

Trabajo Fin de Máster  
Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería  
Mecánica

Estimación indirecta de los parámetros del material  
en ensayos de impacto con grandes deformaciones  
plásticas

Autor: Fernando Pérez Jiménez

Tutor: José Angel González Pérez

**Dpto. de Ingeniería de la Construcción y  
Proyectos de Ingeniería  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2022





Trabajo Fin de Máster  
Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

# **Estimación indirecta de los parámetros del material en ensayos de impacto**

Autor:

Fernando Pérez Jiménez

Tutor:

José Angel González Pérez

Catedrático de Universidad

Dpto. de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022



Trabajo Fin de Máster: Estimación indirecta de los parámetros del material en ensayos de impacto

Autor: Fernando Pérez Jiménez

Tutor: José Angel González Pérez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2022

El Secretario del Tribunal

*A mi familia*

*A mis maestros*



# Agradecimientos

---

Este trabajo está dedicado a mis padres, que con su constante apoyo han hecho posible que haya podido llegar adonde estoy ahora, tras muchos años de esfuerzo y sacrificio. Tampoco quisiera olvidarme de aquellos compañeros de clase que han ayudado, en todos los aspectos, a que mi aventura como estudiante se haya convertido en una etapa lo más agradable posible. Por último, aunque no menos importante, quisiera también hacer mención y agradecer a los docentes que he tenido en esta etapa, así como a mi tutor, José Angel González, que con su aporte de información a lo largo de la realización de este trabajo me ha hecho la labor más sencilla y me ha permitido aprender más sobre la materia que aquí se trata.

*Fernando Pérez Jiménez*

*Máster Avanzado en Diseño en Ingeniería Mecánica*

*Sevilla, 2022*



El modelo de JC es un modelo de plastificación del material, ampliamente utilizado en el sector industrial cuando hay que considerar el fenómeno de fluencia del mismo, que tiene en cuenta tanto la tensión de fluencia del material como el endurecimiento ante cargas estáticas, así como también el endurecimiento ante cargas dinámicas, y el ablandamiento ocasionado por la temperatura. Todos sus parámetros característicos menos uno se obtienen a partir de la aplicación de ensayos de compresión de tipo estático, mientras que para el otro será necesario cambiar la naturaleza del ensayo a uno dinámico, denominado ensayo de Taylor, que consiste en proyectar una bala de pequeñas dimensiones a gran velocidad contra una pared rígida. Se propondrán, además, herramientas matemáticas para postprocesar los resultados que de estos ensayos se obtengan.

La finalidad de los ensayos anteriormente comentados será la de estimar el valor de los distintos parámetros característicos de JC del material Nimonic 80A. Las simulaciones por Elementos Finitos supondrán por tanto un papel fundamental aquí para poder recrear las condiciones propias de los ensayos reales de manera computacional.

Los resultados que se obtengan de estos ensayos virtuales serán postprocesados para lograr los valores de los ya mencionados parámetros de JC. Dicho postprocesamiento será objeto de un análisis más profundo, para determinar su utilidad y fiabilidad.

Este documento, con el fin de lograr el mencionado objetivo, se estructurará de la siguiente manera: tras una breve introducción, se empezarán a asentar las bases teóricas necesarias para entender mejor los fenómenos físicos que tienen lugar en los ensayos que se van a realizar, así como el modelo de simplificación que se va a considerar en el ensayo dinámico, y las herramientas matemáticas que nos van a servir de utilidad para abordar el problema aquí expuesto. Posteriormente, se incluirán aspectos previos que conviene considerar de cara a la realización de estos ensayos, así como los resultados y las conclusiones que emanen de éstos, proponiéndose también posibles vías de mejora en los procedimientos utilizados.



# Abstract

---

The JC model is a material plastification model, widely used in the industrial sector, when creep phenomenon must be considered, which takes into account both the yield stress of the material and hardening under static loads, as well as hardening under dynamic loads, and softening cause by temperature. All its characteristic parameters except one are obtained from the application of static type compression tests, while for the other it will be necessary to change the nature of the test to a dynamic one, called Taylor test, which consists of projecting a bullet of small dimensions at high speed against a rigid wall. Mathematical tools will also be proposed to post-process the results obtained from these tests.

The purpose of the aforementioned tests will be to estimate the value of the different characteristic JC parameters of the Nimonic 80A material. Simulations by Finite Elements will therefore assume a fundamental role here to be able to recreate the conditions of real tests in a computational way.

The results obtained from these virtual tests will be post-processed to achieve the values of the aforementioned JC parameters. This post-processing will be the subject of a deeper analysis, to determine its usefulness and reliability.

This document, in order to achieve the aforementioned goal, will be structured as follows: after a brief introduction, the theoretical bases necessary to better understand the physical phenomena that take place in the tests that are going to be carried out will begin to be established, as well as the simplification model that it is going to be considered in the dynamic test, and the mathematical tools that are going to be useful to us to approach presented here. Subsequently, previous aspects that should be considered in order to carry out these tests will be included, as well as the results and conclusions that emanate from them, also proposing possible ways of improving the procedures used.

# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>ixx</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiv</b>
<b>Índice</b>	<b>xivv</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xviivii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xixx</b>
<b>Notación</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. <i>Los modelos de comportamiento plástico simples</i>	1
1.2. <i>Caracterización de los ensayos virtuales</i>	3
1.3. <i>Objetivo del TFM</i>	4
1.4. <i>Organización del documento</i>	4
<b>2 El ensayo de Taylor</b>	<b>5</b>
2.1. <i>Introducción</i>	5
2.2. <i>El ensayo de impacto de Taylor</i>	5
2.3. <i>Modelo teórico de Taylor</i>	7
<b>3 Propagación de ondas elásticas en un medio material</b>	<b>13</b>
3.1. <i>Introducción</i>	13
3.2. <i>Ondas mecánicas. Características principales</i>	14
3.3. <i>Propagación de ondas en un cilindro elástico por impacto</i>	17
3.4. <i>Número de Courant</i>	22
<b>4 Modelo plástico de Johnson-Cook</b>	<b>23</b>
4.1. <i>Introducción</i>	23
4.2. <i>Expresiones del modelo de JC. Parámetros</i>	23
4.3. <i>Metodología propuesta para la estimación de los parámetros de JC</i>	29
<b>5 Restricciones inducidas por contacto</b>	<b>35</b>
5.1. <i>Introducción</i>	35
5.2. <i>Contacto sin fricción</i>	35
5.2.1 <i>Contacto en 2D</i>	35
5.2.2 <i>Contacto en 3D</i>	36
5.3. <i>Contacto con fricción</i>	37
5.3.1 <i>Contacto en 2D</i>	37
5.3.2 <i>Contacto en 3D</i>	37
<b>6 Ajuste matemático por mínimos cuadrados</b>	<b>39</b>
6.1. <i>Introducción</i>	39
6.2. <i>Procedimiento en el Ajuste por Mínimos Cuadrados</i>	39
6.3. <i>Overfitting y Underfitting</i>	46

<b>7</b>	<b>Simulaciones numéricas</b>	<b>49</b>
	7.1. <i>Introducción</i>	49
	7.2. <i>Los efectos de la presencia del rozamiento</i>	49
	7.3. <i>Ajustes preliminares para ensayos virtuales en EF</i>	54
<b>8</b>	<b>Resultados</b>	<b>55</b>
	8.1. <i>Ensayos estáticos</i>	55
	8.2. <i>Ensayo dinámico de impacto de Taylor</i>	62
<b>9</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>71</b>
	9.1. <i>Conclusiones</i>	71
	9.2. <i>Trabajos futuros</i>	71
	<b>Referencias</b>	<b>73</b>
	<b>Glosario</b>	<b>77</b>



# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 4–1. Valores de $\ln(\overline{\varepsilon}_{pl})$ según $\overline{\varepsilon}_{pl}$	30
Tabla 6–2. Forma en la que se ha de ordenar la serie de datos experimentales iniciales	44
Tabla 6–2. Actualización de la Tabla 6-1 considerando los nuevos parámetros	45
Tabla 6–3. Forma de la tabla con los datos finales a considerar	46
Tabla 8–3. Valores de la nube de puntos $\ln(\sigma_Y - A) \equiv \ln(\overline{\varepsilon}_{pl})$ tras ensayo experimental en EF	58
Tabla 8–2. Desplazamientos longitudinales de compresión de la probeta para distintas temperaturas para hallar la de transición	60
Tabla 8–3. Desplazamientos longitudinales y radiales de la probeta para distintas temperaturas, entre la de transición y la de fusión	61
Tabla 8–4. Demás valores de interés para distintas temperaturas, entre la de transición y la de fusión	61
Tabla 8–5. Resultados finales para los distintos parámetros de JC	69



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1-1. Modelo elastoplástico perfecto	1
Figura 1-2. Modelo elastoplástico con endurecimiento isotrópico (izquierda) y cinemático (derecha)	2
Figura 1-3. Simulación por Elementos Finitos de un choque lateral de un coche	3
Figura 1-4. Temperatura y esfuerzos estáticos a los que se somete un elemento mecánico	3
Figura 2-1. Esquema simplificado de un ensayo de impacto de Taylor	6
Figura 2-2. Elementos básicos de accionamiento y medición en un ensayo de Taylor	7
Figura 2-3. Variables que definen el modelo simplificado con el que se va a trabajar	8
Figura 2-4. Área de las secciones inicial y final, y flujo másico	10
Figura 3-1. Masa de agua perturbada por la presencia de una onda	13
Figura 3-2. Respuesta de un sistema mecánico bajo condiciones próximas a la estática, izquierda, y bajo condiciones claramente dinámicas, derecha	14
Figura 3-3. Parámetros característicos de una onda	15
Figura 3-4. Ondas longitudinales	15
Figura 3-5. Ejemplo de una onda por oleaje	15
Figura 3-6. Ondas de volumen (ondas P y S) y de superficie (Rayleigh)	16
Figura 3-7. Representación geométrica del modelo simplificado	19
Figura 3-8. Perfil completo de tensiones axiales adimensionalizadas para $t = 0.8a/c_1$	19
Figura 3-9. Perfil de tensiones para $t = 0.8a/c_1$ aumentado para el “escalón” inferior, izquierda, y el superior, derecha	20
Figura 3-10. Perfil de tensiones para $t = 1.2a/c_1$	20
Figura 3-11. Perfil de tensiones para $t = 2a/c_1$	21
Figura 3-12. Perfil de tensiones para $t = 2.7a/c_1$	21
Figura 3-13. Representación de un elemento cualquiera de la malla a aplicar y velocidad del paso de onda, $V$	22
Figura 4-1. Evolución de $\sigma_Y$ con el tiempo para distintos valores de $A$	25
Figura 4-2. Evolución de $\sigma_Y$ con el tiempo para distintos valores de $B$	25
Figura 4-3. Evolución de $\sigma_Y$ con el tiempo para distintos valores de $n$	26
Figura 4-4. Evolución de $\hat{\theta}^m$ en función de $\theta$ para distintos valores de $m$	27
Figura 4-5. Evolución de $\sigma_Y$ en función de $\theta$ para distintos valores de $m$	28
Figura 4-6. Evolución de $\sigma_Y$ en el tiempo para distintos valores de $C$	29
Figura 4-7. Evolución de $\ln(\overline{\varepsilon}_{pl})$ respecto de $\overline{\varepsilon}_{pl}$	31
Figura 4-8. Ejemplo de ajuste por mínimos cuadrados para el tipo de ensayo considerado	31
Figura 5-1. Contacto entre dos cuerpos, A y B, sin fricción y en 2D	35
Figura 5-2. Contacto entre dos cuerpos, A y B, sin fricción y en 3D	36

Figura 6-1. Puntos experimentales, curva ajustada de orden 1 y residuo en un punto $i$	40
Figura 6-2. Ajuste insuficiente, a la izquierda, ajuste idóneo, en el medio, sobreajuste, a la derecha	47
Figura 6-3. Ejemplo de ajuste por mínimos cuadrados con polinomio de grado 20. Curva con puntos experimentales (azul) y curva ajustada (roja)	47
Figura 7-1. Comparación de las formas inicial (negro) y final (rojo) de la probeta para los casos estático (izquierda) y dinámico (derecha) sin rozamiento	49
Figura 7-2. Modelo geométrico del ensayo estático de compresión	50
Figura 7-3. Deformada del cuarto superior-derecha del cilindro cuando se somete a compresión estática	51
Figura 7-4. Deformada ideal (negro) y real (rojo) para altas velocidades de impacto	52
Figura 7-5. Deformada ampliada, con escala de 5, en el último instante de tiempo calculado, de la bala en un ensayo de Taylor cuando hay rozamiento	52
Figura 7-6. Representación de la forma adquirida por el cilindro en un instante determinado durante el impacto	53
Figura 8-1. Evolución de la tensión respecto de la deformación en un ensayo estático para hallar $A$	56
Figura 8-2. Ampliación de la Figura 8-1 en la transición elástico-plástica	56
Figura 8-3. Nube de puntos $\ln(\sigma_Y - A) \equiv \ln(\overline{\varepsilon}_{pl})$ y su correspondiente recta ajustada	57
Figura 8-4. Ampliación de la imagen de la Figura 8-3	58
Figura 8-5. Nube experimental de puntos $\ln(Q) \equiv \ln(\hat{\theta})$ y su respectiva recta ajustada	61
Figura 8-6. Ampliación de la Figura 8-5	62
Figura 8-7. Evolución del diámetro de la cara de contacto en un ensayo de Taylor con el tiempo	63
Figura 8-8. Evolución de la longitud total del cilindro en un ensayo de Taylor con el tiempo	63
Figura 8-9. $H$ a la izquierda y su derivada a la derecha	64
Figura 8-10. Evolución de $ds/dt$ , izquierda, y de $s$ , derecha, en el tiempo	65
Figura 8-11. Deformadas real e ideal del cilindro tras choque	66
Figura 8-12. Longitud indeformada del cilindro	66
Figura 8-13. Velocidad de deformación equivalente experimental, en azul, y mediante curva ajustada, en rojo	67
Figura 8-14. Deformación equivalente en la zona deformada de la probeta	67
Figura 8-15. Comparación de curvas de JC para disitintas $C$ y curva de las tensiones a las que se ve sometido el material	68

$\ln(A)$	Logaritmo neperiano de A
$ A $	Valor absoluto de A
$\partial^a x / \partial y^a$	Derivada de grado $a$ de $x$ respecto de $y$
$\partial^a x / (\partial y \partial z \dots \partial t)$	Derivada de grado $a$ de $x$ respecto de $y, z, \dots t$
$\dot{a}$	Derivada de la variable $a$ respecto del tiempo
$a_i$	Valor de la variable $a$ (puede ser cualquiera como $x$ o $y$ ) en el punto $i^{th}$
$a'$	Derivada de una variable $a$ (no se especifica respecto de qué variable)
$cte$	Constante
2D	Espacio de dos dimensiones
3D	Espacio de tres dimensiones
EF	Elementos Finitos
$L[A]$	Transformada de Laplace de una función $A$
$L^{-1}[A]$	Transformada inversa de Laplace de una función $A$
$\sum_{i=1}^q a_i$	Sumatorio de datos $a_1, a_2, \dots, a_q$
JC	Johnson-Cook



# 1 INTRODUCCIÓN

---

*“Para trabajar basta estar convencido de una cosa: que trabajar es menos aburrido que divertirse”*

*- Charles Baudelaire -*

## 1.1 Los modelos de comportamiento plástico simples

Los modelos de comportamiento no lineal más simples son los modelos elastoplástico perfecto, elastoplástico con endurecimiento isotrópico y elastoplástico con endurecimiento cinemático, véase las figuras 1-1 y 1-2.

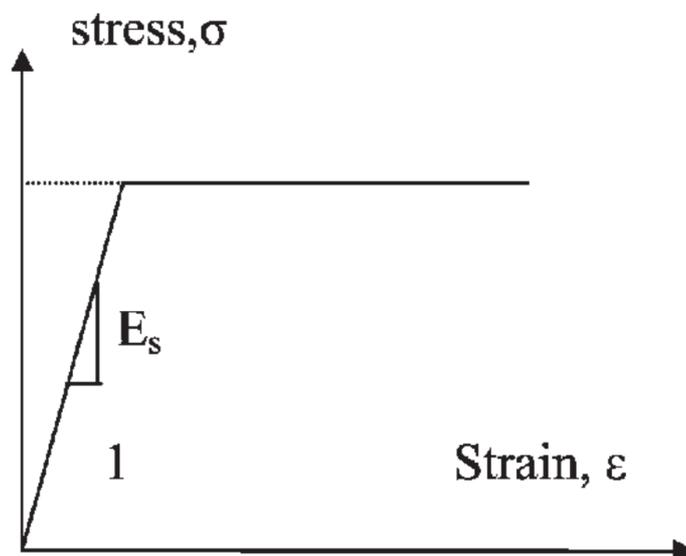


Figura 1-1. Modelo elastoplástico perfecto [1]

En el modelo elastoplástico perfecto (Figura 1-1) tenemos un tramo totalmente elástico lineal seguido de una plastificación súbita, es decir, una vez el material alcanza el estado plástico la deformación del mismo progresa a tensión constante, lo cual indica que toda la deformación que se produce a partir de ahí es plástica. En los modelos con endurecimiento, una vez se alcanza el estado plástico, la deformación no avanza a tensión constante sino que esta última va cambiando. Esto significa que, durante la etapa plástica aparecen componentes elásticas de la deformación, además de las plásticas.

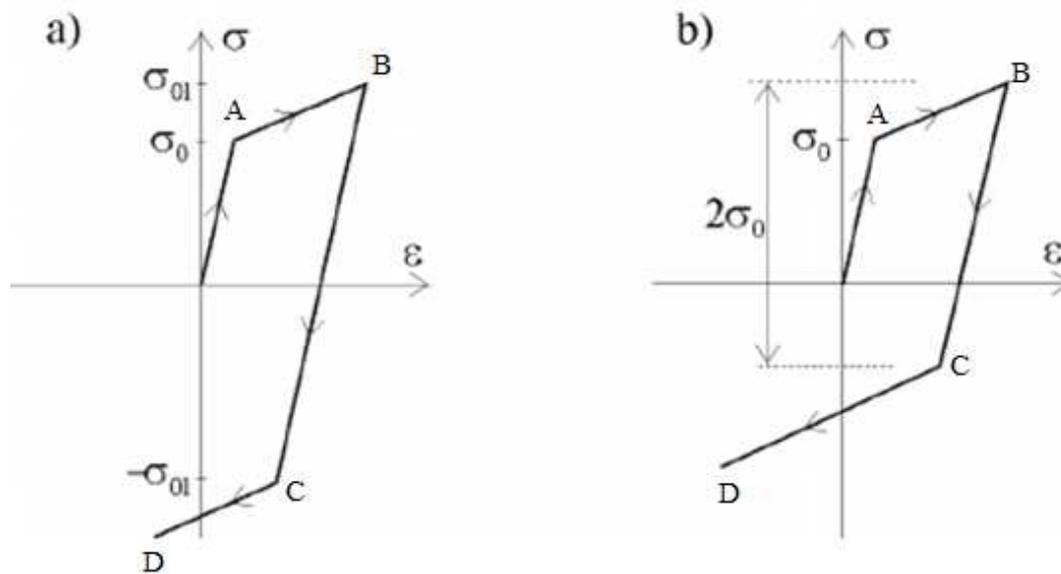


Figura 1-2. Modelo elastoplástico con endurecimiento isotrópico (izquierda) y cinemático (derecha) [2]

En la Figura 1-2 se observan los dos modelos elastoplásticos más básicos que incluyen el efecto del endurecimiento, que son el isotrópico, a la izquierda de la imagen, y el cinemático, a la derecha. Según vamos aumentando la carga la tensión se incrementa hasta llegar al punto A. Es entonces cuando el material plastifica, y seguimos cargando el mismo hasta B. Hasta aquí ambos modelos son exactamente iguales, observándose las diferencias a partir de dicho punto B, al producirse la descarga, e incluso carga inversa, desde el mismo hasta el punto C. La posición del punto C sí varía de un caso a otro. En el modelo con endurecimiento isotrópico dicho punto C tendrá una tensión igual pero de signo contrario a la del B, de manera que la nueva plastificación se alcanzará en ese momento, llegándose al punto D si se aumenta, en signo contrario, la tensión aplicada. Así pues, la diferencia en tensiones entre el punto B y el punto C es dos veces la tensión a la que se encuentra el punto B para el modelo isotrópico, mientras que para el cinemático esta diferencia es dos veces la tensión de fluencia, a la que se encuentra el punto A. También existen modelos mixtos, que combinan los dos anteriores. [3]

Sin embargo, estos modelos solo son aplicables cuando las velocidades de deformación son bajas y no entra en escena otras variables físicas, quedando inservible por ejemplo si en el ensayo o prueba la velocidad de deformación es lo suficientemente elevada. Por tanto, para ciertas aplicaciones se antoja imprescindible el uso de un modelo distinto a los ya mencionados. El que aquí se propone es uno ampliamente utilizado en el ámbito de la industria, el llamado Modelo de Johnson-Cook, del que por ahora simplemente diremos que el mismo tiene en cuenta tanto la deformación plástica como su velocidad, así como también la temperatura, para predecir la tensión (magnitud) de fluencia del material.

En la Figura 1-3 se ilustra un ejemplo claro de dónde se puede aplicar de manera práctica este modelo. Dicho ejemplo muestra el impacto de un vehículo en la simulación de un accidente por choque lateral. Un impacto de esas características es un fenómeno que involucra la presencia tanto de una velocidad de deformación como de un cambio de temperatura considerable, especialmente lo primero. No obstante, también se puede aplicar a cualquier tipo de choque realizado de manera lo suficientemente brusca, que es lo que se realizará en el estudio aquí tratado. Por su parte, en la Figura 1-4 se presenta, a modo de ejemplo, un análisis estático en el que la temperatura posee una influencia considerable (imagen de la izquierda), de manera que si se supera el límite elástico a la velocidad de deformación de referencia el modelo de Johnson-Cook es capaz de predecir los efectos que dicha temperatura tendrá sobre la respuesta estructural en cuanto a ablandamiento se refiere.



Figura 1-3. Simulación por Elementos Finitos de un choque lateral de un coche [4]

Se hallarán por tanto los parámetros del modelo de JC, un modelo de comportamiento que se considera lo suficientemente completo como para ser utilizado ampliamente en el sector industrial, para el material Nimonic 80A, utilizando una metodología numérico-experimental para a partir de ella poder realizar los pertinentes ensayos virtuales.

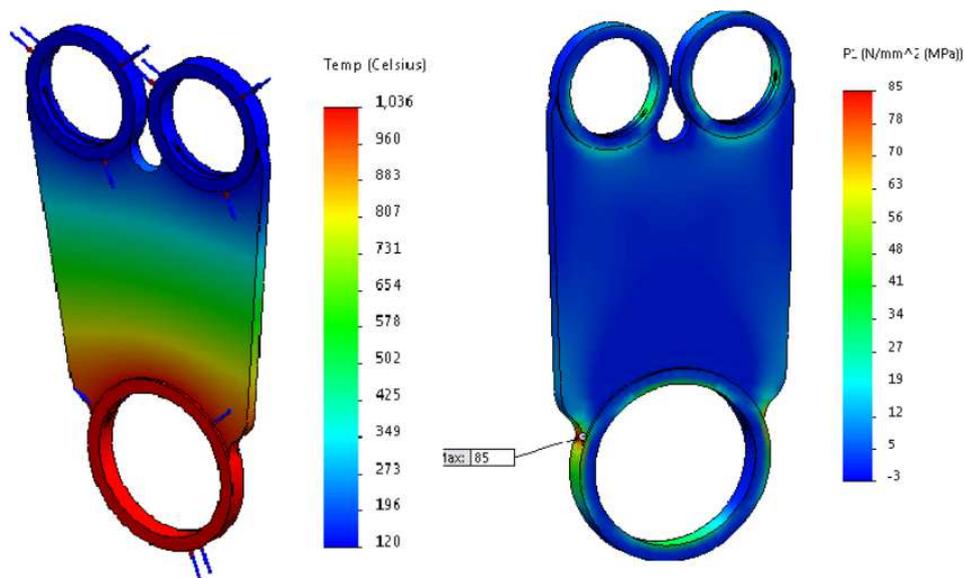


Figura 1-4. Temperatura y esfuerzos estáticos a los que se somete un elemento mecánico [5]

## 1.2 Caracterización de los ensayos virtuales

Se llevarán a cabo dos tipos de ensayos virtuales, claramente diferenciados entre sí. Por un lado están los ensayos de compresión estática, los cuales son los típicos en los que la probeta de prueba queda atrapada entre dos mordazas para ser aplastada con fuerzas y desplazamientos conocidos, y de esta forma poder obtener las tensiones y deformaciones a las que se ve sometida la misma. Si bien es cierto que este ensayo estático constará de diferentes variantes en función del parámetro que deseemos lograr, el concepto básico es el que

acabamos de comentar. Por otro lado, se encuentra el ensayo de impacto de Taylor, el cual consiste en impactar una bala de pequeñas dimensiones del material que se desea probar contra una pared cuya rigidez sea considerablemente más alta. De esta forma, en función de los valores que adquieran las distintas variables geométricas de interés en el tiempo, podremos determinar la evolución de la tensión y de la deformación plástica efectiva en el mismo, y por ende el parámetro representativo del endurecimiento del material debido a la velocidad de deformación tras aplicar JC.

### 1.3 Objetivo del TFM

Se llevará a cabo la realización de una serie de ensayos virtuales, siendo la mayoría de ellos estáticos (cuasiestáticos si se realizasen en laboratorio), y uno de tipo dinámico, que tienen como fin estimar el valor de los distintos parámetros característicos de JC de un material. Para ello se va a recurrir a la aplicación de las técnicas de los Elementos Finitos para recrear las condiciones propias de los ensayos reales de manera computacional.

Los resultados que se obtengan de estos ensayos virtuales se postprocesarán convenientemente para lograr los valores de los ya mencionados parámetros de JC. Es precisamente este postprocesamiento lo que se desea analizar con mayor profundidad, para determinar su utilidad y fiabilidad.

### 1.4 Organización del documento

Tanto este capítulo como los siguientes, hasta el denominado “Ajuste matemático por mínimos cuadrados” (este inclusive), se dedicarán a asentar los fundamentos teóricos más importantes. En un capítulo inmediatamente posterior al último comentado, llamado “Consideraciones previas a la ejecución de los ensayos”, se abordarán aspectos relacionados tanto de cómo la fricción afecta, de manera negativa, a los análisis que aquí tienen lugar, como de los ajustes preliminares que hay que aplicar cuando de ensayos virtuales se trata. Posteriormente, tendremos un capítulo dedicados a los resultados y su análisis, seguido de otro en el que se comentarán las conclusiones de todo el trabajo, así como los trabajos futuros planteados, esto es, proponer una serie de opciones o vías de mejora de los métodos con los que se ha venido trabajando.

# 2 EL ENSAYO DE TAYLOR

---

*“El hombre es un animal que se alimenta de  
adulaciones”*

*- William Hazlitt -*

## 2.1 Introducción

En este capítulo se hará referencia al ensayo de Taylor, comenzándose por el instrumentaje que en él se necesita, así como las ideas básicas de dicho ensayo, en el apartado 2.2. En el apartado 2.3 se expondrá el modelo teórico a aplicar cuando se ejecuta un ensayo de Taylor, explicándose primero las simplificaciones que éste ha de incluir, y siguiendo con la descripción y obtención de sus variables características, según S.Sen [6]. Aunque también se van a tratar los datos que se hayan logrado en los demás ensayos, en los de naturaleza estática, éstos no van a ser explicados ni en éste ni en ningún otro capítulo dado que su procesamiento es mucho más directo y evidente que en el ensayo de impacto.

## 2.2 El ensayo de impacto de Taylor

El ensayo de Taylor es de naturaleza considerablemente diferente a los ensayos de compresión estáticos tradicionales, que son los que tendrían lugar para la obtención del resto de los parámetros. Lo ideal, con el fin de simplificar la complejidad en lo que al tratamiento de los resultados se refiere, sería poder imponer una velocidad de deformación plástica del cilindro fija, lo cual es estrictamente imposible si tenemos en cuenta que ésta será igual a 0 hasta que el material llegue a su punto de fluencia y, por tanto, comience la deformación plástica. Si se toma la simplificación consistente en considerar toda la deformación como deformación plástica porque se asume que la deformación elástica a la que el cilindro se ve sometida inicialmente es lo suficientemente pequeña respecto de la plástica, se solventaría esta cuestión, pero aun así sería todavía altamente complejo someter un material a una velocidad de deformación total constante de manera experimental, no así en EF. Esta es la razón por lo que se ha decidido proponer el ensayo de impacto de Taylor como ensayo dinámico. Este método tiene como consecuencia que las deformaciones y tensiones que se producen en los distintos puntos del cilindro varían con el tiempo.

