ha de presentar resistencias de puesta a tierra rígidas en sus nudos. Este tipo de tierra sólo aparece en el nudo *slack*. Por lo tanto, para el resto de nudos se contempla la posibilidad de un valor determinado de resistencia en el neutro o que este se encuentre abierto a tierra.

En lo que sigue en esta sección, se presenta el formato de entrada de los distintos datos necesarios para la correcta ejecución del algoritmo, así como un diagrama de flujo en el que se explica brevemente los pasos que este sigue en la resolución del flujo de carga.

5.1 Formato de datos de entrada

Los distintos datos de potencias, nudos, ramas, matrices de impedancias, entre otros, son introducidos en el programa a través de un conjunto de matrices y vectores por medio de ficheros “.m”.

A continuación, se presentan cada uno de estos ficheros entrada y el formato que han de tener para la correcta ejecución del algoritmo.

5.1.1 Datos de cargas/generación

Los datos sobre las cargas y generadores se introducen en el programa matemático a través del fichero de *MATLAB* “*DatosCargas.m*”.

La matriz que compone este archivo recibe el nombre de “*cargas*” y su contenido presenta el siguiente formato:

$$cargas = [Nudo \quad S[KVA] \quad \cos\varphi \quad \%]_a \quad \%]_b \quad \%]_c]$$

Donde,

- La primera columna ha de incluir de forma ordenada desde el nudo 1 hasta n los nudos afectados por cargas/generadores, pudiéndose dar el caso de la presencia de varios de estos elementos en el mismo nudo. En este caso, el nudo aparecerá tantas veces como cargas o generadores tenga.
- La segunda columna es la potencia compleja de la carga o generador, $S [kVA]$. Los nudos afectados por generadores se presentan con signo negativo en esta columna, frente a las cargas que aparecen con signo positivo. En el caso de que un nudo no presente carga/generación, este se ha de incluir con un valor igual a 0 de potencia compleja.

- La tercera columna de la matriz es el factor de potencia ($\cos\phi$). Este permite obtener la potencia activa P [kW] de las cargas a través de su producto con la potencia compleja, así como la potencia reactiva de las mismas, Q [kVAr], como el producto de la potencia compleja y el $\sin(\arccos(\phi))$.
 - En el caso de que en esta columna aparezca un elemento igual a 1, se refiere a que en dicho nudo la carga y/o generación que aparece en la columna dos sólo tiene componente activa [kW].
 - En el caso de que en esta columna aparezca un elemento igual a 0, se refiere a que en dicho nudo la carga y/o generación que aparece en la columna dos sólo tiene componente reactiva [kVAr].
 - Un valor comprendido entre 0 y 1 indica la presencia de componente activa y reactiva en la potencia compleja inyectada en el nudo en cuestión.

- Las columnas cuarta, quinta y sexta, hacen referencia al porcentaje de la potencia compleja, mostrada en la segunda columna, que le corresponde a cada una de las fases implicadas a, b y c. En el caso de que alguna carga/generador no presente alguna fase, se le proporciona un valor de 0 al porcentaje de la fase que no esté presente.

5.1.2 Datos de los equipos

Los datos de los equipos están constituidos por las impedancias de los conductores de la red. Estas impedancias se presentan a través de una única matriz, que contiene las matrices de cada conductor. El archivo que contiene esta información se denomina “*DatosEquipos.m*”.

Así, la matriz que contiene el fichero tiene la siguiente estructura:

$$u_g = \begin{bmatrix}
 R_{aa}^{UGi} & X_{aa}^{UGi} & R_{ab}^{UGi} & X_{ab}^{UGi} & R_{ac}^{UGi} & X_{ac}^{UGi} & R_{an}^{UGi} & X_{an}^{UGi} \\
 R_{ba}^{UGi} & X_{ba}^{UGi} & R_{bb}^{UGi} & X_{bb}^{UGi} & R_{bc}^{UGi} & X_{bc}^{UGi} & R_{bn}^{UGi} & X_{bn}^{UGi} \\
 R_{ca}^{UGi} & X_{ca}^{UGi} & R_{cb}^{UGi} & X_{cb}^{UGi} & R_{cc}^{UGi} & X_{cc}^{UGi} & R_{cn}^{UGi} & X_{cn}^{UGi} \\
 R_{na}^{UGi} & X_{na}^{UGi} & R_{nb}^{UGi} & X_{nb}^{UGi} & R_{nc}^{UGi} & X_{nc}^{UGi} & R_{nn}^{UGi} & X_{nn}^{UGi} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 R_{aa}^{UGn} & X_{aa}^{UGn} & R_{ab}^{UGn} & X_{ab}^{UGn} & R_{ac}^{UGn} & X_{ac}^{UGn} & R_{an}^{UGn} & X_{an}^{UGn} \\
 R_{ba}^{UGn} & X_{ba}^{UGn} & R_{bb}^{UGn} & X_{bb}^{UGn} & R_{bc}^{UGn} & X_{bc}^{UGn} & R_{bn}^{UGn} & X_{bn}^{UGn} \\
 R_{ca}^{UGn} & X_{ca}^{UGn} & R_{cb}^{UGn} & X_{cb}^{UGn} & R_{cc}^{UGn} & X_{cc}^{UGn} & R_{cn}^{UGn} & X_{cn}^{UGn} \\
 R_{na}^{UGn} & X_{na}^{UGn} & R_{nb}^{UGn} & X_{nb}^{UGn} & R_{nc}^{UGn} & X_{nc}^{UGn} & R_{nn}^{UGn} & X_{nn}^{UGn}
 \end{bmatrix}$$

Donde,

- Cada conjunto de cuatro filas y ocho columnas representa un tipo distinto de conductor.
- Las columnas impares representan la parte resistiva (R) de la impedancia del conductor para cada fase.
- Las columnas pares representan la parte reactiva (X) de la impedancia del conductor para cada fase.

5.1.3 Datos de la topología de la red.

El fichero de “*DatosTopologia.m*” incluye los datos referentes a los nudos, nudo de referencia o slack, las características de las ramas y las resistencias de puesta a tierra. Estos datos se muestran en el fichero a través de las matrices dadas por “*nudos*”, “*nudo_slack*”, “*ramas*” y “*puestas_a_tierra*”, respectivamente.

La matriz de “*nudos*” tiene la siguiente estructura:

$$\text{nudos} = [\text{Nudo} \quad \text{Tipo de nudo} \quad \text{Tensión nominal}[V]]$$

Donde,

- La primera columna incluye el número correspondiente a cada nudo desde $i=1$ hasta $i=n$.
- La segunda columna muestra el tipo de nudo:
 - El valor 1, indica nudo PV , se conocen P y V , y se desconocen Q y θ . Este tipo de nudo no se ha tenido en cuenta en el modelo propuesto.
 - El valor 2, indica nudo PQ , se conocen P y Q , y se desconocen V y θ . Estos nudos son los que se dan en la mayoría de los casos, siendo los que se van a tratar en el modelo propuesto.
 - El valor 3, indica nudo *slack* o de referencia, se conocen V y θ , y se desconocen P y Q generadas. Normalmente en estos nudos $\theta=0$.
 - El valor 4, indica nudo aislado.
- La tercera columna indica la tensión nominal de cada nudo expresada en voltios.

La matriz “*nudo_slack*” contiene la siguiente información:

$$\text{nudo_slack} = \begin{bmatrix} 1 & U_{\text{slack}}^a|_{\text{real}} & U_{\text{slack}}^a|_{\text{imag}} \\ 2 & U_{\text{slack}}^b|_{\text{real}} & U_{\text{slack}}^b|_{\text{imag}} \\ 3 & U_{\text{slack}}^c|_{\text{real}} & U_{\text{slack}}^c|_{\text{imag}} \\ 4 & U_{\text{slack}}^n|_{\text{real}} & U_{\text{slack}}^n|_{\text{imag}} \end{bmatrix}$$

Donde,

- La primera columna hace referencia a las fases,
 - Valor 1 para la fase a.
 - Valor 2 para la fase b.
 - Valor 3 para la fase c.
 - Valor 4 para el neutro.
- La segunda columna hace referencia a la tensión real por fase, expresada en voltios.
- La tercera columna hace referencia a la tensión imaginaria por fase, expresada en voltios.

El formato de la matriz de “*ramas*” es:

$$ramas = [\text{Nudo origen} \quad \text{Nudo final} \quad \text{Tipo de conductor} \quad \text{Longitud [m]}]$$

Donde,

- La primera columna indica el número del nudo origen (i) de la rama ij .
- La segunda columna indica el número del nudo final (j) de la rama ij .
- La tercera columna muestra el tipo de conductor asociado a la rama ij . Esta columna dependerá del número de conductores diferentes que compongan la red. Se asocia un valor numérico a cada tipo de conductor y se coloca en esta columna relacionándolo con la rama a la que representa.
- La cuarta columna es la longitud asociada a cada rama, expresada en metros.

Las puestas a tierra se incluyen en el fichero mediante la matriz “*puestas_a_tierra*”, cuyo formato es el siguiente:

$$puestas_a_tierra = [\text{Nudo} \quad R_{ground}]$$

Donde;

- La primera columna indica el número del nudo afectado por la puesta a tierra. Se han de poner todos los nudos que componen la red.
- La segunda columna muestra el valor en ohmios de la resistencia de puesta a tierra:
 - Un valor de -1, indica nudo abierto a tierra.
 - Un valor distinto de cero, indica la presencia de resistencia de puesta a tierra en el nudo.
 - Un valor de 0, indica nudo rígido a tierra. En el modelo propuesto sólo se considera que el nudo de referencia tiene este tipo de puesta a tierra.

5.2 Diagrama de flujo del algoritmo implementado

A continuación, se muestra en la figura 4 el diagrama de flujo que modela la implementación del problema del flujo de carga mediante la herramienta matemática *MATLAB*.

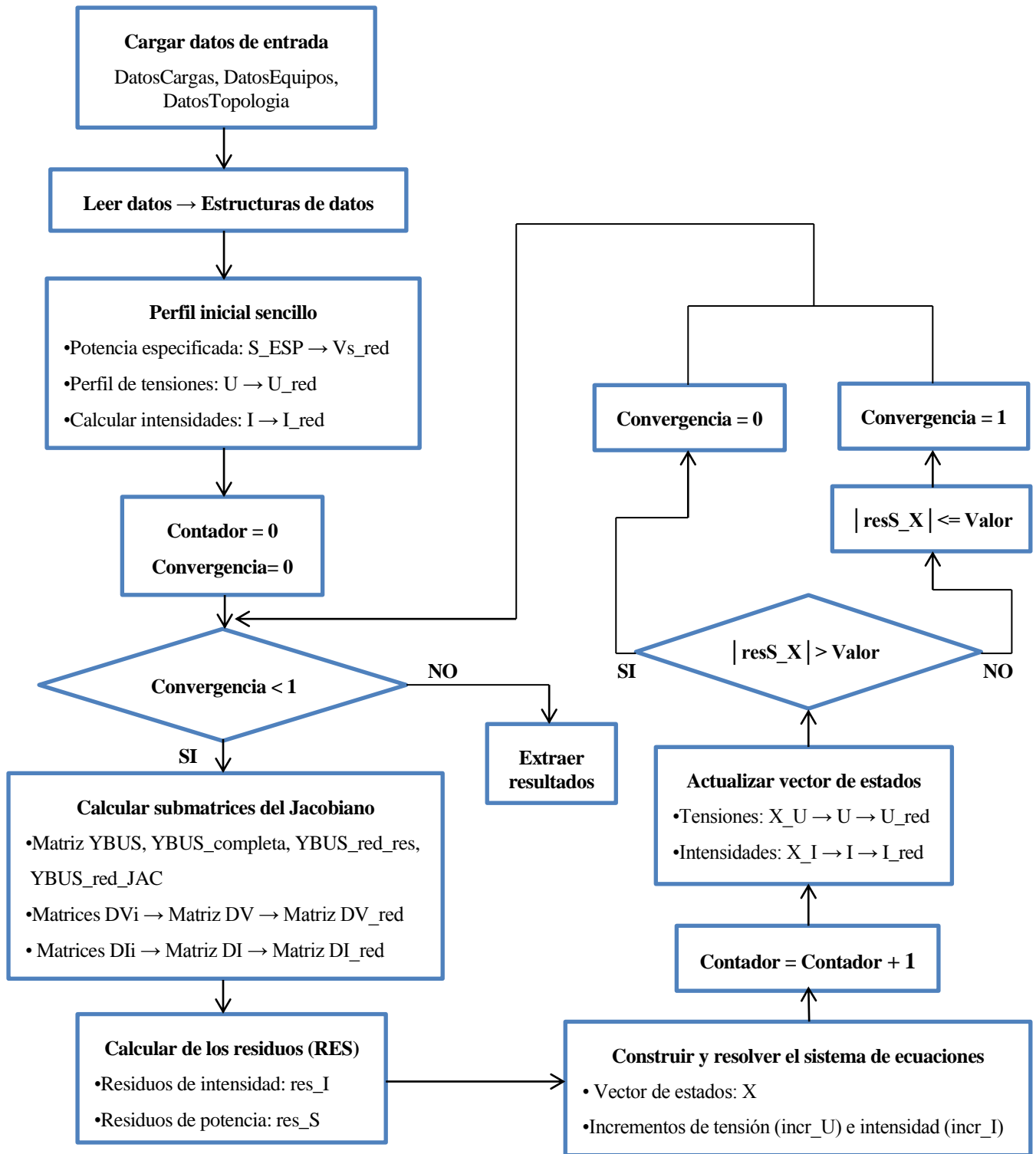


Figura 4. Diagrama de flujo del modelo propuesto implementado en MATLAB

A continuación, se van a comentar los distintos bloques que conforman el algoritmo y cómo el programa procede a su ejecución, qué cálculos realiza y en qué funciones se apoya.

5.2.1 Cargar los datos de entrada

En este bloque el programa toma los datos de la red, siguiendo el formato que se mencionó con anterioridad. El algoritmo realiza los siguientes pasos:

- Cargar los datos de las cargas y/o generadores presentes en la red (“*DatosCargas*”).
- Cargar las impedancias de los conductores (“*DatosEquipos*”).
- Cargar los datos de los nudos y su tensión nominal, del *slack*, de las ramas y su longitud y de las resistencias de puestas a tierra (“*DatosTopologia*”).

5.2.2 Leer datos

A partir del conjunto de datos cargados de la red, el programa haciendo uso de la función “*lee_datos*”, almacena en estructuras de datos, aquellos que sean interés para la resolución del problema.

Estas estructuras son de “*CARGAS*”, “*NUDOS*”, “*RAMAS*”, “*TIERRAS*” e incluso permite identificar el nudo “*slack*” y lo almacena junto con su tensión en “*V_SLACK*”.

Esta función también crea las matrices de impedancia/admitancia base de cada conductor y las asocia a cada rama de la red según el tipo de cable.

5.2.3 Perfil inicial sencillo

Este apartado consta de un conjunto de bloques, que a través de una serie de cálculos, permiten obtener los datos necesarios para comenzar el proceso iterativo de resolución.