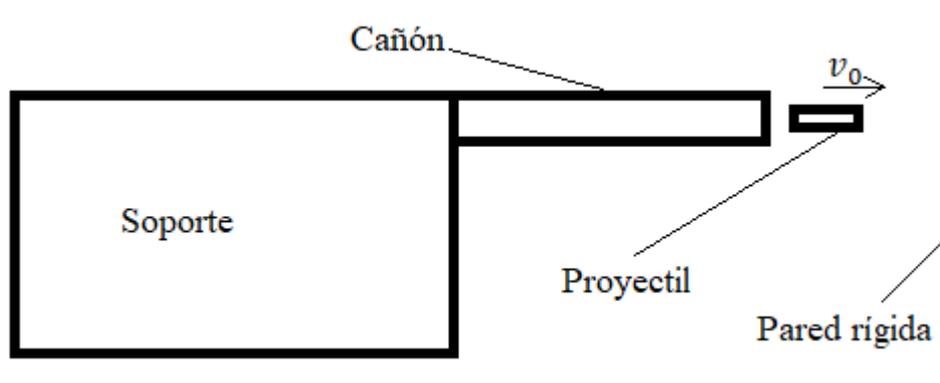


Figura 2-1. Esquema simplificado de un ensayo de impacto de Taylor

En la Figura 2-1 se muestra, de manera simplificada, la disposición de los elementos principales que tienen lugar en un ensayo de impacto de Taylor. Se tiene por un lado la presencia de un soporte, que ha de poseer la suficiente rigidez para evitar que el sistema que proyecta la bala se vea sometido a grandes desplazamientos, pudiendo verse alterada la trayectoria de la bala hasta el punto de obtenerse resultados claramente alejados de lo que se podría considerar como correcto a consecuencia de no haberse cuidado adecuadamente la preparación del ensayo. Por su parte, por el cañón sale disparada la bala, y además conviene que éste también se encuentre provisto de suficiente rigidez por los mismos motivos comentados para el caso del soporte. Luego se encuentra la pared, que ha de ser también lo más rígida posible (este aspecto no supone un problema cuando el ensayo se realiza de manera virtual, como es el caso aquí). En cuanto a la bala, asumiremos que ésta sale de la boquilla del cañón a una velocidad  $v_0$  y que la misma se mantiene en todo su camino desde la salida del cañón hasta su contacto con la pared. Además, se asumirá también que la trayectoria de la bala será horizontal en todo momento. Para que estas dos últimas simplificaciones no supongan un distanciamiento demasiado grande de lo que ocurriría en la realidad conviene no colocar la pared a una distancia demasiado lejana de la boquilla de salida del cañón, pero tampoco demasiado cerca para que la probeta, durante su fase de rebote tras el impacto, para evitar que el proyectil y el cañón choquen entre sí y de esta forma evitar alterar la geometría de la probeta y/o dañar la máquina que proyecta el cilindro de prueba.

Por su parte, en la Figura 2-2 se muestra con algo más de detalle, aunque también de forma muy esquemática, las acciones fundamentales que tienen lugar en un ensayo de este tipo, así como de los elementos que las llevan a cabo. A la izquierda de la imagen de esta figura se muestra una boquilla a través de la cual entra aire a presión, que queda almacenado en un depósito hasta que sea necesario su uso. Cuando sea tal el caso, dicho aire empujará a la probeta cilíndrica, de forma que para que dicho empuje sea efectivo conviene que el diámetro del cilindro se ajuste lo mejor posible al de la cavidad del cañón. Además, un ensayo de Taylor está pensado para trabajar con pequeñas probetas debido por un lado a motivos de peso (probetas grandes pesarían mucho y eso conllevaría un instrumentaje innecesariamente dimensionalizado además correrse el riesgo de que la trayectoria de no sea tan recta ya que la velocidad máxima que podría alcanzar una probeta de gran tamaño será menor) y por otro a motivos aerodinámicos (cuanto menor sea el tamaño del cilindro más pequeña será la resistencia al aire que éste ejerce). Por su parte, se hace imprescindible contar con una cámara de alta velocidad para captar la evolución en el tiempo de las variables geométricas de interés, que a ser posible debiera estar provista de, o bien reglas graduadas en la imagen que ésta aporte al monitor para así tener un mejor control de las variables de interés en el tiempo, que son básicamente los desplazamientos tanto radiales como longitudinales, o bien contar con instrumentos que guarden de manera automática estos datos simplificándose así este proceso.

Hacer mención también a la presencia de un sensor de velocidad, situado entre el cañón y la pared de impacto. El uso de este sensor, para el procedimiento que se va a describir en un instante, no será necesario.

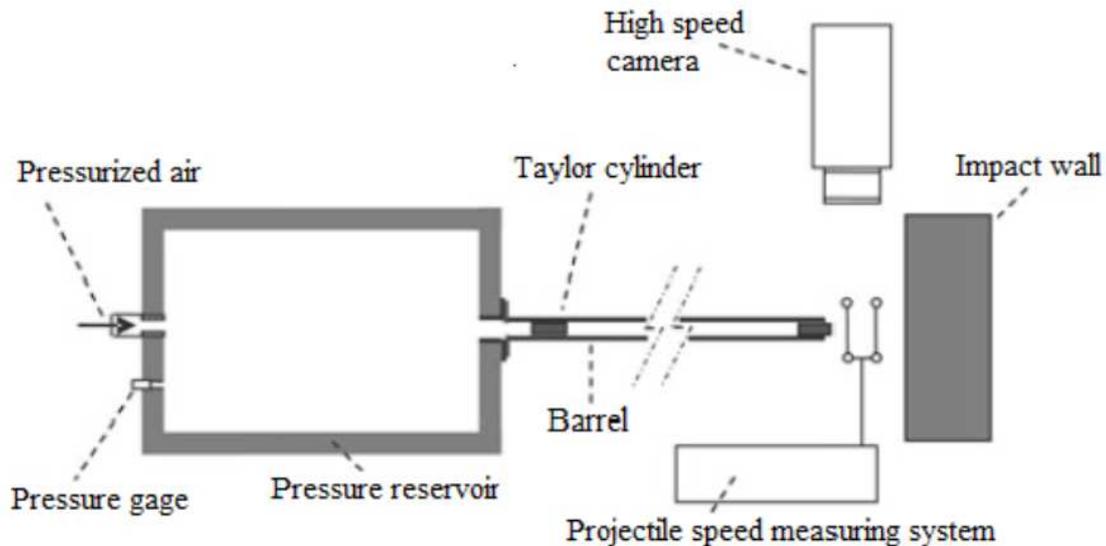


Figura 2-2. Elementos básicos de accionamiento y medición en un ensayo de Taylor [7]

## 2.3 Modelo teórico de Taylor

Abajo se muestran las seis simplificaciones iniciales que el modelo teórico de Taylor considera, aunque también hay que tener en cuenta el hecho de que, según vayamos avanzando en la aplicación práctica del procedimiento que en este apartado se va a describir, es posible que nos encontremos con situaciones en las que sea necesario incluir simplificaciones adicionales, las cuales se irían comentando sobre la marcha.

1. La deformación causada por las ondas elásticas (más información acerca de este fenómeno y de cómo afecta en nuestro caso en el próximo capítulo) es despreciable en comparación con la deformación plástica. Esto tiene como consecuencia que toda la deformación considerada será plástica mientras que el resto de la pieza se considera indeformada
2. Se asume que la zona que ha sufrido la plastificación no se ve sometida a rebote alguno, además de que la probeta está en constante contacto con la pared rígida
3. La deformación plástica que tiene lugar se considera incompresible
4. El frente plástico, cuyo movimiento se toma como puramente longitudinal, se considera una superficie plana
5. La velocidad de impacto es menor que la del frente plástico
6. No se producen fracturas

En la Figura 2-3 se muestran dos imágenes, una en la zona superior, en la que se esquematiza la forma inicial del proyectil de prueba, y otra en la inferior, en la que se hace lo propio para una probeta que ya ha sido deformada debido a la acción del impacto. A continuación, se explicará qué representan cada una de las variables de interés para nuestro caso.

- $l_0$ : longitud total del cilindro en el instante inicial, justo antes de impactar contra la pared rígida
- $D_0$ : diámetro del cilindro de prueba en  $t = 0$ . En dicho instante, ese diámetro es constante en todo el cilindro pero según avanza el impacto el diámetro de la cara en contacto con la pared va aumentando, así como el de toda la zona que se considera plastificada. Se asume, también, que el diámetro de la

cara opuesta a la del contacto es invariable con el avance del choque, por lo que en esta cara se será siempre  $D_0$

- $d$ : diámetro de la cara del cilindro que entra en contacto con la pared rígida, en un instante determinado. En la imagen de la Figura 2-3 se denomina como  $D$ .
- $l$ : longitud indeformada del cilindro. En el instante de tiempo inicial, justo antes del impacto,  $l = l_0$ . Esta longitud irá decreciendo según vaya avanzando el tiempo y por ende la fase del impacto en la que nos encontremos, a medida que la zona troncocónica, que se considera deformada, aumenta de tamaño
- $H$ : diferencia entre  $l_0$  y la longitud total que tiene la probeta cilíndrica en un instante determinado de tiempo. Esto sucede porque según avanza el impacto la longitud total del cilindro se ve cada vez más disminuida debido al desarrollo de la zona troncocónica. En la Figura 2-3 se representa como  $h$
- $s$ : longitud recorrida por el frente plástico. Como se ha indicado previamente, en este modelo se va a considerar una zona deformada, cuya deformación total se asume como plástica, y otra zona indeformada. En la frontera entre esas dos zonas es donde se encuentra el denominado frente plástico, cuyo movimiento es desde la cara de contacto hacia la cara contraria

Además, en la mencionada figura se pueden observar otras dos variables, que son, según la imagen de la mencionada figura,  $\theta$  y  $D_x$ . La primera hace referencia al ángulo que formaría la pared cónica de la zona deformada respecto del eje de la probeta y la segunda al diámetro en una sección transversal arbitraria en ella. No les prestaremos más atención puesto que no son de utilidad para lograr los objetivos que aquí se persiguen.

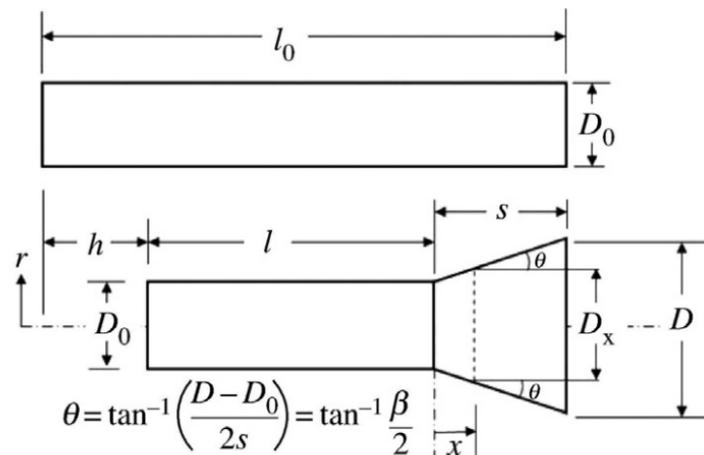


Figura 2-3. Variables que definen el modelo simplificado con el que se va a trabajar

En lo que sigue se explicarán los pasos que se plantean seguir, de manera ordenada, para lograr el objetivo final en un ensayo de Taylor para este caso concreto, que consiste en obtener el valor del parámetro  $C$  del modelo de JC de un material (véase información al respecto en el capítulo 4).

### 1. Obtención de la evolución de $d$ y $l_t$ en el tiempo

Se puede obtener de manera directa, mediante experimentación en laboratorio, los distintos valores del diámetro de la cara que contacta con la pared,  $d$ , y de la longitud total del cilindro en un instante determinado,  $l_t$ , definiéndose dicha longitud total como sigue.

$$l_t = l + s \quad (1)$$

Los valores de estas variables en distintos instantes de tiempo se pueden conseguir de manera manual a partir de una grabación de vídeo a cámara superlenta del choque y superponiendo sobre la imagen en movimiento dos reglas graduadas virtuales calibradas, una horizontal y otra vertical. De esta forma, podemos pausar el vídeo cada cierto intervalo de tiempo y así anotar los valores de estas variables en distintos instantes. No obstante, sería mucho más cómodo, a ser posible, poder contar con un sistema que realice este tipo de anotaciones de manera automática con el fin de ahorrar tiempo. Para el caso que aquí se nos presenta no ha sido necesario disponer de ninguno de estos tipos de instrumentaje debido a que estos ensayos se han ejecutado de manera virtual a través del uso de un software de EF.

Tras la obtención de los datos mencionados es conveniente conseguir sus correspondientes gráficas para tener una idea de la evolución de éstos con el tiempo. Además, se tratará de lograr una función analítica a partir de estos puntos discretos. Para ello, recurriremos a los conceptos y herramientas que se muestran en el capítulo 6, correspondiente al ajuste polinómico de una nube de puntos, que se hará de manera computacional en la forma en la que en dicho capítulo se indica. Este paso es necesario puesto que las expresiones que más adelante se muestran para el postprocesamiento de los datos consisten mayormente en derivadas e integrales de expresiones analíticas. Obviamente, esto supone una fuente de error. El error que se atribuye a la aproximación de una nube de puntos a una curva polinómica se puede reducir considerablemente si se eleva notablemente el grado del polinomio que caracteriza dicha curva, pero esto tiene como contrapartida el gran riesgo de que ocurra el fenómeno del “overfitting”. Por el contrario, si el polinomio es de orden muy bajo tenemos justamente la situación contraria, denominada “underfitting”. Para más detalles acerca de estos conceptos, véase, nuevamente, el capítulo 6 de este documento. Así pues, queda en manos del ingeniero estimar qué grado polinómico es el más óptimo y si los resultados que éste arroja son lo suficientemente representativos de la realidad o no. Por tanto, la experiencia a la hora de acometer este paso se antoja como un factor de gran importancia.

Las dos variables que en este momento se pretenden obtener, es decir  $d$  y  $l_t$ , constituyen las dos variables fundamentales que siempre hemos de considerar desde el inicio, antes de empezar el procedimiento que se está describiendo. A partir de las mismas se puede obtener los demás datos que necesitamos.

En este punto el único tratamiento al que se han visto sometido los datos conseguidos del ensayo es por tanto su manipulación, necesaria para poder pasar de una nube de puntos a una curva analítica, en forma de ajuste de tipo polinómico, con el consiguiente error que este proceso puede conllevar y que debe ser correctamente evaluado por el analista. Además, en nuestro caso, dado que lo que se han anotado son los desplazamientos correspondientes al ensanchamiento y acortamiento de la probeta, habría que pasar de esos desplazamientos a las variables  $d$  y  $l_t$ , mediante las siguientes expresiones:

$$d = D_0 + 2 * u_y \quad (2)$$

$$l_t = l_0 - u_{x1} + u_{x2} \quad (3)$$

Donde  $u_y$  es el desplazamiento, en dirección transversal, que sufre un punto situado en el radio exterior de la cara que contacta con la pared;  $u_{x1}$  el desplazamiento longitudinal al que se ve sometido la cara opuesta a la de contacto y  $u_{x2}$  el homólogo a  $u_{x1}$  en la cara de contacto.

## 2. Obtención de las variables geométricas

Este paso y el próximo servirán para hallar la evolución de distintas variables de interés intermedias respecto del tiempo. Cuando hablamos de variables “intermedias” nos estamos refiriendo a variables que no representan lo que en última instancia queremos conseguir pero cuyo cálculo es imprescindible como paso intermedio. En el presente punto, como su nombre indica, trataremos de obtener las variables geométricas que caracterizan el proceso en un ensayo de este tipo. Para ello, hemos de considerar, en primer lugar, la siguiente expresión:

$$l_0 = l + s + H \quad (4)$$

La expresión (4) es la que representa la longitud inicial de la bala en función de su longitud indeformada, su longitud deformada (zona troncocónica) y su acortamiento respecto de la longitud inicial. En  $t = 0$  tenemos  $l_0 = l$  pero según el tiempo, y con el la fase del impacto, va progresando,  $l$  disminuye en favor de  $s$  y  $H$ . Como se puede observar en esta última expresión, tenemos dos incógnitas, que son  $l$  y  $H$ , en una única ecuación, por lo que de momento nos es imposible de resolver. Para poder hallar la evolución de estas variables es por tanto necesario incluir nuevas ecuaciones y simplificaciones. La simplificación que aquí se va a tomar se corresponde con el fenómeno de la conservación del flujo másico, a partir del cual consideramos que el flujo de masa (cantidad de masa por unidad de tiempo) que atraviesa una sección transversal en la zona indeformada del proyectil ha de ser el mismo que el que atravesaría la sección correspondiente a la cara de contacto, en la zona deformada.

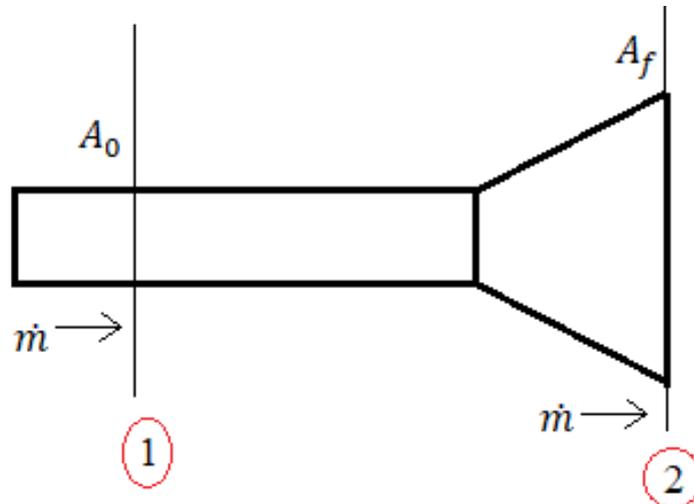


Figura 2-4. Área de las secciones inicial y final, y flujo másico

En la Figura 2-4 se representa la simplificación de la deformada de la bala, de la que ya se había hablado con anterioridad. En ella se pueden apreciar dos planos, 1 y 2 (estos números se sitúan dentro de unas circunferencias rojas). El primero de ellos corta transversalmente a la zona que se considera indeformada, creándose en esta intersección una sección de área  $A_0$ , mientras que el segundo hace lo propio para la cara que se encuentra en contacto con la pared (esta cara se encuentra dentro de lo que se consideraría la zona deformada, obviamente). En este último caso la intersección entre ese plano y la cara daría como intersección la propia cara, de área transversal  $A_f$ . Por su parte, el flujo másico que atravesaría cada intersección será  $\dot{m}$ , cuyo valor se considerará constante. Así pues, la ley de la conservación de la masa se aplicaría como sigue [8].

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \quad (5)$$

$$\rho A_f ds = \rho A_0 dx \quad (6)$$

Dividiendo la expresión (6) por  $\rho dt$ , donde  $\rho$  es la densidad y  $t$  el tiempo, se tiene:

$$A_f \dot{s} = A_0 \dot{x} \quad (7)$$

Si se deriva por su parte la expresión (4) respecto del tiempo se obtiene que:

$$0 = \dot{l} + \dot{s} + \dot{H} \quad (8)$$

De forma que si la velocidad de avance de la barra hacia la pared es  $\dot{x} = -\dot{l} = \dot{s} + \dot{H}$ , la expresión (7) queda como sigue:

$$A_f \dot{s} = A_0 (\dot{H} + \dot{s}) \quad (9)$$

$$\dot{s} = \frac{A_0 * \dot{H}}{A_f - A_0} \quad (10)$$

Por su parte,  $A_0$  y  $A_f$  se hallan como a continuación sigue:

$$A_0 = \frac{\pi D_0^2}{4} \quad (11)$$

$$A_f = \frac{\pi d^2}{4} \quad (12)$$

Por tanto, una vez se conoce  $A_0$  y  $A_f$  a partir de  $D_0$  y  $d$ , respectivamente, estamos en condiciones de obtener  $\dot{s}$  a partir de la ecuación (10), ya que  $\dot{H}$  se puede hallar de manera casi directa (recuérdese que  $H$  es la diferencia entre la longitud inicial y la que tiene en un instante determinado y  $\dot{H}$  su derivada). Lo siguiente será por tanto conseguir la integral de  $\dot{s}$  en el tiempo para poder hallar a partir de ella la variable  $s$  que, al ser utilizada en la expresión (4), nos servirá para obtener  $l$ . Además, con  $\dot{s}$  también se puede lograr  $\dot{l}$ , por lo que ya tendríamos todas las variables geométricas que por ahora necesitamos para poder continuar.

Como adelanto, diremos que en el punto que continúa a éste se empezará a tratar los aspectos relacionados con la respuesta del material, en términos de tensión, deformación y velocidad de deformación plástica a la que el mismo se ve sometido. La obtención de los valores de estas variables suponen ya un paso importante de cara a la consecución del objetivo final que se está persiguiendo.

### 3. Estimación de $\sigma'_y$ , $\overline{\varepsilon}_{pl}$ y $\overline{\dot{\varepsilon}}_{pl}$

Los datos geométricos que se obtienen en el punto anterior serán de vital importancia para el cálculo de la tensión a la que el material se ve sometido,  $\sigma'_y$ , así como de la velocidad de la deformación plástica equivalente,  $\overline{\dot{\varepsilon}}_{pl}$ , y de la propia deformación plástica equivalente,  $\overline{\varepsilon}_{pl}$ .

Para hallar la tensión, externa, aplicada al material se ha de utilizar la Segunda Ley de Newton. Según esta ley, la fuerza con la que hay que empujar un cuerpo para que éste adquiera una cierta aceleración es proporcional a la masa del mismo. Dado que aquí lo que se pretende es hallar una tensión y no una fuerza, se divide toda la expresión correspondiente a la Segunda ley de Newton por el área de la sección transversal de la probeta, considerándose ésta constante. De esta forma, se llega a la expresión (13), con la cual se obtendrá la tensión que se le aplica a la probeta con el tiempo durante el impacto.

$$\rho l \frac{d^2 H}{dt^2} = -\sigma'_y \quad (13)$$

Donde el producto de la densidad por la longitud indeformada,  $\rho l$ , representa la masa dividida por el área de la sección transversal, siendo  $\frac{d^2 H}{dt^2}$  la aceleración, calculada considerando la variación de la longitud total de la probeta respecto del tiempo (segunda derivada), de manera que  $\frac{d^2 H}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ . Por su parte,  $\sigma'_y$  es la tensión a la que se ha sometido el material de prueba en el tiempo durante el impacto. Es importante no confundir esta tensión con la de fluencia del material que predice el modelo de JC, comentado en el capítulo 4.  $\sigma'_y$  se corresponde con las acciones externas ejercidas sobre el cilindro y no con la tensión de fluencia que adquiere el material del que está hecho (la tensión de fluencia según JC se denomina  $\sigma_y$ ).

Por su parte, también conviene conocer tanto la velocidad de deformación plástica como la deformación plástica, ambas equivalentes, propiamente dicha. El procedimiento a seguir será hallar primero la velocidad de deformación plástica para posteriormente, mediante integración en el tiempo, lograr la deformación plástica. Estas variables se hallarán tomando como referencia el punto localizado en el eje del cilindro que es equidistante de la cara de contacto y del frente plástico ( $x = 0.5s$ , véase Figura 2-1).

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl} = \frac{2}{d + D_0} \frac{dd}{dt} \quad (14)$$

Es en las deformaciones plásticas y su velocidad cuando entran en escena la única variable geométrica no longitudinal que estamos manejando: el diámetro, representado por  $d$ . En la ecuación (14) se muestra la velocidad de deformación plástica equivalente. Como consecuencia, se obtendrá una expresión que generalmente tenga una complejidad lo suficientemente elevada como para no poder ser integrada directamente de manera simbólica en MATLAB, por lo que en estos casos se ha de recurrir a un nuevo ajuste de curva mediante la obtención de una cantidad de puntos suficientemente alta que la definan para así llegar a una nueva curva, la ajustada, que deberá parecerse lo máximo posible a la obtenida en (14). La finalidad de este ajuste es la de conseguir una curva que se encuentre definida simplemente por una expresión polinómica, la cual sí que es fácilmente integrable para MATLAB. Dicha integración es necesaria para lograr  $\bar{\varepsilon}_{pl}$ . Dado que en este caso lo que se está haciendo es una integración de una expresión, la que define  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}$ , el hecho de que su correspondiente nube de puntos se encuentre ajustada a un polinomio de gran orden no supondrá un problema de "overfitting", ya que éste solo tiene lugar cuando la expresión polinómica resultante se ve sometida a un proceso de derivación.

#### 4. Obtención del valor de C

Tenemos por tanto la tensión debida a las acciones externas y también  $\bar{\varepsilon}_{pl}$  y  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}$ . Lo que se hará por consiguiente será obtener la curva de  $\sigma'_y$  en el tiempo por un lado y las curvas correspondientes a las tensiones de fluencia para distintos valores de  $C$  introduciendo en la expresión de JC (véase capítulo 4) lo que se haya obtenido en cuanto a la deformación plástica y su velocidad se refiere, por otro. Se compararán todas las curvas de la tensión de fluencia en JC con la de la tensión aplicada y se determinará, para los distintos valores de  $C$  que se han probado, cuál es la que mejor se ajusta a la de la acción externa. En principio, la forma de las curvas de JC y la de la tensión originada por el choque debería guardar cierta similitud al menos en algún tramo concreto (cuando la tensión aplicada supere el límite de fluencia). En caso de no ser así el ingeniero debe evaluar por qué esto no ocurre y tomar una decisión al respecto.

## 3 PROPAGACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS

*“Se dice que hay varias maneras de mentir; pero la más repugnante de todas es decir la verdad, toda la verdad, ocultando el alma de los hechos”*

*- Juan Carlos Onetti -*

### 3.1 Introducción

La propagación de ondas es un fenómeno físico que consiste en la transmisión de una perturbación de alguna propiedad del espacio, como pueden ser por ejemplo la densidad, la presión, el campo eléctrico, magnético, etc. Las ondas implican un transporte únicamente de energía, y no de materia [9]. Su conocimiento adquiere aquí una relevancia considerable al incluirse en este trabajo el ensayo de Taylor. En el mismo, como consecuencia de la rapidez con la que los esfuerzos que actúan sobre la probeta varían, se conseguirá que la transmisión de dichas perturbaciones (ondas) pueda adquirir una mayor importancia.

En el presente capítulo se mostrarán y explicarán, brevemente y en primer lugar, los tipos de ondas principales, centrándonos especialmente en el ámbito de las ondas mecánicas, que es el que verdaderamente tiene sentido comentar aquí. Por otro lado, dado que lo que se va a tratar aquí es la realización de un procedimiento experimental de forma virtual mediante un software de Elementos Finitos, será también fundamental exponer el concepto del número de Courant, que se encuentra estrechamente relacionado con el tamaño de la malla con la que se está trabajando y la discretización temporal. Este último concepto se tratará al final de este capítulo.



Figura 3-1. Masa de agua perturbada por la presencia de una onda

En la Figura 3-1 se muestra cómo una onda afecta al estado de un volumen de agua, que inicialmente estaba en reposo. La que se muestra en dicha figura se encuentra dentro de la categoría de las ondas mecánicas, las cuales se caracterizan por el hecho de que solo pueden transmitirse a través de un medio material, razón por la que en el espacio exterior no podemos oír ningún ruido, por ejemplo. Por otra parte se encuentran las ondas de tipo electromagnético, que sí pueden propagarse en el vacío, pero de las cuales no hablaremos debido a su nula importancia en el caso que aquí se presenta.

### 3.2 Ondas mecánicas. Características principales

Como se acaba de indicar, las ondas mecánicas son aquellas que necesitan de un medio material para su propagación. En el mundo real, cuando un sistema mecánico se ve sometido a cualquier cambio en las acciones físicas presentes en él en el tiempo se produce una perturbación que se transmite en forma de onda. Sin embargo, en aras de simplificar muchos de los análisis que se realizan en la ingeniería se toma una aproximación que consiste básicamente en considerar aquellos casos en los que la aplicación de la carga, o su modificación, es lo suficientemente lenta que ésta se produce de manera estática. Bajo esta suposición no se generarían dichas ondas, lo cual no es estrictamente cierto pero sí de gran utilidad en la práctica. Éste, sin embargo, no será el caso que tratemos en este capítulo, dado que el cual se encuentra especialmente enfocado a lo que ocurre en el ensayo de impacto de Taylor en el que, como su nombre indica, se produce un impacto (aplicación de las acciones externas de manera brusca).

Por su parte, en la Figura 3-2 se muestran dos imágenes de las oscilaciones a las que un sistema mecánico genérico puede verse sometido, siendo una de ellas, la correspondiente a la imagen de la izquierda, la que se aproximaría más a un caso estático al no haber prácticamente oscilaciones (se habla aquí de la amplitud de las mismas). En la imagen de la derecha de la mencionada figura ocurre justamente lo contrario, es decir, que como la aplicación de la carga se ha producido de una manera lo suficientemente rápida, las amplitudes de las oscilaciones son apreciables.

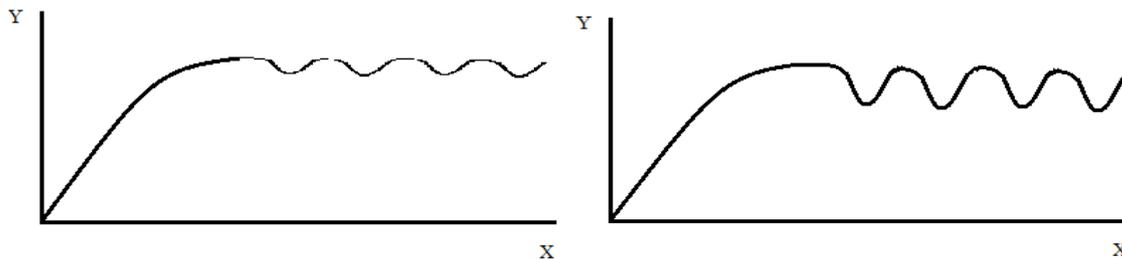


Figura 3-2. Respuesta de un sistema mecánico bajo condiciones próximas a la estática, izquierda, y bajo condiciones claramente dinámicas, derecha

Se puede ver que la respuesta, representada en el eje Y, es muy cambiante respecto de la variable independiente, X, que por norma general es el tiempo, para el caso dinámico, de manera que ocurre lo opuesto para el caso que más se aproxima al estático. La idealización que se toma cuando se aplica la aproximación estática tiene como consecuencia que las gráficas representadas en la Figura 3-2 adquieran una forma de escalón, sin oscilación alguna.

Una vez sabido lo que acabamos de comentar, conviene exponer los parámetros que definen una onda cualquiera, los cuales son su frecuencia, su periodo, su amplitud, su longitud de onda y su velocidad, así como la relación existente entre dichos parámetros [10].

- $\Lambda$ : longitud de onda. Es la distancia entre los dos puntos de la onda más cercanos que tengan la misma fase. En la Figura 3-3 se muestra como  $\lambda$ .
- $V$ : velocidad de propagación de la onda.
- Amplitud: es la distancia, en valor absoluto, entre un pico de la onda (puede ser positivo o negativo) y el valor medio de la misma.
- $f$ : valor de la frecuencia de la onda.
- $T$ : periodo. Es la inversa de  $f$ .