5.2.3.1 Potencia compleja especificada

Se trata de un conjunto de bucles, que tomando los datos de la estructura de “*CARGAS*”, proporcionan el vector de potencia compleja especificada, distinguiendo entre parte real e imaginaria (“*S_ESP*”). Este vector aparece con signo negativo, ya que en el modelo éste se trata como potencia inyectada. Las cargas se toman positivas y la generación negativa en el fichero de datos de entrada (“*DatosCargas*”).

A demás, dado que en el cálculo de los residuos de potencia no va a aparecer el nudo de referencia, éste se elimina del vector anterior dando lugar a “*Vs_red*”.

5.2.3.2 Perfil de tensiones

Partiendo de unos valores sencillos de tensión, similares a los del nudo de referencia, estos se almacenan en la estructura “*TENSION*”. En esta estructura también se añaden los valores correspondientes al nudo *slack*.

Almacenada la tensión de cada nudo, se construye el vector de tensiones (“*U*”), que será útil para el cálculo de los residuos. También, se obtiene el vector reducido (sin *slack*) de la tensión, “*U_red*”, dado que en la actualización posterior de tensiones será necesario, ya que el vector de estados no incluye el nudo de referencia.

5.2.3.3 Calcular intensidades

Las intensidades se obtienen operando con las estructuras de “*CARGAS*” y “*TENSION*”, usando la expresión de la potencia compleja, que la relaciona con la tensión e intensidad. Los valores obtenidos se almacenan en una estructura llamada “*INTENSIDAD*”.

Al igual que se hizo con las tensiones, se construye un vector que las contenga (“*I*”) y se elimina el nudo de referencia (“*I_{red}*”), tanto para su uso en el cálculo de los residuos, como para la actualización de intensidades.

5.2.4 Calcular las submatrices del Jacobiano

Una vez obtenidos todos los datos necesarios, comienza el proceso iterativo de resolución del algoritmo. Para ello se establece un contador de iteraciones, que se inicializa a 0, junto con un indicador de convergencia del programa (“*convergencia*”) inicializado al mismo valor. La inicialización del indicador a 0, es debido a que se parte de la situación de que el programa no ha conseguido alcanzar la convergencia.

Con todo lo anterior, comienza un bucle de condición, el cual establece que siempre que “*convergencia*” sea menor que la unidad se continúe iterando.

Los siguientes bloques del algoritmo van encaminados al cálculo de las matrices necesarias para la construcción del jacobiano del sistema a resolver.

5.2.4.1 Matriz de admitancias de nudos

Este apartado se divide en una serie de cálculos que siguen los siguientes pasos:

- Obtener mediante la función “*crea_YBUS*” la matriz de admitancia “*YBUS*”, a partir de los datos de “*RAMAS*” y “*NUDOS*”, con el formato por elemento de $YBUS_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$.
- Obtener mediante la función “*crea_Y*”:
 - Matriz “*YBUS_completa*”, matriz en la que se descomponen los elementos de “*YBUS*” en parte real y compleja, de forma que puedan ser introducidos en el jacobiano. Los elementos que conforman esta matriz tendrán la siguiente estructura:

$$YBUS_completa_{ij} = \begin{bmatrix} -B_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & B_{ij} \end{bmatrix}$$
 - Matriz “*YBUS_red_res*”, matriz que toma como partida “*YBUS_completa*” y elimina los elementos correspondientes al nudo *slack*, sólo en filas para no perder información de los nudos conectados al *slack* y así permitir su uso en el cálculo de los residuos de intensidad.
 - Matriz “*YBUS_red_JAC*”, matriz que al igual que la anterior parte de “*YBUS_completa*”, pero con la salvedad de que se eliminan los elementos del nudo de referencia tanto en filas, como en columnas para la construcción del jacobiano, dado que este nudo no participa en su cálculo.

5.2.4.2 Matriz de tensiones “*DV*”

Para obtener la matriz “*DV*” se ha utilizado la siguiente metodología:

- Calcular a través de un bucle que recorre todos los nudos de la red y emplea la estructura “*TENSION*”, la matriz de tensiones por nudo “*DVi*”.
- Dado el carácter diagonal de “*DV*”, ésta se construye mediante un bucle que coloque en dicha diagonal cada una de las matrices por nudo “*DVi*”.
- Por último, puesto que en el cálculo de los residuos de potencia y en el jacobiano no participa el nudo *slack*, éste se elimina de filas y columnas de “*DV*”, proporcionando “*DV_red*”.

5.2.4.3 Matriz de intensidades “DI”

Para obtener la matriz “DI” se procede al igual que se hizo con “DV”:

- Calcular a través de un bucle que recorre todos los nudos de la red y emplea la estructura “INTENSIDAD”, la matriz de intensidades por nudo “DIi”.
- Dado el carácter diagonal de “DI”, ésta se construye mediante un bucle que coloque en dicha diagonal cada una de las matrices por nudo “DIi”.
- Por último, puesto que en el cálculo del jacobiano no participa el nudo *slack*, este se elimina de filas y columnas de “DI”, proporcionando “DI_{red}”.

5.2.5 Calcular los residuos

5.2.5.1 Residuos de intensidad

El cálculo de estos residuos se consigue a partir del vector de intensidades reducido (“I_{red}”), la matriz de admitancia de nudos reducida para el cálculo de residuos de intensidad (“YBUS_{red}res”) y el vector de tensiones (“U”). Esto proporciona el vector de residuos de intensidad “res_I”.

5.2.5.2 Residuos de potencia

El cálculo de los residuos de potencia se consigue a partir del vector de potencias complejas especificadas reducido (“Vs_{red}”), la matriz de tensiones reducida (“DV_{red}”) y el vector de intensidades reducido (“I_{red}”). Esto proporciona el vector de residuos de potencia “res_S”.

Tomando los dos vectores descritos, estos se combinan en un único vector denominado “RES”, para su uso en la resolución del sistema de ecuaciones.

5.2.6 Construir y resolver el sistema de ecuaciones

Mediante la función “crea_SISTEMA” se consigue unir en una sola matriz (“JACOBIANO”) las submatrices anteriores para formar el jacobiano. En esta matriz de grandes dimensiones, no se tiene en cuenta la participación del nudo de referencia. A demás, se renombra el anterior vector “RES” como “RESIDUOS”.

A continuación, se resuelve el sistema de ecuaciones aplicando el método basado en la factorización LU, proporcionando el vector de estados “X”: Obtenido dicho vector, se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Almacenar en el vector “incr_U” los elementos del vector de estados referentes a las tensiones.
- Almacenar en el vector “incr_I” los elementos del vector de estados referentes a las intensidades.

5.2.7 Aumentar contador

En este punto se aumenta en una unidad el contador de iteraciones, dado que los valores de tensiones e intensidades que se obtienen a partir de este momento, son los mismos que se emplearán para la siguiente iteración del algoritmo.

5.2.8 Actualizar vector de estados

5.2.8.1 Actualizar tensiones

Consiste en obtener el nuevo vector de tensiones (“ X_U ”) a partir de la suma de las tensiones iniciales reducidas (“ U_{red} ”), dado que los resultados que proporciona “ X ” son sin *slack*, y las tensiones obtenidas del vector de estados (“ $incr_U$ ”).

Este apartado también contiene una serie de bucles que hacen que estas nuevas tensiones suplanten a las anteriores almacenadas en la estructura “ $TENSION$ ”. Además, consigue que el nudo *slack* no desaparezca de esta estructura, por lo que se consigue construir un nuevo vector “ U_{l_i} ” con todos los nudos de la red y así poder hacer uso de él en la siguiente iteración. También se procede a eliminar el nudo de referencia del nuevo vector de tensiones (“ $U_{red\ l_i}$ ”), que suplanta al anterior “ U_{red} ”, para su uso en el cálculo de los residuos actualizados.

5.2.8.2 Actualizar intensidades

En este punto se obtiene el nuevo vector de intensidades (“ X_I ”) a partir de la suma de las intensidades iniciales reducidas (“ I_{red} ”) y las intensidades obtenidas del vector de estados (“ $incr_I$ ”).

Estas nuevas intensidades se almacenan en la estructura “ $INTENSIDAD$ ” suplantando a las anteriores, permitiendo introducir la intensidad del *slack* en su respectivo nudo. Tomando esta estructura, se vuelven a crear los vectores “ I_{l_i} ” e “ $I_{red\ l_i}$ ” de igual forma que se procedió en pasos anteriores con la tensión. Estos vectores se usarán para la nueva iteración y el cálculo actualizado de los residuos.

5.2.9 Actualizar los residuos

5.2.9.1 Actualizar residuos de intensidad

Este paso del algoritmo permite calcular de nuevo el vector de residuos de intensidad (“ $resI_X$ ”), en este caso con el vector de tensiones actualizado (“ U_{l_i} ”) y el de intensidades reducidas actualizadas (“ $I_{red\ l_i}$ ”).

La matriz de admitancias de nudos “ $YBUS_{red_res}$ ” no presenta ninguna modificación en este paso, ya que el valor de las impedancias y la longitud de los conductores de los que parte permanecen constantes.

5.2.9.2 Actualizar los residuos de potencia

Previamente al cálculo de los residuos de potencia actualizados, se emplean las funciones “ $crea_Dvi$ ” y “ $crea_Dv$ ”, que se mencionaron en pasos anteriores. La ejecución de estas funciones proporcionan las matrices necesarias para la obtención de los nuevos residuos. Las matrices resultantes de ejecutar las dos funciones aludidas son:

- Matriz “ DVi_X ”, matriz de tensiones por nudo. Esta matriz suplantarán a la anterior “ DVi ” en los elementos de la estructura “ $TENSION$ ”.
- Matriz “ DV_X ”, matriz que mediante un bucle va siendo construida, a partir de los elementos “ DVi ” de cada nudo.
- Matriz “ DV_X_{red} ”, matriz de tensiones reducida, en la que se elimina el nudo de referencia, puesto que este nudo se puede obviar en el cálculo de los residuos de potencia.

Obtenida la matriz “ DV_X_{red} ” y tomando el vector de intensidades reducido actualizado (“ $I_{red\ l_i}$ ”), se calcula el vector de residuos de potencia actualizado (“ $resS_X$ ”).

El vector de potencias complejas especificadas reducido (“ Vs_{red} ”), se mantiene constante en el proceso iterativo de resolución.

A continuación, se llevan a cabo una serie de operaciones sobre el nuevo vector de residuos obtenido, orientadas a conseguir la convergencia del programa:

- Vector “*res_X_elim_sin*”, éste elimina del vector “*resS_X*” los elementos de aquellos nudos que no tengan ni carga, ni generación. Esto se debe a que la ausencia de cargas y generadores en un nudo, provoca la aparición de un valor nulo en los elementos del vector de residuos de potencia relacionados con dicho nudo. El valor 0 de un elemento de este vector da lugar a la no convergencia del programa, es por ello por lo que se elimina del mismo.
- Bucle que crea el vector “*resS_X_elim_n*”. Consiste en eliminar, por el mismo motivo que en el caso anterior, los elementos relacionados con el neutro de cada nudo de “*res_X_elim_sin*”. En estos elementos el valor de su carga/generación es nulo, lo que imposibilita la convergencia del algoritmo.

5.2.10 Criterio de convergencia

El criterio de convergencia se basa en que los residuos de potencia actualizados no sobrepasen un determinado valor expresado en [W o VAr]. Para ello, se calcula el valor absoluto de “*res_X_elim_sin*”, dando lugar a “*resS_X_abs*”. Los residuos de intensidad no entran en el criterio de convergencia, dado que tras la primera iteración su valor es prácticamente cero debido al carácter lineal de las ecuaciones de las que procede.

La programación del criterio de finalización del algoritmo iterativo de resolución consiste en los siguientes pasos:

- Verificar si los residuos de potencia actualizados son mayores que el valor establecido como criterio de finalización.
- Si la verificación es positiva, el valor del elemento que indica la convergencia del programa (“*convergencia*”), se hace nulo. En este momento, el algoritmo vuelve al punto 5.2.4 para comenzar una nueva iteración.
- Si la verificación no tiene éxito, se comprueba que el valor de “*resS_X_abs*” es menor o igual que el establecido por el criterio de convergencia.
- Si el caso anterior se cumple satisfactoriamente, el elemento “*convergencia*” toma el valor 1. El valor obtenido de “*convergencia*” da lugar a la finalización del proceso iterativo de resolución.

5.2.11 Extraer resultados

Una vez finalizado el proceso iterativo que resuelve el flujo de carga, se extraen los resultados más relevantes.

- Bucle que toma las tensiones por fase resultantes del flujo de cargas y las almacena en la estructura “TENSION”, expresadas en módulo [V] y fase [°]. Muestra por pantalla dichas tensiones.
- Bucle que calcula y muestra las intensidades por fase de circulan por las ramas de la red, expresadas en módulo [A] y fase [°]. Para ello se emplean las siguientes expresiones:

$$I_{ij} = Z_{línea}^{-1} \cdot (U_i - U_j) \quad (81)$$

$$I_{ji} = Z_{línea}^{-1} \cdot (U_j - U_i) \quad (82)$$

- Bucle que aplicando las restricciones lineales del problema del flujo de carga (46), obtiene y muestra por pantalla la intensidad del nudo de referencia en módulo [A] y ángulo [°]. Esta intensidad se almacena en la estructura “INTENSIDAD”.
- Bucle que calcula y muestra por pantalla las pérdidas de potencia por rama de la red, las pérdidas

totales del sistema y el porcentaje de estas respecto a la potencia de las cargas. Para conseguir dichos valores se emplean las siguientes ecuaciones:

$$S_{LOSS}^{ij} = U_i^T \cdot I_{ij}^* + I_{ji}^* U_j^T \quad (83)$$

$$S_{LOSS}^{sistema} = \sum_{\forall ij} S_{LOSS}^{ij} \quad (84)$$

$$S_{LOSS}^{sistema}(\%) = \frac{S_{LOSS}^{sistema}}{\sum P_{LOAD}} \cdot 100 \quad (85)$$

6 MODELO DE VALIDACIÓN

Una vez se ha desarrollado el programa matemático con toda la formulación que define el problema del flujo de carga, es necesario poner en práctica esta metodología y crear un escenario adecuado de prueba que permita validarlo.

El proceso de validación consta de dos escenarios:

- Estudio de la red para cargas trifásicas equilibradas.
- Estudio de la red para cargas trifásicas desequilibradas.

Los resultados obtenidos en cada caso son validados con los que proporciona el programa “*OpenDSS*” cuando se le introducen los datos de la red para cada escenario de estudio.

En este apartado se muestra:

- La red bajo estudio con los elementos que la componen y sus respectivos valores.
- El conjunto de datos de entrada expresados en su correspondiente formato, distinguiendo entre el caso equilibrado y el desequilibrado.
- La validación de los resultados obtenidos para cada escenario, comparados con los proporcionados por el software “*OpenDSS*”.

6.1 Red de estudio

La red sobre la que se va a llevar el estudio del flujo de carga es una red de baja tensión de cuatro nudos conectados en árbol a través de líneas subterráneas, con: dos cargas trifásicas, un generador de cabecera y dos puestas a tierra.