En la Figura 3-3 se muestran estos parámetros de forma más gráfica, mientras que en las ecuaciones (15) y (16) se establece la relación entre éstos.

$$f = \frac{V}{\Lambda} \quad (15)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (16)$$

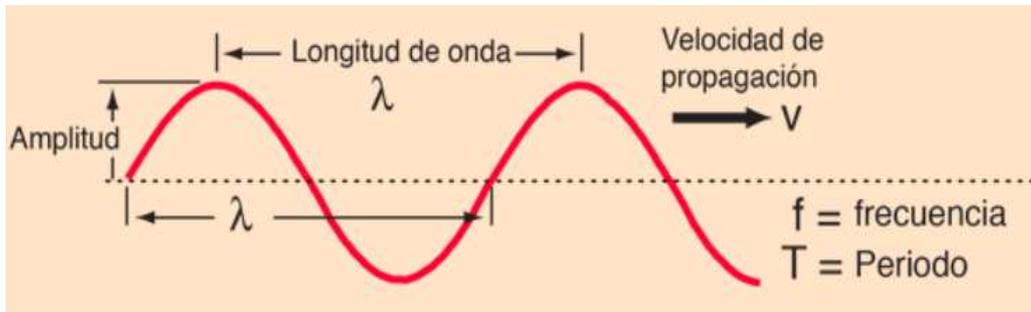


Figura 3-3. Parámetros característicos de una onda

Las ondas mecánicas pueden transmitirse, principalmente, de dos formas diferentes en el medio material en el que se propagan si nos centramos en su movimiento. Estas dos formas de transmisión son la longitudinal y la transversal [11]. La primera tiene lugar en aquellos casos en los que la dirección del movimiento de la onda coincide con el de la partícula del material, mientras que en el segundo caso los movimientos de onda y partícula son perpendiculares entre sí. Nótese que aunque se acaba de hacer referencia a un movimiento de la partícula y por tanto del material. Este hecho no entra en absoluto en conflicto con lo que se había indicado previamente, al inicio de este capítulo, cuando se comentó que una onda consistía en un transporte de energía únicamente y no de materia. Hay que tener en cuenta que estas partículas adquirirían movimientos cíclicos, de manera que éstos son de “ida y vuelta”, y además, se repetirían (periodicidad). Esto implica que no existiría transporte neto de materia (sí movimiento vibratorio), no entrando por tanto este hecho en conflicto con la definición dada al comienzo de este capítulo.

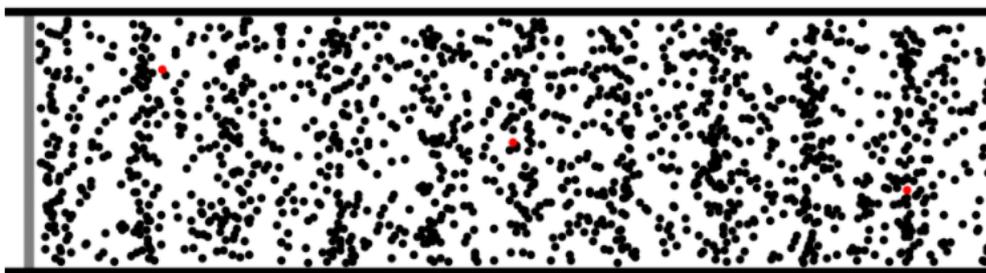


Figura 3-4. Ondas longitudinales

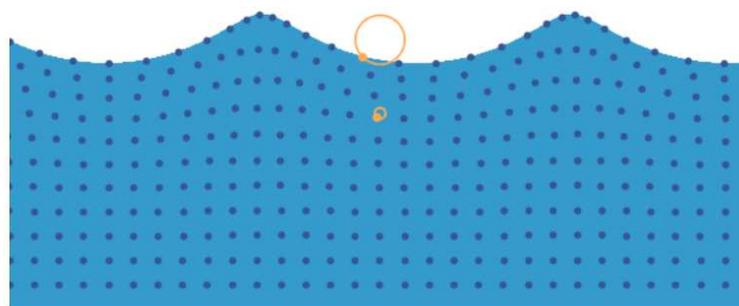


Figura 3-5. Ejemplo de una onda por oleaje

En la Figura 3-4 se puede apreciar una serie de franjas en las que las partículas se encuentran más próximas unas de otras y otras en las que sucede exactamente lo contrario. Cuando ocurre lo primero se dice que estamos en una zona de compresión mientras que si hablamos de lo segundo estaríamos refiriéndonos a una

descompresión. Esto nos indica que la onda se propaga en la dirección en la que se producen esas compresiones/descompresiones, es decir, en dirección horizontal para el caso particular de la figura que en este momento se está comentando. Este comportamiento de la onda se traduce en un movimiento de las partículas “de ida y vuelta” de manera periódica en la dirección de dicha onda. Dado que la dirección del movimiento de las partículas, como se había comentado previamente, es la misma que la de la propagación de las ondas, estamos por tanto ante un caso de una onda longitudinal. De la misma forma, como se dijo anteriormente, si estas direcciones fuesen completamente perpendiculares estaríamos ante un caso de onda transversal pura.

Por su parte, en la Figura 3-5 se puede observar un ejemplo algo más real, y también más complejo, ya que se trata de la propagación de ondas en forma de oleaje. De todas las partículas que hay, dibujadas la mayoría en azul oscuro, se han seleccionado dos, las de color amarillo, para estudiar su movimiento. Estas partículas seleccionadas se sitúan en la superficie y a cierta profundidad y el movimiento de las mismas queda reflejado en las circunferencias asociadas a ellas, de manera que al igual que sucedía en el ejemplo mostrado en la Figura 3-4 las partículas del material o del medio realizarían movimientos periódicos, no existiendo por tanto transporte neto de materia. Dado que lo que define la trayectoria de la partícula aquí no es una recta en dirección longitudinal ni transversal al movimiento de la onda lo que se tiene aquí es, por tanto, una onda mixta, que posee ambas componentes, una longitudinal y una transversal, en todo momento excepto en los puntos de la circunferencia en los que su tangente sea completamente horizontal o vertical.

Además, las ondas se pueden clasificar según la zona del medio en la que se pueda propagar. De esta forma, tenemos las denominadas ondas de volumen, las cuales tienen la capacidad de propagarse por el interior del material de la misma forma que por el exterior. Dentro de este grupo nos encontramos con lo que comúnmente se denominan ondas P y ondas S. Las primeras son ondas de volumen longitudinales, es decir, ondas consistentes en la propagación de compresiones a lo largo de un medio material, mientras que las segundas son de tipo transversal, que ocasiona propagación de esfuerzos de cizalla. Por otro lado se tienen las ondas de superficie, cuya presencia es más notoria en las capas más próximas a la superficie.

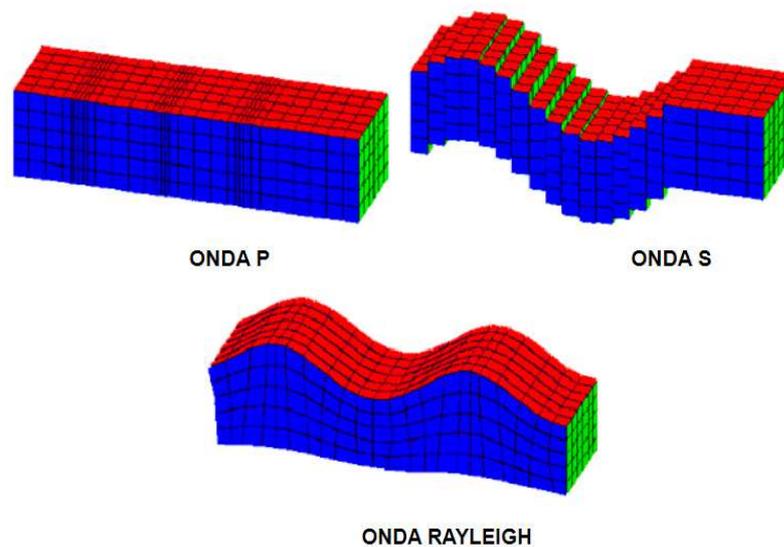


Figura 3-6. Ondas de volumen (ondas P y S) y de superficie (Rayleigh) [12]

En la Figura 3-6 se ve, en la parte de arriba, los ejemplos anteriormente comentados de ondas de volumen, mientras que en la imagen de abajo se aprecia un tipo de onda superficial, la onda Rayleigh. Para comparar la principal diferencia que existe entre una onda de volumen y otra de superficie hemos de prestar especial atención a las representaciones tanto de la onda S como de la onda de Rayleigh. Si comparamos estos dos casos se puede apreciar de manera bastante clara cómo para el primero de ellos, el correspondiente a la onda de volumen, la onda S, cada una de las pequeñas partes en las que se divide una capa de material se ve exactamente igual de afectada por la perturbación (la parte de la derecha en este caso no está sometida a movimiento alguno debido a que dicha perturbación no ha alcanzado todavía esa zona), mientras que para el caso de la onda de superficie, la onda de Rayleigh, se puede observar cómo los puntos que se sitúan en la

superficie se encuentran claramente más afectados por la perturbación que aquellos que están en el fondo. Por tanto, según nos vamos alejando de la superficie del material y adentrando en la profundidad del mismo dichas ondas se van progresivamente atenuando, lo cual no ocurriría con la onda S. Otro ejemplo de ondas superficiales bien podría ser la ya mencionada y explicada Figura 3-5, ya que si se observa con detenimiento las dos partículas utilizadas como ejemplo, en amarillo, se puede observar que la circunferencia que define la trayectoria de la partícula situada en la superficie es de un tamaño considerablemente mayor que la de la otra, que se encuentra a una cierta profundidad.

### 3.3 Propagación de ondas en un cilindro elástico por impacto

Si bien en el apartado anterior se estuvo haciendo mención a los aspectos y conceptos fundamentales y más genéricos sobre la propagación de ondas mecánicas, en éste se expondrá la influencia que dichas ondas tiene sobre la tensión, centrándonos especialmente en la componente axial, a la que se ve sometido el cilindro de prueba, que impactará sobre una pared rígida. Para ello, nos basaremos en las conclusiones obtenidas en los estudios realizados por J. Cerv [13].

Básicamente, lo que el autor que acabamos de mencionar propone es monitorear el perfil de las tensiones axiales del cilindro a lo largo de su longitud para distintos instantes de tiempo, y de esta forma no solamente obtener la fluctuación de dichas tensiones sino poder incluso tener una cierta idea de a qué zonas dichas fluctuaciones afectan más y por tanto podrían hipotéticamente perturbar de manera más considerable los resultados que se hagan en un ensayo de Taylor, a la hora de obtener por ejemplo las deformaciones plásticas. Para ello, lo que se plantea es adimensionalizar tanto la variable dependiente (eje Y), la tensión axial, como la independiente (eje X), correspondiente a la longitud del cilindro. La adimensionalización de la longitud del cilindro se hace dividiendo ésta por el radio exterior del cilindro,  $a$ . Por su parte, para la adimensionalización de la tensión longitudinal (axial) se procede de la siguiente manera:

$$\sigma_z^* = \frac{\sigma_z}{\lambda \frac{v_0}{c_1}} \quad (17)$$

Donde  $\sigma_z^*$  es la tensión axial adimensionalizada,  $\sigma_z$  la misma pero sin adimensionalizar,  $v_0$  la velocidad de impacto del cilindro,  $c_1$  la velocidad de las ondas de compresión y  $\lambda$  el coeficiente de Lamé [14]. En (18) y (19) se muestran las expresiones de  $c_1$  y  $c_2$ , siendo esta última la velocidad de las ondas de cizalla.

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (18)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (19)$$

Siendo  $G$  el módulo de elasticidad a cortante. A continuación, se muestran las expresiones analíticas a las que J. Cerv llegó en sus estudios para determinar las tensiones axiales y radiales a las que un punto determinado del cilindro se ve sometido. Conviene aclarar que estas tensiones se han obtenido considerándose que el material del cilindro se mantiene en todo momento en el rango elástico inicial, de manera que la fluencia no es un fenómeno que este modelo tenga en cuenta. Aclarar también de antemano que  $L^{-1}$  hace referencia a la transformada inversa de Laplace.

$$\sigma_z = L^{-1} \left[ \frac{2\lambda v_0}{\pi c_1^2} \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{2 \left[ \left( \frac{p}{c_1} \right)^2 \frac{\mu}{(1-2\mu)} - \gamma^2 \right] \left[ 2\gamma^2 + \left( \frac{p}{c_2} \right)^2 \right] J_0(hr) J_1(ka)}{F(\gamma, p)} - \frac{4\gamma^2 h k J_1(ha) J_0(kr)}{F(\gamma, p)} + \frac{1-\mu}{\mu} \frac{1}{h^2} \right\} \cos(\gamma z) d\gamma \right] \quad (20)$$

$$\sigma_r = L^{-1} \left[ \frac{2\lambda v_0}{\pi c_1^2} \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{1}{h^2} + \frac{\left[ 2\gamma^2 + \left( \frac{p}{c_2} \right)^2 \right] J_0(hr) J_1(ka) + 4\gamma^2 h k J_1(ha) J_0(kr)}{F(\gamma, p)} + \frac{2h}{r} \left\{ \left[ 2\gamma^2 + \left( \frac{p}{c_2} \right)^2 \right] J_1(hr) J_1(ka) - 2\gamma^2 J_1(ha) J_1(kr) \right\} \right\} \cos(\gamma z) d\gamma \right] \quad (21)$$

Donde:

- $p$ : variable compleja que sustituye al tiempo,  $t$ , a la hora de realizar la transformada de Laplace
- $\mu$ : coeficiente de Poisson
- $\gamma$ : véase en (22)
- $J_0$  y  $J_1$ : funciones de Bessel de primer tipo [15]
- $k$  y  $h$ : parámetros dependientes de  $p$ . Mirar en (23) y (24)
- $r$ : variable radial del cilindro
- $z$ : variable longitudinal del cilindro
- $F(\gamma, p)$ : función dependiente de  $\gamma, p$ . Mirar en (25)

$$\gamma = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (22)$$

$$h^2 = - \left[ \gamma^2 + \left( \frac{p}{c_1} \right)^2 \right] \quad (23)$$

$$k^2 = - \left[ \gamma^2 + \left( \frac{p}{c_2} \right)^2 \right] \quad (24)$$

$$F(\gamma, p) = -h^2 L(\gamma, p) \quad (25)$$

$$L(\gamma, p) = \left[ 2\gamma^2 + \left( \frac{p}{c_2} \right)^2 \right]^2 J_0(ha) J_1(ka) + 4\gamma^2 h k J_1(ha) J_0(ka) + \left( \frac{2h}{a} \right) \left( \frac{p}{c_2} \right)^2 J_1(ha) J_1(ka) \quad (26)$$

Lo que se acaba de mostrar en (20) y (21) son las expresiones analíticas finales a las que J. Cerv llegó para predecir la tensión en un punto concreto del cilindro en un instante determinado de tiempo (la variable  $t$  no aparece en las expresiones ya que para que eso ocurra se ha de resolver la transformada inversa de Laplace que aparece indicada en dichas expresiones). Por su parte, las ecuaciones (22)-(26) muestran una serie de relaciones entre los parámetros de interés de (20) y (21). Si se desea consultar una información más amplia y detallada de lo anteriormente expuesto véase [13].

A continuación se describirá el modelo que se ha utilizado para el ensayo virtual con el fin de poder comparar los resultados que arrojan las simulaciones con los del estudio realizado por el mencionado autor y se obtendrá una idea sobre los aspectos a considerar en una simulación de este tipo.

Así pues, los datos que caracterizarán a nuestro modelo de prueba serán, en cuanto a las propiedades del

material se refiere, un módulo de elasticidad de 200 GPa, un coeficiente de Poisson de 0.285 y de densidad  $7850 \text{ kg/m}^3$ , para un modelo de comportamiento elástico lineal. El cilindro, por su parte, posee una velocidad inicial de 175 m/s y se encuentra tocando la pared rígida con la que impacta desde  $t = 0$ . En cuanto al modelo geométrico y malla se refiere, se ha considerado un proyectil cilíndrico de 2 cm de largo y 0.5 cm de diámetro que se ha reducido a un rectángulo con un largo de 2 cm y un alto de 0.25 cm. Esto se ha hecho así porque se ha decidido no modelar el cilindro en 3D sino hacerlo en un espacio 2D y considerando simetría respecto del eje, en aras de reducir coste computacional. Por otro lado, el tipo de elemento usado es el denominado "Plane183", al cual se le ha ajustado sus 'keyoptions' de manera conveniente para considerar la ya comentada simetría respecto del eje [16].

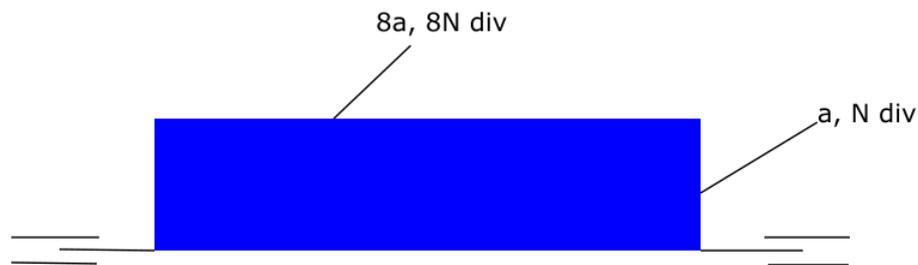


Figura 3-7. Representación geométrica del modelo simplificado

Si se tienen en cuenta los datos geométricos aportados en el párrafo anterior, en donde se indicaba que para el modelo reducido, que es con el que finalmente vamos a trabajar, teníamos unas dimensiones de 2 cm para el largo y de 0.25 para el radio externo, por lo que el primero es 8 veces mayor que el segundo, es conveniente imponer un número de divisiones para la malla proporcional, es decir, el número de divisiones de malla impuesto a lo largo de la longitud del cilindro será igual a 8 veces el número de divisiones en el radio. De esta forma obtendremos una malla de elementos cuadrados iguales todos entre sí. Esto es especialmente útil ya que cuando se incorpora aquí el concepto de número de Courant, que se verá en el apartado 3.3, de este capítulo, el hecho de tener elementos cuadrados nos ayuda en tanto que solamente tendremos que considerar una única velocidad de propagación de onda, que en este caso será  $c_1$  por ser la mayor, en vez de preocuparnos por  $c_1$  y  $c_2$  a la vez. En la Figura 3-7 se muestra, de manera esquemática, la configuración del modelo geométrico, indicándose el eje de simetría mediante la línea horizontal situada en la parte inferior y acompañada por parejas de líneas mucho más cortas en sus extremos.

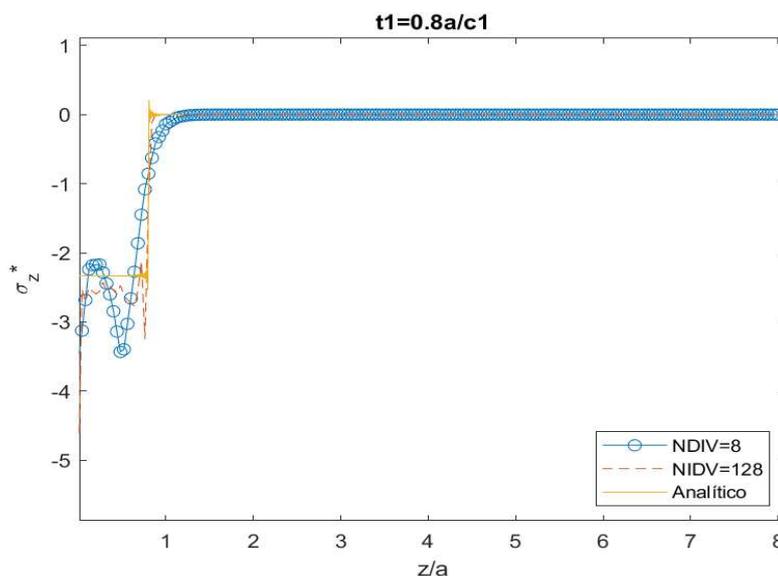


Figura 3-8. Perfil completo de tensiones axiales adimensionalizadas para  $t = 0.8a/c_1$

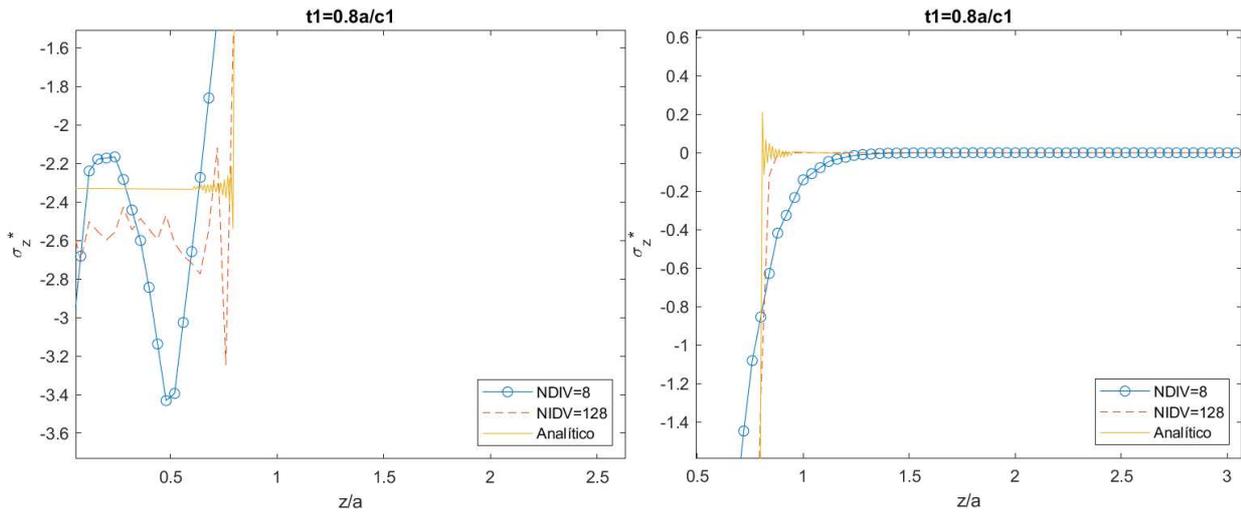


Figura 3-9. Perfil de tensiones para  $t = 0.8a/c_1$  aumentado para el “escalón” inferior, izquierda, y el superior, derecha

En las figuras 3-8 y 3-9 se muestra el perfil de tensiones axiales adimensionalizadas respecto de la longitud, también adimensionalizada, del cilindro, para el instante de tiempo correspondiente a  $t = 0.8a/c_1$ . En la primera de ellas se aprecia el perfil completo mientras que en la segunda de las figuras se muestran ampliadas las zonas en las que la gráfica adquiere cambios de forma bruscos. En estas gráficas, y en las posteriores que corresponden a este apartado, se establecerán comparaciones entre un modelo con una malla basta, de 8 divisiones radiales (64 divisiones longitudinales), una considerablemente más fina, de 128 divisiones radiales (1024 divisiones longitudinales), y la solución analítica obtenida por J. Cerv. De esta comparación se puede apreciar claramente cómo de importante es un correcto refinamiento de malla, que se puede considerar incluso extremo si comparamos este tipo de análisis con uno tradicional, normalmente de tipo estático. Con la malla más basta la curva obtenida no se parece en nada a la analítica cuando ésta se ve sometida a cambios bruscos en su forma, mientras que con la malla más fina, 16 veces más fina que la anterior, tampoco se consigue una aproximación del todo correcta y que de hecho todavía sigue divergiendo de manera considerable de la solución analítica. No obstante, sí que se puede observar que con el mallado más fino la forma de la curva empieza a aproximarse de forma algo más fiel a la solución analítica. No se han probado con mallas más finas por motivos computacionales. Decir además, simplemente como apunte, que ha sido posible plasmar la curva analítica en una gráfica de MATLAB gracias a su digitalización mediante la utilización de un código previamente aportado, denominado ‘digitize\_plot.m’.

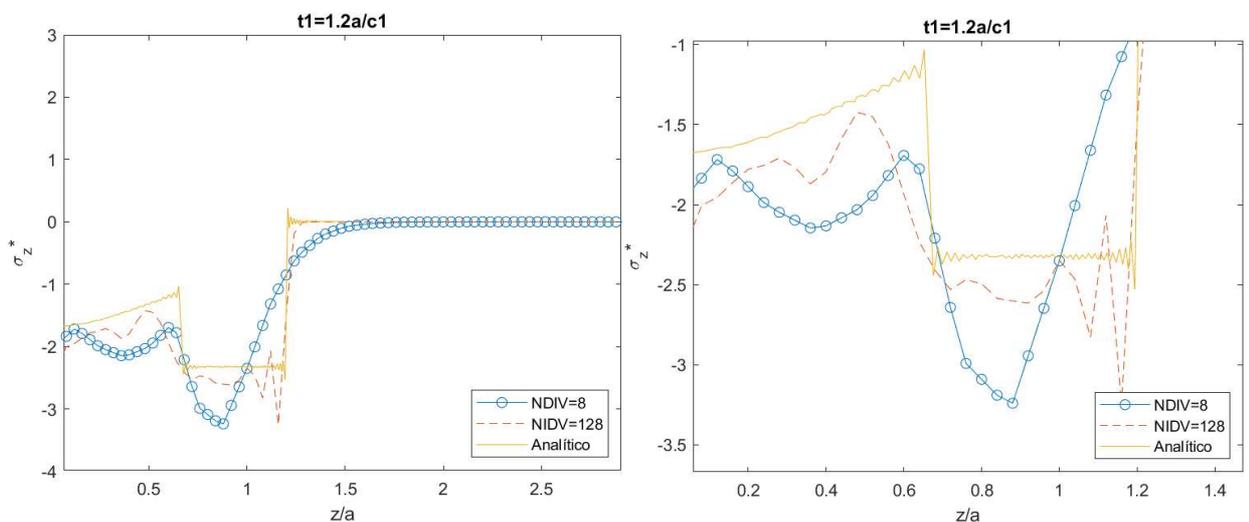


Figura 3-10. Perfil de tensiones para  $t = 1.2a/c_1$

En la Figura 3-10 se hace lo mismo pero para un instante de tiempo  $t = 1.2a/c_1$ , siendo la imagen de la izquierda la más completa y la de la derecha una ampliación de la anterior para una más detallada observación. Las conclusiones obtenidas para  $t = 0.8a/c_1$  en cuanto a la malla y a los resultados que ésta arroja son igualmente válidas para éste y el resto de los casos que aquí se van a presentar, en el presente apartado.

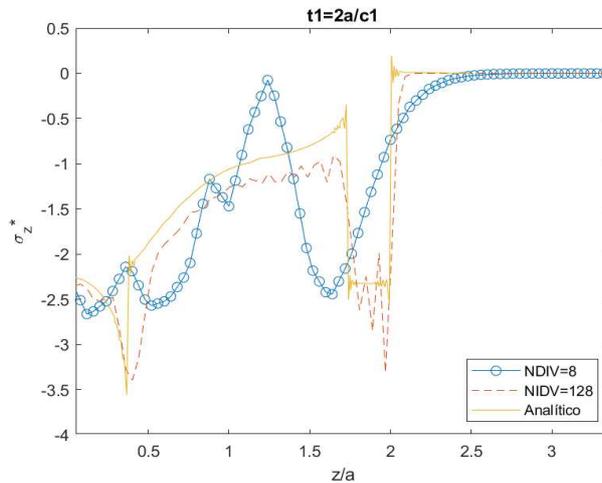


Figura 3-11. Perfil de tensiones para  $t = 2a/c_1$

Como curiosidad, simplemente indicar que según vamos avanzando en el tiempo las formas que aparecían en instantes de tiempo anteriores se repiten pero en valores de longitud ( $z/a$ ) mayores mientras que en los valores de longitud inferiores aparecen nuevos patrones correspondientes a las nuevas ondas que se van creando en el extremo que impacta con la pared. Estos últimos adquieren una magnitud mayor, de manera que no es fácil determinar con este estudio en qué momento y punto la deformación plástica puede verse más influenciada por estas tensiones elásticas axiales, ya que con el tiempo, sobretodo en las fases iniciales del impacto, también crecen las tensiones axiales totales y no solamente las elásticas.

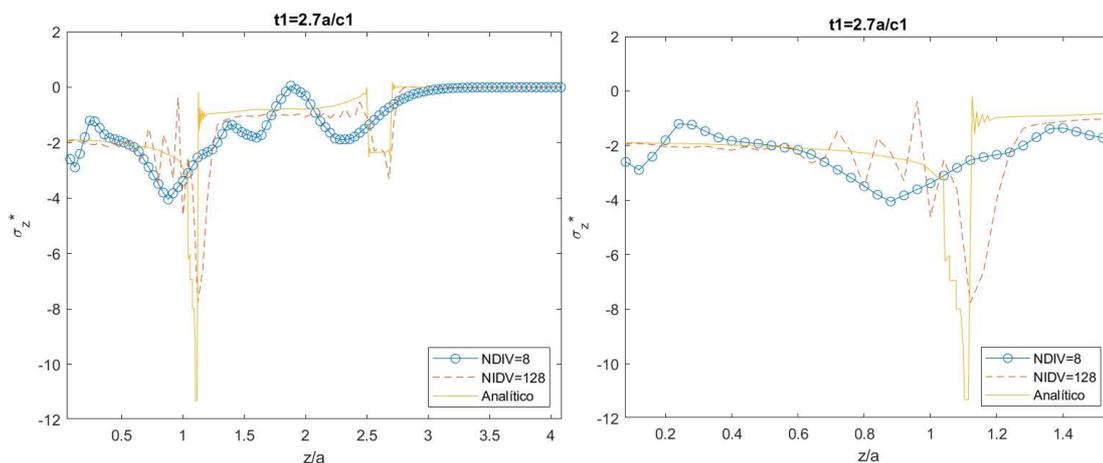


Figura 3-12. Perfil de tensiones para  $t = 2.7a/c_1$

Nuevamente, en la Figura 3-12 se procede de manera análoga a como se había hecho para los anteriores instantes de tiempo. Se ha podido observar por tanto la influencia que la fluctuación de ondas tiene sobre las tensiones axiales. Si bien es cierto que aquí se ha puesto un especial énfasis en las tensiones axiales que se suceden con el tiempo y para puntos correspondientes a  $r = 0$ , esto es suficiente para obtener conclusiones acerca del tamaño de malla y del tipo de recursos del que sería necesario disponer para recrear correctamente el paso de las ondas a lo largo de un sólido, los cuales se escapan a lo que un ordenador normal puede aspirar.

### 3.4 Número de Courant

Cuando se trata un análisis común de tipo estático, la discretización que se aplica tiene únicamente una componente física (dominio físico objeto de análisis) y otra matemática (funciones de forma). Sin embargo, cuando de análisis por EF dinámicos se trata, es importante tener en cuenta, además, otra variable a discretizar. Esta variable es el tiempo y su discretización ha de encontrarse estrechamente relacionada con la discretización física de la malla para capturar de forma correcta la transmisión de la onda a lo largo del elemento. Esta relación se encuentra determinada por el número de Courant [17], cuya expresión se muestra en (27).

$$C_o = \frac{\Delta t}{\Delta x/V} \quad (27)$$

Donde  $C_o$  es el número de Courant,  $\Delta t$  la discretización temporal tomada,  $\Delta x$  el espacio que tiene que recorrer una onda a lo largo de un elemento (véase Figura 3-13) y  $V$  la velocidad de dicha onda. De esta forma, lo que se está relacionando es la discretización temporal tomada, en el numerador de (27), con el tiempo que a la onda le lleva recorrer el elemento entero, en el denominador de la misma expresión. Así pues, es necesario que este número de Courant sea igual o menor a 1 para métodos de integración temporal explícitos [18], para que la solución sea estable. De esta forma,  $\Delta t$  será lo suficientemente pequeño como para que la onda pueda ser detectada de forma progresiva en todos los elementos. Por último, simplemente indicar que la consideración de este número de Courant es solamente necesaria cuando estos ensayos se hacen de manera virtual, como es el caso que aquí se nos presenta.

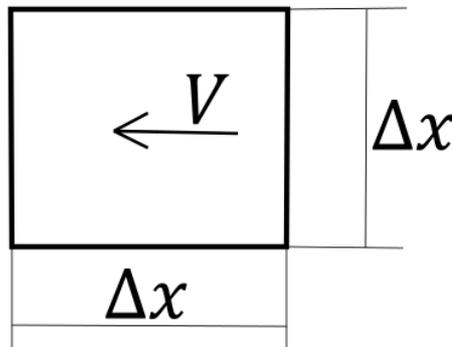


Figura 3-13. Representación de un elemento cualquiera de la malla a aplicar y velocidad del paso de onda,  $V$

# 4 MODELO PLÁSTICO DE JOHNSON-COOK

*“La verdadera sabiduría está en reconocer la propia ignorancia”*

*- Sócrates -*

## 4.1 Introducción

Cuando se trata de caracterizar el comportamiento de un material es necesario recurrir a un modelo matemático que represente adecuadamente los fenómenos físicos que en dicho material tenga lugar. Este modelo matemático contendrá los parámetros que determinarán el mencionado comportamiento. Para el caso que aquí nos ocupa, se hará uso del modelo de plastificación de Johnson-Cook (JC), ya que se considera que aporta resultados lo suficientemente óptimos tanto para los ensayos estáticos como para el dinámico y es aplicable, además, cuando la temperatura entra en juego en el ablandamiento del material. Este modelo ha de utilizarse en combinación con uno elástico, ya que el de JC es un modelo plástico únicamente.

## 4.2 Expresiones del modelo de JC. Parámetros

El modelo de JC es ampliamente utilizado en la industria si lo que se desea es modelar el comportamiento de materiales dúctiles, no siendo adecuado por tanto cuando dicho material es altamente frágil. La expresión (28) representa la forma más genérica del modelo de JC, la cual es por tanto la más completa. Sin embargo, de esta forma genérica pueden derivar expresiones más reducidas según el tipo de ensayo que se esté tratando [19].

$$\sigma_Y = \left[ A + B(\bar{\varepsilon}_{pl})^n \right] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] (1 - \hat{\theta}^m) \quad (28)$$

En la expresión (28),  $\sigma_Y$  es la tensión de fluencia del material, la cual va variando según la deformación plástica equivalente acumulada en el material,  $\bar{\varepsilon}_{pl}$ , así como su velocidad (velocidad de deformación plástica equivalente),  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}$ , además de la temperatura del mismo. Por su parte;  $A, B, n, m, C$  son los parámetros característicos de JC. Por otro lado,  $\dot{\varepsilon}_0$  una velocidad de deformación de referencia, que por convenio se tomará como  $0.001s^{-1}$  [20], lo cual implica que dicha deformación de referencia se corresponderá con un ensayo cuasiestático si éste se realizase de forma física. Por último, cabe especificar que  $\hat{\theta}$  es una variable que se corresponde con la temperatura a la que se encuentra el material.  $\hat{\theta}$  se define como una función ‘a trozos’ que puede adquirir cualquier valor comprendido entre 0 y 1, ambos inclusive, como se muestra en la función (29).

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta < \theta_r \\ \frac{\theta - \theta_r}{\theta_m - \theta_r} & \text{si } \theta \in [\theta_r; \theta_m] \\ 1 & \text{si } \theta > \theta_m \end{cases} \quad (29)$$

$\hat{\theta}$  adquirirá un valor igual a 0 si la temperatura del material,  $\theta$ , es menor que la temperatura de transición  $\theta_r$ , siendo dicha temperatura de transición la temperatura a partir de la cual se va produciendo el ablandamiento del material. Si la temperatura a la que se encuentra el material se sitúa entre la de transición y la de fusión,  $\theta_m$ , el valor que tendrá  $\hat{\theta}$  será el que aparece en la segunda expresión de (29). Por último, si  $\theta > \theta_m$  la función  $\hat{\theta}$  tendrá valor 1.

Como anteriormente se ha indicado, la ecuación (28) es la expresión más general del modelo tratado aquí y por tanto la más completa y la que más fenómenos físicos tiene en cuenta. Sin embargo, podemos realizar ensayos en los que la influencia de algunos de éstos sea despreciable, de manera que la expresión de la ecuación (28) se pueda simplificar. Existen tres casos en los que esto ocurre, siendo dos de ellos estáticos (sin influencia de la velocidad de deformación), uno que tiene en cuenta la temperatura y el otro que no, y el otro dinámico (con influencia de la velocidad de deformación).

#### Caso cuasi-estático sin influencia de la temperatura

Este caso es el representativo de un ensayo realizado de manera estática (o cuasiestática) en el que la temperatura, al ser menor que la de transición del material, no juega ningún papel en el endurecimiento, ablandamiento en este caso, del mismo. Al tratarse de un ensayo cuasiestático, la velocidad de deformación tampoco tiene efecto alguno sobre el endurecimiento del material. Todo esto se traduce en el hecho de que en la aplicación de la ecuación (28), la genérica, para este supuesto específico solamente tendremos en cuenta el término relacionado con la deformación plástica, que es la única variable que influye en el endurecimiento del material, reduciéndose dicha ecuación (28) de la siguiente forma:

$$\sigma_Y = \left[ A + B(\bar{\varepsilon}_{pl})^n \right] \quad (30)$$

En la ecuación (30), los únicos parámetros que influyen en el valor de  $\sigma_Y$  son  $A, B, n$ . El primero de ellos,  $A$ , es la tensión de fluencia del material cuando éste se somete a una velocidad de deformación determinada, denominada velocidad de deformación de referencia (sería la ya mencionada anteriormente  $\dot{\varepsilon}_0$ ). Dado que aquí se está tratando un problema estático, o muy próximo a éste (recuérdese que la velocidad de referencia  $\dot{\varepsilon}_0$  tomada para este ensayo es del orden de  $0.001s^{-1}$ ),  $A$  será la tensión de fluencia estática del material. En otras palabras,  $A$  será a efectos prácticos y en a lo que a este documento respecta el límite elástico del material bajo cargas estáticas.

$B, n$  son parámetros que afectan al endurecimiento del material mediante la deformación plástica, la cual solo puede aumentar o mantenerse en el tiempo, por lo que el endurecimiento ocasionado por ésta será también permanente.

A continuación, en las figuras 4-1, 4-2 y 4-3 se muestra la evolución de  $\sigma_Y$  respecto del tiempo para distintos valores de  $A, B, n$ ; respectivamente. En la Figura 4-1 se ilustra lo que le ocurre a  $\sigma_Y$  cuando variamos únicamente  $A$ , con cuatro valores distintos, de 300, 500, 600 y 800 MPa, dejando los otros dos parámetros fijos, siendo  $B$  de 3000 MPa y  $n$  de 0.8. En la Figura 4-2 se dejan fijos  $A$ , con un valor de 500 MPa, y  $n$ , que seguirá teniendo valor de 0.8, con  $B$  adquiriendo cuatro valores distintos, de 2000, 2300, 2700 y 3000 MPa. Por último, en la Figura 4-3 se dejarán fijos  $A$  y  $B$ , con valores de 500 y 2000 MPa, respectivamente, mientras que  $n$  adquirirá cuatro valores distintos, de 0.2, 0.4, 0.7 y 1. Todos estos valores se han elegido simplemente con el fin de mostrar la influencia que tiene cada uno de los parámetros sobre  $\sigma_Y$ . Conviene también indicar que para este análisis considerado se ha impuesto un intervalo de tiempo comprendido entre 0 y 1, estando la deformación plástica definida por la siguiente expresión:

$$\overline{\varepsilon}_{pl} = 0.02 * t \quad (31)$$

Esta expresión ha sido simplemente impuesta, al igual que el propio intervalo de tiempo y los valores de los parámetros. La razón por la que el coeficiente de  $t$  es 0.02 se debe a la imposición de que la deformación plástica máxima sea igual a 0.02 (el tiempo máximo es igual a 1), ya que las mayores deformaciones con las que vamos a trabajar se situarán en ese orden, el de la centésima.

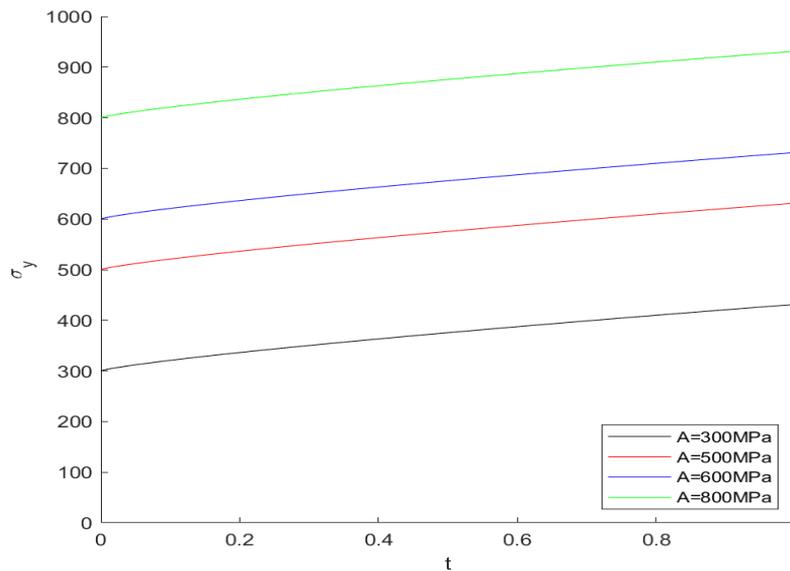


Figura 4-1. Evolución de  $\sigma_y$  con el tiempo para distintos valores de  $A$

En la Figura 4-1 se pueden ver cuatro líneas curvas perfectamente paralelas entre sí, siendo lo único que las diferencia la altura a la cual se sitúa cada una de ellas. Obsérvese que para el instante inicial, es decir  $t = 0$ , los valores de  $\sigma_y$  de cada curva son exactamente los distintos valores de  $A$  que están siendo probados. Esto ocurre así porque en el mencionado instante inicial la deformación plástica es 0 (aunque el material tuviese un límite elástico muy bajo de forma que toda la deformación producida se pudiese considerar como plástica lo que es claro es que cuando no se ha dejado transcurrir nada de tiempo no puede haber deformación y por ende tampoco deformación plástica).

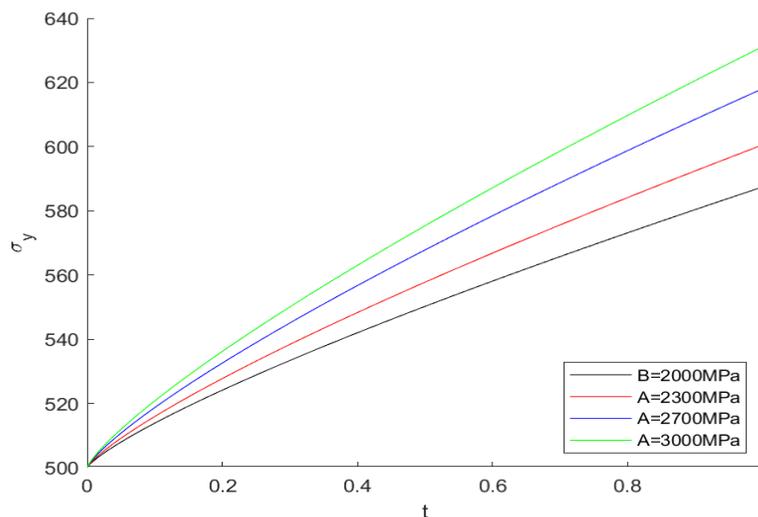


Figura 4-2. Evolución de  $\sigma_y$  con el tiempo para distintos valores de  $B$

Por su parte, en la Figura 4-2 se aprecia una comparación entre las distintas  $B$  consideradas, manteniéndose en todos los casos fijos tanto  $A$  como  $n$ . Se puede observar que los valores alcanzados por las distintas curvas son mayores cuanto más alto sea  $B$ , como cabía esperar. Esto pasa en todos los instantes de tiempo excepto en el inicial, donde todas las curvas coinciden debido a la razón anteriormente comentada sobre el hecho de que la deformación plástica sea igual a cero en el momento inicial (si la deformación plástica es igual a cero en el momento inicial tendremos que  $\sigma_Y$  será directamente igual a  $A$ , que en este caso es igual para todas las curvas).

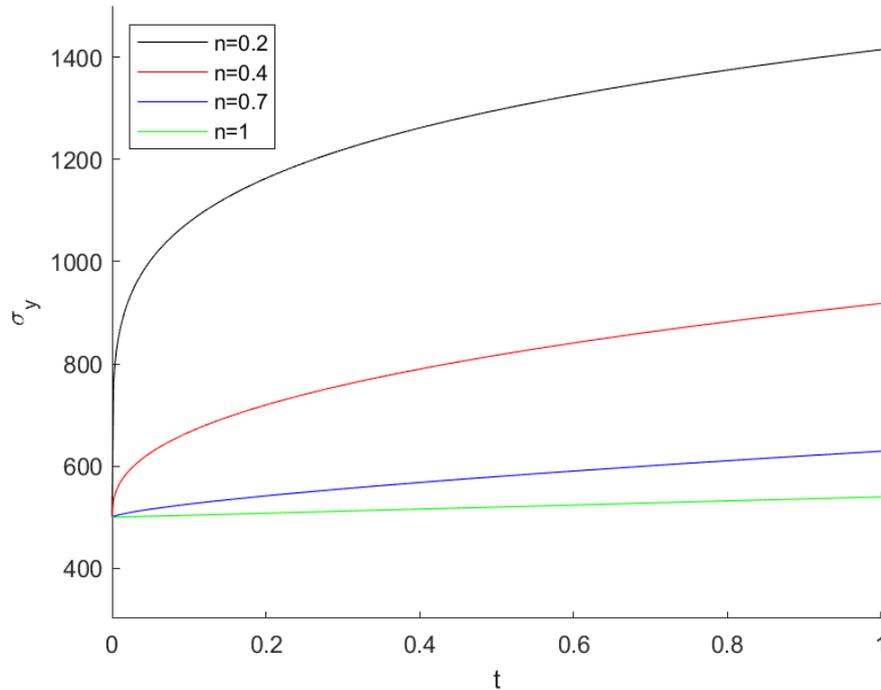


Figura 4-3. Evolución de  $\sigma_Y$  con el tiempo para distintos valores de  $n$

Por su parte, en la Figura 4-3 tenemos una comparación análoga a las dos anteriores solo que en este caso el parámetro objeto de estudio es  $n$ . Se puede ver que el valor de  $n$  afecta de manera considerable a la velocidad con la que crece  $\sigma_Y$ , de manera que cuanto más bajo sea dicho parámetro más brusca será la subida del valor de  $\sigma_Y$ , así como dicha subida brusca se producirá antes en el tiempo y por ende a deformaciones plásticas más bajas. Según nos vamos acercando al valor de  $n = 1$  más plana se va haciendo la curva, suavizándose la subida y haciéndose ésta menos brusca.

En la Figura 4-3 se han probado con valores de  $n$  comprendidos entre 0 y 1 porque entre éstos nos vamos a mover en el presente estudio. En el caso de que  $n$  fuese mayor que la unidad tendremos una curva de  $\sigma_Y$  descendiente hasta que la deformación plástica alcance el valor de 1, lo cual no suele ocurrir, ni siquiera en el caso dinámico, donde se suele trabajar con grandes deformaciones.

#### Caso estático con influencia de la temperatura

En este caso particular se tiene una expresión muy similar a la mostrada en la ecuación (30) pero algo más completa, que contiene también el término relativo a la temperatura, quedándose la expresión reducida para este caso específico como sigue:

$$\sigma_Y = \left[ A + B(\bar{\epsilon}_{pl})^n \right] (1 - \hat{\theta}^m) \quad (32)$$

Se puede ver que la expresión tiene el primer término idéntico a la de la ecuación (30), el cual multiplica aquí al término de la temperatura, definido por  $(1 - \hat{\theta}^m)$ . Lo que se hará seguidamente es analizar el efecto que tiene el parámetro  $m$  sobre el valor de  $\sigma_Y$  y cómo dicho parámetro influye en el endurecimiento/ablandamiento del material, de la misma forma que anteriormente se ha procedido con  $A, B, n$ . Aquí, dichos parámetros serán fijos, siendo  $A = 500MPa$ ,  $B = 3000MPa$  y  $n = 0.8$ . Por su parte, los valores de  $m$  a comparar son 0.4, 0.8, 1, 1.2 y 1.6. Nuevamente, estos valores han sido escogidos simplemente a modo de ejemplo para alcanzar el propósito que se busca en este apartado, que consiste en mostrar y explicar la influencia de cada uno de dichos parámetros que entran en juego en el modelo de JC.

A continuación, en la Figura 4-4, se grafica la evolución de  $\hat{\theta}^m$  con el tiempo para distintos los valores de  $m$ . Conviene recordar que  $\hat{\theta}$  no es una variable sino una función ‘a trozos’, la cual se define en (29). Por tanto, se necesita una temperatura de transición y de fusión de un supuesto material. En este caso la temperatura de transición que impondremos será  $\theta_r = 1400K$  y la de fusión  $\theta_m = 1700K$ , a modo de ejemplo. Posteriormente, en la Figura 4-5, se hará lo propio pero para  $\sigma_Y$  en lugar de  $\hat{\theta}^m$ . La idea de mostrar primero la evolución de  $\hat{\theta}^m$  y luego la de  $\sigma_Y$  es simplemente para comprender mejor esta última.

Llegados a este punto, solo nos falta por imponer una deformación plástica y una serie de valores de la temperatura del material,  $\theta$ . La deformación impuesta será de 0.01, constante en el tiempo, y el rango de temperaturas utilizado a modo ilustrativo estará comprendido entre 1000K y 2000K.

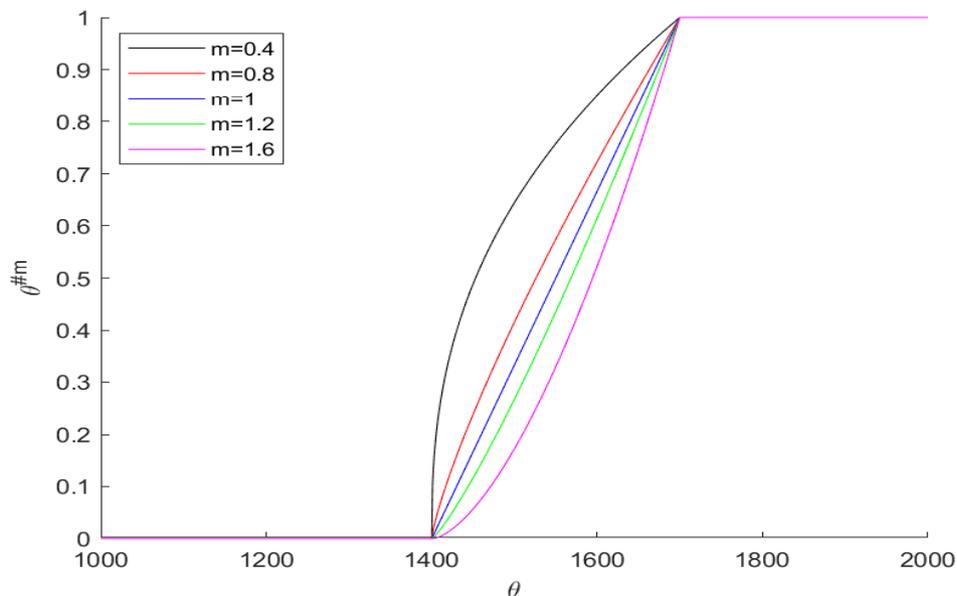


Figura 4-4. Evolución de  $\hat{\theta}^m$  en función de  $\theta$  para distintos valores de  $m$

En primer lugar, de la Figura 4-4 se puede extraer el hecho de que las curvas, independientemente de cual escojamos, se dividen en tres tramos o trozos, los cuales se han definido previamente en la función (29). De esos tres tramos, los tramos extremos, el primero y el último, se sitúan con un valor de  $\hat{\theta}^m$  ( $\theta^{\#m}$  en la gráfica) de 0 y 1, respectivamente, y además se encuentran en ellos todas las curvas superpuestas, como así ha de ser. Es en el tramo intermedio donde las distintas curvas adquieren valores diferentes de  $\hat{\theta}^m$ , de manera que cuanto más pequeño sea el valor de  $m$  más elevado será el de  $\hat{\theta}^m$ , por lo que el término  $(1 - \hat{\theta}^m)$  se hará más pequeño y por tanto el material verá reducida su  $\sigma_Y$  más que para un caso en el que tengamos una  $m$  más alta. Este efecto se puede ver con mayor claridad en la Figura 4-5.

En resumidas palabras, se puede decir que a mayor valor de  $m$  menor será el ablandamiento al que se someta el material en la etapa de transición, que es la que se encuentra comprendida entre las temperaturas de transición y de fusión.

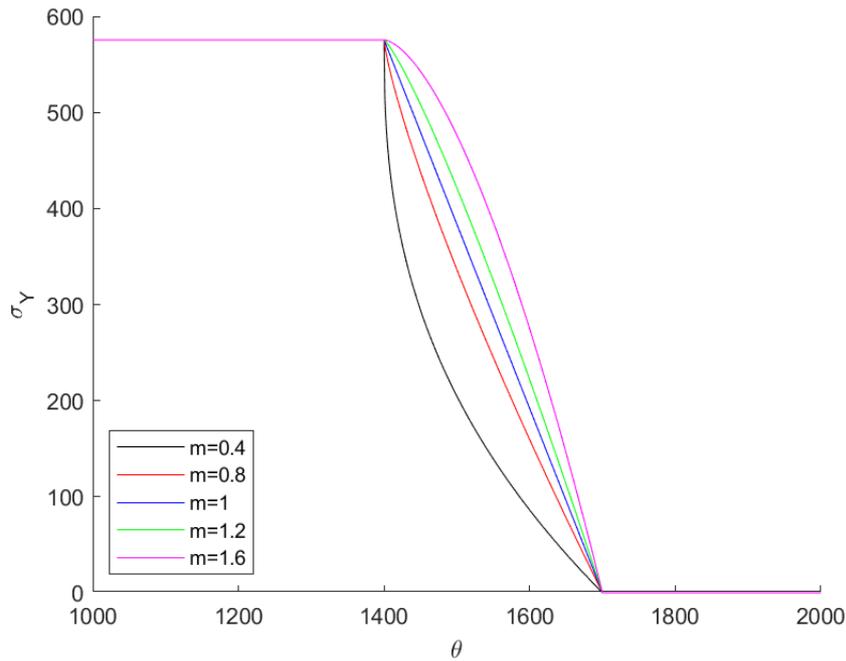


Figura 4-5. Evolución de  $\sigma_Y$  en función de  $\theta$  para distintos valores de  $m$

Las curvas que aparecen en esta última figura son análogas a las de la Figura 4-4 pero con los roles invertidos. Como se había anticipado, las curvas que en la anterior figura adquirieron un valor más elevado de la variable  $\hat{\theta}^m$  son las que ahora poseen un valor menor de  $\sigma_Y$  en la fase de transición, de manera que el efecto del ablandamiento, como anteriormente se afirmó, es más acusado para un material con una  $m$  menor. Una vez dicho material alcanza la temperatura de fusión pasa a estar en estado líquido y por tanto su capacidad de soportar esfuerzos estáticos desaparece por completo, siempre y cuando no estemos sometiendo el mencionado material líquido a esfuerzos de compresión, ya que la mayoría de los líquidos se pueden considerar incompresibles en la práctica [21]. Sin embargo, en este estudio no se entrará en detalles en ese aspecto dado que se escapa del objetivo que aquí se está persiguiendo.

#### Caso dinámico sin influencia de la temperatura en el comportamiento del material

Este tipo de casos se corresponden con impactos en los que la velocidad de deformación es lo suficientemente importante como para considerarse su efecto pero no lo suficientemente elevada como para ocasionar un aumento de temperatura tal que la temperatura del material supere a la de transición, aunque también puede ocurrir que esta temperatura de transición pueda ser alcanzada debido a que la misma es lo bastante baja o bien porque ya partimos de una temperatura inicial del material elevada.

$$\sigma_Y = \left[ A + B(\bar{\varepsilon}_{pl})^n \right] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \quad (33)$$

$A, B, n$  serán los parámetros fijos, de valores 500MPa, 3000MPa y 0.8, respectivamente. El parámetro  $C$  será el que a continuación se va a analizar (el último parámetro que queda por estudiar aquí) y se probarán con valores de 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4. Por su parte, se utilizará la misma deformación plástica que la mostrada en la ecuación (31), siendo por tanto su velocidad la derivada de ésta, de valor 0.02. Por otro lado, tal y como se había comentado al principio del presente capítulo, la velocidad de deformación de referencia es de  $0.001s^{-1}$ .

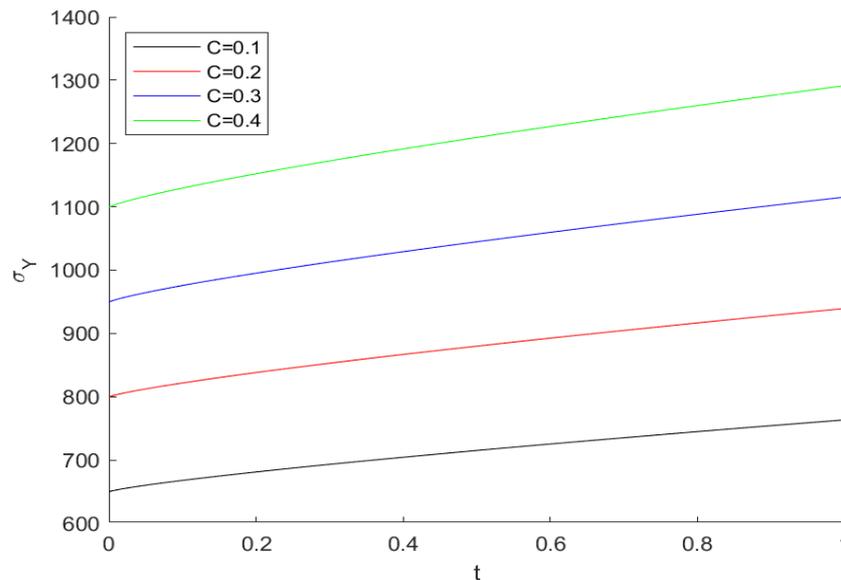


Figura 4-6. Evolución de  $\sigma_Y$  en el tiempo para distintos valores de  $C$

Como era de esperar tras una simple observación a la ecuación (33), se ha obtenido en la Figura 4-6 la conclusión de que cuanto mayor sea  $C$  más elevados serán los valores de  $\sigma_Y$  y por tanto también lo será el endurecimiento del material.

Con esto ya se puede tener un mejor entendimiento del sentido físico de los parámetros que intervienen en el modelo de Johnson-Cook, lo cual supone un primer paso importante en lo que a la consecución del objetivo buscado se trata, tras el análisis pormenorizado de la influencia que cada uno de ellos tiene sobre el valor de  $\sigma_Y$  y por ende tener una idea de la magnitud del endurecimiento o ablandamiento que tiene lugar en el material.