La cabecera (nudo 1) se supone a tensión nominal y equilibrada cuyos valores expresados en voltios se muestran en la tabla 1:

Fase	Tensión [V]
a	$400/\sqrt{3}\angle 0^\circ$
b	$\frac{400}{\sqrt{3}}\angle -120^\circ$
c	$400/\sqrt{3}\angle 120^\circ$
Neutro	$0\angle 0^\circ$

Tabla 1. Tensión por fase en el nudo Slack

Las líneas subterráneas se definen utilizando las líneas *UG1*, *UG2* y *UG3* de la red de baja tensión europea propuesta en el artículo de la CIGRE [3]. En la red de estudio las tres ramas que intervienen tienen el mismo tipo de conductor, *UG1*. En la tabla 2 se pueden observar las impedancias de dicho cable junto con las de los conductores *UG2* y *UG3*.

CONDUCTOR		Matriz primitiva de impedancias (Ω/km)			
		A	B	C	N
UG1-3ph	A	0.211 + j0.747	0.049 + j0.673	0.049 + j0.651	0.049 + j0.673
	B	0.049 + j0.673	0.211 + j0.747	0.049 + j0.673	0.049 + j0.651
	C	0.049 + j0.651	0.049 + j0.673	0.211 + j0.747	0.049 + j0.673
	N	0.049 + j0.673	0.049 + j0.651	0.049 + j0.673	0.221 + j0.747
UG2-3ph	A	0.314 + j0.762	0.049 + j0.687	0.049 + j0.665	0.049 + j0.687
	B	0.049 + j0.687	0.314 + j0.762	0.049 + j0.687	0.049 + j0.665
	C	0.049 + j0.665	0.049 + j0.687	0.314 + j0.762	0.049 + j0.687
	N	0.049 + j0.887	0.049 + j0.665	0.049 + j0.687	0.314 + j0.762
UG3-3ph	A	0.871 + j0.797	0.049 + j0.687	0.049 + j0.697	0.049 + j0.719
	B	0.049 + j0.687	0.871 + j0.797	0.049 + j0.719	0.049 + j0.697
	C	0.049 + j0.697	0.049 + j0.719	0.871 + j0.797	0.049 + j0.719
	N	0.049 + j0.719	0.049 + j0.697	0.049 + j0.719	0.871 + j0.797

Tabla 2. Impedancias del cable subterráneo para redes europeas de baja tensión definidas por CIGRE

A cada rama se le asigna un tipo de cable y una distancia en metros. En la tabla 3 se observan las propiedades de las ramas de la red.

Rama	Nudo i	Nudo j	Tipo de conductor	Distancia [m]
1	1	2	UG1	200
2	2	3	UG1	100
3	2	4	UG1	200

Tabla 3. Características de las ramas

La red presenta dos cargas entre el conjunto de nudos que la componen. En la tabla 4 y 5 se muestran los datos de dichas cargas para los casos equilibrado y desequilibrado, respectivamente.

Carga	Nudo	S (kVA)	$\cos(\varphi)$	S_a (%)	S_b (%)	S_c (%)
Carga 3	3	100	1	33.3	33.3	33.3
Carga 4	4	50	1	33.3	33.3	33.3

Tabla 4. Potencia de las cargas para el escenario equilibrado

Carga	Nudo	S (kVA)	$\cos(\varphi)$	S_a (%)	S_b (%)	S_c (%)
Carga 3	3	100	1	33.3	33.3	33.3
Carga 4	4	50	1	33.3	33.3	33.3

Tabla 5. Potencia de las cargas para el escenario desequilibrado

Las resistencias de puesta a tierra y los nudos que se ven afectadas por las mismas se muestran en la tabla 6.

Tierra	Nudo	Resistencia (Ω)
Tierra 2	2	5
Tierra 4	4	5

Tabla 6. Resistencias de puesta a tierra

El criterio de convergencia se establece con un límite de 0.01 W para el módulo de los residuos de potencia.

Por último, se presenta en la figura 5 el esquema unifilar de la red sobre la que se llevan a cabo las pruebas del flujo de carga para validar el modelo matemático desarrollado en la sección anterior.

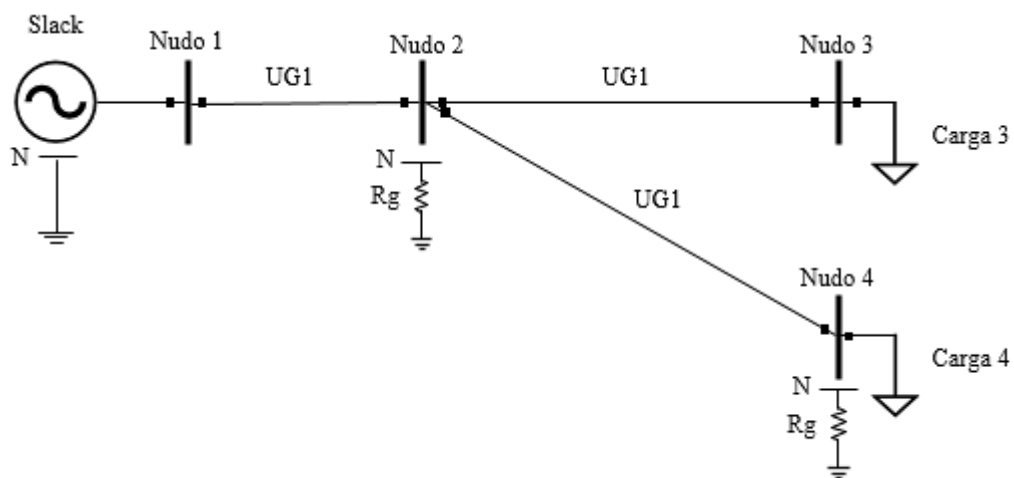


Figura 5. Esquema unifilar de la red de estudio

6.2 Datos de entrada

A continuación, se muestran los distintos archivos que el programa matemático encargado de modelar el proceso de resolución del flujo de carga, toma como datos de entrada para su correcta ejecución.

En los siguientes puntos se presentan el contenido de dichos archivos, los cuales recogen los datos del punto anterior mediante matrices de datos.

6.2.1 Datos de Cargas

Los datos sobre las cargas que aparecen en las tablas 4 y 5 respectivamente, se introducen en el programa matemático a través del fichero de *MATLAB* denominado “*DatosCargas.m*”.

La matriz que compone este archivo recibe el nombre de “*cargas*” y su contenido para cada escenario de estudio es el siguiente:

- Para el caso de cargas trifásicas equilibradas:

$$cargas = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 100 & 1 & 33.3 & 33.3 & 33.3 \\ 4 & 50 & 1 & 33.3 & 33.3 & 33.3 \end{bmatrix}$$

- Para el caso de cargas trifásicas desequilibradas:

$$cargas = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 100 & 1 & 50 & 30 & 20 \\ 4 & 50 & 1 & 50 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

6.2.2 Datos de Equipos

Los datos de los equipos están constituidos por las impedancias de los conductores dadas por la tabla 2. Estas impedancias se presentan a través de una única matriz que contiene tres matrices distintas, una para cada conductor, dentro del mismo archivo “*DatosEquipos.m*”.

Así, el fichero contiene las siguientes matrices de datos:

$$ug = \begin{bmatrix} 0.211 & 0.747 & 0.049 & 0.673 & 0.049 & 0.651 & 0.049 & 0.673 \\ 0.049 & 0.673 & 0.211 & 0.747 & 0.049 & 0.673 & 0.049 & 0.651 \\ 0.049 & 0.651 & 0.049 & 0.673 & 0.211 & 0.747 & 0.049 & 0.673 \\ 0.049 & 0.673 & 0.049 & 0.651 & 0.049 & 0.673 & 0.211 & 0.747 \\ 0.314 & 0.762 & 0.049 & 0.687 & 0.049 & 0.665 & 0.049 & 0.687 \\ 0.049 & 0.687 & 0.314 & 0.762 & 0.049 & 0.687 & 0.049 & 0.665 \\ 0.049 & 0.665 & 0.049 & 0.687 & 0.314 & 0.762 & 0.049 & 0.687 \\ 0.049 & 0.687 & 0.049 & 0.665 & 0.049 & 0.687 & 0.314 & 0.762 \\ 0.871 & 0.797 & 0.049 & 0.719 & 0.049 & 0.697 & 0.049 & 0.719 \\ 0.049 & 0.719 & 0.871 & 0.797 & 0.049 & 0.719 & 0.049 & 0.697 \\ 0.049 & 0.697 & 0.049 & 0.719 & 0.871 & 0.797 & 0.049 & 0.719 \\ 0.049 & 0.719 & 0.049 & 0.697 & 0.049 & 0.719 & 0.871 & 0.797 \end{bmatrix}$$

Dado que en la red de estudio sólo interviene un tipo de conductor (*UGI*), el programa toma la correspondiente matriz (*ugI*) para su correcta ejecución.

6.2.3 Datos de Topología

El fichero de “*DatosTopologia.m*” incluye:

- Matriz de nudos/tensión nominal:

$$nudos = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 400 \\ 2 & 2 & 400 \\ 3 & 2 & 400 \\ 4 & 2 & 400 \end{bmatrix}$$

- Matriz de tensión del nudo slack (nudo 1):

$$nudo_slack = \begin{bmatrix} 1 & 230.94 & 0 \\ 2 & -115.47 & -200 \\ 3 & -115.47 & 200 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ramas:

$$ramas = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 200 \\ 2 & 3 & 1 & 100 \\ 2 & 4 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

- Matriz de puestas a tierra:

$$puestas_a_tierra = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

6.3 Validación de resultados del flujo de carga

Para validar el modelo matemático, se implementa la red en un software comercial (en este caso, “*OpenDSS*”) que permite realizar flujos de carga desequilibrados y obtener el estado de la red. Éste se compara con el resultado obtenido mediante el algoritmo programado con *MATLAB* y así conseguir dotar de validez al mismo.

La comprobación del modelo se lleva a cabo tanto para el caso de la red bajo cargas trifásicas equilibradas, así como desequilibradas.

6.3.1 Cargas equilibradas

En primer lugar, se comprueban las tensiones y ángulos del flujo de cargas obtenidas mediante el programa comercial y el modelo propuesto.

Las tensiones calculadas por el flujo de carga mediante “*OpenDSS*” son las mostradas en las tablas 7 y 8.

Nudo	U_a [V]	U_b [V]	U_c [V]	U_{neutro} [V]
1	230.94	230.94	230.94	2.4717e-5
2	222.6	223.63	224.5	1.0685
3	219.84	221.18	222.38	1.432
4	219.82	221.22	222.36	1.4194

Tabla 7. Caso equilibrado: tensiones del flujo de carga en OpenDSS

Nudo	φ_a [°]	φ_b [°]	φ_c [°]	φ_{neutro} [°]
1	0.0	-120.0	120.0	-32.1
2	-1.0	-120.8	119.1	-33.1
3	-1.3	-121.1	118.7	-32.1
4	-1.3	-121.1	118.8	-33.8

Tabla 8. Caso equilibrado: ángulos de la tensión del flujo de carga en OpenDSS

Utilizando el modelo propuesto, el sistema de ecuaciones a resolver dado por (79) queda expresado para este escenario tal y como se muestra en el Anexo I, en la ecuación (86). Resolviendo dicho sistema, tras tres iteraciones del modelo, se obtienen las tensiones y ángulos definidos en las tablas 9 y 10.

Nudo	U_a [V]	U_b [V]	U_c [V]	U_{neutro} [V]
1	230,9401	230,9401	230,9401	0.0000
2	222.6042	223.6397	224.5072	1.0674
3	219.8536	221.1951	222.3854	1.4306
4	219.8309	221.2319	222.3701	1.4180

Tabla 9. Caso equilibrado: tensiones del flujo de carga del modelo propuesto

Nudo	φ_a [°]	φ_b [°]	φ_c [°]	φ_{neutro} [°]
1	0.0000	-120.0000	120.0000	0.0000
2	-0.9692	-120.8106	119.0744	-33.1068
3	-1.3039	-121.0921	118.7487	-32.1173
4	-1.3119	-121.0933	118.7577	-33.8147

Tabla 10. Caso equilibrado: ángulos de la tensión del flujo de carga del modelo propuesto

En segundo lugar, se comprueban los resultados de las intensidades que circulan por las ramas y sus respectivos ángulos, obtenidas de la resolución del flujo de carga.

Las intensidades por rama calculadas por el flujo de carga mediante “OpenDSS” son las mostradas en las tablas 11 y 12.

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	I_{ij} [A]	I_{ji} [A]
1	1	2	a	228.7	228.7
			b	226.09	226.09
			c	223.59	223.59
			neutro	2.4717	2.4717
2	2	3	a	152.47	152.47
			b	150.72	150.72
			c	149.06	149.06
			neutro	1.9795	1.9795
3	2	4	a	76.231	76.231
			b	75.363	75.363
			c	74.532	74.532
			neutro	0.70585	0.70585

Tabla 11. Caso equilibrado: intensidades del flujo de carga en OpenDSS

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	φ_{ij} [°]	φ_{ji} [°]
1	1	2	a	-1.1	178.9
			b	-121.5	58.5
			c	118.9	-61.1
			neutro	147.9	-32.1
2	2	3	a	-1.1	178.9
			b	-121.5	58.5
			c	118.9	-61.1
			neutro	147.7	-32.3
3	2	4	a	-1.1	178.9
			b	-121.5	58.5
			c	118.9	-61.1
			neutro	148.2	-31.8

Tabla 12. Caso equilibrado: ángulos de la intensidad del flujo de carga en OpenDSS

A partir de las expresiones (81) y (82) del modelo propuesto, se obtienen las intensidades y ángulos por las ramas de la red, definidas en las tablas 13 y 14.

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	I_{ij} [A]	I_{ji} [A]
1	1	2	a	228.4686	228.4686
			b	225.8418	225.8418
			c	223.3560	223.3560
			neutro	2.4775	2.4775
2	2	3	a	152.3148	152.3148
			b	150.5601	150.5601
			c	148.9026	148.9026
			neutro	1.9831	1.9831
3	2	4	a	76.1539	76.1539
			b	75.2818	75.2818
			c	74.4534	74.4534
			neutro	0.7079	0.7079

Tabla 13. Caso equilibrado: intensidad del flujo de carga del modelo propuesto

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	φ_{ij} [°]	φ_{ji} [°]
1	1	2	a	-1.1120	178.8880
			b	-121.4618	58.5382
			c	118.9264	-61.0736
			neutro	148.0965	-31.9035
2	2	3	a	-1.1119	178.8881
			b	-121.4626	58.5374
			c	118.9271	-61.0729
			neutro	147.8392	-32.1608
3	2	4	a	-1.1122	178.8878
			b	-121.4602	58.5398
			c	118.9251	-61.0749
			neutro	148.4544	-31.5456

Tabla 14. Caso equilibrado: ángulos de la intensidad del flujo de carga del modelo propuesto

Las intensidades del nudo de referencia se obtienen a través de la ecuación (46), restricciones lineales del flujo de carga. Estas restricciones se muestran para este escenario en la ecuación (87) del Anexo I. La tabla 15 muestra el valor de dichas intensidades, junto con sus respectivos ángulos.