Resumiendo, lo que se ha hecho en el actual apartado del presente capítulo es identificar en primer lugar tanto las variables como los parámetros que forman parte del modelo que estamos estudiando dado que lo que trataremos posteriormente en este documento es la obtención de los parámetros característicos del modelo de JC para el material Nimonic 80A. De esta forma, las variables serían la deformación plástica, su velocidad y la temperatura, mientras que los parámetros del modelo serían  $A, B, n, m, C$ .  $A$  hace referencia, a efectos prácticos, a la tensión de fluencia estática del material, mientras que tanto  $B$  como  $n$  son parámetros que determinan el endurecimiento al que el material está sometido por el simple hecho de poseer una deformación plástica (estos parámetros están asociados a dicha deformación), el cual será mayor cuanto más altos sean los valores de éstos. Por su parte, el parámetro  $m$  está ligado a la temperatura a la que se encuentra sometido el material y cuanto mayores sean los valores que el mismo alcance menor será el efecto de ablandamiento que sufrirá el material una vez éste alcance su temperatura de transición (temperatura a partir de la cual se empieza a producir el ablandamiento en el sólido). Por último está  $C$ , que como acabamos de comprobar está relacionado con la velocidad de deformación plástica y cuanto más alto sea más elevados serán los valores que alcanza  $\sigma_Y$  y por lo tanto más acentuado será el endurecimiento que padecerá el material.

Lo que se acaba de mencionar son, como se ha indicado anteriormente, los parámetros del modelo de JC. Sin embargo, hay otros parámetros que si bien no son considerados parámetros propios de dicho modelo según la mayor parte de la literatura consultada, bien es cierto que conviene tenerlos en cuenta puesto que forman parte de éste. Éstos serían la temperatura de transición, la temperatura de fusión y la velocidad de deformación de referencia. Los dos primeros se obtienen experimentalmente mientras que el otro es un valor impuesto, normalmente de  $0.001s^{-1}$ , por convenio.

### 4.3 Metodología propuesta para estimación de los parámetros de JC

Se procederá a exponer las modificaciones matemáticas que se realizan para llegar a una expresión final que nos permita despejar el parámetro buscado. En el caso del parámetro  $A$  no hay que hacer nada puesto que éste se obtiene de manera directa, por experimentación.

### Caso estático sin influencia de la temperatura

Como ya sabemos, para este supuesto concreto eliminamos los términos correspondientes a la velocidad de deformación plástica y a la temperatura, quedándose la ecuación (30) como la expresión a utilizar. Así pues, partiremos de la misma para mostrar la expresión final que se nos presenta, ocurriendo lo análogo para los demás parámetros (véase referencias [22] y [23]).

$$\sigma_Y = \left[ A + B(\overline{\varepsilon}_{pl})^n \right] \quad (30)$$

Despejando el exponente  $n$  tenemos:

$$n = \frac{\ln(\sigma_Y - A) - \ln(B)}{\ln(\overline{\varepsilon}_{pl})} \quad (34)$$

Por otro lado, conviene hacer un inciso para explicar el aspecto numérico que hace del modelo de JC un modelo válido cuando de materiales dúctiles se trata pero no de materiales altamente frágiles. Resulta que la diferencia entre ambos es, explicado de manera rápida y sencilla, que un material dúctil es aquel que una vez alcanza su tensión de fluencia tiene todavía una gran capacidad de adquirir deformación plástica mientras que en el caso de uno frágil dicha capacidad es mucho más limitada, por lo que rompería mucho antes [24]. Esto significa que en los materiales frágiles la  $\overline{\varepsilon}_{pl}$  máxima que puede alcanzar es mucho menor que en uno dúctil, y esto ocasiona problemas de tipo numérico dado que si dicha deformación plástica es muy pequeña  $\ln(\overline{\varepsilon}_{pl})$  tenderá a  $-\infty$ , como se puede apreciar en la Tabla 4-1 de manera numérica y en la Figura 4-7 de manera más gráfica.

Tabla 4-1. Valores de  $\ln(\overline{\varepsilon}_{pl})$  según  $\overline{\varepsilon}_{pl}$

$\varepsilon_{pl}$	$\ln(\varepsilon_{pl})$
$10^{-1}$	-2.3026
$10^{-2}$	-2.4849
$10^{-3}$	-2.7080
$10^{-4}$	-2.9957
$10^{-5}$	-3.4012
$10^{-6}$	-4.093
$10^{-7}$	-16.1181

En la Tabla 4-1 se aprecia que la variación de  $\ln(\overline{\varepsilon}_{pl})$  respecto de  $\overline{\varepsilon}_{pl}$  es muy leve cuando los valores de este último son todavía relativamente elevados (del orden de  $10^{-1}$ ) pero la misma aumenta de manera cada vez más brusca, como se puede apreciar en la misma tabla cuando se pasa de una deformación plástica de  $10^{-6}$  a una de valor  $10^{-7}$ , por ejemplo. En la Figura 4-7 se observa esta misma relación de manera visual en todo el intervalo  $[10^{-1}; 10^{-7}]$  y no solamente con algunos valores discretos. Tanto en la tabla como en la figura se observa claramente el fenómeno anteriormente expuesto, suponiendo esto una inestabilidad numérica que explica por qué este modelo no es válido para materiales altamente frágiles.

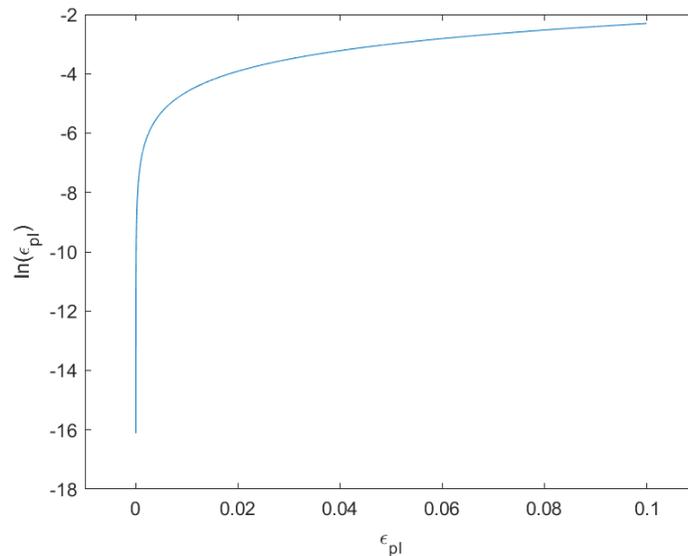


Figura 4-7. Evolución de  $\ln(\overline{\epsilon_{pl}})$  respecto de  $\overline{\epsilon_{pl}}$

La expresión (34) sugiere que la relación entre  $\ln(\sigma_Y - A)$  y  $\ln(\overline{\epsilon_{pl}})$  es de tipo lineal, siendo  $\ln(B)$  el término independiente. Sin embargo, existe un problema debido a que a esta única ecuación le corresponden dos incógnitas, las cuales son  $n$  y  $\ln(B)$ . Para solucionar este problema se va a recurrir a lo que comúnmente se denomina ajuste por mínimos cuadrados (véase capítulo 6). Por ahora lo único que diremos sobre ello es que se trata de un procedimiento a partir del cual se puede obtener una curva que sea lo más representativa posible de una nube de puntos en un espacio vectorial, que en este caso será de dos dimensiones, correspondiéndose una de ellas a la variable independiente y la otra a la dependiente. La nube de puntos a la que acabamos de hacer mención sería en este caso cada una de las parejas de valores  $X \equiv Y$ , es decir parejas  $\ln(\overline{\epsilon_{pl}}) \equiv \ln(\sigma_Y - A)$ , tratándose por tanto de una nube de puntos experimental. Esta curva se obtiene reduciéndose al máximo, mediante un procedimiento matemático que se tratará más adelante, el error respecto de dicha nube de puntos. Una forma de reducir este error es también aumentando el orden del ajuste, pero dado que la expresión con la que vamos a trabajar es lineal (véase ecuación (34)) no tiene sentido en estos casos utilizar un orden distinto a 1.

En la Figura 4-8 se muestra un ejemplo de un ajuste de orden 1 (lineal) para una nube de puntos cualesquiera. Lo que se obtiene como resultado aquí son los coeficientes del polinomio que define la curva en cuestión, de manera que si para el caso del ejemplo que se muestra en la mencionada figura (obtención de los parámetros en cuestión mediante el citado ensayo) lo que tenemos es una recta, los coeficientes que se conseguirán serán  $n$  y  $\ln(B)$ , despejándose  $B$  a partir de esta última.

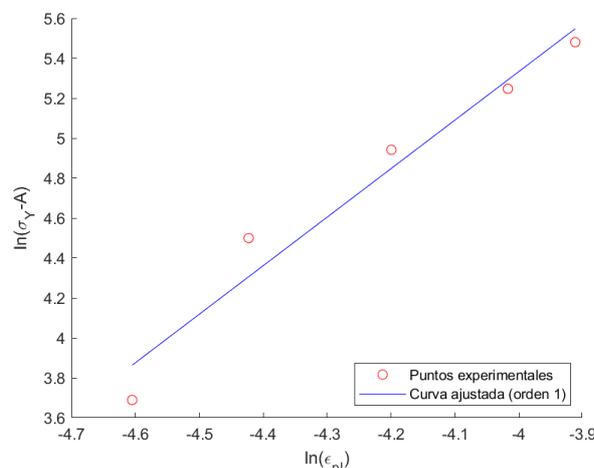


Figura 4-8. Ejemplo de ajuste por mínimos cuadrados para el tipo de ensayo considerado

Nuevamente, los valores de los puntos rojos (puntos que se habrían de obtener experimentalmente) mostrados en la Figura 4-8, tanto en su coordenada X ( $\ln(\bar{\varepsilon}_{pl})$ ) como en su coordenada Y ( $\ln(\sigma_Y - A)$ ) son inventados, a modo de ejemplo. De esta forma, los valores de  $\varepsilon_{pl}$  escogidos han sido 0.01, 0.012, 0.015, 0.018 y 0.02; siendo los de  $\sigma_Y$  de 500, 550, 600, 650 y 700 MPa. Por su parte, el valor de  $A$  se ha fijado en 460 MPa.

#### Caso estático con influencia de la temperatura

Se procederá de la misma forma que anteriormente, cuando las temperaturas no entraban en juego. Así pues, se expondrá primero la ecuación inicial de la que partimos, para posteriormente hacer lo propio en lo que a los cambios pertinentes a realizarse sobre la misma se refiere.

$$\sigma_Y = \left[ A + B(\bar{\varepsilon}_{pl})^n \right] (1 - \hat{\theta}^m) \quad (32)$$

Tras las manipulaciones matemáticas correspondientes, se llega a las siguientes expresiones, (35) y (36):

$$\ln \left( -\frac{\sigma_Y}{\left[ A + B(\bar{\varepsilon}_{pl})^n \right]} + 1 \right) = m \ln(\hat{\theta}) \quad (35)$$

$$\ln(Q) = m \ln(\hat{\theta}) \quad (36)$$

Nuevamente, tenemos que hacer una serie de ensayos para determinar las parejas de valores de deformación plástica con sus correspondientes tensiones. Lo que se recomienda en este caso es mantener un nivel de esfuerzos tal que éstos generen la plastificación en la probeta objeto del ensayo incluso a temperatura ambiente. De esta forma, nos aseguraremos estar siempre dentro del rango plástico independientemente de la temperatura a la que estemos trabajando. Es conveniente, por tanto, mantener constante la fuerza a la que se ve sometida la probeta en todos los ensayos y cambiar únicamente la temperatura. Aquí también se podrían ocasionar problemas debido a las inestabilidades numéricas en el logaritmo. Dichas inestabilidades ocurrirían si la temperatura de trabajo es muy cercana a la de transición ( $\hat{\theta}$  se situaría muy próxima a 0), dando nuevamente  $\ln(\hat{\theta})$  resultados que tienden a  $-\infty$ . Sin embargo, esta problemática es poco recurrente y se suele dar mucho más en el caso anterior en  $\ln(\bar{\varepsilon}_{pl})$  para  $\bar{\varepsilon}_{pl}$  muy reducidas.

Aquí se ha partido de la expresión (32) y se ha llegado a la (35) como expresión final, tras hacer las modificaciones pertinentes. En aras de simplificar la mencionada expresión final se puede tomar la igualdad  $Q = -\frac{\sigma_Y}{\left[ A + B(\bar{\varepsilon}_{pl})^n \right]} + 1$  tal y como aparece en la ecuación (36), aunque esto es simplemente una cuestión visual cuya mayor utilidad reside en la comodidad del uso de las expresiones cuando éstas alcanzan cierto grado de densidad en cuanto al espacio que ocupan se refiere.

Por último, también indicar que la Figura 4-7 sigue siendo válida para este caso considerando que aquí el eje X se correspondería con  $\ln(\hat{\theta})$  y el eje Y con  $\ln(Q)$ , pero la filosofía del ajuste por mínimos cuadrados, así como el hecho de que el orden al que se debe ajustar la curva es 1 porque la expresión a la que hemos llegado al final es de tipo lineal, se mantiene.

#### Caso dinámico sin influencia de la temperatura en el comportamiento del material

Como es de esperar a continuación se hará exactamente lo mismo que se había venido haciendo hasta ahora en todo lo que llevamos de apartado. Así pues:

$$\sigma_Y = \left[ A + B(\bar{\varepsilon}_{pl})^n \right] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \quad (33)$$

Legándose a la expresión (40) como sigue:

$$\frac{\sigma_Y}{\left[ A + B(\bar{\varepsilon}_{pl})^n \right]} - 1 = \left[ C \ln \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \quad (40)$$

Para poder obtener los datos necesarios en aras de lograr el valor del parámetro  $C$  de JC característico de un material es necesario aplicar aquí un ensayo de naturaleza considerablemente distinta a los que se realizan para todos los otros parámetros, siendo el propuesto en este documento el ensayo dinámico de impacto de Taylor. Además, no solo cambia la naturaleza del ensayo en sí sino que también el procedimiento por el que conseguimos este parámetro, el parámetro  $C$ , de manera que ya no solamente se hace uso del concepto de ajuste por mínimos cuadrados (capítulo 6), sino que hay que tener en cuenta también otra serie de consideraciones que se tratarán en su debido momento, cuando se esté planteando y analizando el problema más concienzudamente.

La obtención de los parámetros de JC característicos de un material no es, por tanto, un proceso directo sino que se trata más bien de algo más escalonado, es decir se han de realizar ensayos con unas características muy concretas para poder hallar el valor de cada uno de estos parámetros de manera aislada y en el siguiente orden:

1. Hallar  $A$  (límite elástico del material a efectos prácticos)
2. Obtención de  $B, n$  de manera simultánea mediante ensayo estático variando las cargas y manteniendo la temperatura del material (se recomienda que ésta se sitúe por debajo de la de transición)
3. Obtención de  $m$  mediante ensayo estático variando la temperatura y manteniendo la carga aplicada (se aconseja que la carga aplicada se encuentre por encima de la de fluencia, estática, del material a temperatura ambiente). Además, en este punto es cuando debemos hallar las temperaturas de transición y de fusión, de lo cual se hablará más adelante. De esta forma tendremos vía libre para lograr el valor numérico de este parámetro
4. Por último se procede a calcular  $C$ . El ensayo que se expone para este propósito guarda mayores diferencias respecto del resto de los mismos. Se trata de un ensayo dinámico en el que se probará el impacto de una probeta sobre una pared que se puede considerar rígida en comparación con el material del que está hecha la probeta y que constará de muchos más pasos intermedios a considerar.

El orden propuesto es recomendable cumplirlo en los puntos 1 y 2. Los puntos 3 y 4 pueden cambiarse de orden si el ingeniero que realiza el ensayo en el laboratorio lo percibe conveniente. Por su parte, si bien se ha dicho hace poco que cada ensayo tiene unas características muy concretas y específicas en el fondo la naturaleza de todos ellos es muy similar, siendo el ensayo que es necesario realizar para la obtención de  $C$  el que claramente se aleja de manera bastante más considerable.



## 5 RESTRICCIONES INDUCIDAS POR CONTACTO

*“No hay que ir para atrás ni para darse impulso”*

*- Lao Tsé -*

### 5.1 Introducción

En todos los ensayos, virtuales, que aquí tendrán lugar, tanto estáticos como dinámicos, se ha de producir forzosamente un contacto entre alguna de las superficies de la probeta y una pared externa. De lo contrario, sería imposible que tuviese lugar la compresión de dicha probeta. Este hecho implica necesariamente considerar este fenómeno, el del contacto, como un factor cuyo estudio es de gran importancia [25]. Se hará una breve recopilación de los aspectos más importantes en relación a este asunto, abordando los casos en los que dicho contacto incluye o no fricción y tanto en 2D como 3D.

### 5.2 Contacto sin fricción

#### 5.2.1 Contacto en 2D

En la Figura 5-1 se puede observar cómo dos cuerpos elásticos, A (arriba) y B (abajo), se deforman y contactan entre sí a lo largo de una superficie de contacto, la cual denominaremos como  $\Gamma_c$ , tras la aplicación de una serie de fuerzas y restricciones a los mismos. Se ha escogido un punto perteneciente a dicha superficie de contacto, el punto “M”, con el fin de analizar lo que ocurre cuando este fenómeno tiene lugar. Se utilizará éste por tanto para establecer las condiciones de contorno y el equilibrio.

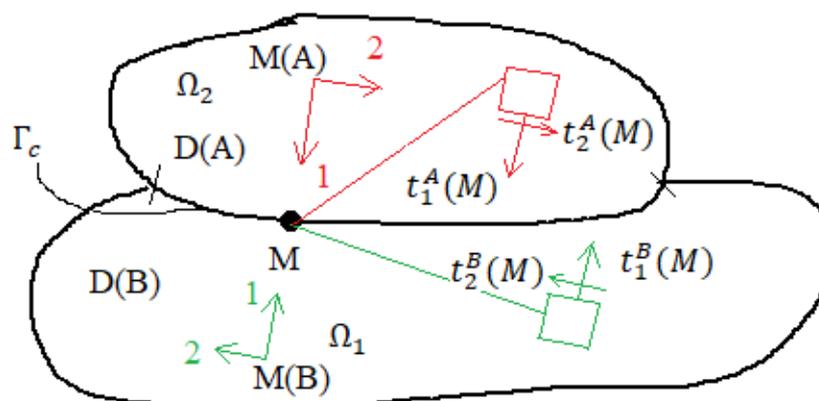


Figura 5-1. Contacto entre dos cuerpos, A y B, sin fricción y en 2D

Los desplazamientos quedarán representados mediante la variable  $u$  mientras que las tensiones se encontrarán identificadas como  $t$ . Por su parte, todas las expresiones que aparezcan en este capítulo estarán referidas a  $\Gamma_c$ .

- Variables:  $u_1^A(M)$ ,  $u_1^B(M)$ ,  $u_2^A(M)$ ,  $u_2^B(M)$ ,  $t_1^A(M)$ ,  $t_1^B(M)$ ,  $t_2^A(M)$ ,  $t_2^B(M)$
- Ecuaciones resultantes:

$$u_1^A(M) + u_1^B(M) = 0 \quad (41)$$

$$t_1^A(M) = t_1^B(M) \quad (42)$$

$$t_2^A(M) = t_2^B(M) = 0 \quad (43)$$

- Variables independientes:  $u_1^A(M)$ ,  $u_2^A(M)$ ,  $u_2^B(M)$ ,  $t_1^A(M)$

Donde el superíndice indica el sólido al que está referida la variable, y el subíndice la dirección en el sistema de coordenadas del mencionado sólido.

### 5.2.2 Contacto en 3D

Para el caso en el que tenemos contacto en las tres dimensiones se mantendrá el número de variables en la dirección normal al contacto mientras que se duplicará el número de variables tangenciales, ya que en este caso lo que se tiene es una superficie de contacto y no una línea.

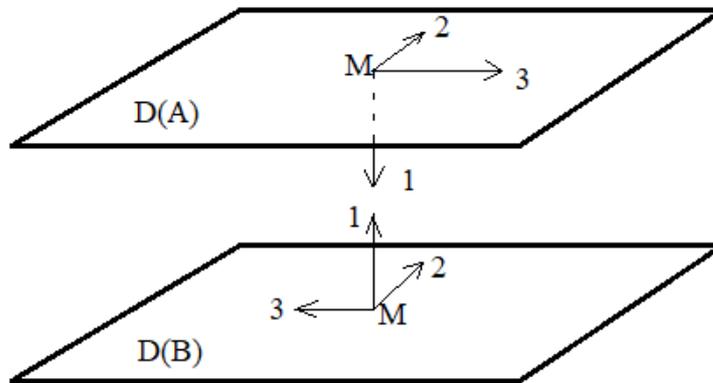


Figura 5-2. Contacto entre dos cuerpos, A y B, sin fricción y en 3D

Así pues, éstas son las variables totales e independientes y ecuaciones que resultan del planteamiento del problema de contacto en tres dimensiones sin considerar fricción.

- Variables:  $u_1^A(M)$ ,  $u_1^B(M)$ ,  $u_2^A(M)$ ,  $u_2^B(M)$ ,  $u_3^A(M)$ ,  $u_3^B(M)$ ,  $t_1^A(M)$ ,  $t_1^B(M)$ ,  $t_2^A(M)$ ,  $t_2^B(M)$ ,  $t_3^A(M)$ ,  $t_3^B(M)$
- Ecuaciones resultantes:

$$u_1^A(M) + u_1^B(M) = 0 \quad (44)$$

$$t_1^A(M) = t_1^B(M) \quad (45)$$

$$t_2^A(M) = -t_2^B(M) = 0 \quad (46)$$

$$t_3^A(M) = t_3^B(M) = 0 \quad (47)$$

- Variables independientes:  $u_1^A(M)$ ,  $u_2^A(M)$ ,  $u_3^A(M)$ ,  $u_2^B(M)$ ,  $u_3^B(M)$ ,  $t_1^A(M)$

### 5.3 Contacto con fricción

#### 5.3.1 Contacto en 2D

En esta ocasión conviene diferenciar entre dos posibles casos que pueden ocurrir según  $|t_2(M)| < \bar{\mu}|t_1(M)|$  ( $\bar{\mu}$  es el coeficiente de rozamiento) o no. Si esta condición tuviese lugar estaríamos hablando de un caso de contacto con adhesión. De lo contrario sería un contacto con deslizamiento. A continuación se muestran las variables, tanto totales como independientes, así como el sistema de ecuaciones resultante para estos casos mencionados, siendo el punto M y los sólidos A y B los mismos que los que aparecen en la Figura 5-1.

Adhesión ( $|t_2(M)| < \bar{\mu}|t_1(M)|$ ):

- Variables:  $u_1^A(M)$ ,  $u_1^B(M)$ ,  $u_2^A(M)$ ,  $u_2^B(M)$ ,  $t_1^A(M)$ ,  $t_1^B(M)$ ,  $t_2^A(M)$ ,  $t_2^B(M)$
- Ecuaciones resultantes:

$$u_1^A(M) + u_1^B(M) = 0 \quad (48)$$

$$u_2^A(M) + u_2^B(M) = 0 \quad (49)$$

$$t_1^A(M) = t_1^B(M) \quad (50)$$

$$t_2^A(M) = t_2^B(M) \quad (51)$$

- Variables independientes:  $u_1^A(M)$ ,  $u_2^A(M)$ ,  $t_1^A(M)$ ,  $t_2^A(M)$

Deslizamiento ( $|t_2(M)| = \bar{\mu}|t_1(M)|$ )

- Variables:  $u_1^A(M)$ ,  $u_1^B(M)$ ,  $u_2^A(M)$ ,  $u_2^B(M)$ ,  $t_1^A(M)$ ,  $t_1^B(M)$ ,  $t_2^A(M)$ ,  $t_2^B(M)$
- Ecuaciones resultantes:

$$u_1^A(M) + u_1^B(M) = 0 \quad (52)$$

$$t_1^A(M) = t_1^B(M) \quad (53)$$

$$|t_2^A(M)| = \bar{\mu}|t_1^A(M)| \quad (54)$$

$$t_2^A(M) = t_2^B(M) \quad (55)$$

- Variables independientes:  $u_1^A(M)$ ,  $u_2^A(M)$ ,  $u_2^B(M)$ ,  $t_1^A(M)$

#### 5.3.2 Contacto en 3D

Para el caso de contacto en 3D se procede de igual manera que para el caso bidimensional, considerándose en este caso el hecho de que la tensión tangencial total es una composición de las tensiones tangenciales y se calcula mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras.

$$t_{23}(M) = \sqrt{(t_2(M))^2 + (t_3(M))^2} \quad (56)$$

Adhesión ( $|t_{23}(M)| < \bar{\mu}|t_1(M)|$ ):

- Variables:  $u_1^A(M)$ ,  $u_1^B(M)$ ,  $u_2^A(M)$ ,  $u_2^B(M)$ ,  $u_3^A(M)$ ,  $u_3^B(M)$ ,  $t_1^A(M)$ ,  $t_1^B(M)$ ,  $t_2^A(M)$ ,  $t_2^B(M)$ ,  $t_3^A(M)$ ,  $t_3^B(M)$

- Ecuaciones resultantes:

$$u_1^A(M) + u_1^B(M) = 0 \quad (57)$$

$$u_2^A(M) = u_2^B(M) \quad (58)$$

$$u_3^A(M) + u_3^B(M) = 0 \quad (59)$$

$$t_1^A(M) = t_1^B(M) \quad (60)$$

$$t_2^A(M) = -t_2^B(M) \quad (61)$$

$$t_3^A(M) = t_3^B(M) \quad (62)$$

- Variables independientes:  $u_1^A(M), u_2^A(M), u_3^A(M), t_1^A(M), t_2^A(M), t_3^A(M)$

Deslizamiento ( $|t_{23}(M)| = \bar{\mu}|t_1(M)|$ ):

- Variables:  $u_1^A(M), u_1^B(M), u_2^A(M), u_2^B(M), u_3^A(M), u_3^B(M), t_1^A(M), t_1^B(M), t_2^A(M), t_2^B(M), t_3^A(M), t_3^B(M)$

- Ecuaciones resultantes:

$$u_1^A(M) + u_1^B(M) = 0 \quad (63)$$

$$t_1^A(M) = t_1^B(M) \quad (64)$$

$$|t_{23}^A(M)| = \bar{\mu}|t_1^B(M)| \quad (65)$$

$$t_2^A(M) = -t_2^B(M) \quad (66)$$

$$t_3^A(M) = t_3^B(M) \quad (67)$$

- Variables independientes:  $u_1^A(M), u_2^A(M), u_3^A(M), u_2^B(M), u_3^B(M), t_1^A(M)$

Las variables para el caso 3D con fricción son las mismas que para dicho caso sin fricción, de manera que se pueden observar en la Figura 5-2.

# 6 AJUSTE MATEMÁTICO POR MÍNIMOS CUADRADOS

*“La libertad existe tan solo en la tierra de los sueños”*

*- Friedrich Schiller -*

## 6.1 Introducción

Tanto en los ensayos de tipo estático como en el dinámico, el de impacto de Taylor, es necesario establecer una relación analítica entre dos variables, una independiente (eje X) y otra dependiente (eje Y). Esta relación se consigue mediante la herramienta matemática denominada Ajuste por Mínimos Cuadrados, la cual que se expondrá y explicará a lo largo del presente capítulo.

Se pretende utilizar este ajuste para hallar, ya sea de manera directa o mediante un procedimiento algo más largo y laborioso (dependerá del parámetro objeto de estudio en cuestión), los parámetros característicos del Nimonic 80A del modelo de Johnson-Cook. Aunque en el capítulo correspondiente a este modelo se estuvo comentando de manera muy breve y simple en qué consiste esta técnica matemática para poder al menos tener una idea inicial de qué es lo que se busca con ella, lo que se hará a lo largo del presente capítulo es profundizar más en este concepto, no solamente en su definición sino también en los procedimientos que se han de seguir para realizarse estos ajustes por mínimos cuadrados, así como también de los fenómenos conocidos como ‘overfitting’ y ‘underfitting’, los cuales constituyen unos aspectos de gran relevancia para el tipo de operaciones que se aplicarán cuando planteemos el problema en cuestión.

El Ajuste por Mínimos Cuadrados es, por tanto, una técnica de análisis numérico enmarcada dentro de la optimización matemática, en la que, dado un conjunto de pares de valores ordenados (variable independiente, variable dependiente) y una familia de funciones, se intenta encontrar la función continua, dentro de dicha familia, que mejor se aproxime a los datos [26].

En este capítulo se hablará tanto del procedimiento para la predicción de la evolución de una variable dependiente respecto de una independiente (obtención de una curva analítica mediante mínimos cuadrados), en la sección 6.2, como de los fenómenos de ‘overfitting’ y ‘underfitting’ y la problemática que éstos acarrear tanto en la recreación de la propia curva que tiene como fin predecir la evolución anteriormente comentada como en problemas derivados de esto último, en el apartado 6.3.

## 6.2 Procedimiento en el Ajuste por Mínimos Cuadrados

Para abordar la realización de este problema, de optimización, es necesario en primer lugar establecer el concepto de error de una forma matemática, el cual determinará el grado de fidelidad o representatividad de una curva cualquiera a una nube de puntos discretos. De esta forma, si dicho error se reduce al mínimo obtendremos una única solución, la correspondiente a la curva que mejor se ajusta a la evolución de la relación de la variable dependiente (eje ordenadas) respecto de la independiente (eje abscisas) para un orden polinómico dado. Se describirá en primer lugar un procedimiento genérico, para cualquier orden, y otro particular, aplicado a un orden de 1, bastante recurrente en la literatura.

Procedimiento genérico (cualquier orden)

En la ecuación (68) se expone la expresión del error, también llamado residuo [27]. La misma depende tanto de los valores discretos (experimentales) de los que disponemos como de la expresión polinómica que define la curva buscada y por tanto también del orden de ésta.

$$r_i = y_i - y(x_i) \quad (68)$$

$$r_i^2 = [y_i - y(x_i)]^2 \quad (69)$$

En las ecuaciones (68) y (69)  $r_i$  es el residuo o diferencia entre los valores de la variable dependiente del caso experimental,  $y_i$ , y los de una curva analítica cualquiera,  $y(x_i)$ , para una pareja de valores  $x_i \equiv y_i$ . Evidentemente, la mencionada diferencia solo se puede establecer en aquellos puntos en los que tenemos datos experimentales (véase Figura 6-1). Por su parte, en la ecuación (69) se puede apreciar una expresión análoga a la (68) con la diferencia de que aquí se ha elevado al cuadrado tanto a uno como a otro lado de la igualdad, con la finalidad de obtener valores absolutos y de esta forma saber que el error que estamos cometiendo en la pareja de valores  $i$  será menor cuanto más pequeña sea su correspondiente  $r_i^2$ .

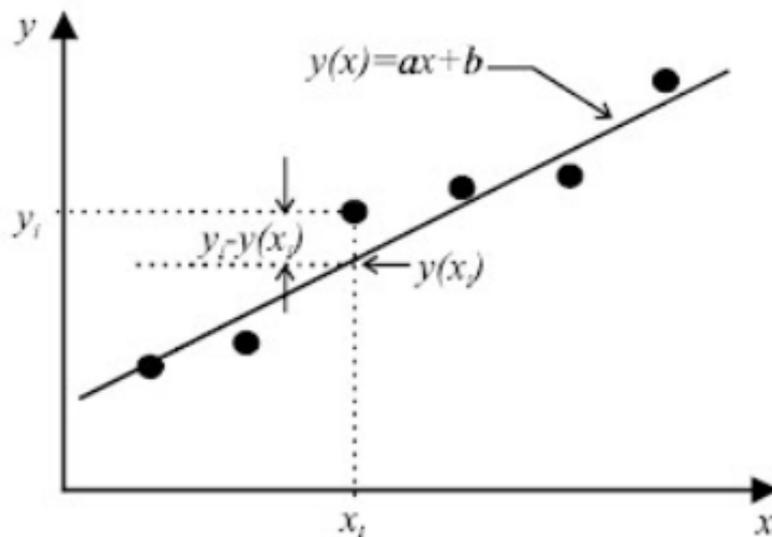


Figura 6-1. Puntos experimentales, curva ajustada de orden 1 y residuo en un punto  $i$  [28]

En la Figura 6-1 se muestra de manera gráfica lo que se había indicado anteriormente, que es que se tienen varios puntos experimentales y una curva cualquiera, que en este caso es de orden 1 y ajustada a esos puntos. Para un punto  $i$  genérico, de abscisa  $x_i$  (esta abscisa ha de corresponderse con la de algún punto experimental), tenemos dos resultados, siendo uno de ellos el arrojado por los experimentos,  $y_i$ , y el otro por la curva en cuestión, que puede ser una curva cualquiera pero en la práctica nos referiremos a la curva ajustada,  $y(x_i)$ . La diferencia entre ambos valores de  $y$ , que queda definida en la ecuación (68), es lo que se denomina residuo, en este caso en el punto  $i$ , debiéndose calcular para la obtención del residuo total la correspondiente  $r_i^2$  (cuadrado del residuo en el punto  $i$ ) y sumarla con las correspondientes  $r_i^2$  de cada punto. De esta forma se podrá obtener una  $r^2$  total (se llamará  $D$  más adelante), a partir de la cual se podrá obtener el residuo  $r$  haciéndosele la raíz cuadrada. Se procede de esta forma en vez de sumar directamente las  $r$  para no falsear el resultado final debido a la problemática con los signos anteriormente comentada. Por otro lado, el hecho de que la curva analítica  $y(x)$  sea de tipo polinómico implica lo siguiente:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_qx^q \quad (70)$$

Así pues, si se combina la ecuación (70) con las ecuaciones (68) y (69) para cada valor de la variable independiente  $x_i$  se obtienen las expresiones (71) y (72), como siguen:

$$r_i = y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_qx_i^q) \quad (71)$$

$$r_i^2 = [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_qx_i^q)]^2 \quad (72)$$

Se va a trabajar principalmente con el cuadrado del residuo y no con el residuo como tal para así evitar problemas relacionados con el signo del mismo, de manera que cuanto más pequeña sea esta 'medida' más fielmente estaríamos recreando la realidad. Por tanto, la suma de los cuadrados de los residuos de todos los puntos  $i$  se define de la siguiente manera:

$$D = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)]^2 \quad (73)$$

$$D = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_qx_i^q)]^2 \quad (74)$$

$D$  se tratará aquí por tanto como una función que dependerá de varias variables y a la cual se le ha de obtener el mínimo (conviene que el error sea lo más bajo posible). A continuación se explicará el proceso que es necesario seguir para hallar dicho mínimo aunque de un manera lo más breve posible para que el lector pueda tener una visión y conocimientos básicos y fundamentales a la par de necesarios sobre cómo proceder ante un problema de ajuste polinómico, como el que aquí se trata.

En primer lugar, a todas las  $q + 1$  derivadas parciales de la función  $D$  se les impondrá un valor igual a 0. De esta forma nos aseguraremos de que el punto que se consiga seguidamente pertenecerá a un máximo, mínimo o punto de silla. En (75) se muestran las  $q + 1$  ecuaciones con sus correspondientes  $q + 1$  incógnitas, debiendo tratarse de un Sistema Compatible determinado para su correcta resolución [29].

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a_0} &= \frac{\partial}{\partial a_0} \left\{ \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_qx_i^q)]^2 \right\} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial a_1} &= \frac{\partial}{\partial a_1} \left\{ \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_qx_i^q)]^2 \right\} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial D}{\partial a_q} &= \frac{\partial}{\partial a_q} \left\{ \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_qx_i^q)]^2 \right\} = 0 \end{aligned} \right\} = 0 \quad (75)$$

Tras la resolución se obtiene como resultado los valores de los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_q$  (no olvidemos que aquí todas las  $x_i, y_i$  se encuentran ya definidas por tratarse de datos experimentales). Esos coeficientes determinarán el/los punto/s en los que la tangente es horizontal. Para saber si éste/os se trata/n de algún máximo, mínimo o punto de silla es necesaria la resolución de las segundas derivadas, parciales, como siguiente paso. Así pues, para exponer de manera más clara todo lo que se acaba de mencionar, se muestra a continuación las primeras derivadas parciales, que se han igualado a 0, y las segundas derivadas parciales que

han de obtenerse ahora una vez se conocen los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_q$  tras la realización de las ya mencionadas primeras derivadas parciales.

- Primeras derivadas parciales:  $\frac{\partial D}{\partial a_0}, \frac{\partial D}{\partial a_1}, \frac{\partial D}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial D}{\partial a_q}$
- Segundas derivadas parciales: a cada una de las primeras derivadas parciales, las anteriores, se les hace una segunda derivación, nuevamente, para cada una de las variables como se muestra a continuación:
  - $\frac{\partial^2 D}{\partial a_0^2}, \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_1}, \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_2}, \dots, \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_q}$  a la primera derivada parcial  $\frac{\partial D}{\partial a_0}$
  - $\frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_1}, \frac{\partial^2 D}{\partial a_1^2}, \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_2}, \dots, \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_q}$  a la primera derivada parcial  $\frac{\partial D}{\partial a_1}$
  - $\frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_2}, \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_2}, \frac{\partial^2 D}{\partial a_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 D}{\partial a_2 a_q}$  a la primera derivada parcial  $\frac{\partial D}{\partial a_2}$
  - $\frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_q}, \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_q}, \frac{\partial^2 D}{\partial a_2 a_q}, \dots, \frac{\partial^2 D}{\partial a_q^2}$  a la primera derivada parcial  $\frac{\partial D}{\partial a_q}$

Es en las segundas derivadas parciales donde se sustituyen los valores de  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_q$  obtenidos en el paso anterior, tras resolver las primeras derivadas parciales e igualarlas todas ellas a 0. Una vez hecho esto, se continúa mediante la construcción de la matriz Hessiana, que adquiere la forma que aparece en (76).

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial a_0^2} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_1} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_2} & \dots & \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_q} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_1} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_2} & \dots & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_q} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_2} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_2} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 D}{\partial a_2 a_q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_q} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_q} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_2 a_q} & \dots & \frac{\partial^2 D}{\partial a_q^2} \end{pmatrix} \quad (76)$$

El último paso que queda es hallar el valor de los determinantes correspondientes a las matrices reducidas  $\Delta_1 f, \Delta_2 f, \dots, \Delta_q f$ , siendo estas matrices reducidas las que se indican en (77). Se puede observar en ellas que para su construcción lo que se hace es escoger el mismo número de filas que de columnas (matrices cuadradas) de manera ordenada, es decir que por ejemplo para  $\Delta_1 f$  lo que tendríamos es una matriz cuadrada de 1 x 1 escogiendo los elementos que pertenezcan, al mismo tiempo, a la primera fila y a la primera columna, mientras que para  $\Delta_2 f$  lo que tendremos es una matriz reducida con todos los elementos que tengan lugar en la intersección entre las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2, por lo que aquí se tendrá una matriz 2 x 2. Se repite este proceso, por el que cada vez iremos obteniendo matrices reducidas, cuadradas siempre, de mayor tamaño hasta llegar a  $\Delta_q f$ , que es la que tiene todos los términos hasta los correspondientes al subíndice  $q$  y que por lo tanto sería igual a la matriz Hessiana completa.

Como se había dicho previamente, el fin con el que se obtienen dichas matrices reducidas es el de lograr ultimadamente el valor de sus correspondientes determinantes. Una vez se haya procedido con este paso, se podrán obtener conclusiones acerca de si el punto o los puntos obtenidos en la etapa anterior, la correspondiente a la realización de las primeras derivadas parciales, se asocian con un mínimo, un máximo o un punto de inflexión. El criterio para determinarlo en función de los resultados arrojados por los determinantes se basa en los signos arrojados por éstos en todas las submatrices, incluyendo la matriz completa  $H_f$  ya que la propia matriz se puede definir como un subconjunto de la misma, y debe seguir el orden de análisis que aquí se propone [30]:

1. Si alguno de los determinantes, ya sea de  $H_f$  o de algunas de sus submatrices da un resultado igual a 0, este criterio no es concluyente (este hecho se suele asociar a algún tipo de problemática)
2. Si algún determinante par es negativo, se trata entonces de un punto de silla
3. Si todos los determinantes son positivos, el punto crítico en cuestión es un mínimo relativo
4. Si los determinantes pares son todos positivos y los impares todos negativos, se trata de un máximo relativo

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 f &= \left( \frac{\partial^2 D}{\partial a_0^2} \right) \\
 \Delta_2 f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial a_0^2} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_1} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_1} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1^2} \end{pmatrix} \\
 &\vdots \\
 \Delta_q f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial a_0^2} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_1} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_2} & \dots & \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_q} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_1} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_2} & \dots & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_q} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_2} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_2} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 D}{\partial a_2 a_q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 D}{\partial a_0 a_q} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_1 a_q} & \frac{\partial^2 D}{\partial a_2 a_q} & \dots & \frac{\partial^2 D}{\partial a_q^2} \end{pmatrix} = H_f
 \end{aligned} \tag{77}$$

Lo que se acaba de mostrar aquí es el procedimiento para la obtención de los coeficientes del polinomio característico de la curva que mejor se ajusta a una nube de puntos de manera simbólica. Esto se puede hacer numéricamente mediante el uso de MATLAB, que será el software que se utilice para postprocesar los resultados obtenidos, con el comando 'polyfit', de la forma que a continuación sigue [31]:

$$\text{pol} = \text{polyfit}(x_d, y_d, n_p) \tag{78}$$

Este comando tiene tres entradas, que son  $x_d, y_d, n_p$ . Las dos primeras se corresponden con los valores de las abscisas y ordenadas de los puntos discretos (experimentales), respectivamente, por lo que la cantidad de datos tanto de  $x$  como de  $y$  ha de ser exactamente la misma ( $x_d = y_d$ ). Por su parte,  $n_p$  especifica el orden del polinomio que se ajustará a la nube de puntos, y 'pol' será el parámetro de salida que dará como resultado el valor de los coeficientes del polinomio, ordenados de mayor a menor grado, es decir, de  $a_q$  a  $a_0$ .

#### Procedimiento particular para ajustes lineales (orden 1)

Si bien es cierto que el procedimiento que se acaba de describir no solamente es perfectamente válido sino que además tiene la gran ventaja de ser genérico, por lo que se puede utilizar para cualquier curva de ajuste definida por un polinomio independientemente del grado de éste, también es cierto que es bastante recurrente encontrarse en la literatura un procedimiento específico para casos en los que se desea realizar un ajuste lineal, es decir, de orden 1. El mismo, si bien tiene un abanico de uso mucho más limitado y restringido también posee una característica que lo convierte en una metodología bastante potente cuando de ajuste lineales se

trata, y ésta reside en el hecho de que consiste en un procedimiento totalmente numérico (el anterior no era conceptualmente numérico y por lo tanto debía aproximarse como tal para su aplicación práctica), siendo además una metodología de aplicación directa, como se verá a continuación.

Así pues, este método parte de una serie de datos, en la forma de un par de variables, una dependiente, que llamaremos  $x$ , y otra independiente, la cual denominaremos como  $y$ . De esta forma, se tienen los valores de una serie de puntos  $x_i \equiv y_i$ , los cuales se ordenarán en forma de tabla, como aparece en la Tabla 6-1.

Tabla 6-1. Forma en la que se ha de ordenar la serie de datos experimentales iniciales

$x$	$y$
$x_1$	$y_1$
$x_2$	$y_2$
$x_3$	$y_3$
$x_4$	$y_4$
$x_5$	$y_5$
$\vdots$	$\vdots$
$x_q$	$y_q$

Lo que se ha comentado acerca de la mencionada tabla, así como de la correcta disposición y ordenación de sus datos es también conveniente hacerlo para la metodología descrita previamente, aunque la razón por la que se expone aquí es porque a continuación se va a proceder a calcular una serie de parámetros estadísticos a partir de las coordenadas de los puntos experimentales que serán de gran utilidad posteriormente, cuando se tengan que hallar los dos parámetros característicos de una recta, que son su pendiente y el punto de corte con el eje de ordenadas. Así pues, éstos son los parámetros estadísticos en cuestión:

- $S_x$ : suma de los valores de  $x$  de todos los puntos experimentales, es decir,  $S_x = \sum_{i=1}^q x_i$
- $S_y$ : suma de los valores de  $y$  de todos los puntos experimentales, es decir,  $S_y = \sum_{i=1}^q y_i$
- $S_{xx}$ : suma de los cuadrados los valores de  $x$  de todos los puntos experimentales, expresado de otra forma,  $S_{xx} = \sum_{i=1}^q x_i^2$
- $S_{yy}$ : suma de los cuadrados los valores de  $y$  de todos los puntos experimentales, expresado de otra forma,  $S_{yy} = \sum_{i=1}^q y_i^2$
- $S_{xy}$ : suma de los productos cruzados de  $x$  e  $y$  de todos los puntos experimentales, expresado de otra forma,  $S_{xy} = \sum_{i=1}^q x_i y_i$

Con todos estos nuevos parámetros descritos estamos en disposición de actualizar la tabla que habíamos conseguido anteriormente, la Tabla 6-1, en una nueva tabla, la Tabla 6-2, que recogerá y reflejará una serie de novedades, entre las cuales se encuentran los parámetros que acabamos de exponer arriba. La disposición de esta nueva tabla será la siguiente:

- Una primera columna, que se añadirá a la izquierda de las dos ya existentes, correspondientes a  $x$  e  $y$ , que se denominará  $i$ . Esta columna numerará los puntos experimentales con los que se esté trabajando de manera ordenada y de arriba a abajo, desde  $i = 1$  a  $i = q$ , siendo la casilla de esta última la penúltima de la nueva columna en cuestión, ya que la última casilla, la de la última fila, quedará reservada para hacer una suma de todos los puntos que tenemos para hallar el total de éstos
- Una serie de columnas que se colocarán a la derecha de las correspondientes a  $x$  e  $y$  y que harán referencia a  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ,  $S_{xy}$ , respectivamente. Nuevamente, se crea una casilla adicional al final correspondiente al, en este caso, sumatorio de los elementos que ocupan el resto de casillas de la columna correspondiente

Tabla 6–2. Actualización de la Tabla 6-1 considerando los nuevos parámetros

$i$	$x$	$y$	$x^2$	$y^2$	$xy$
1	$x_1$	$y_1$	$x_1^2$	$y_1^2$	$x_1y_1$
2	$x_2$	$y_2$	$x_2^2$	$y_2^2$	$x_2y_2$
3	$x_3$	$y_3$	$x_3^2$	$y_3^2$	$x_3y_3$
4	$x_4$	$y_4$	$x_4^2$	$y_4^2$	$x_4y_4$
5	$x_5$	$y_5$	$x_5^2$	$y_5^2$	$x_5y_5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$q$	$x_q$	$y_q$	$x_q^2$	$y_q^2$	$x_qy_q$
$N = q$	$S_x$	$S_y$	$S_{xx}$	$S_{yy}$	$S_{xy}$

Una vez habiéndose planteado estas cuestiones, podemos pasar a mostrar las expresiones correspondientes a los parámetros característicos de una recta, que como anteriormente se había indicado son dos: la pendiente ( $\varphi$ ) y el término independiente ( $b$ ).

$$\varphi = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{NS_{xx} - S_x S_x} \quad (79)$$

$$b = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{NS_{xx} - S_x S_x} \quad (80)$$

Por otra parte, también se suele especificar en esta metodología concreta un concepto bastante recurrente en ella, denominado ‘Coeficiente de correlación lineal’, que se define como una medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas. En otras palabras, este coeficiente nos indica cuánto buena (o mala) es la aproximación que estamos haciendo, en el sentido de cómo la disposición de los puntos experimentales se asemeja o no a una recta. La expresión correspondiente a este coeficiente de correlación lineal ( $r_l$ ) se halla en (81).

$$r_l = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{NS_{xx} - S_x S_x} \sqrt{NS_{yy} - S_y S_y}} \quad (81)$$

El coeficiente  $r_l$  puede adquirir valores comprendidos en el intervalo  $[-1;1]$ , implicando una muy buena correlación valores próximos a 1 o -1 y todo lo contrario cuando el valor de  $r$  se encuentra muy próximo a 0.

Con todo esto terminado solo queda por hallar un último parámetro asociado a esta metodología y que se corresponde también con el error cometido en la obtención de la mencionada recta. Se trata del parámetro  $\beta^2$ , el cual se consigue mediante una nueva actualización de la tabla con la que veníamos trabajando a lo largo de la explicación de esta metodología, la cual se integra dentro de la Tabla 6-3. La misma incluye una nueva columna a la derecha, que representa el cuadrado de la diferencia entre los valores de  $y$  experimentales y los de la recta en cuestión. La suma de los cuadrados de estas diferencias es lo que se conoce como  $\beta^2$ , es decir  $\beta^2 = \sum_{i=1}^q (b + \varphi x_i - y_i)^2$ .

Tabla 6–3. Forma de la tabla con los datos finales a considerar

$i$	$x$	$y$	$x^2$	$x^2$	$xy$	$(b + \varphi x_i - y_i)^2$
1	$x_1$	$y_1$	$x_1^2$	$y_1^2$	$x_1 y_1$	$(b + \varphi x_1 - y_1)^2$
2	$x_2$	$y_2$	$x_2^2$	$y_2^2$	$x_2 y_2$	$(b + \varphi x_2 - y_2)^2$
3	$x_3$	$y_3$	$x_3^2$	$y_3^2$	$x_3 y_3$	$(b + \varphi x_3 - y_3)^2$
4	$x_4$	$y_4$	$x_4^2$	$y_4^2$	$x_4 y_4$	$(b + \varphi x_4 - y_4)^2$
5	$x_5$	$y_5$	$x_5^2$	$y_5^2$	$x_5 y_5$	$(b + \varphi x_5 - y_5)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$q$	$x_q$	$y_q$	$x_q^2$	$y_q^2$	$x_q y_q$	$(b + \varphi x_q - y_q)^2$
$N = q$	$S_x$	$S_y$	$S_{xx}$	$S_{yy}$	$S_{xy}$	$\beta^2$

Mediante el recién expuesto parámetro  $\beta^2$  se calcula lo que se denomina como ‘Error en la pendiente’, que se expresa como se indica en (82). Este error no es más que la incertidumbre que se le aplicaría al valor de la pendiente. De forma análoga, también sucede lo mismo con el valor del término independiente, lo cual queda reflejado en (83).

$$e(\varphi) = \sqrt{\frac{N}{NS_{xx} - S_x S_x} * \frac{\beta^2}{N - 2}} \quad (82)$$

$$e(b) = \sqrt{\frac{S_{xx}}{NS_{xx} - S_x S_x} * \frac{\beta^2}{N - 2}} \quad (83)$$

De esta forma, los resultados se expresarían, para la pendiente, como  $\varphi \pm e(\varphi)$ , y como  $b \pm e(b)$  para el término independiente.

Así pues, a lo largo de este apartado se han descrito dos metodologías de resolución de problemas de ajuste, siendo una de ellas más genérica, que es válida para polinomios de cualquier orden pero que conceptualmente es más compleja, y otra metodología mucho más simple y directa pero que solo es válida para polinomios de orden 1. También, en cuanto a este último método se refiere, es bastante recurrente encontrar conceptos complementarios más allá del procedimiento de obtención de la recta propiamente dicha, como son el coeficiente de correlación lineal y los errores en la pendiente y en el término independiente.

### 6.3 Overfitting y Underfitting

Los conceptos de overfitting y underfitting son de gran relevancia cuando a la realización de un ajuste polinómico nos estamos refiriendo. El primero de ellos hace referencia a un excesivo ajuste de la nube de puntos con la que estamos trabajando, es decir, que el orden del polinomio que caracteriza la curva es demasiado elevado, mientras que el segundo es justamente lo contrario, en otras palabras, que el ajuste de la curva obtenida se encuentra por debajo del que debería, o lo que es lo mismo, el polinomio que caracteriza a la curva que ajusta la nube de puntos tiene un orden más bajo del que debiera. Sea uno u otro el caso, si se nos presentara alguno de ellos no suele ser un buen indicativo por dos motivos:

1. Si estamos ante un caso de underfitting, directamente tendremos un problema de falta de fiabilidad en lo que a la predicción en la evolución de la variable dependiente respecto de la independiente se refiere. Esta falta de fiabilidad viene, a su vez, por dos motivos: en primer lugar, aunque estemos trabajando con una curva cuyo ajuste sea el mejor posible, normalmente se cometerá un cierto error. En segundo lugar, si además estamos ajustando la nube de puntos a una curva con un polinomio que

no es el más correcto, estaremos aumentando dicho error. Este fenómeno también ocurre ante un caso de overfitting, como se aprecia en la imagen de la derecha de la Figura 6-2, aunque bien es cierto que para el caso en el que tengamos dicho overfitting, este error puede verse claramente reducido si contamos con una cantidad lo suficientemente elevada de puntos, como se puede ver en la Figura 6-3.

2. Para los casos en los que tengamos overfitting tendríamos otra posible fuente de error, que esta vez afectaría a la derivada de la variable que se esté ajustando en forma de oscilaciones en dicha variable derivada que en nada se asemejaría a lo que ocurriría en la realidad.

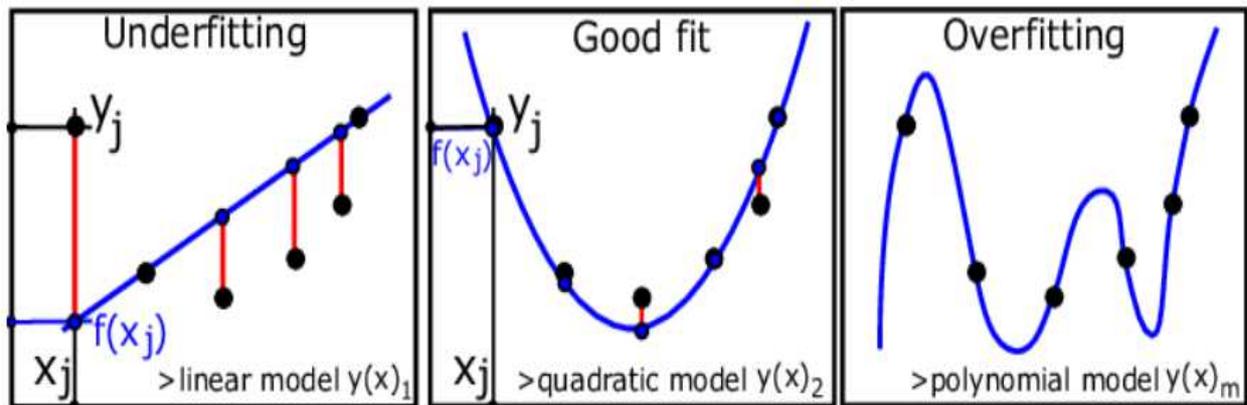


Figura 6-2. Ajuste insuficiente, a la izquierda, ajuste idóneo, en el medio, sobreajuste, a la derecha [32]

En la Figura 6-2 se muestra un ejemplo de la disposición de una serie de puntos experimentales que, de antemano, se sabe que sigue una evolución ideal de tipo cuadrático o similar, es decir, algo como lo que se aprecia en la imagen del medio de la mencionada figura. Sabiendo esto ya se pueden conocer las consecuencias que tiene el ajustar más o menos de lo debido. Tanto en un caso como en otro la forma de la curva se aleja considerablemente de la que debería, ocasionándose los errores comentados en el punto 1.

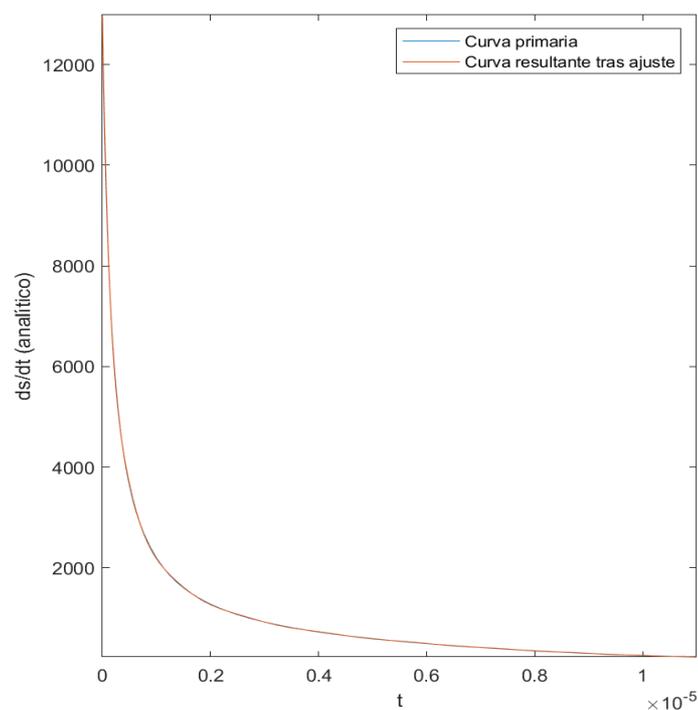


Figura 6-3. Ejemplo de ajuste por mínimos cuadrados con polinomio de grado 20. Curva con puntos experimentales (azul) y curva ajustada (roja)

En la Figura 6-3, por su parte, se muestran dos curvas superpuestas, siendo la azul la correspondiente a los datos experimentales y la roja a la curva ajustada. A pesar de las oscilaciones, pequeñas, que se pueden observar en la curva ajustada, se puede apreciar la gran exactitud con la que se ajusta la curva, a pesar de haber impuesto un polinomio de grado 20 (muy alto, overfitting). Esto se debe al hecho de que la cantidad de puntos es muy elevada, tal y como habíamos dicho antes. La imagen de dicha figura ha sido extraída de uno de los ensayos que se mostrarán más adelante, y que se ha puesto aquí a modo ilustrativo.

# 7 SIMULACIONES NUMÉRICAS

*“La cortesía es conducirse de modo que los demás queden satisfechos de nosotros y de ellos mismos”*

*- Jean de la Bruyere-*

## 7.1 Introducción

Este capítulo se encuentra dividido en dos partes. En primer lugar, se expondrán los efectos, de forma cualitativa, que la presencia de fricción tendría en un ensayo real. Si bien es cierto que los ensayos que aquí se van a llevar a cabo son virtuales, esta estimación superficial de los efectos de la fricción mediante EF nos permitirá obtener una idea de cómo la misma puede afectar a la fiabilidad de los resultados obtenidos si se hiciese estos ensayos de manera física. En la Figura 7-1 se muestra una comparación entre la forma inicial y final de la probeta para los ensayos estáticos y dinámico, sin considerar rozamiento. De esta forma podremos darnos cuenta de cómo el rozamiento influye en la forma que dichas probetas adquieren y por tanto estimar, aunque sea de manera superficial, el efecto que éste tendría sobre la fiabilidad de los resultados en el caso de que tuviesen lugar estos ensayos en un laboratorio.

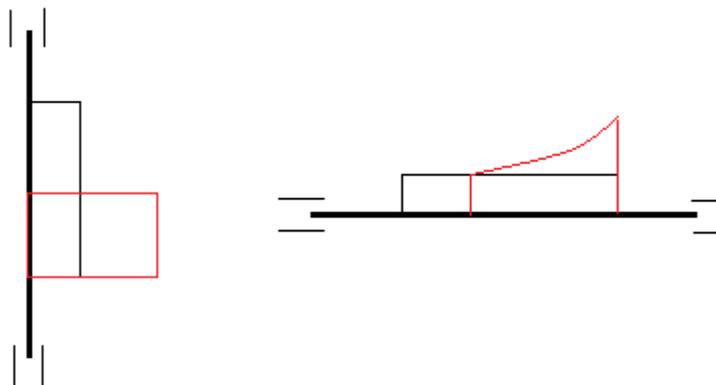


Figura 7-1. Comparación de las formas inicial (negro) y final (rojo) de la probeta para los casos estático (izquierda) y dinámico (derecha) sin rozamiento

En segundo lugar, se le dedicará un apartado, el apartado 7.3, a describir las condiciones a las que se van a ver sometidas las probetas virtuales (no se considerará rozamiento aquí) en los ensayos en EF a partir de los cuales sí se van a obtener los resultados que nos interesan (véase capítulo 8).