Fase	I_{SLACK} [A]	φ_{SLACK} [°]
a	228.4686	-1.1120
b	225.8418	-121.4618
c	223.3560	118.9264
neutro	2.4775	148.0965

Tabla 15. Intensidades del nudo slack

Comparados los dos métodos empleados se observa la similitud entre ambos, tanto en tensión como en intensidad, validando así el modelo propuesto ante la presencia de cargas trifásicas equilibradas.

6.3.2 Cargas desequilibradas

Al igual que en el caso equilibrado, se comprueban las tensiones del flujo de carga obtenidas mediante el software comercial y el modelo propuesto.

Las tensiones calculadas mediante “OpenDSS” son las mostradas en las tablas 16 y 17.

Nudo	U_a [V]	U_b [V]	U_c [V]	U_{neutro} [V]
1	230.94	230.94	230.94	2.0158e-3
2	218.36	225.77	227.8	7.8256
3	214.21	223.9	226.89	10.488
4	214.19	224.15	226.66	10.395

Tabla 16. Caso desequilibrado: tensiones del flujo de carga en OpenDSS

Nudo	φ_a [°]	φ_b [°]	φ_c [°]	φ_{neutro} [°]
1	0.0	-120.0	120.0	-19.5
2	-1.5	-120.6	119.4	-2.4
3	-2.0	-120.8	119.1	-1.4
4	-2.1	-120.7	119.2	-3.1

Tabla 17. Caso desequilibrado: ángulos de la tensión el flujo de carga en OpenDSS

Aplicando el sistema de ecuaciones (86) del Anexo I, pasadas cuatro iteraciones, se obtienen las tensiones y ángulos del modelo propuesto, definidos en las tablas 18 y 19.

Nudo	U_a [V]	U_b [V]	U_c [V]	U_{neutro} [V]
1	230.9401	230.9401	230.9401	0.0000
2	218.3585	225.7688	227.7973	7.8238
3	214.2151	223.9049	226.8888	10.4862
4	214.1912	224.1534	226.6626	10.3929

Tabla 18. Caso desequilibrado: tensiones del flujo de carga del modelo propuesto

Nudo	φ_a [°]	φ_b [°]	φ_c [°]	φ_{neutro} [°]
1	0.00000	-120.0000	120.0000	0.0000
2	-1.5221	-120.5606	119.3533	-2.4007
3	-2.0254	-120.7695	119.1093	-1.4106
4	-2.1001	-120.7421	119.1515	-3.1096

Tabla 19. Caso desequilibrado: ángulos de la tensión del flujo de carga del modelo propuesto

A continuación, se comprueban los resultados de intensidades que circulan por las ramas de la red.

Las intensidades calculadas por el flujo de carga mediante “OpenDSS” son las mostradas en las tablas 20 y 21.

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	I_{ij} [A]	I_{ji} [A]
1	1	2	a	368.09	368.09
			b	196.33	196.33
			c	129.1	129.1
			neutro	201.58	201.58
2	2	3	a	245.42	245.42
			b	130.88	130.88
			c	86.062	86.062
			neutro	136.74	136.74
3	2	4	a	122.67	122.67
			b	65.457	65.457
			c	43.033	43.033
			neutro	66.34	66.34

Tabla 20. Caso desequilibrado: intensidades por las ramas en OpenDSS

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	φ_{ij} [°]	φ_{ji} [°]
1	1	2	a	-2.1	177.9
			b	-123.1	56.9
			c	121.3	-58.7
			neutro	160.5	-19.5
2	2	3	a	-2.1	177.9
			b	-123.1	56.9
			c	121.3	-58.7
			neutro	160.8	-19.2
3	2	4	a	-2.0	178.0
			b	-123.0	57.0
			c	121.3	-58.7
			neutro	160.3	-19.7

Tabla 21. Caso desequilibrado: ángulos de las intensidades por las ramas en OpenDSS

A partir de la expresión dada por (81) y (82) del modelo propuesto, se obtienen las intensidades y ángulos que circulan por las ramas de la red. Estas se muestran en las tablas 22 y 23.

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	I_{ij} [A]	I_{ji} [A]
1	1	2	a	368.0928	368.0928
			b	196.3307	196.3307
			c	129.0959	129.0959
			neutro	201.5816	201.5816
2	2	3	a	245.4235	245.4235
			b	130.8739	130.8739
			c	86.0623	86.0623
			neutro	136.7381	136.7381
3	2	4	a	122.6693	122.6693
			b	65.4568	65.4568
			c	43.0336	43.0336
			neutro	66.3413	66.3413

Tabla 22. Caso desequilibrado: intensidades por las ramas del modelo propuesto

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	φ_{ij} [°]	φ_{ji} [°]
1	1	2	a	-2.0542	177.9458
			b	-123.0513	56.9487
			c	121.3310	-58.6690
			neutro	160.4949	-19.5051
2	2	3	a	-2.0570	177.9430
			b	-123.0545	56.9455
			c	121.3371	-58.6629
			neutro	160.7888	-19.2122
3	2	4	a	-2.0486	177.9514
			b	-123.0449	56.9551
			c	121.3190	-58.6810
			neutro	160.2865	-19.7135

Tabla 23. Caso desequilibrado: ángulos de las intensidades por las ramas del modelo propuesto

Las intensidades del *slack* se obtienen a través de la ecuación (87) del Anexo I. Éstas se muestran en la siguiente tabla:

Fase	I_{SLACK} [A]	φ_{SLACK} [°]
a	368.0928	-2.0542
b	196.3307	-123.0513
c	129.0959	121.3310
neutro	201.5816	160.4949

Tabla 24. Intensidades del nudo slack

Comparados los dos métodos empleados se observa la similitud entre ambos, tanto en tensión como en intensidad, validando así el modelo propuesto ante la presencia de cargas trifásicas desequilibradas.

7 CASO DE APLICACIÓN

Validada la metodología llevada a cabo en el modelo propuesto para la resolución del flujo de cargas, se procede a su aplicación sobre una red de mayores dimensiones. Con ello, se persigue demostrar la convergencia del programa a unos buenos resultados ante redes con un mayor número de nudos y tipos de conductores.

En primer lugar, se presenta la topología y el valor de los distintos parámetros de la red sobre la que se va a aplicar el algoritmo programado en *MATLAB*. Seguidamente, se muestran los resultados más relevantes obtenidos del flujo de cargas. Por último, se observa el comportamiento de la red al incluir en el modelo la inyección de potencia a través de generadores.

7.1 Topología de la red

La red elegida para este caso de aplicación es una modificación de la topología de referencia para redes europeas de distribución de baja tensión, tomada del documento de la CIGRE [3]. Esta modificación, dado que el modelo propuesto no lo contempla, consiste en la eliminación de transformadores y de puestas a tierra rígidas, las cuales sólo aparecen en el nudo de referencia. En la figura 6 se muestra el esquema de dicha red.

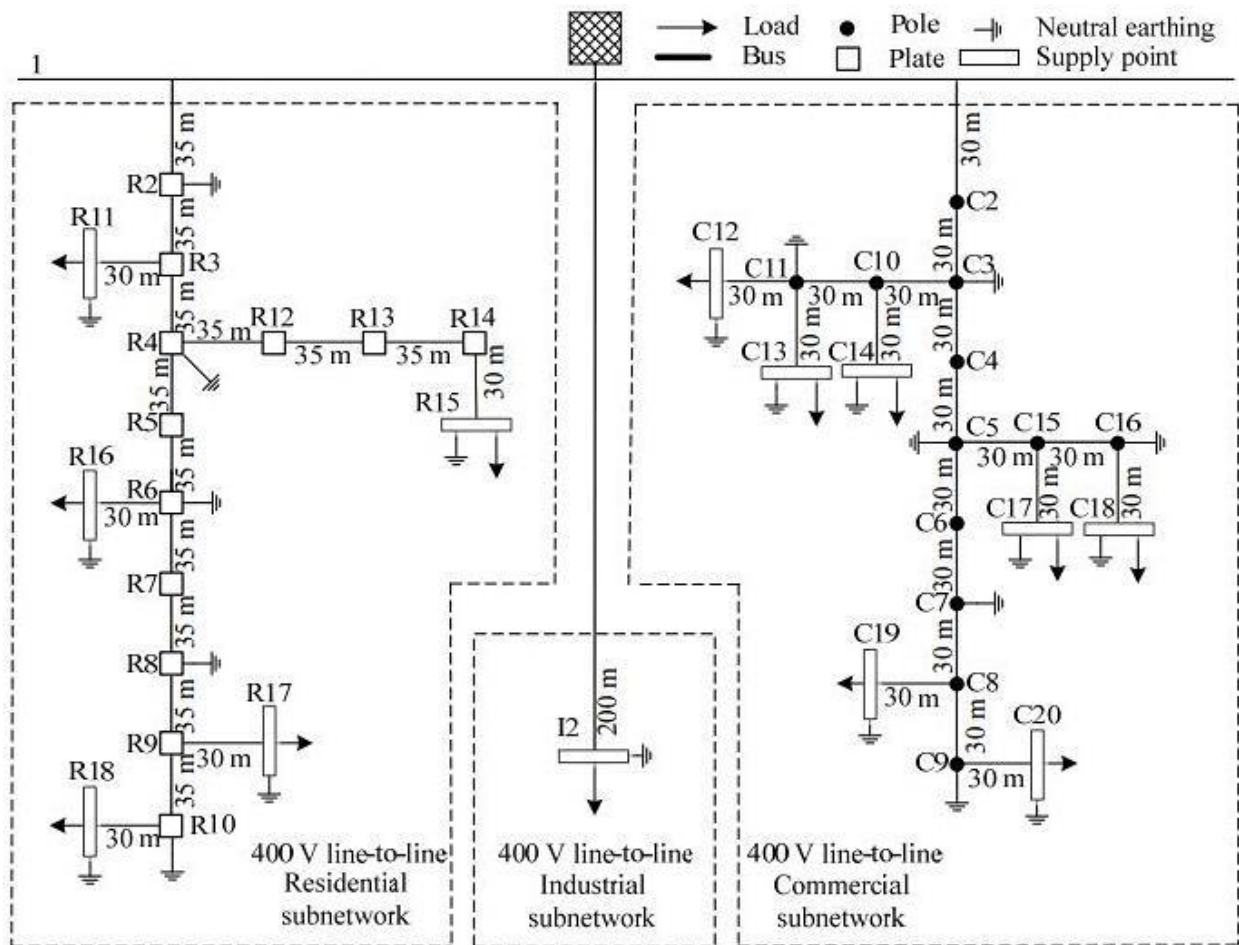


Figura 6. Topología de referencia para redes europeas de distribución de BT (modificada)

Los conjuntos de elementos enmarcados en discontinuo, hacen referencia a las subredes del sector residencial, industrial y comercial, teniendo una configuración trifásica cada una de ellas.

7.2 Datos de la red

7.2.1 Conductores

En las subredes residencial e industrial el tipo de conductor usado es el subterráneo, mientras que en la subred comercial, las conexiones se llevan a cabo a través de cables aéreos. En las tablas 25 y 26 se muestran las matrices de impedancia primitivas por fase para cables subterráneos y líneas aéreas, respectivamente.

CONDUCTOR		Matriz primitiva de impedancias (Ω/km)			
		A	B	C	N
UG1-3ph	A	$0.211 + j0.747$	$0.049 + j0.673$	$0.049 + j0.651$	$0.049 + j0.673$
	B	$0.049 + j0.673$	$0.211 + j0.747$	$0.049 + j0.673$	$0.049 + j0.651$
	C	$0.049 + j0.651$	$0.049 + j0.673$	$0.211 + j0.747$	$0.049 + j0.673$
	N	$0.049 + j0.673$	$0.049 + j0.651$	$0.049 + j0.673$	$0.221 + j0.747$
UG2-3ph	A	$0.314 + j0.762$	$0.049 + j0.687$	$0.049 + j0.665$	$0.049 + j0.687$
	B	$0.049 + j0.687$	$0.314 + j0.762$	$0.049 + j0.687$	$0.049 + j0.665$
	C	$0.049 + j0.665$	$0.049 + j0.687$	$0.314 + j0.762$	$0.049 + j0.687$
	N	$0.049 + j0.887$	$0.049 + j0.665$	$0.049 + j0.687$	$0.314 + j0.762$
UG2-3ph	A	$0.871 + j0.797$	$0.049 + j0.687$	$0.049 + j0.697$	$0.049 + j0.719$
	B	$0.049 + j0.687$	$0.871 + j0.797$	$0.049 + j0.719$	$0.049 + j0.697$
	C	$0.049 + j0.697$	$0.049 + j0.719$	$0.871 + j0.797$	$0.049 + j0.719$
	N	$0.049 + j0.719$	$0.049 + 0.697$	$0.049 + j0.719$	$0.871 + j0.797$

Tabla 25. Matrices de impedancia primitiva de líneas subterráneas para redes de referencia europeas de distribución de BT

CONDUCTOR		Matriz primitiva de impedancias (Ω/km)			
		A	B	C	N
OH1-3ph	A	0.540 + j0.777	0.049 + j0.505	0.049 + j0.462	0.049 + j0.436
	B	0.049 + j0.505	0.540 + j0.777	0.049 + j0.505	0.049 + j0.462
	C	0.049 + j0.462	0.049 + j0.505	0.540 + j0.777	0.049 + j0.505
	N	0.049 + j0.436	0.049 + j0.462	0.049 + j0.505	0.540 + j0.777
OH2-3ph	A	1.369 + j0.812	0.049 + j0.505	0.049 + j0.462	0.049 + j0.436
	B	0.049 + j0.505	1.369 + j0.812	0.049 + j0.505	0.049 + j0.462
	C	0.049 + j0.462	0.049 + j0.505	1.369 + j0.812	0.049 + j0.505
	N	0.049 + j0.436	0.049 + j0.462	0.049 + j0.505	1.369 + j0.812
OH3-3ph	A	2.065 + j0.825	0.049 + j0.505	0.049 + j0.462	0.049 + j0.436
	B	0.049 + j0.505	2.065 + j0.825	0.049 + j0.505	0.049 + j0.462
	C	0.049 + j0.462	0.049 + j0.505	2.065 + j0.825	0.049 + j0.505
	N	0.049 + j0.436	0.049 + j0.462	0.049 + j0.505	2.065 + j0.825

Tabla 26. Matrices de impedancia primitiva de líneas aéreas para redes de referencia europeas de distribución de BT

7.2.2 Conexiones

A continuación, se muestran en las tablas 27, 28 y 29 las conexiones y tipo de conductor para cada una de las subredes que componen la red.