## 7.2 Los efectos de la presencia del rozamiento

A continuación se procederá a estudiar las consecuencias que la existencia del rozamiento entre las superficies de contacto del cilindro y pared tiene sobre la fiabilidad de los métodos aplicados. Para ello, se configurarán tres ensayos diferentes, uno estático sin considerar el rozamiento, otro, también estático, que sí lo tenga en

cuenta, y uno de impacto que también considere la fricción. Así pues, a continuación se definen las características de cada uno de estos ensayos:

- Experimento 1: ensayo estático sin fricción
  - Geometría y mallado: el cilindro de prueba contará con una altura de 2 cm y un diámetro de 0.5 cm, representándose solamente la mitad de esta última dimensión, por motivos de ahorro computacional. Por su parte, también se han modelado dos mordazas, las cuales se han considerado como completamente rígidas, que serán las que compriman a la pieza cuando se les aplique la fuerza pertinente. En la Figura 7-2 se muestra dicha geometría. Por su parte, el mallado consiste en elementos cuadrados cuadráticos, todos iguales, resultante tras dividir el radio en 32 particiones y la longitud en  $32*8=256$  divisiones

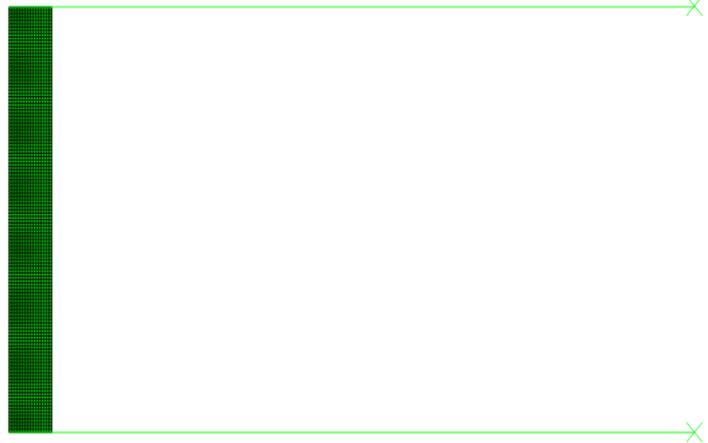


Figura 7-2. Modelo geométrico del ensayo estático de compresión

- Propiedades del material: aquí vamos a introducir los datos característicos del material, que ya se saben, teniéndose en cuenta que el material con el que vamos a trabajar será el denominado Nimonic 80A [33]:
  - Coeficiente de Poisson: 0.3
  - Módulo de elasticidad: 183 GPa
  - Temperatura de fusión: 1365°C
  - Temperatura de transición: 927°C
  - Densidad:  $8190 \text{ kg/m}^3$
  - Coeficiente de dilatación térmica:  $12.7 * 10^{-6} \text{ C}^{-1}$
  - $A$ : 487 MPa
  - $B$ : 2511 MPa
  - $C$ : 0.012
  - $n$ : 0.983
  - $m$ : 1.162
  - $\varepsilon_0$ :  $10^{-3} \text{ (s}^{-1}\text{)}$
- Configuraciones de contacto: Se utilizará un contacto de tipo superficie-superficie entre la cara superior de la probeta y la mordaza superior y otro contacto del mismo tipo entre la mordaza y cara inferior del cilindro, al aportar resultados más precisos [34]. Por su parte, también se ha optado por el método de contacto de los multiplicadores de Lagrange en vez del de penalización debido a que es aconsejable tener cierta experiencia para el uso del último

- Aplicación de condiciones de contorno y fuerzas: La mordaza inferior se encuentra totalmente restringida en su movimiento, tanto rotacional como traslacional, en su extremo derecha (véase Figura 7-2). Por su parte, en el mismo punto pero de la mordaza superior se aplica una fuerza, que aquí será de 10000 N, y su movimiento solo está permitido en la dirección vertical. Además, los puntos pertenecientes al centro de la sección transversal del cilindro (línea vertical de la izquierda del cilindro en la Figura 7-2) estarán sometidos a una restricción de simetría, impidiéndose su movimiento horizontal.
- Experimento 2: igual que el experimento 1 pero incluyendo un coeficiente de fricción de 0.8 entre las bases del cilindro y las mordazas con las que éstas entran en contacto

Lo que ocurre cuando se ejecuta el experimento estático que incluye fricción (experimento 2) es el siguiente cambio de forma (escala 30:1), el que se observa a continuación, en la Figura 7-3. Este cambio de forma (la compresión longitudinal y el ensanchamiento transversal son uniformes cuando no hay fricción, véase imagen de la izquierda de la Figura 7-1) provoca la aparición de otras componentes de tensión además de la longitudinal. Esto sugiere que los parámetros de JC que se obtendrían de manera experimental serán más bajos que los reales. Dicho cambio de forma es explicable si consideramos los conceptos que se muestran en el capítulo 5 acerca del contacto.

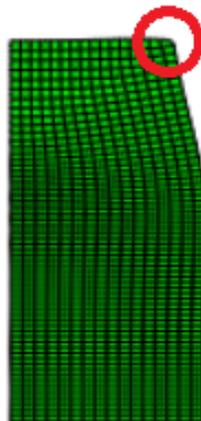


Figura 7-3. Deformada del cuarto superior-derecha del cilindro cuando se somete a compresión estática

- Experimento 3: ensayo de Taylor con coeficiente de fricción de 0.8
  - Geometría: el modelo geométrico correspondiente al ensayo dinámico, el de impacto de Taylor, será similar al tratado en los ensayos estáticos pero con dos diferencias que conviene comentar: por un lado, solo vamos a contar con una única mordaza, que no actuaría como tal sino como la pared rígida sobre la que la probeta impactaría. Dicha pared se ha modelado considerando un radio de 4 cm, de manera que la misma sea lo suficientemente grande como para que la deformación de la probeta no alcance sus límites y de esta forma no falsear los resultados obtenidos. Por otro lado, también se ha decidido aumentar el radio del cilindro de 0.25 cm a 0.5 cm para que la longitud sea solo 4 veces mayor que el radio y de esta forma reducir el efecto mostrado en la Figura 7-4. El modelo con el que partimos aquí se muestra en la Figura 7-5, aunque de inicio estaría sin deformar ya que no se habría iniciado el choque aún. Por último, decir que en la imagen correspondiente a esa figura no se muestra toda la pared porque si no se apreciaría correctamente la probeta de prueba

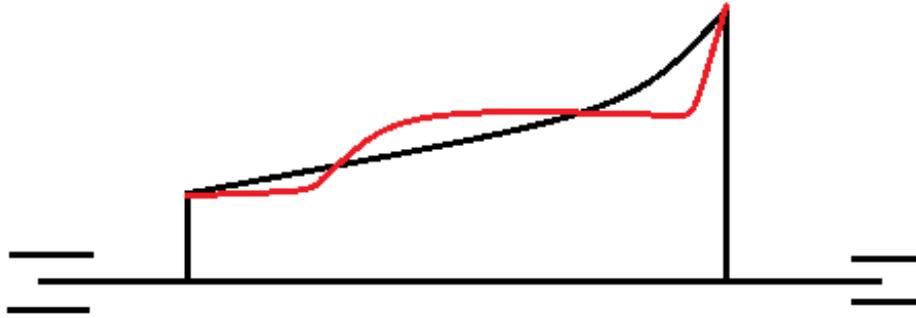


Figura 7-4. Deformada ideal (negro) y real (rojo) para altas velocidades de impacto

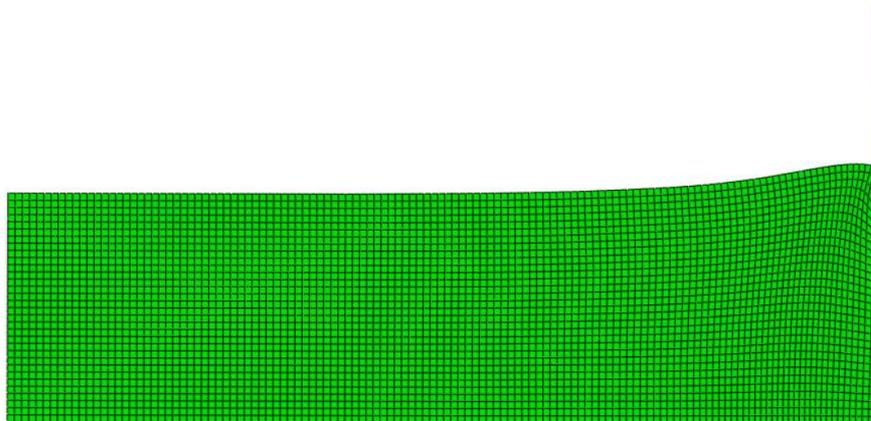


Figura 7-5. Deformada ampliada, con escala de 5, en el último instante de tiempo calculado, de la bala en un ensayo de Taylor cuando hay rozamiento

- Las propiedades de los materiales y los ajustes relativos al contacto son exactamente los mismos que para los casos anteriores
- Condiciones de contorno y fuerzas aplicadas: la variación de las condiciones de contorno son similares a las que tienen lugar en el modelo geométrico. Esto significa que las condiciones de contorno de la pared rígida son las mismas que las de lo que anteriormente era la mordaza inferior, eliminándose las aplicadas a lo que previamente era la mordaza superior al no existir ésta ahora. Se sigue manteniendo la condición de contorno de simetría en la línea correspondiente al eje del cilindro. Por último, la fuerza que anteriormente se aplicó en la mordaza superior con el fin de comprimir la probeta en los ensayos estáticos se sustituye por una velocidad de traslación del cilindro de 90 m/s, que será la velocidad con la que el mismo impacte contra la pared. La razón por la que se ha escogido esta velocidad, que se puede considerar relativamente baja en comparación con la que tendría lugar en otros ensayos y con otros materiales [35], se debe a que si el valor de la misma es demasiado elevado corremos el riesgo de obtener una deformada que no se ajuste correctamente a la forma que se le supone que ha de tener (esto cobrará gran importancia cuando se ajusten los análisis cuyos resultados son el objeto de estudio de este trabajo, en el próximo apartado), significando esto una nueva fuente de error. En la Figura 7-4 se muestra una comparación, para una de las dos mitades simétricas del cilindro, entre la deformación que se espera obtener y la que se conseguiría si la velocidad de choque es excesivamente elevada
- Se ha impuesto un tiempo máximo de prueba de 30  $\mu$ s, el cual es suficiente para que se desarrolle el impacto de manera adecuada. Por su parte, la malla estará también conformada por elementos cuadrados de orden 2, habiendo 32 divisiones en el radio y 4 veces más en la

longitud, 128. Podemos ver que aquí se ha utilizado un mallado menos fino que para el caso estático. En teoría, en un ensayo de impacto como éste se debería, de hecho, utilizar una malla mucho más fina que la que aquí se ha propuesto pero también hay que considerar que con los medios con los que se cuenta un mallado más refinado sería inviable desde el punto de vista computacional. Para que, por su parte, el número de Courant sea como máximo 1 (véase capítulo 3) hay que considerar el tamaño característico del elemento y la velocidad de propagación de la onda elástica. Por tanto, para poder hallar el tiempo de paso hay que calcular primero la velocidad de transmisión de la onda en el medio, para lo cual es necesario aplicar la expresión (18), siendo necesario conocer de antemano  $\lambda$  y  $G$ , las cuales se hallan a partir de los datos anteriormente aportados de las propiedades del material, a partir de las expresiones (84) y (85), respectivamente.

$$\lambda = \frac{E\mu}{2(1 + \mu)} \quad (84)$$

$$G = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \quad (85)$$

Dando un resultado de 105.58 GPa para  $\lambda$  y de 70.38 GPa para  $G$ . Introduciendo estos valores en la ya mencionada expresión (18) se obtiene una velocidad de propagación de onda  $c_1$  de 5484.36 m/s. Nótese que de las dos velocidades de propagación de onda que hemos descrito en el capítulo 3,  $c_1$  y  $c_2$ , solo hemos escogido  $c_1$ , la correspondiente a la componente longitudinal. Esto se debe a que como en esa dirección la velocidad de propagación es más elevada que en la de cizalla y las dimensiones del elemento son iguales lo que tendremos será un paso de tiempo determinado por la relación entre el tamaño característico del elemento (longitud del lado) y la velocidad más alta, que es  $c_1$ . Así pues, dicho paso de tiempo resulta ser de  $28 * 10^{-9} s$ . En nuestro caso este parámetro, con el fin de evitar problemas relacionados con la convergencia, se ha establecido en  $10^{-8} s = 10 * 10^{-9} s$

En cuanto a la obtención del parámetro dinámico de JC se refiere, el hecho de que exista rozamiento implica no solamente la posibilidad de que se generen nuevas componentes de tensión sino que además la forma que adquiere la probeta tras el impacto se empieza a alejar de la que el modelo utilizado, en el apartado 2.3, sugiere (véase la forma Figura 7-5, y de la Figura 7-6, abajo, para mayor detalle, y compárese con la deformada, en rojo, de la imagen de la derecha de la Figura 7-1). Así pues, debe tenerse un especial cuidado, aun más si cabe, en lo que a reducir el rozamiento entre las superficies al mínimo posible se refiere.

Así pues, se aconseja una correcta elección de la superficie de contacto para las mordazas tanto para que éstas puedan soportar grandes temperaturas (cuando se halla  $m$ ) como para que la fricción sea lo más baja posible, si estamos hablando de un ensayo estático. Cuando se trata de un ensayo de impacto de Taylor, dichas superficies, además de poseer también un coeficiente de fricción lo más pequeño posible deben, además, ser lo suficientemente duras para no sufrir deformaciones permanentes durante los impactos y lo bastante rígidas para no distorsionar los resultados finales. También se podría investigar el uso de lubricantes específicos.

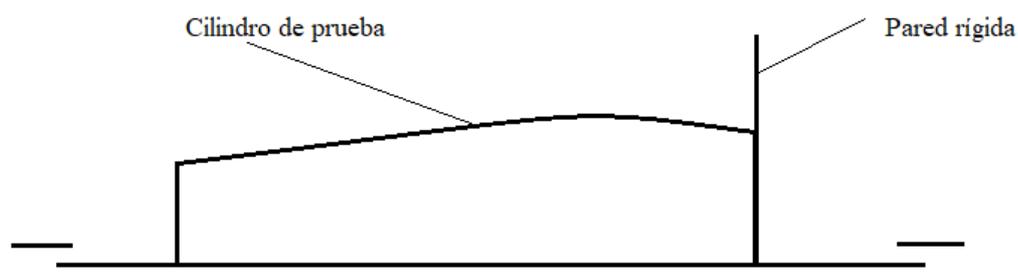


Figura 7-6. Representación de la forma adquirida por el cilindro en un instante determinado durante el impacto

### 7.3 Ajustes preliminares para ensayos virtuales en EF

En este apartado se mostrarán los ajustes previos que han de caracterizar a nuestro modelo de EF a la hora de realizar los ensayos a partir de los cuales se obtendrán los resultados que aquí estamos buscando. En otras palabras, se hará lo mismo que en el apartado anterior pero enfocado ya directamente en la obtención de los parámetros de JC del material y no para comprobar los efectos, de manera cualitativa, que el rozamiento puede tener en la probeta de prueba. Así pues, los ajustes que a continuación se propondrán serán para la realización de experimentos virtuales en los que no se tenga en cuenta el rozamiento, ya que de lo que aquí se trata es puramente de determinar la fiabilidad de los métodos propuestos, por lo que es necesario aislar, ahora que tenemos la oportunidad de ejecutar estos ensayos de manera virtual, los resultados que nuestro método arroja de la influencia que la existencia de rozamiento puede tener en los resultados tras la aplicación de los mismos. Lo que se ha hecho en el apartado anterior en referencia al rozamiento es simplemente para poder estimar de manera cualitativa los efectos negativos que tiene sobre nuestro análisis dicho fenómeno, siempre y cuando no se controle adecuadamente.

#### 1. Ensayos para la obtención de $A, B, n$

Los ajustes que son necesarios aplicar para la realización de los ensayos con los cuales obtendremos  $A$  por un lado y  $B, n$  por otro son exactamente los mismos, e idénticos a los del experimento 1 del apartado anterior, con una única diferencia, que residiría únicamente en la carga aplicada. De esta forma:

- Carga aplicada para la obtención de  $A$ : carga máxima de 12000 N, con intervalos de carga de 5 N. La carga máxima se ha impuesto suponiendo que con ella se conseguirá superar el límite de fluencia del material en condiciones estáticas (cuasiestáticas en la realidad), y por tanto hallar el valor de este parámetro. Como adelanto, diremos aquí que, efectivamente, con este valor de  $A$  se consigue superar el límite de fluencia. Por su parte, el hecho de haber impuesto un intervalo de carga de 5 N implica que se registrarán datos tanto de los desplazamientos longitudinales como de los transversales (datos fundamentales a partir de los cuales podremos obtener las deformaciones longitudinales y radiales, además de las tensiones, longitudinales, a las que la probeta se ve sometida)
- Carga aplicada para la obtención de  $B, n$ : aquí es necesario probar con diferentes cargas, todas ellas han de ser lo suficientemente elevadas como para provocar la fluencia del material. Así pues, las cargas con las que se han realizado los distintos experimentos son, en N: 9800, 10000, 10500, 12000, 12500, 13000, 13500, 14000, 14500 y 15000 (como se verá en el próximo capítulo todas estas cargas no solamente son lo suficientemente altas como para originar plastificación del material sino que además también son lo bastante altas como para no generar problemas numéricos, véase más al respecto en el capítulo 4). Por su parte, el incremento de carga impuesto aquí es también de 5 N

#### 2. Ensayos para la obtención de $m$

Se tratará de un ensayo idéntico al experimento 1 del apartado 7.2, solo que esta vez, además de la eliminación del rozamiento, se procederá a imponer distintas temperaturas al inicio de la compresión, siendo la primera de ellas de 900°C, con el fin de hallar las temperaturas de transición y fusión, pero que se ha de ir modificando hasta encontrar el valor que estamos buscando para las mismas. Más información sobre las distintas temperaturas con las que se ha ido trabajando en el próximo capítulo, correspondiente a los resultados obtenidos.

#### 3. Ensayos para la obtención de $C$

El experimento realizado aquí es una copia exacta del experimento 3, comentado en el apartado anterior, con la única diferencia de que aquí se elimina el rozamiento.

## 8 RESULTADOS

*“No se puede poseer mayor gobierno, ni menor, que el de uno mismo”*

*- Leonardo Da Vinci-*

Lo que a continuación sigue son los resultados arrojados por los distintos ensayos virtuales realizados para la obtención de los valores de cada uno de los parámetros característicos del modelo de JC para el material Nimonic 80A. Trataremos lo referente a los ensayos para la obtención de estos parámetros por separado, considerando por un lado los ensayos estáticos y por otro lado el ensayo dinámico, de impacto de Taylor.

Para cada uno de los casos objeto de estudio, esto es, todos los ensayos realizados con su correspondiente postproceso, se obtendrán como adelanto unas conclusiones particulares acerca de la fiabilidad tanto del ensayo en cuestión como de la forma en la que se tratan los datos que arroja el mismo. Estas conclusiones no sustituirán a las conclusiones generales de este trabajo, las cuales quedarán expuestas en el próximo capítulo, sino más bien que con ellas se intenta aportar una pincelada en lo que a los pros y contras que el uso de las técnicas aquí propuestas tienen.

### 8.1 Ensayos estáticos

El tratamiento que se ha de realizar de los datos conseguidos en los tests estáticos es mínimo, siendo los datos más complejos de postprocesar los relativos al ensayo dinámico, para la obtención de  $C$ . Tanto aquí como en el apartado 8.2, el correspondiente al ensayo dinámico, se comentarán, además, las particularidades que vayan surgiendo durante la aplicación práctica del procedimiento y que se considere que pueda tener una cierta influencia sobre los resultados que se extraigan a través de ellos, en términos del error que puedan ocasionar, y por ende de la fiabilidad de los mismos.

#### 1. Obtención de $A$

Como se indicó en el capítulo anterior, se han probado con valores de carga que van desde 0 hasta 12000 N, con intervalos de aplicación de la misma de 5 N para que el error cometido en la evaluación del valor de  $A$  sea el menor posible. En la Figura 8-1 se muestra la relación entre la tensión a la que se ve sometido el cilindro de prueba con la deformación, ambas reales, es decir, que la tensión se ha obtenido considerando el área de la sección transversal ensanchada por la compresión y para la deformación se ha utilizado la expresión que define la deformación real y no la ingenieril.

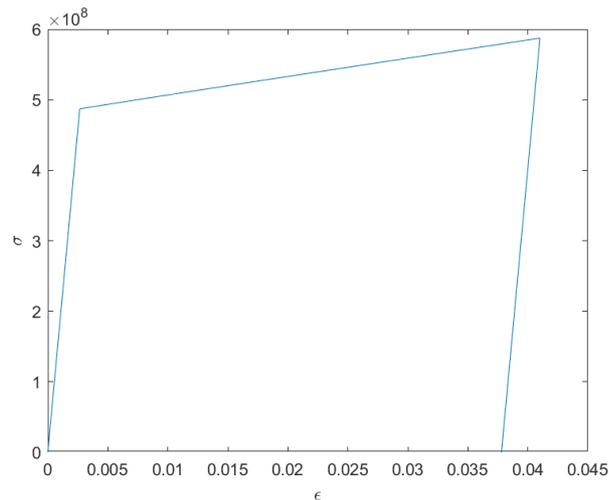


Figura 8-1. Evolución de la tensión respecto de la deformación en un ensayo estático para hallar  $A$

En la mencionada figura podemos apreciar algunos aspectos importantes: por un lado, la suposición de que una carga aplicada de 12000 N es suficiente para provocar la plastificación del material era cierta. Se puede ver cómo el tramo en el que el material se encuentra plastificado es prácticamente una línea recta, dándose una curva muy parecida a la que aportaría un modelo elastoplástico con endurecimiento simple. Esto se debe a que el valor del parámetro  $n$  es muy próximo a 1, como a continuación se podrá comprobar. También indicar que la transición entre la zona elástica y plástica aparenta ser abrupta (parece ser que en un punto cambia la pendiente de manera súbita), lo cual no es exactamente así ya que en la Figura 8-2, una ampliación de la Figura 8-1, se ve cómo hay un pequeño tramo de transición entre ambas zonas.

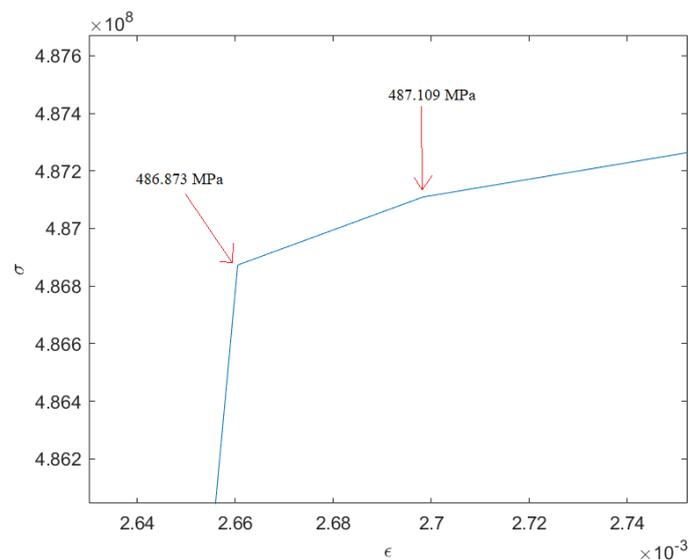


Figura 8-2. Ampliación de la Figura 8-1 en la transición elástico-plástica

Esta transición se sitúa en el entorno del valor real de  $A$ , de 487 MPa. En teoría, dicha transición del tramo elástico al plástico debería ser súbita, es decir, un punto en el que confluyan las dos pendientes y no este pequeño segmento. Esto ocurre debido al error que se comete al considerar un intervalo de carga. En este caso, al ser el mismo muy pequeño, de 5 N, el error relativo también lo será. La incertidumbre absoluta que estamos cometiendo a la hora de hallar  $A$  es la diferencia entre los valores mostrados en la Figura 8-2, es decir  $487.109 - 486.873 = 0.236$  MPa. En cuanto a la

incertidumbre relativa, ésta será, considerándose el peor de los casos (el peor de los casos sería que el valor de  $A$  fuese el más pequeño posible dentro de ese intervalo, es decir, 486.873 MPa),  $\frac{0.236 \text{ MPa}}{486.873 \text{ MPa}} = 0.000484726 \approx 0.048\%$ . Por lo tanto, el error debido a la incertidumbre provocada por el incremento de carga impuesto para la medición de los desplazamientos tanto transversales como longitudinales es mínimo. Por su parte, el error cometido respecto del valor real de  $A$  es aun menor, ya que éste se encuentra entre los dos valores extremos indicados de la Figura 8-2.

En definitiva, se puede afirmar que el ensayo que ha sido necesario aplicar aquí es el típico de compresión estática, de manera que si se tiene en cuenta la variación de las dimensiones de la probeta según va avanzando la compresión, el rozamiento es lo suficientemente bajo como para poder despreciarlo y el incremento de carga elegido para guardar los distintos valores de los desplazamientos, tanto radiales como axiales, es suficientemente pequeño se puede hallar con gran exactitud el valor del parámetro  $A$  de un material sin excesivo costo de tiempo y material.

## 2. Obtención de $B, n$

Aquí, como ya se comentó antes, se van a probar distintas cargas, de las cuales la mínima va a ser de 9800 N y la máxima de 15000 N, con el fin de obtener una nube de puntos  $\ln(\sigma_Y - A) \equiv \ln(\bar{\epsilon}_{pl})$  en el estado plástico del material a partir de la cual se podrá obtener la recta ajustada que caracterice los parámetros del material  $B, n$  (véase capítulo 4). Así pues, en la Figura 8-3 se muestra dicha nube de puntos con su correspondiente recta ajustada tras realizar el ensayo virtual en EF para el material Nimonic 80A.

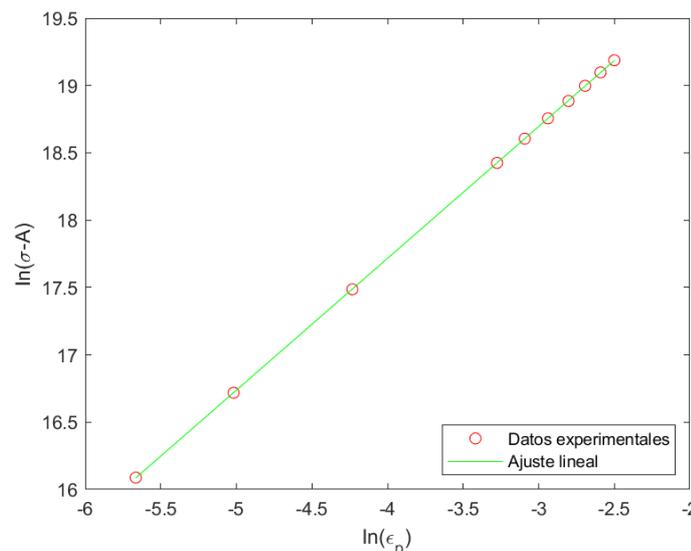


Figura 8-3. Nube de puntos  $\ln(\sigma_Y - A) \equiv \ln(\bar{\epsilon}_{pl})$  y su correspondiente recta ajustada

En la Figura 8-3 se muestra la nube de puntos experimentales  $\ln(\sigma_Y - A) \equiv \ln(\bar{\epsilon}_{pl})$ , en forma de circunferencias rojas, junto con su correspondiente recta ajustada, en verde. De la imagen correspondiente se pueden extraer dos conclusiones interesantes: a simple vista puede parecer que la nube de puntos experimentales se acopla perfectamente a la recta ajustada. Esto se debe a que  $n \approx 1$ , por lo que la relación entre  $\ln(\sigma_Y - A)$  y  $\ln(\bar{\epsilon}_{pl})$  es prácticamente lineal. Si ampliamos la imagen en uno de los puntos experimentales, por ejemplo el primero de ellos, el correspondiente al de una carga de 9800 N (se encuentra en la zona inferior izquierda de la Figura 8-3) se puede observar que el punto experimental no coincide exactamente con la recta ajustada, lo cual es lo lógico, véase Figura 8-4. Por otro lado, también recalcar que los tres primeros puntos, los correspondientes a las cargas de 9800 N, 10000 N y 10500 N, se encuentran considerablemente separados del resto de los puntos, correspondientes a las demás cargas. Una de las razones por la que esto tiene lugar se debe a que estas

tres cargas son claramente menores que las demás. La idea al probar con las mismas era la de comprobar si éstas son lo suficientemente pequeñas como para causar problemas numéricos debido a las características matemáticas del modelo de JC. Por lo que se puede ver, estas cargas siguen siendo lo bastante elevadas como para originarse problemas del mencionado tipo, por lo que los puntos que se originan a través de la aplicación de las mismas se siguen alineando bastante bien con los de las demás cargas.