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Conductor	Longitud [m]	Instalación
1	1	R2	UG1	35	UG 3-ph
2	R2	R3	UG1	35	UG 3-ph
3	R3	R4	UG1	35	UG 3-ph
4	R4	R5	UG1	35	UG 3-ph
5	R5	R6	UG1	35	UG 3-ph
6	R6	R7	UG1	35	UG 3-ph
7	R7	R8	UG1	35	UG 3-ph
8	R8	R9	UG1	35	UG 3-ph

9	R9	R10	UG1	35	UG 3-ph
10	R3	R11	UG3	30	UG 3-ph
11	R4	R12	UG3	35	UG 3-ph
12	R12	R13	UG3	35	UG 3-ph
13	R13	R14	UG3	35	UG 3-ph
14	R14	R15	UG3	30	UG 3-ph
15	R6	R16	UG3	30	UG 3-ph
16	R9	R17	UG3	30	UG 3-ph
17	R10	R18	UG3	30	UG 3-ph

Tabla 27. Conexiones y parámetros de líneas residenciales para redes de referencia europeas de distribución de BT

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Conductor	Longitud [m]	Instalación
18	1	I2	UG2	200	UG 3-ph

Tabla 28. Conexiones y parámetros de líneas industriales para redes de referencia europeas de distribución de BT

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Conductor	Longitud [m]	Instalación
19	1	C2	OH1	30	UG 3-ph
20	C2	C3	OH1	30	UG 3-ph
21	C3	C4	OH1	30	UG 3-ph
22	C4	C5	OH1	30	UG 3-ph
23	C5	C6	OH1	30	UG 3-ph
24	C6	C7	OH1	30	UG 3-ph
25	C7	C8	OH1	30	UG 3-ph
26	C8	C9	OH1	30	UG 3-ph
27	C3	C10	OH2	30	UG 3-ph
28	C10	C11	OH2	30	UG 3-ph
29	C11	C12	OH3	30	UG 3-ph

30	C11	C13	OH3	30	UG 3-ph
31	C10	C14	OH3	30	UG 3-ph
32	C5	C15	OH2	30	UG 3-ph
33	C15	C16	OH2	30	UG 3-ph
34	C15	C17	OH3	30	UG 3-ph
35	C16	C18	OH3	30	UG 3-ph
36	C8	C19	OH3	30	UG 3-ph
37	C9	C20	OH3	30	UG 3-ph

Tabla 29. Conexiones y parámetros de líneas comerciales para redes de referencia europeas de distribución de BT

7.2.3 Datos de puestas a tierra

Dado las limitaciones del modelo propuesto respecto a este componente, sólo el nudo 1, *slack*, presenta resistencia de puesta a tierra rígida en su neutro.

Los valores de las resistencias de puesta a tierra mostradas en los nudos de la figura 6 toman un valor de 5 ohmios.

En aquellos nudos en los que no aparece tierra, son considerados como nudos con neutro abierto a la misma.

7.2.4 Datos de cargas

La tabla 30 muestra los valores de las cargas máximas para cada nudo de la red de la figura 6. Estas cargas trifásicas se toman como equilibradas en cada una de sus tres fases. Cada carga representa un grupo de usuarios.

Nudo	Potencia Aparente S [kVA]	Factor de potencia $\cos\phi$
R11	15	0.95
R15	52	0.95
R16	55	0.95
R17	35	0.95
R18	47	0.95
I2	100	0.85
C12	20	0.90
C13	20	0.90

C14	25	0.90
C17	25	0.90
C18	8	0.90
C19	16	0.90
C20	8	0.90

Tabla 30. Parámetros de cargas para redes de referencia europeas de distribución de BT

7.2.5 Datos del Slack

En esta red de estudio modificada de la CIGRE, el nudo tomado como *slack* o de referencia es el nudo 1. En la tabla 31 se muestran los valores complejos de tensión de dicho nudo, necesarios para la ejecución del modelo.

Fase	V_{SLACK}^{real} [V]	V_{SLACK}^{imag} [V]
a	230.94	0
b	-115.47	-200
c	-115.47	200
neutro	0	0

Tabla 31. Tensiones complejas del nudo de referencia

7.3 Resultados

En este punto se presentan los resultados obtenidos por el flujo de cargas del modelo propuesto, tras cuatro iteraciones del mismo, para esta red de estudio.

7.3.1 Tensiones por nudo

Los resultados de la tensión por nudo se muestran expresados en módulo y ángulo para cada una de las fases. Las tablas 32, 33 y 34 presentan dichos valores para las subredes residencial, industrial y comercial, respectivamente.

Nudo	U_a [V]	φ_a [°]	U_b [V]	φ_b [°]	U_c [V]	φ_c [°]	U_{neutro} [V]	φ_{neutro} [°]
1	230.9400	0.0000	230.9401	-120.0000	230.9401	120.0000	0.0000	0.0000
R2	228.7312	-0.0726	229.0576	-120.0567	229.1991	119.9152	0.2363	-56.9005
R3	226.5237	-0.1465	227.1744	-120.1142	227.4587	119.8288	0.4730	-56.7508

R4	224.4722	-0.2166	225.4261	-120.1686	225.8434	119.7476	0.6932	-56.7330
R5	222.9860	-0.2677	224.1663	-120.2080	224.6775	119.6901	0.8514	-56.9991
R6	221.4999	-0.3194	222.9065	-120.2478	223.5118	119.6320	1.0096	-57.1818
R7	220.6028	-0.3512	222.1529	-120.2723	222.8124	119.5980	1.1040	-57.4663
R8	219.7056	-0.3833	221.3992	-120.2969	222.1130	119.5638	1.1984	-57.7060
R9	218.8136	-0.4149	220.6410	-120.3210	221.4136	119.5279	1.2946	-57.6331
R10	218.2996	-0.4334	220.2073	-120.3351	221.0123	119.5077	1.3494	-57.6816
R11	225.9728	-0.1171	226.6435	-120.0838	226.9379	119.8569	0.4871	-56.6295
R12	222.1315	-0.0950	223.1734	-120.0406	223.6463	119.8622	0.7683	-55.6374
R13	219.7918	0.0293	220.9218	-119.9100	221.4501	119.9790	0.8437	-54.7373
R14	217.4531	0.1562	218.6714	-119.7767	219.2548	120.0981	0.9192	-53.9849
R15	215.4494	0.2672	216.7434	-119.6602	217.3739	120.2022	0.9841	-53.4320
R16	219.4185	-0.2064	220.9053	-120.1292	221.5610	119.7380	1.0772	-56.4479
R17	217.4738	-0.3421	219.3606	-120.2441	220.1662	119.5970	1.3376	-57.2992
R18	216.4934	-0.3349	218.4793	-120.2309	219.3312	119.6006	1.4105	-57.1484

Tabla 32. Tensiones y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred residencial

Nudo	U_a [V]	φ_a [°]	U_b [V]	φ_b [°]	U_c [V]	φ_c [°]	U_{neutro} [V]	φ_{neutro} [°]
I2	222.3084	0.5628	223.0357	-119.4346	223.3810	120.4201	0.6860	-60.1061

Tabla 33. Tensiones y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred industrial

Nudo	U_a [V]	φ_a [°]	U_b [V]	φ_b [°]	U_c [V]	φ_c [°]	U_{neutro} [V]	φ_{neutro} [°]
C2	227.5390	-0.0591	227.8438	-120.0385	227.9126	119.9056	0.3160	15.7367
C3	224.1383	-0.1201	224.7477	-120.0780	224.8858	119.8087	0.6321	15.7367
C4	222.5522	-0.1495	223.3100	-120.0946	223.4679	119.7644	0.7719	14.8809
C5	220.9691	-0.1794	221.8724	-120.1114	222.0502	119.7195	0.9119	14.2878
C6	220.2999	-0.1922	221.2705	-120.1178	221.4523	119.7011	0.9680	13.8488
C7	219.6336	-0.2052	220.6685	-120.1242	220.8543	119.6825	1.0242	13.4579
C8	218.9670	-0.2175	220.0644	-120.1312	220.2593	119.6636	1.0837	13.3612

C9	218.7455	-0.2224	219.8657	-120.1330	220.0582	119.6576	1.0999	13.0640
C10	220.0245	0.1017	220.8169	-119.8505	220.9994	120.0016	0.8060	15.8516
C11	217.4847	0.2420	218.3924	-119.7061	218.5990	120.1238	0.9097	15.7195
C12	215.6270	0.3859	216.5991	-119.5617	216.8174	120.2559	0.9651	15.5930
C13	215.6270	0.3859	216.5991	-119.5617	216.8174	120.2559	0.9651	15.5930
C14	217.7254	0.2778	218.5940	-119.6739	218.7932	120.1636	0.8767	15.8236
C15	218.8817	-0.0653	219.8865	-119.9932	220.0799	119.8192	0.9917	14.0707
C16	218.3790	-0.0381	219.4098	-119.9636	219.6006	119.8441	1.0004	13.6743
C17	216.5683	0.1127	217.6562	-119.8146	217.8640	119.9821	1.0637	14.0083
C18	217.6430	0.0182	218.7011	-119.9063	218.8931	119.8964	1.0147	13.4796
C19	217.4927	-0.1044	218.6450	-120.0172	218.8466	119.7673	1.1245	13.2120
C20	218.0104	-0.1663	219.1590	-120.0758	219.3520	119.7096	1.1133	12.8558

Tabla 34. Tensiones y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred comercial

A continuación, en la figura 7 se representan las tensiones anteriores de cada una de las subredes en un mismo gráfico. Por simplicidad, se ha elegido mostrar sólo la fase a de cada uno de los nudos de la red.

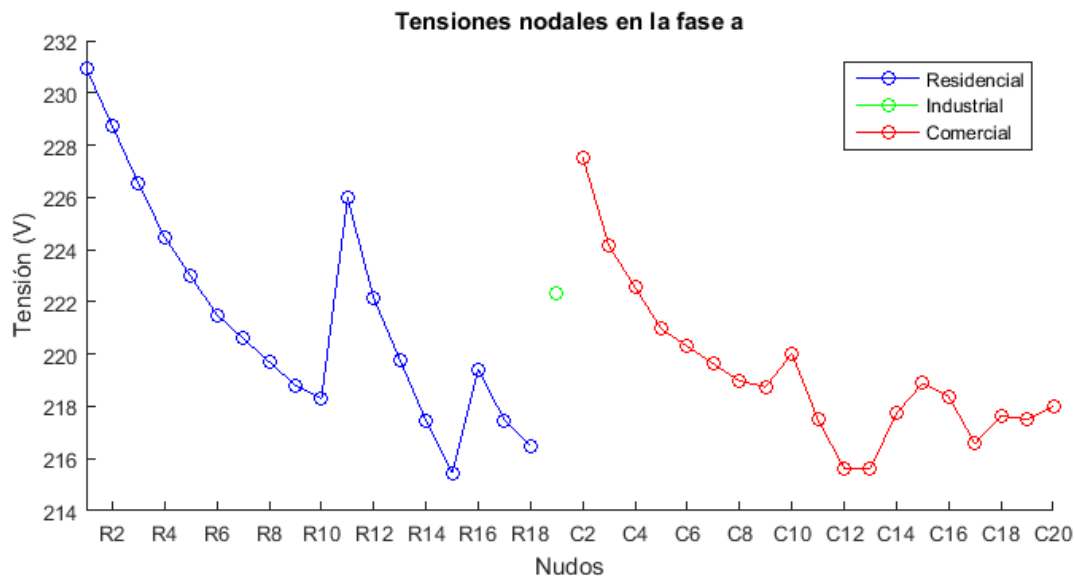


Figura 7. Tensiones nodales del sistema (fase a)

Cabe a destacar que los valores máximos de las tensiones mostradas se alcanzan en aquellos nudos conectados con el de referencia. También, se puede observar el comportamiento decreciente que adoptan las tensiones, exceptuando casos aislados como el nudo R11. En este nudo su tensión, dada su carga, se ve incrementada para posteriormente continuar decreciendo en los nudos siguientes.

7.3.2 Intensidades por ramas

El conjunto de intensidades y sus correspondientes ángulos que circulan por las ramas de la red, se muestran en las tablas 35, 36 y 37 para las zonas residencial, industrial y comercial, respectivamente. Éstas se obtienen a partir del conjunto de ecuaciones (81) y (82), intensidad I_{ij} e I_{ji} .

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	I_{ij} [A]	φ_{ij} [°]	I_{ji} [A]	φ_{ji} [°]
1	1	R2	a	312.7388	-18.0778	312.7388	161.9222
			b	310.3055	-138.5099	310.3055	41.4901
			c	307.0488	101.6365	307.0488	-78.3635
			neutro	1.8730	172.4781	1.8730	-7.5219
2	R2	R3	a	312.7388	-18.0778	312.7388	161.9222
			b	310.3055	-138.5099	310.3055	41.4901
			c	307.0488	101.6365	307.0488	-78.3635
			neutro	1.9041	171.3985	1.9041	-8.6015
3	R3	R4	a	290.6082	-18.0678	290.6082	161.9322
			b	288.2454	-138.5191	288.2454	41.4809
			c	285.0854	101.6340	285.0854	-78.3660
			neutro	1.8759	170.4695	1.8759	-9.5305
4	R4	R5	a	210.0214	-18.2028	210.0214	161.7972
			b	208.2109	-138.6827	208.2109	41.3173
			c	205.7849	101.4790	205.7849	-78.5210
			neutro	1.3894	173.2728	1.3894	-6.7272
5	R5	R6	a	210.0214	-18.2028	210.0214	161.7972
			b	208.2109	-138.6827	208.2109	41.3173
			c	205.7849	101.4790	205.7849	-78.5210
			neutro	1.3894	173.2728	1.3894	-6.7272
6	R6	R7	a	126.3231	-18.2266	126.3231	161.7734
			b	125.1235	-138.7542	125.1235	41.2458
			c	123.5207	101.4241	123.5207	-78.5759
			neutro	0.8714	177.5377	0.8714	-2.4623
7	R7	R8	a	126.3231	-18.2266	126.3231	161.7734
			b	125.1235	-138.7542	125.1235	41.2458
			c	123.5207	101.4241	123.5207	-78.5759
			neutro	0.8714	177.5377	0.8714	-2.4623

8	R8	R9	a	126.3231	-18.2266	126.3231	161.7734
			b	125.1235	-138.7542	125.1235	41.2458
			c	123.5207	101.4241	123.5207	-78.5759
			neutro	1.0271	166.4847	1.0271	-13.5153
9	R9	R10	a	72.5509	-18.2163	72.5509	161.7837
			b	71.8449	-138.7566	71.8449	41.2434
			c	70.9026	101.4265	70.9026	-78.5735
			neutro	0.5558	171.5357	0.5558	-8.4663
10	R3	R11	a	22.1307	-18.2088	22.1307	161.7912
			b	22.0602	-138.3889	22.0602	41.6111
			c	21.9634	101.6695	21.9634	-78.3305
			neutro	0.0417	-141.7556	0.0417	38.2444
11	R4	R12	a	80.5889	-17.7162	80.5889	162.2838
			b	80.0375	-138.0936	80.0375	41.9064
			c	79.3032	102.0359	79.3032	-77.9641
			neutro	0.6066	154.2251	0.6066	-25.7749
12	R12	R13	a	80.5889	-17.7162	80.5889	162.2838
			b	80.0375	-138.0936	80.0375	41.9064
			c	79.3032	102.0359	79.3032	-77.9641
			neutro	0.6066	154.2251	0.6066	-25.7749
13	R13	R14	a	80.5889	-17.7162	80.5889	162.2838
			b	80.0375	-138.0936	80.0375	41.9064
			c	79.3032	102.0359	79.3032	-77.9641
			neutro	0.6066	154.2251	0.6066	-25.7749
14	R14	R15	a	80.5889	-17.7162	80.5889	162.2838
			b	80.0375	-138.0936	80.0375	41.9064
			c	79.3032	102.0359	79.3032	-77.9641
			neutro	0.6066	154.2251	0.6066	-25.7749
15	R6	R16	a	83.6983	-18.1668	83.6983	161.8332
			b	83.0877	-138.5750	83.0877	41.4250
			c	82.2644	101.5616	82.2644	-78.4384
			neutro	0.6853	154.5033	0.6853	-25.4967
16	R9	R17	a	53.7723	-18.2406	53.7723	161.7594
			b	53.2787	-138.7510	53.2787	41.2490

			c	52.6181	101.4209	52.6181	-78.5791
			neutro	0.4760	160.5859	0.4760	-19.4141
17	R10	R18	a	72.5509	-18.2163	72.5509	161.7837
			b	71.8449	-138.7566	71.8449	41.2434
			c	70.9026	101.4265	70.9026	-78.5735
			neutro	0.7601	155.9390	0.7601	-24.0610

 Tabla 35. Intensidades y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred residencial (i_j/j_i)

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	I_{ij} [A]	φ_{ij} [°]	I_{ji} [A]	φ_{ji} [°]
18	1	I2	a	150.0181	-31.0712	150.0181	148.9288
			b	149.5376	-151.3748	149.5376	28.6252
			c	148.6163	88.6302	148.6163	-91.3698
			neutro	0.8096	152.6277	0.8096	-27.3723

 Tabla 36. Intensidades y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred industrial (i_j/j_i)

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Fase	I_{ij} [A]	φ_{ij} [°]	I_{ji} [A]	φ_{ji} [°]
19	1	C2	a	188.2478	-25.7245	188.2478	154.2755
			b	185.9341	-145.7815	185.9341	34.2185
			c	186.1265	94.4693	186.1265	-85.5307
			neutro	1.7428	49.8550	1.7428	-130.1450
20	C2	C3	a	188.2478	-25.7245	188.2478	154.2755
			b	185.9341	-145.7815	185.9341	34.2185
			c	186.1265	94.4693	186.1265	-85.5307
			neutro	1.7428	49.8550	1.7428	-130.1450
21	C3	C4	a	87.8224	-25.9094	87.8224	154.0906
			b	86.6574	-145.9679	86.6574	34.0321
			c	86.7512	94.3015	86.7512	-85.6985
			neutro	1.2145	38.4419	1.2145	-141.5581
22	C4	C5	a	87.8224	-25.9094	87.8224	154.0906
			b	86.6574	-145.9679	86.6574	34.0321
			c	86.7512	94.3015	86.7512	-85.6985
			neutro	1.2145	38.4419	1.2145	-141.5581
23	C5	C6	a	36.9019	-26.0347	36.9019	153.9653
			b	36.3961	-146.0921	36.3961	33.9079

			c	36.4368	94.1867	36.4368	-85.8133
			neutro	0.6643	32.7636	0.6643	-147.2364
24	C6	C7	a	36.9019	-26.0347	36.9019	153.9653
			b	36.3961	-146.0921	36.3961	33.9079
			c	36.4368	94.1867	36.4368	-85.8133
			neutro	0.6643	32.7636	0.6643	-147.2364
25	C7	C8	a	36.9019	-26.0347	36.9019	153.9653
			b	36.3961	-146.0921	36.3961	33.9079
			c	36.4368	94.1867	36.4368	-85.8133
			neutro	0.4758	40.9455	0.4758	-139.0945
26	C8	C9	a	12.2807	-26.0744	12.2807	153.9256
			b	12.1136	-146.1301	12.1136	33.8699
			c	12.1269	94.1456	12.1269	-85.8544
			neutro	0.3684	24.5283	0.3684	-155.4717
27	C3	C10	a	100.4263	-25.5628	100.4263	154.4372
			b	99.2776	-145.6188	99.2776	34.3812
			c	99.3761	94.6158	99.3761	-85.3842
			neutro	0.5452	84.6636	0.5452	-95.3364
28	C10	C11	a	62.0412	-25.5236	62.0412	154.4764
			b	61.3021	-145.5831	61.3021	34.4169
			c	61.3645	94.6604	61.3645	-85.3396
			neutro	0.3906	72.5285	0.3906	-107.4715
29	C11	C12	a	31.0206	-25.5236	31.0206	154.4764
			b	30.6511	-145.5831	30.6511	34.4169
			c	30.6822	94.6604	30.6822	-85.3396
			neutro	0.1642	200.1488	0.1642	-79.8512
30	C11	C13	a	31.0206	-25.5236	31.0206	154.4764
			b	30.6511	-145.5831	30.6511	34.4169
			c	30.6822	94.6604	30.6822	-85.3396
			neutro	0.1642	200.1488	0.1642	-79.8512
31	C10	C14	a	38.3851	-25.6262	38.3851	154.3738
			b	37.9755	-145.6764	37.9755	34.3236
			c	38.0116	94.5439	38.0116	-85.4561
			neutro	0.1828	111.3532	0.1828	-68.6468

32	C5	C15	a	50.9206	-25.8186	50.9206	154.1814
			b	50.2614	-145.8779	50.2614	34.1221
			c	50.3145	94.3847	50.3145	-85.6153
			neutro	0.4117	58.3762	0.4117	-121.6238
33	C15	C16	a	12.2960	-25.8862	12.2960	154.1138
			b	12.1422	-145.9408	12.1422	34.0592
			c	12.1543	94.3089	12.1543	-85.6911
			neutro	0.3343	25.3577	0.3343	-154.6423
34	C15	C17	a	38.6246	-25.7971	38.6246	154.2029
			b	38.1192	-145.8579	38.1192	34.1421
			c	38.1602	94.4088	38.1602	-85.5912
			neutro	0.2246	112.5798	0.2246	-67.4202
35	C16	C18	a	12.2960	-25.8862	12.2960	154.1138
			b	12.1422	-145.9408	12.1422	34.0592
			c	12.1543	94.3089	12.1543	-85.6911
			neutro	0.1442	41.6798	0.1442	-138.3202
36	C8	C19	a	24.6212	-26.0149	24.6212	153.9851
			b	24.2826	-146.0731	24.2826	33.9269
			c	24.3099	94.2072	24.3099	-85.7928
			neutro	0.1607	81.3219	0.1607	-98.6781
37	C9	C20	a	12.2807	-26.0744	12.2807	153.9256
			b	12.1136	-146.1301	12.1136	33.8699
			c	12.1269	94.1456	12.1269	-85.8544
			neutro	0.1590	40.4930	0.1590	-139.5070

Tabla 37. Intensidades y ángulos resultantes del flujo de carga en la subred comercial (ij/ji)

A partir de los resultados anteriores de tensión y la matriz de admitancias nodales del sistema, se obtiene la intensidad del nudo *slack* por medio de la expresión (87) del Anexo I.

Fase	I_{SLACK} [A]	φ_{SLACK} [°]
a	648.1604	-23.2809
b	643.0441	-143.5800
c	639.0422	96.5489
neutro	2.4311	126.6824

Tabla 38. Intensidades y ángulos del nudo de referencia

Tomando las intensidades por rama descritas en las tablas anteriores, se muestra a través de la figura 8 la evolución que estas siguen. Para conseguir simplicidad en la representación, se toman solamente las intensidades de la fase a.

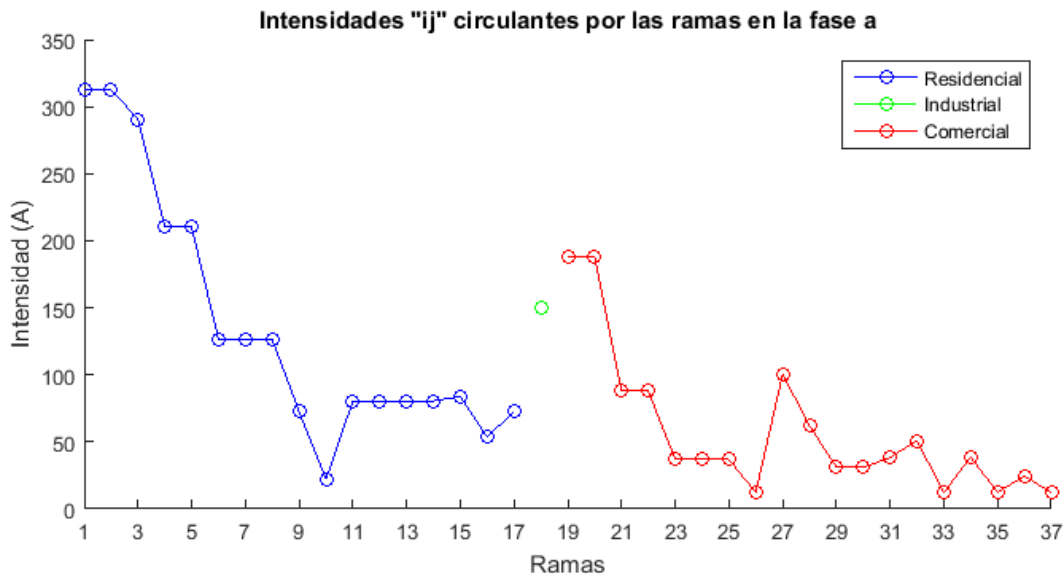


Figura 8. Intensidades por rama ij del sistema (fase a)

Solamente se representan las intensidades ij de las ramas, puesto que al no haber elementos *shunt* en las líneas, las intensidades ij y ji coinciden en módulo, no siendo así en ángulo.

Al igual que ocurría con las tensiones, los valores más elevados de intensidad se dan en los nudos más próximos al *slack*. Se observa también, cómo estas intensidades decrecen al alejarse de la referencia.

7.3.3 Pérdidas por ramas

La ecuación dada por (83), permite obtener las pérdidas de potencia por las ramas. Las tablas 39, 40 y 41, muestran dichas pérdidas para las zonas residencial, industrial y comercial, respectivamente.

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Pérdidas [W]	Pérdidas [VAr]
1	1	R2	1635.1071	819.7015
2	R2	R3	1635.1075	819.7007
3	R3	R4	1410.7907	707.2032
4	R4	R5	736.0272	368.9200
5	R5	R6	736.0272	368.9200
6	R6	R7	265.7636	133.1900

7	R7	R8	265.7636	133.1900
8	R8	R9	265.7645	133.1873
9	R9	R10	87.6179	43.9082
10	R3	R11	35.9743	3.7322
11	R4	R12	552.0944	57.2452
12	R12	R13	552.0944	57.2452
13	R13	R14	552.0944	57.2452
14	R14	R15	473.2238	49.0673
15	R6	R16	509.8914	52.8624
16	R9	R17	209.5846	21.7210
17	R10	R18	381.0727	39.4901

Tabla 39. Pérdidas de potencia por rama para la subred residencial

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Pérdidas [W]	Pérdidas [VAr]
18	1	I2	3548.5819	1100.9341

Tabla 40. Pérdidas de potencia por rama para la subred industrial

Rama	Nudo Origen	Nudo Destino	Pérdidas [W]	Pérdidas [VAr]
19	1	C2	1541.5758	900.0118
20	C2	C3	1541.5758	900.0118
21	C3	C4	335.1044	195.6486
22	C4	C5	335.1044	195.6486
23	C5	C6	59.1349	34.5258
24	C6	C7	59.1349	34.5258
25	C7	C8	59.1312	34.5254
26	C8	C9	6.5515	3.8250
27	C3	C10	1180.7695	287.7378
28	C10	C11	450.3641	109.7497

29	C11	C12	171.9564	28.5475
30	C11	C13	171.9564	28.5475
31	C10	C14	263.7216	43.7782
32	C5	C15	302.9735	73.8351
33	C15	C16	17.6802	4.3080
34	C15	C17	266.1838	44.1965
35	C16	C18	26.9967	4.4814
36	C8	C19	108.0686	17.9435
37	C9	C20	26.8919	4.4644

Tabla 41. Pérdidas de potencia por rama para la subred comercial

En las figuras 9 y 10, se muestra como las la pérdidas de potencia activa y reactiva de las ramas van disminuyendo su valor a medida que las ramas se alejan del nudo de referencia. Al igual que en casos anteriores, por simplicidad se toma sólo la fase a en ambas gráficas.

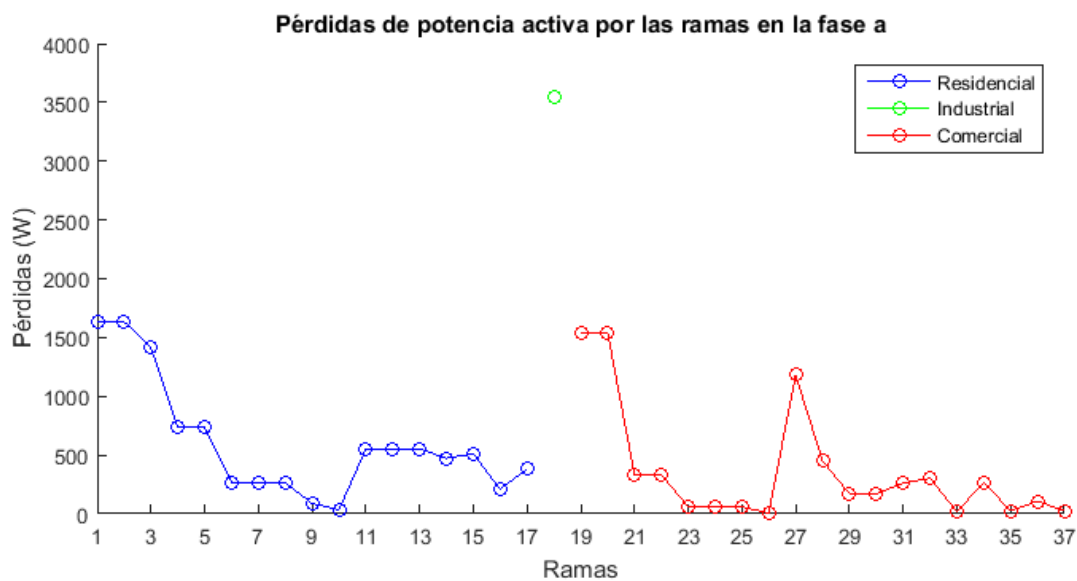


Figura 9. Pérdidas de potencia activa por rama del sistema (fase a)

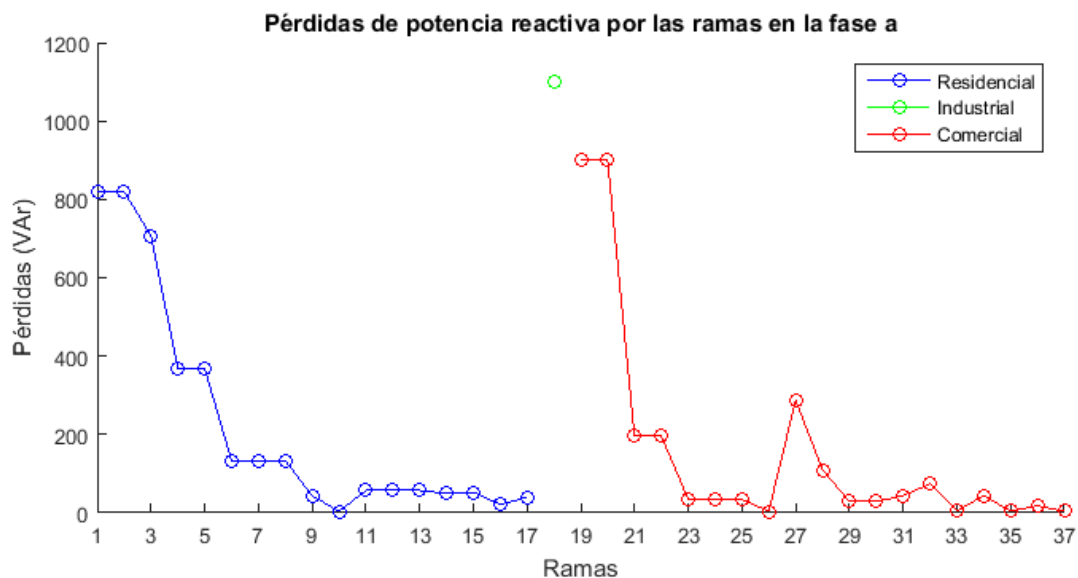


Figura 10. Pérdidas de potencia reactiva por rama del sistema (fase a)

Por último, se presenta en la tabla 42 las pérdidas de potencia activa/reactiva del sistema, así como el porcentaje que estas representan respecto a la potencia activa/reactiva del conjunto de cargas.

Pérdidas del sistema [W]	Pérdidas del sistema [Var]	% Activa Pérdidas respecto a cargas	% Reactiva Pérdidas respecto a cargas
20777.4565	7913.7761	5.3467	4.6674

Tabla 42. Pérdidas de potencia del sistema

7.4 Presencia de generación

En este punto se tiene en cuenta la presencia de generación en la red anterior. Esto se lleva a cabo a través de una serie de generadores que operan inyectando potencia en la red.

El objetivo de este apartado es observar el comportamiento de la red como consecuencia de la inclusión de estos elementos en el modelo. En la tabla 43 se muestran el conjunto de generadores presentes en la red y el valor de la potencia que estos inyectan.

Nudo	Potencia Aparente S [kVA]	Factor de potencia $\cos\phi$
R15	64	0.95
R18	94	0.95
C12	40	0.90
C20	16	0.90

Tabla 43. Generación presente en el sistema

En el siguiente apartado se presentan los resultados del flujo de cargas obtenidos ante la presencia de generación.

7.4.1 Resultados en tensión

La figura 11 muestra las tensiones nodales obtenidas en la fase a para el nuevo caso de estudio.

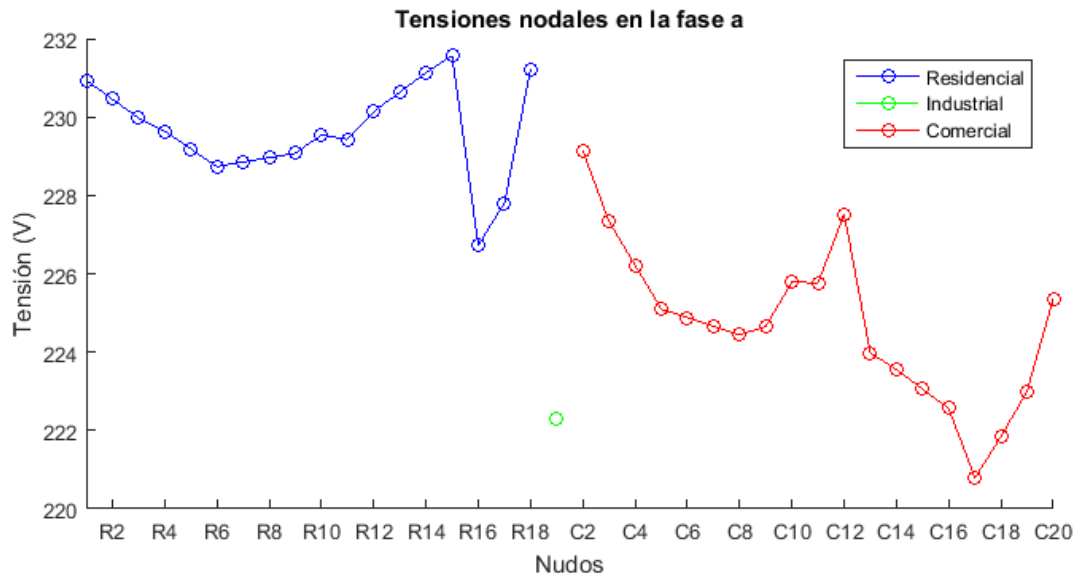


Figura 11. Tensiones nodales del sistema con generación (fase a)

Cabe a destacar que al incluir las generaciones, la tensión del nudo de referencia no es la mayor del sistema. Ésta sigue a partir del nudo *R6* un comportamiento creciente, debido a la presencia de generación en el nudo *R15*. Es aquí donde se alcanza el mayor valor de tensión del sistema, con un voltaje aproximado de 232 voltios.

Este mismo comportamiento creciente de las tensiones ocurre a partir de los nudos *R16*, *C8* y *C17*, debido a las inyecciones de potencia de los generadores presentes en *R18*, *C12* y *C20*, respectivamente.

7.4.2 Intensidades en las ramas

Como consecuencia de no existir elementos tipo *shunt* en las ramas, se opta, tal y como se hizo en apartados anteriores, por mostrar la componente *ij* de cada rama. La figura 12 muestra las intensidades *ij* por rama para la fase a de la nueva red.

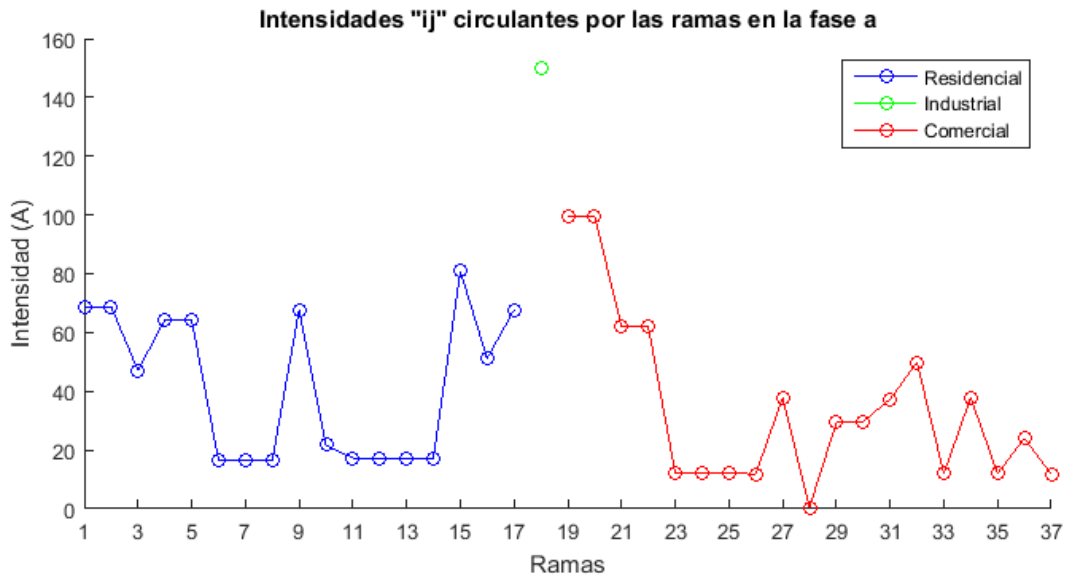


Figura 12. Intensidades por rama ij del sistema con generación (fase a)

El valor de las intensidades que circulan por las ramas se ha visto decrementado debido a la inyección de los generadores presentes en la red. Cabe a destacar que la rama perteneciente a la zona industrial, la cual no presenta ningún tipo de generación, no ha sufrido ninguna modificación de la intensidad que circula por la misma.

Respecto al estudio sin generación, se observa cómo en las intensidades no predomina un comportamiento decreciente de las mismas. Esto es debido a la potencia inyectada por los generadores en los nudos R15, R18, C12 y C20, que provocan los picos de intensidad que aparecen en la figura.

7.4.3 Pérdidas de potencia en las ramas

En este punto, en las figuras 13 y 14 se presentan las pérdidas de potencia activa y reactiva por rama, obtenidas del modelo propuesto, en el caso de existir las generaciones descritas anteriormente.



Figura 13. Pérdidas de potencia activa por rama del sistema con generación (fase a)



Figura 14. Pérdidas de potencia reactiva por rama del sistema con generación (fase a)

Destaca en este apartado, cómo las pérdidas de potencia tanto activa, como reactiva han disminuido respecto al caso sin generación. Esta disminución ha sido de 12964.4034 [W] en el caso activo y de 5480.4734 [Var] en el reactivo. Dicha disminución es debida a la potencia inyectada por cada uno de los generadores presentes en el sistema.

Al igual que se comentó anteriormente, en la intensidad circulante por la rama de la zona industrial, ésta al no presentar generación, mantiene los mismos valores de pérdidas que el primer caso de estudio.

8 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Durante la realización de este trabajo, se ha llevado a cabo un proceso de investigación acerca de las diferentes metodologías de resolución del problema del flujo de cargas y cómo implementarlas en el programa matemático *MATLAB*. Esto ha resultado en el desarrollo de un modelo de red ampliado que permite la resolución del flujo de cargas para redes trifásicas a cuatro hilos.

Durante la fase de validación del modelo, se ha observado un buen comportamiento para la red de prueba, tanto en el caso equilibrado, como desequilibrado. Esto supone un punto de partida para aplicar esta metodología a redes de una mayor dimensión que las ensayadas y con ello validar el modelo en éstas para observar su robustez.

En trabajos futuros, sería interesante ampliar el modelo teniendo en cuenta:

- Introducir resistencias de puesta a tierra rígidas en otros nudos que no sean el de referencia.
- Introducir transformadores en el modelo.
- Presencia de cargas en triángulo.
- Presencia de reguladores de tensión.
- Presencia de componentes a tierra, como baterías de condensadores.

Este Anexo I incluye los desarrollos del método de *Newton-Raphson* para redes trifásicas a cuatro hilos en coordenadas cartesianas, que dada su dimensión para una mejor comprensión y visualización para el lector, se han incluido en una sección aparte.

También, muestra los sistemas de ecuaciones más representativos para la resolución del flujo de cargas, empleados en el proceso de validación del modelo propuesto.

9.1 Modelo lineal de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos

$$\begin{bmatrix} I_{ri}^a \\ I_{xi}^a \\ I_{ri}^b \\ I_{xi}^b \\ I_{ri}^c \\ I_{xi}^c \\ I_{ri}^n \\ I_{xi}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{ii}^{aa} & G_{ii}^{aa} & -B_{ii}^{ab} & G_{ii}^{ab} & -B_{ii}^{ac} & G_{ii}^{ac} & -B_{ii}^{an} & G_{ii}^{an} \\ G_{ii}^{aa} & B_{ii}^{aa} & G_{ii}^{ab} & B_{ii}^{ab} & G_{ii}^{ac} & B_{ii}^{ac} & G_{ii}^{an} & B_{ii}^{an} \\ -B_{ii}^{ba} & G_{ii}^{ba} & -B_{ii}^{bb} & G_{ii}^{bb} & -B_{ii}^{bc} & G_{ii}^{bc} & -B_{ii}^{bn} & G_{ii}^{bn} \\ G_{ii}^{ba} & B_{ii}^{ba} & G_{ii}^{bb} & B_{ii}^{bb} & G_{ii}^{bc} & B_{ii}^{bc} & G_{ii}^{bn} & B_{ii}^{bn} \\ -B_{ii}^{ca} & G_{ii}^{ca} & -B_{ii}^{cb} & G_{ii}^{cb} & -B_{ii}^{cc} & G_{ii}^{cc} & -B_{ii}^{cn} & G_{ii}^{cn} \\ G_{ii}^{ca} & B_{ii}^{ca} & G_{ii}^{cb} & B_{ii}^{cb} & G_{ii}^{cc} & B_{ii}^{cc} & G_{ii}^{cn} & B_{ii}^{cn} \\ -B_{ii}^{na} & G_{ii}^{na} & -B_{ii}^{nb} & G_{ii}^{nb} & -B_{ii}^{nc} & G_{ii}^{nc} & -B_{ii}^{nn} & G_{ii_rg}^{nn} \\ G_{ii}^{na} & B_{ii}^{na} & G_{ii}^{nb} & B_{ii}^{nb} & G_{ii}^{nc} & B_{ii}^{nc} & G_{ii_rg}^{nn} & B_{ii}^{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_i^a \\ e_i^a \\ f_i^b \\ e_i^b \\ f_i^c \\ e_i^c \\ f_i^n \\ e_i^n \end{bmatrix} + \sum_{j \neq i}^n \begin{bmatrix} -B_{ij}^{aa} & G_{ij}^{aa} & -B_{ij}^{ab} & G_{ij}^{ab} & -B_{ij}^{ac} & G_{ij}^{ac} & -B_{ij}^{an} & G_{ij}^{an} \\ G_{ij}^{aa} & B_{ij}^{aa} & G_{ij}^{ab} & B_{ij}^{ab} & G_{ij}^{ac} & B_{ij}^{ac} & G_{ij}^{an} & B_{ij}^{an} \\ -B_{ij}^{ba} & G_{ij}^{ba} & -B_{ij}^{bb} & G_{ij}^{bb} & -B_{ij}^{bc} & G_{ij}^{bc} & -B_{ij}^{bn} & G_{ij}^{bn} \\ G_{ij}^{ba} & B_{ij}^{ba} & G_{ij}^{bb} & B_{ij}^{bb} & G_{ij}^{bc} & B_{ij}^{bc} & G_{ij}^{bn} & B_{ij}^{bn} \\ -B_{ij}^{ca} & G_{ij}^{ca} & -B_{ij}^{cb} & G_{ij}^{cb} & -B_{ij}^{cc} & G_{ij}^{cc} & -B_{ij}^{cn} & G_{ij}^{cn} \\ G_{ij}^{ca} & B_{ij}^{ca} & G_{ij}^{cb} & B_{ij}^{cb} & G_{ij}^{cc} & B_{ij}^{cc} & G_{ij}^{cn} & B_{ij}^{cn} \\ -B_{ij}^{na} & G_{ij}^{na} & -B_{ij}^{nb} & G_{ij}^{nb} & -B_{ij}^{nc} & G_{ij}^{nc} & -B_{ij}^{nn} & G_{ij}^{nn} \\ G_{ij}^{na} & B_{ij}^{na} & G_{ij}^{nb} & B_{ij}^{nb} & G_{ij}^{nc} & B_{ij}^{nc} & G_{ij}^{nn} & B_{ij}^{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_j^a \\ e_j^a \\ f_j^b \\ e_j^b \\ f_j^c \\ e_j^c \\ f_j^n \\ e_j^n \end{bmatrix} \quad (47)$$

9.2 Restricciones no lineales de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos

$$\begin{bmatrix} P_i^{sp|a} \\ Q_i^{sp|a} \\ P_i^{sp|b} \\ Q_i^{sp|b} \\ P_i^{sp|c} \\ Q_i^{sp|c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e_i^a - e_i^n) & (f_i^a - f_i^n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (f_i^a - f_i^n) & -(e_i^a - e_i^n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (e_i^b - e_i^n) & (f_i^b - f_i^n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (f_i^b - f_i^n) & -(e_i^b - e_i^n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (e_i^c - e_i^n) & (f_i^c - f_i^n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (f_i^c - f_i^n) & -(e_i^c - e_i^n) & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{ri}^a \\ I_{xi}^a \\ I_{ri}^b \\ I_{xi}^b \\ I_{ri}^c \\ I_{xi}^c \\ I_{ri}^n \\ I_{xi}^n \end{bmatrix} \quad (60)$$

9.3 Modelo linealizado de las ecuaciones nodales de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos

$$\begin{bmatrix} y_{ij}^{aa} & y_{ij}^{ab} & y_{ij}^{ac} & y_{ij}^{an} \\ y_{ij}^{ba} & y_{ij}^{bb} & y_{ij}^{bc} & y_{ij}^{bn} \\ y_{ij}^{ca} & y_{ij}^{cb} & y_{ij}^{cc} & y_{ij}^{cn} \\ y_{ij}^{na} & y_{ij}^{nb} & y_{ij}^{nc} & y_{ij}^{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_i^a \\ \Delta U_i^b \\ \Delta U_i^c \\ \Delta U_i^n \end{bmatrix} + \sum_{j \neq i}^n \begin{bmatrix} y_{ij}^{aa} & y_{ij}^{ab} & y_{ij}^{ac} & y_{ij}^{an} \\ y_{ij}^{ba} & y_{ij}^{bb} & y_{ij}^{bc} & y_{ij}^{bn} \\ y_{ij}^{ca} & y_{ij}^{cb} & y_{ij}^{cc} & y_{ij}^{cn} \\ y_{ij}^{na} & y_{ij}^{nb} & y_{ij}^{nc} & y_{ij}^{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_j^a \\ \Delta U_j^b \\ \Delta U_j^c \\ \Delta U_j^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta I_i^a \\ \Delta I_i^b \\ \Delta I_i^c \\ \Delta I_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \Lambda_i^a \\ \Delta \Lambda_i^b \\ \Delta \Lambda_i^c \\ \Delta \Lambda_i^n \end{bmatrix} \quad (66)$$

Donde cada elemento “y” tiene la siguiente estructura:

$$y_{ij} = \begin{bmatrix} -B_{ij}^{aa} & G_{ij}^{aa} & -B_{ij}^{ab} & G_{ij}^{ab} & -B_{ij}^{ac} & G_{ij}^{ac} & -B_{ij}^{an} & G_{ij}^{an} \\ G_{ij}^{aa} & B_{ij}^{aa} & G_{ij}^{ab} & B_{ij}^{ab} & G_{ij}^{ac} & B_{ij}^{ac} & G_{ij}^{an} & B_{ij}^{an} \\ -B_{ij}^{ba} & G_{ij}^{ba} & -B_{ij}^{bb} & G_{ij}^{bb} & -B_{ij}^{bc} & G_{ij}^{bc} & -B_{ij}^{bn} & G_{ij}^{bn} \\ G_{ij}^{ba} & B_{ij}^{ba} & G_{ij}^{bb} & B_{ij}^{bb} & G_{ij}^{bc} & B_{ij}^{bc} & G_{ij}^{bn} & B_{ij}^{bn} \\ -B_{ij}^{ca} & G_{ij}^{ca} & -B_{ij}^{cb} & G_{ij}^{cb} & -B_{ij}^{cc} & G_{ij}^{cc} & -B_{ij}^{cn} & G_{ij}^{cn} \\ G_{ij}^{ca} & B_{ij}^{ca} & G_{ij}^{cb} & B_{ij}^{cb} & G_{ij}^{cc} & B_{ij}^{cc} & G_{ij}^{cn} & B_{ij}^{cn} \\ -B_{ij}^{na} & G_{ij}^{na} & -B_{ij}^{nb} & G_{ij}^{nb} & -B_{ij}^{nc} & G_{ij}^{nc} & -B_{ij}^{nn} & G_{ij}^{nn} \\ G_{ij}^{na} & B_{ij}^{na} & G_{ij}^{nb} & B_{ij}^{nb} & G_{ij}^{nc} & B_{ij}^{nc} & G_{ij}^{nn} & B_{ij}^{nn} \end{bmatrix}$$

9.4 Modelo linealizado de las restricciones no lineales de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos

$$\begin{bmatrix} I_{xi}^a & I_{ri}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{xi}^a & -I_{ri}^a \\ I_{ri}^a & -I_{xi}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{ri}^a & I_{xi}^a \\ 0 & 0 & I_{xi}^b & I_{ri}^b & 0 & 0 & -I_{xi}^b & -I_{ri}^b \\ 0 & 0 & I_{ri}^b & -I_{xi}^b & 0 & 0 & -I_{ri}^b & I_{xi}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{xi}^c & I_{ri}^c & -I_{xi}^c & -I_{ri}^c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ri}^c & -I_{xi}^c & -I_{ri}^c & I_{xi}^c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta f_i^a \\ \Delta e_i^a \\ \Delta f_i^b \\ \Delta e_i^b \\ \Delta f_i^c \\ \Delta e_i^c \\ \Delta f_i^n \\ \Delta e_i^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (e_i^a - e_i^n) & (f_i^a - f_i^n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (f_i^a - f_i^n) & -(e_i^a - e_i^n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (e_i^b - e_i^n) & (f_i^b - f_i^n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (f_i^b - f_i^n) & -(e_i^b - e_i^n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (e_i^c - e_i^n) & (f_i^c - f_i^n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (f_i^c - f_i^n) & -(e_i^c - e_i^n) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_{ri}^a \\ \Delta I_{xi}^a \\ \Delta I_{ri}^b \\ \Delta I_{xi}^b \\ \Delta I_{ri}^c \\ \Delta I_{xi}^c \\ \Delta I_{ri}^n \\ \Delta I_{xi}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_i^a \\ \Delta Q_i^a \\ \Delta P_i^b \\ \Delta Q_i^b \\ \Delta P_i^c \\ \Delta Q_i^c \\ \Delta P_i^n \\ \Delta Q_i^n \end{bmatrix} \quad (71)$$

9.5 Residuos de intensidad de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos

$$\begin{bmatrix} \Delta\Lambda_i^a \\ \Delta\Lambda_i^b \\ \Delta\Lambda_i^c \\ \Delta\Lambda_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_i^a |_0 \\ I_i^b |_0 \\ I_i^c |_0 \\ I_i^n |_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{ij}^{aa} & y_{ij}^{ab} & y_{ij}^{ac} & y_{ij}^{an} \\ y_{ij}^{ba} & y_{ij}^{bb} & y_{ij}^{bc} & y_{ij}^{bn} \\ y_{ij}^{ca} & y_{ij}^{cb} & y_{ij}^{cc} & y_{ij}^{cn} \\ y_{ij}^{na} & y_{ij}^{nb} & y_{ij}^{nc} & y_{ij}^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^a |_0 \\ U_i^b |_0 \\ U_i^c |_0 \\ U_i^n |_0 \end{bmatrix} - \sum_{j \neq i}^n \begin{bmatrix} y_{ij}^{aa} & y_{ij}^{ab} & y_{ij}^{ac} & y_{ij}^{an} \\ y_{ij}^{ba} & y_{ij}^{bb} & y_{ij}^{bc} & y_{ij}^{bn} \\ y_{ij}^{ca} & y_{ij}^{cb} & y_{ij}^{cc} & y_{ij}^{cn} \\ y_{ij}^{na} & y_{ij}^{nb} & y_{ij}^{nc} & y_{ij}^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j^a |_0 \\ U_j^b |_0 \\ U_j^c |_0 \\ U_j^n |_0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Donde,

$$\Delta\Lambda_i^{ph} = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i^{ph} \\ \Delta\beta_i^{ph} \end{bmatrix} \quad ph = a, b, c, n(\text{neutro})$$

9.6 Residuos de potencia de la red para el nudo i en redes trifásicas a cuatro hilos

$$\begin{bmatrix} \Delta P_i^a \\ \Delta Q_i^a \\ \Delta P_i^b \\ \Delta Q_i^b \\ \Delta P_i^c \\ \Delta Q_i^c \\ \Delta P_i^n \\ \Delta Q_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i^{sp} |^a \\ Q_i^{sp} |^a \\ P_i^{sp} |^b \\ Q_i^{sp} |^b \\ P_i^{sp} |^c \\ Q_i^{sp} |^c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (e_i^a - e_i^n) |_0 & (f_i^a - f_i^n) |_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (f_i^a - f_i^n) |_0 & -(e_i^a - e_i^n) |_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (e_i^b - e_i^n) |_0 & (f_i^b - f_i^n) |_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (f_i^b - f_i^n) |_0 & -(e_i^b - e_i^n) |_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (e_i^c - e_i^n) |_0 & (f_i^c - f_i^n) |_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (f_i^c - f_i^n) |_0 & -(e_i^c - e_i^n) |_0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{ri}^a |_0 \\ I_{xi}^a |_0 \\ I_{ri}^b |_0 \\ I_{xi}^b |_0 \\ I_{ri}^c |_0 \\ I_{xi}^c |_0 \\ I_{ri}^n |_0 \\ I_{xi}^n |_0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

9.7 Sistema de ecuaciones a resolver del flujo de cargas en la validación de resultados

9.7.1 Sistema de ecuaciones a resolver del flujo de carga

$$\begin{bmatrix}
 [y_{22}] & [y_{23}] & [y_{24}] & [-Ident] & [0] & [0] \\
 [y_{23}] & [y_{33}] & [0] & [0] & [-Ident] & [0] \\
 [y_{42}] & [0] & [y_{44}] & [0] & [0] & [-Ident] \\
 \hline
 [D_{I2}] & [0] & [0] & [D_{V2}] & [0] & [0] \\
 [0] & [D_{I3}] & [0] & [0] & [D_{V3}] & [0] \\
 [0] & [0] & [D_{I4}] & [0] & [0] & [D_{V4}]
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Delta U_2] \\ [\Delta U_3] \\ [\Delta U_4] \\ [\Delta I_2] \\ [\Delta I_3] \\ [\Delta I_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Delta \Lambda_2] \\ [\Delta \Lambda_3] \\ [\Delta \Lambda_4] \\ [\Delta S_2] \\ [\Delta S_3] \\ [\Delta S_4] \end{bmatrix} \quad (86)$$

Donde,

- Cada elemento del jacobiano tiene una dimensión de [8 x 8].
- Los elementos del vector de estado y los del vector de residuos tienen la dimensión de [8 x 1].

9.7.2 Obtención de intensidades de nudo slack (restricciones lineales)

En este caso el conjunto de ecuaciones mostrado es para el nudo 1, que es el de referencia.

$$\begin{bmatrix} I_{r1}^a \\ I_{x1}^a \\ I_{r1}^b \\ I_{x1}^b \\ I_{r1}^c \\ I_{x1}^c \\ I_{r1}^n \\ I_{x1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{11}^{aa} & G_{11}^{aa} & -B_{11}^{ab} & G_{11}^{ab} & -B_{11}^{ac} & G_{11}^{ac} & -B_{11}^{an} & G_{11}^{an} \\ G_{11}^{aa} & B_{11}^{aa} & G_{11}^{ab} & B_{11}^{ab} & G_{11}^{ac} & B_{11}^{ac} & G_{11}^{an} & B_{11}^{an} \\ -B_{11}^{ba} & G_{11}^{ba} & -B_{11}^{bb} & G_{11}^{bb} & -B_{11}^{bc} & G_{11}^{bc} & -B_{11}^{bn} & G_{11}^{bn} \\ G_{11}^{ba} & B_{11}^{ba} & G_{11}^{bb} & B_{11}^{bb} & G_{11}^{bc} & B_{11}^{bc} & G_{11}^{bn} & B_{11}^{bn} \\ -B_{11}^{ca} & G_{11}^{ca} & -B_{11}^{cb} & G_{11}^{cb} & -B_{11}^{cc} & G_{11}^{cc} & -B_{11}^{cn} & G_{11}^{cn} \\ G_{11}^{ca} & B_{11}^{ca} & G_{11}^{cb} & B_{11}^{cb} & G_{11}^{cc} & B_{11}^{cc} & G_{11}^{cn} & B_{11}^{cn} \\ -B_{11}^{na} & G_{11}^{na} & -B_{11}^{nb} & G_{11}^{nb} & -B_{11}^{nc} & G_{11}^{nc} & -B_{11}^{nn} & G_{11}^{nn} \\ G_{11}^{na} & B_{11}^{na} & G_{11}^{nb} & B_{11}^{nb} & G_{11}^{nc} & B_{11}^{nc} & G_{11}^{nn} & B_{11}^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B_{12}^{aa} & G_{12}^{aa} & -B_{12}^{ab} & G_{12}^{ab} & -B_{12}^{ac} & G_{12}^{ac} & -B_{12}^{an} & G_{12}^{an} \\ G_{12}^{aa} & B_{12}^{aa} & G_{12}^{ab} & B_{12}^{ab} & G_{12}^{ac} & B_{12}^{ac} & G_{12}^{an} & B_{12}^{an} \\ -B_{12}^{ba} & G_{12}^{ba} & -B_{12}^{bb} & G_{12}^{bb} & -B_{12}^{bc} & G_{12}^{bc} & -B_{12}^{bn} & G_{12}^{bn} \\ G_{12}^{ba} & B_{12}^{ba} & G_{12}^{bb} & B_{12}^{bb} & G_{12}^{bc} & B_{12}^{bc} & G_{12}^{bn} & B_{12}^{bn} \\ -B_{12}^{ca} & G_{12}^{ca} & -B_{12}^{cb} & G_{12}^{cb} & -B_{12}^{cc} & G_{12}^{cc} & -B_{12}^{cn} & G_{12}^{cn} \\ G_{12}^{ca} & B_{12}^{ca} & G_{12}^{cb} & B_{12}^{cb} & G_{12}^{cc} & B_{12}^{cc} & G_{12}^{cn} & B_{12}^{cn} \\ -B_{12}^{na} & G_{12}^{na} & -B_{12}^{nb} & G_{12}^{nb} & -B_{12}^{nc} & G_{12}^{nc} & -B_{12}^{nn} & G_{12}^{nn} \\ G_{12}^{na} & B_{12}^{na} & G_{12}^{nb} & B_{12}^{nb} & G_{12}^{nc} & B_{12}^{nc} & G_{12}^{nn} & B_{12}^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [U_1] \\ [U_2] \\ [U_3] \\ [U_4] \end{bmatrix} \quad (87)$$

Donde,

- Cada elemento del vector de tensiones tiene una dimensión de [8 x 1].
- Cada elemento nulo de la matriz de admitancias tiene una dimensión de [8 x 8].

REFERENCIAS

- [1] Departamento de Ingeniería Eléctrica, "Sistemas Eléctricos de Potencia," in *Flujo de Cargas*. Sevilla, 2013, ch. 8, pp. 2-27.
- [2] Antonio Gómez Expósito and Esther Romero Ramos, "Augmented Rectangular Load Flow Model," *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, vol. 17, no. 2, pp. 271-276, MAY 2002.
- [3] CIGRE Task Force C6.04.02, "Benchmark Systems for Network Integration of Renewable and Distributed Energy Resources," *CIGRE*, 2014.