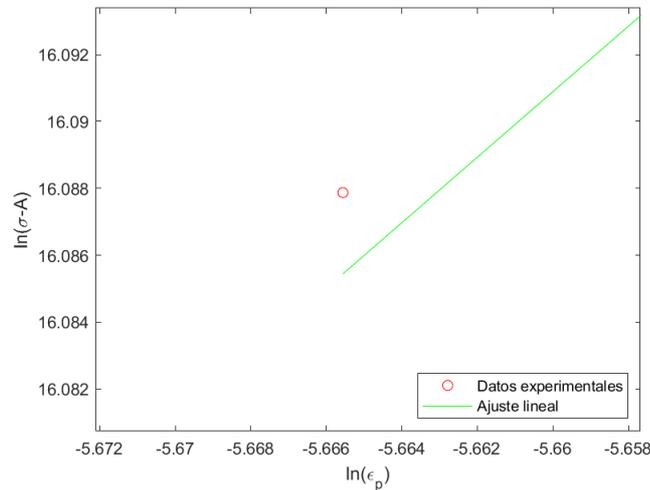


Figura 8-4. Ampliación de la imagen de la Figura 8-3

Tabla 8-1. Valores de la nube de puntos  $\ln(\sigma_Y - A) \equiv \ln(\overline{\varepsilon}_{pl})$  tras ensayo experimental en EF

$\ln(\overline{\varepsilon}_{pl})$	$\ln(\sigma_Y - A)$
-5.6656	16.0879
-5.0179	16.7184
-4.2330	17.4861
-3.2754	18.4255
-3.0922	18.6053
-2.9391	18.7557
-2.8028	18.8847
-2.6930	18.9975
-2.5912	19.0975
-2.4998	19.1872

En la Tabla 8-1 se proporcionan los valores discretos, obtenidos mediante experimentación, que se muestran en la Figura 8-3, de forma numérica. Esto da como resultado unos valores de  $n$  y  $\ln(B)$ , resultando el del primero de los parámetros,  $n$ , de **0.9792**, mientras que  $\ln(B)$  adquiere un valor de 21.6332. Nótese que lo que acabamos de obtener en el segundo caso no es  $B$ , sino su logaritmo neperiano. De esta forma,  $B = e^{\ln(B)} = e^{21.6332} = \mathbf{2484.159 MPa}$ . Así pues, comparando los valores de  $n$  y  $B$  obtenidos aquí con los impuestos en el modelo de EF se observa lo siguiente:

$$\% \text{ error relativo } (n) = \frac{0.983 - 0.9792}{0.983} * 100 = 0.387\%$$

Lo que se acaba de hacer es calcular la diferencia entre el valor real de  $n$  y su valor tras el procedimiento que acabamos de poner en práctica para luego dividirlo respecto del valor real de este parámetro y así conseguir el error relativo al mismo. Se puede observar que dicho error es muy pequeño, por lo que todo indica que por el momento estamos en la buena dirección. A continuación se hará lo propio para el parámetro  $B$ .

$$\% \text{ error relativo } (B) = \frac{2511 - 2484.159}{2511} * 100 = 1.07\%$$

Como se puede apreciar, el error relativo asociado al parámetro  $B$  es mayor que el asociado al parámetro  $n$ . La principal razón por la que esto ocurre se debe a que  $B$  no se halla de manera directa sino que en un primer momento lo que conseguimos es  $\ln(B)$  y a partir de ella  $B$ . Al pasar de  $\ln(B)$  a  $B$  el valor se ve sometido a un incremento considerable y cualquier error que pudiera llevar implícito  $\ln(B)$  también. Aun así, ese error es del solo un 1% por lo que también supone un buen indicativo en cuanto al acierto de la metodología utilizada. El hecho de que se produzca este error respecto de los valores de los parámetros de entrada puede deberse, al menos en parte, a cuestiones de redondeo numérico a la hora de tratarse los resultados obtenidos.

Con todo esto, ya podemos tener una idea de que el método propuesto para la obtención de  $B, n$  se puede considerar adecuado en cuanto a la fiabilidad de los resultados obtenidos se refiere siempre que tengamos cuidado en reducir al máximo el rozamiento entre las superficies del cilindro y mordaza que contactan. En este sentido, los ensayos realizados aquí son iguales que el necesario para obtener  $A$  pero con la diferencia de que en este caso, dado que se han probado con hasta diez cargas distintas, ha sido necesario utilizar diez probetas con el fin de detectar la deformación plástica a la que el material se ve sometido al descargar las mismas tras alcanzarse la máxima carga. Es cierto que se podía haber utilizado una única probeta cargándola hasta el nivel deseado para inmediatamente descargarla hasta cero y luego repetir el proceso con las demás cargas. Sin embargo, dado que la curva que rige el comportamiento plástico no es una recta perfecta, aunque se le parece mucho ( $n$  no es igual a 1), podríamos estar generando una nueva fuente de error, aunque bien es cierto que dicho error no debería ser muy elevado. Sin embargo, se ha decidido aquí optar por un procedimiento más conservador, eliminándose este posible error que pudiera tener lugar.

### 3. Obención de $m$

Es necesario en primer lugar hallar las temperaturas de fusión y de transición. No se explicará aquí la obtención del resultado de la primera dado que su procedimiento es directo. Obviamente, dicha temperatura de fusión es exactamente la que anteriormente se indicó, de 1365°C. Sin embargo, para el caso de la temperatura de transición se ha actuado de la siguiente manera: se ha empezado con una temperatura de 900°C para comprobar si los resultados, en términos de desplazamiento longitudinal, son o no iguales. De ser iguales significaría que estaríamos por debajo de la temperatura de transición, ya que ésta no habría ocasionado todavía un ablandamiento en el material. Si por el contrario no son iguales dicha temperatura de transición habrá sido superada. Así pues, lo que se pretende es aplicar un procedimiento iterativo en el que se prueben con temperaturas cada vez más cercanas a la de transición, que es la que estamos buscando. A continuación, en la Tabla 8-2, se muestran las temperaturas escogidas para prueba junto con los valores de los desplazamientos longitudinales a los que se ve sometido el cilindro (podíamos haber escogido también los valores de los desplazamientos radiales o incluso ambos pero con los longitudinales por ahora nos basta), cargándose la probeta con una fuerza de compresión de 10000 N en todos los casos.

Tabla 8–2. Desplazamientos longitudinales de compresión de la probeta para distintas temperaturas para hallar la de transición

$T$ ( $^{\circ}C$ )	$UY * 10^{-4}(m)$
900	1.867
922	1.867
927	1.867
928	1.8936
932	2.0408
942	2.4983
952	3.027
977	4.57
1000	5.7137

Se puede observar, en la Tabla 8-2, que mientras nos situemos por debajo de los 927°C la respuesta del material, medida aquí como el desplazamiento al que se ve sometida la superficie del cilindro de prueba que está en contacto con la mordaza superior, es siempre la misma. Sin embargo, en el momento en el que elevamos un solo grado esta temperatura dicho desplazamiento se empieza a incrementar, aun más según va subiendo la temperatura, lo cual es lo lógico. Aunque parezca que los únicos valores que tienen sentido en esta tabla son los relacionados con hasta temperaturas de 928°C (es ahí cuando se empiezan a notar los primeros síntomas de ablandamiento), la razón por la que se han puesto en la misma temperaturas, y sus correspondientes desplazamientos longitudinales, superiores a esos 927°C es porque en el proceso iterativo llevado a cabo para hallar la temperatura de transición se ha empezado con una temperatura de 900°C, y viendo que ésta se encontraba por debajo de la temperatura buscada pasamos posteriormente a probar con 1000°C. Se observa que aquí sí que se produce un ablandamiento, por lo que se procede a escoger temperaturas intermedias entre estas dos al saber ya que la de transición se encuentra en dicho intervalo. Se intenta entonces con 922 y 977°C y sigue ocurriendo lo mismo, por lo que se pasa a comparar 927 y 952°C y se vuelve a repetir lo comentado. Por tanto, el siguiente paso ha sido comparar 932 y 942°C y aquí se aprecia que para ambas temperaturas se produce el mencionado ablandamiento, por lo que se ha escogido a continuación una temperatura situada entre 927°C (temperatura más alta hasta ahora probada en la que no se produce ablandamiento) y 932°C (temperatura más baja de las probadas en la que sí tiene lugar el efecto del ablandamiento), que ha sido de 928°C, comprobándose aquí que el fenómeno en cuestión también tenía lugar, por lo que resulta ser que la temperatura más alta a la cual el comportamiento del material se mantiene inalterado es 927°C, estableciéndose ésta como la temperatura de transición. Por su parte, se han elegido esos valores intermedios para las temperaturas de manera aleatoria.

Una vez se ha terminado este paso previo, el cual es de vital importancia para la posterior obtención de  $m$ , pasamos a repetir lo anteriormente realizado pero para las temperaturas de 1000°C, 1100°C, 1200°C y 1300°C, sabiendo que todas ellas se encuentran por encima de la temperatura de transición pero por debajo de la de fusión. En este caso no nos limitaremos únicamente a obtener los desplazamientos en dirección longitudinal de la cara en contacto con la mordaza superior sino que también tendremos en cuenta los desplazamientos radiales para con ellos poder lograr la deformación longitudinal y la tensión axial, ambas reales, a las que se ve sometido el cilindro de prueba. Con ellas se logrará la nube de puntos  $\ln(Q) \equiv \ln(\hat{\theta})$ .

En la Tabla 8-3 se muestran los valores de la temperatura con los desplazamientos longitudinales, UX, y los radiales, UY, mientras que en la Tabla 8-4 se hace lo propio para las deformaciones plásticas, tensiones,  $\ln(Q)$  y  $\ln(\hat{\theta})$ . La anteriormente mencionada nube de puntos queda graficada en la Figura 8-5, demostrándose mediante la Figura 8-6, siendo esta figura una ampliación de la anterior, que los puntos no se encuentran perfectamente posicionados sobre la recta ajustada, al igual que ocurría con el ensayo anterior, debido a que  $m$  no es exactamente 1 sino ligeramente distinto.

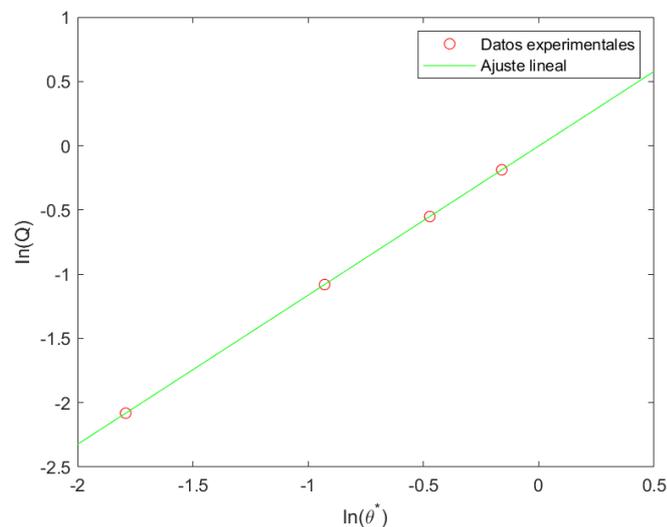
Tabla 8-3. Desplazamientos longitudinales y radiales de la probeta para distintas temperaturas, entre la de transición y la de fusión

$T (^{\circ}C)$	$UX * 10^{-4}(m)$	$UY * 10^{-4}(m)$
1000	0.36496	5.7137
1100	1.0771	16.18
1200	2.559	35.418
1300	7.3064	80.234

Tabla 8-4. Demás valores de interés para distintas temperaturas, entre la de transición y la de fusión

$T (^{\circ}C)$	$\varepsilon_{pl}$	$\sigma(MPa)$	$\ln(Q)$	$\ln(\hat{\theta})$
1000	0.028985	493.945	-2.081	-1.7918
1100	0.08436	467.377	-1.0806	-0.9289
1200	0.19491	418.53	-0.5511	-0.4727
1300	0.51278	304.677	-0.1879	-0.1606

Conviene aclarar que las unidades de  $\ln(Q)$  y  $\ln(\hat{\theta})$  son las del Sistema Internacional. Por su parte, en la Tabla 8-4 se puede notar también que a medida que aumentamos la temperatura, manteniendo la carga aplicada de 10000 N, la deformación plástica aumenta al mismo tiempo que las tensiones van disminuyendo, lo cual es indicativo del ablandamiento al que el material se ve sometido. Es importante aclarar que la deformación plástica se ha escogido tras la descarga y la tensión justo antes de comenzar dicha descarga.

Figura 8-5. Nube experimental de puntos  $\ln(Q) \equiv \ln(\hat{\theta})$  y su respectiva recta ajustada

Lo que ocurre en la Figura 8-5 es análogo a lo explicado para la Figura 8-3, solo que en este caso las variables que quedan representadas son diferentes, siendo éstas las propias de un ensayo estático con influencia de la temperatura. Aquí también se ha hecho una ampliación del primer punto de la Figura 8-5 en la Figura 8-6 para demostrar que dichos puntos, aunque aparentemente pudieran encontrarse alineados, dicho alineamiento no es perfecto por las razones que con anterioridad se comentaron.

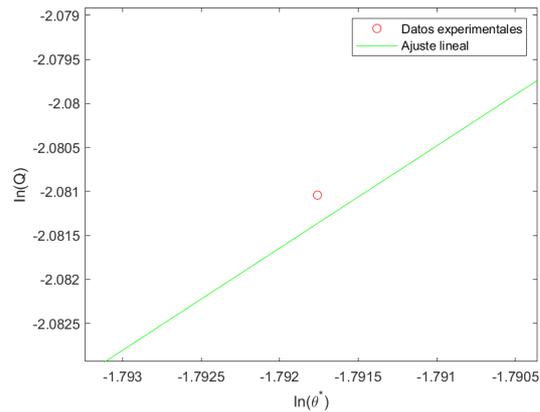


Figura 8-6. Ampliación de la Figura 8-5

**El valor de  $m$  tras la aplicación de este procedimiento es de 1.1605** frente al valor impuesto del mismo, de 1.162, existiendo por tanto aquí un error relativo del 0.129%.

Así pues, cuando de la obtención del parámetro  $m$  se trata, el postprocesamiento de los datos conseguidos tras el proceso de experimentación es similar a lo que ya se había visto anteriormente en el sentido de que a partir de los desplazamientos radiales y axiales se consiguen las deformaciones plásticas y tensiones correspondientes a lo largo de la compresión. El valor de  $m$  logrado es prácticamente idéntico al dato impuesto como propiedad del material. En cuanto al ensayo en sí, indicar que dado que se ha realizado de manera virtual ha sido muy fácil partir aquí con una probeta de igual dimensión pero con temperatura inicial distinta, de manera que en lo que a su fabricación se refiere no se tendría en cuenta el efecto de la dilatación (es importante que las probetas, en el momento en el que la compresión comience, tengan las mismas dimensiones independientemente de su temperatura de prueba para evitar falsear las deformaciones reales obtenidas). Sin embargo, de tratarse de un ensayo real, este efecto sí habría que considerarlo por lo que supone una dificultad adicional respecto de los anteriores ensayos.

## 8.2 Ensayo dinámico

Se enseñarán aquí los resultados que se obtengan del ensayo de Taylor, mostrándose la evolución de las distintas variables que participan en este ensayo que nos servirán para posteriormente hallar el valor del parámetro  $C$  de JC, que es el objetivo final de la ejecución de este ensayo, siguiéndose los mismos pasos que se indicaron en el capítulo 2.

### 1. Obtención de las expresiones analíticas de $d$ y $l_t$ con el tiempo

En la Figura 8-7 se encuentran graficadas tanto la nube de puntos experimentales, en azul, del valor que adquiere el diámetro de la cara que impacta con la pared rígida en distintos instantes de tiempo, como la curva ajustada, en rojo, la cual tiene el fin de aportar una expresión analítica de tipo polinómico que recree la nube de puntos experimentales de la forma más fiel posible. En la Figura 8-8 se muestra exactamente lo análogo para la variación de la longitud total del cilindro en el tiempo.

Dos aspectos importantes a explicar: por un lado decir que se ha establecido que el orden de la curva polinómica del diámetro sea 3 y el de la longitud 4. Esta elección se ha tomado en base a no solamente la exactitud con la que la curva ajustada recrea la nube de puntos sino también a la influencia que dicho orden tendría en la obtención de las variables derivadas de éstas, debido a los fenómenos de “overfitting” y “underfitting”. Se ha comprobado, tanto para el diámetro como para la longitud, que probar con órdenes de polinomio de ajuste distintos a los que acabamos de exponer implicaría el hecho de que las variables derivadas de éstas adquieran valores que carecen totalmente de sentido, tanto por los valores en sí como por su evolución en el tiempo (excesivas oscilaciones tanto en amplitud como incluso en frecuencia). Por otra parte, se puede observar también cómo el tiempo

máximo representado en las gráficas es de 11  $\mu\text{s}$  cuando anteriormente, en el apartado 7.3, se estableció un tiempo de prueba de 30  $\mu\text{s}$ . Esto se debe a que es a partir de esos 11  $\mu\text{s}$  cuando se empieza a apreciar que el cilindro está en una fase cercana a la de máxima compresión, de forma que si representásemos esa parte de la curva correríamos el riesgo de incluir en nuestras expresiones analíticas, tras el ajuste polinómico, una respuesta del material que se corresponde con una fase que no nos interesa (despegue del cilindro de la pared).

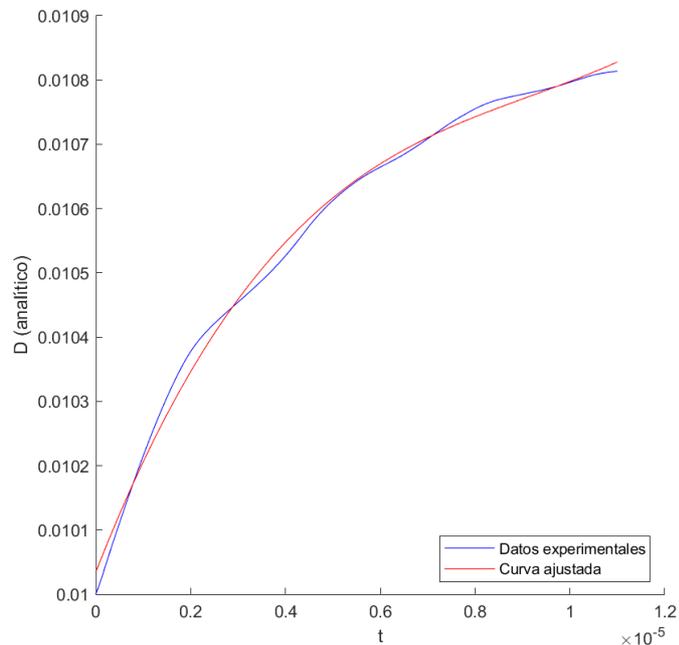


Figura 8-7. Evolución del diámetro de la cara de contacto en un ensayo de Taylor con el tiempo

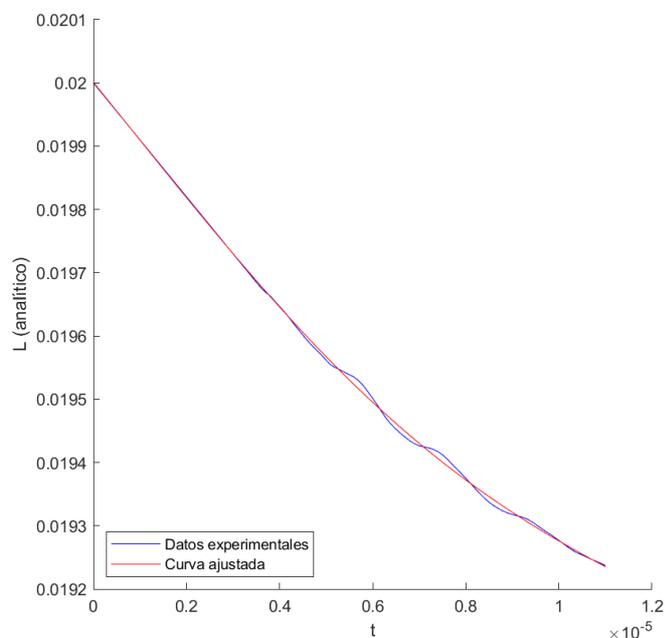


Figura 8-8. Evolución de la longitud total del cilindro en un ensayo de Taylor con el tiempo

Por su parte los coeficientes del polinomio del diámetro son, ordenados de mayor a menor orden,  $6.4045 \times 10^{11}$ ;  $-1.7626 \times 10^7$ ; 188.512 y 0.01. Para los coeficientes del polinomio de la longitud son  $-1.8829 \times 10^{16}$ ;  $4.9521 \times 10^{11}$ ;  $-1.2808 \times 10^6$ ;  $-90.3619$  y 0.02 nuevamente, ordenados de mayor a menor orden (unidades de las variables dependiente e independiente del SI).

## 2. Obtención de la evolución de las variables geométricas en el tiempo

Partiéndose de la longitud total inicial y para cualquier instante de tiempo del cilindro se puede obtener, mediante la diferencia entre dichas longitudes, la variable  $H$ , a la izquierda en la Figura 8-9, estando su derivada representada en la derecha en la misma figura (la derivada de  $H$  en esa figura está representada como “v” al tratarse de la velocidad del tramo indeformado de la barra).

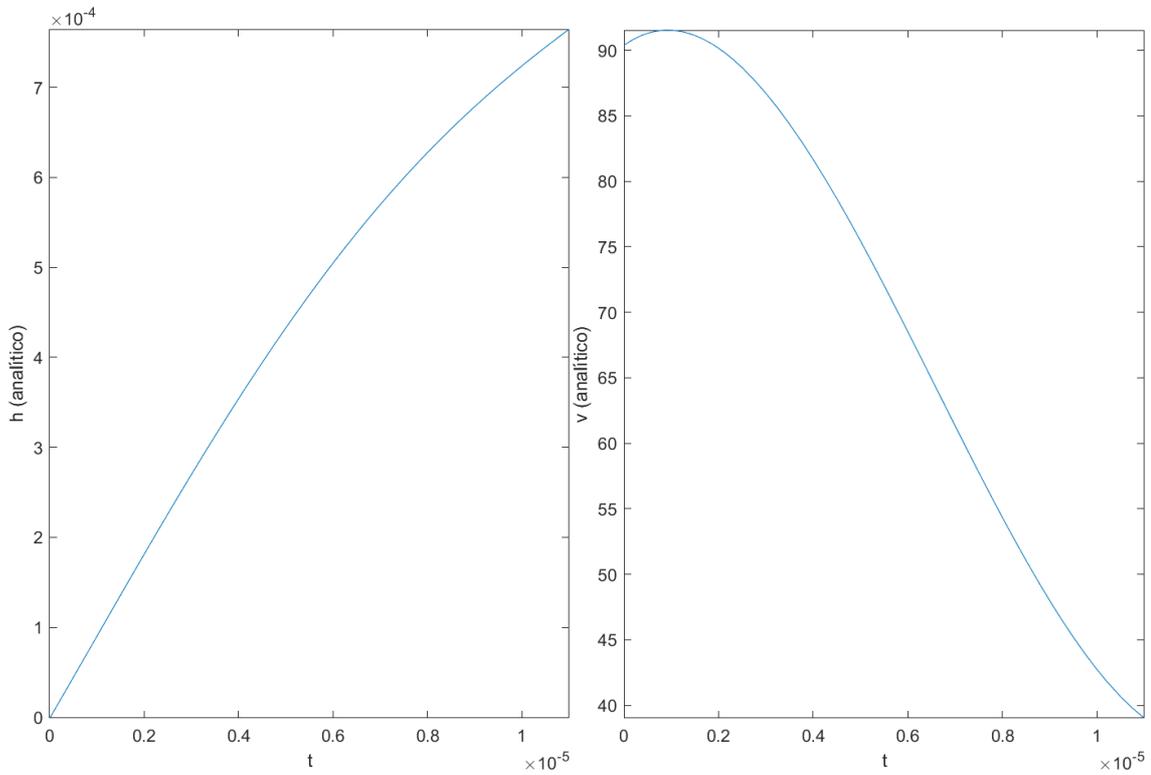


Figura 8-9.  $H$  a la izquierda y su derivada a la derecha

Se puede observar que  $H$  está constantemente en crecimiento, lo cual es lógico si tenemos en cuenta que esa variable representa la diferencia de longitud del cilindro entre el instante inicial y cualquier otro instante de tiempo, siendo la longitud de la probeta cada vez menor según avanza el impacto y por ende el tiempo, por lo que  $H$  aumenta. Por otra parte, su derivada adquiere al principio valores que se pueden considerar extraños, ya que si bien es cierto que partimos de 90 m/s, que es la velocidad de impacto, en los momentos inmediatamente posteriores tiene lugar un pequeño incremento de la velocidad. Esto en teoría no debería ocurrir dado que una vez que el comienzo del impacto tiene lugar lo que debería pasar es precisamente una bajada de la velocidad de toda la probeta, y por ende también de la zona indeformada. Por tanto, esa ligera subida de la velocidad se debe a motivos de ajuste que, a pesar de haberse elegido el mejor posible, sigue suponiendo una fuente de error. Si se escoge un orden de ajuste menor (polinomio grado 2) para la longitud se tendría una recta descendente, lo cual parece un buen indicativo, pero su velocidad inicial se dispara más allá de los 100 m/s, por lo que también se estaría induciendo un error aquí. Si por el contrario aumentásemos el orden del polinomio que aproxima la nube de puntos discretos para la longitud total aunque fuese solamente un grado lo que se tendría es que además de partir de una velocidad de en torno a 85 m/s, que también se aleja de los 90 m/s, y además tendríamos un aumento de la oscilación que se ve en la gráfica de la derecha de 8-9, alterándose también los resultados del resto de la gráfica y no solamente los del principio de la misma.

A partir de lo que acabamos de lograr y teniendo en cuenta la expresión (10), es posible hallar la evolución de  $\dot{s}$ , o lo que es lo mismo,  $ds/dt$ , en el tiempo. Esto supondrá un paso intermedio para posteriormente poder obtener tanto  $s$  como  $l$ , y de esta forma dar por finalizado el problema de obtención de las variables geométricas que nos conciernen.

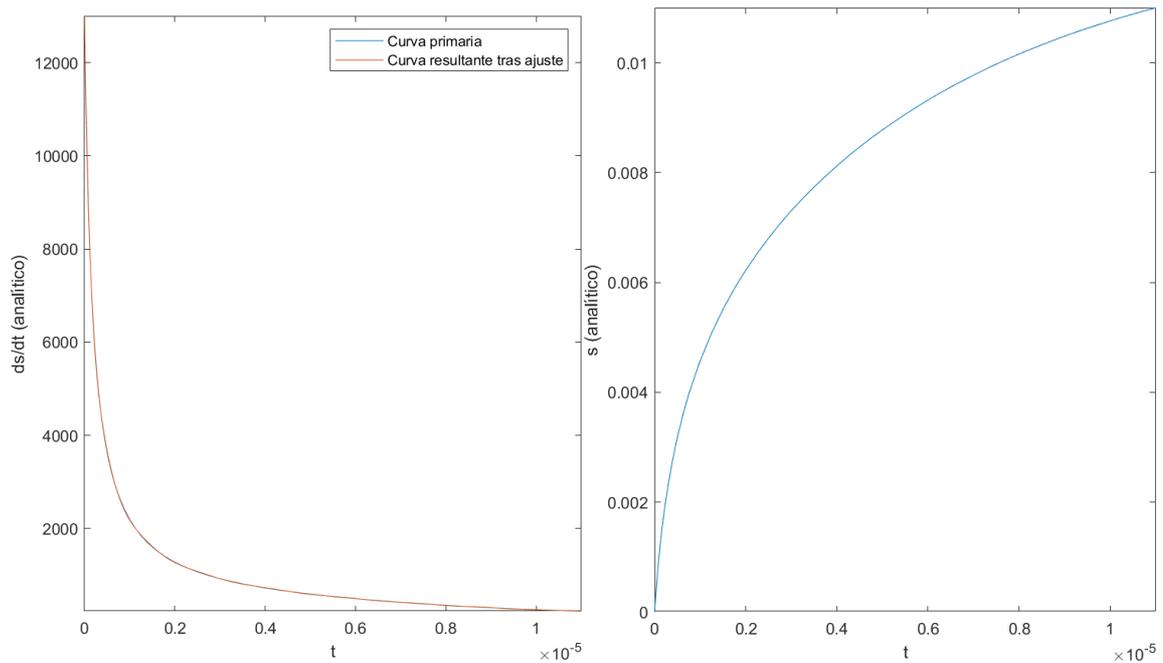


Figura 8-10. Evolución de  $ds/dt$ , izquierda, y de  $s$ , derecha, en el tiempo

La imagen que se encuentra a la izquierda en la Figura 8-10 es la misma que la que se mostró en la Figura 6-3, solo que en aquel caso se puso simplemente para ejemplificar aspectos del ajuste mientras que ahora se muestra con el fin de exponer un resultado que nos será útil para conseguir el objetivo final que estamos buscando con este ensayo, que no es otro que la obtención del valor del parámetro  $C$  de JC. Para poder hallar  $s$  es necesario integrar la curva  $ds/dt$  pero dado que ésta ha adquirido una expresión analítica lo suficientemente compleja como para que no pueda ser integrada directamente de manera simbólica por MATLAB nos encontramos con el caso de que es necesario realizar un nuevo ajuste a esta curva para de esta manera lograr una expresión analítica de tipo polinómico, mucho más sencilla de integrar simbólicamente por el mencionado software. Dado que aquí lo que se va a hacer es la integral a una curva y no su derivada podremos aproximar la misma mediante un polinomio de alto orden, que en este caso será 20, de manera que se podrá obtener una curva prácticamente idéntica a la que teníamos inicialmente (véase imagen de la izquierda de la Figura 8-10) sin riesgo de sufrir “overfitting” (véase capítulo 6). En la imagen de la derecha de la figura que estamos mencionando se aprecia la evolución de  $s$  tras realizar dicha integración. Su valor al final del tiempo considerado es de 11 mm. Antes de continuar es conveniente hacer una comparación entre la forma real de la probeta tras el choque y la idealizada por el método aplicado, para determinar cómo se asemejan ambas y así tener una idea de si vamos por la buena dirección.

En la Figura 8-11 se muestra la mencionada comparación. Como era de esperar, la curva que representa la deformada real va variando su curvatura de manera progresiva mientras que la deformada ideal se define por los dos tramos, el deformado (deformación plástica solo) y el indeformado, tal y como se explicó en el capítulo 2. Si se observa con detenimiento la imagen de la figura en cuestión, se puede ver cómo la intersección entre los dos tramos de la deformada ideal se sitúa en una zona en la que la curvatura de la deformada real todavía se está desarrollando, por lo que parece que los valores geométricos que hasta ahora hemos tenido parecen tener sentido.

Habiéndose obtenido ya todo esto podemos proceder a hallar el último parámetro geométrico de interés, la longitud del tramo indeformado, denominada como  $l$ . Para ello se recurrirá a la expresión (4). En la Figura 8-12 se muestra su evolución.

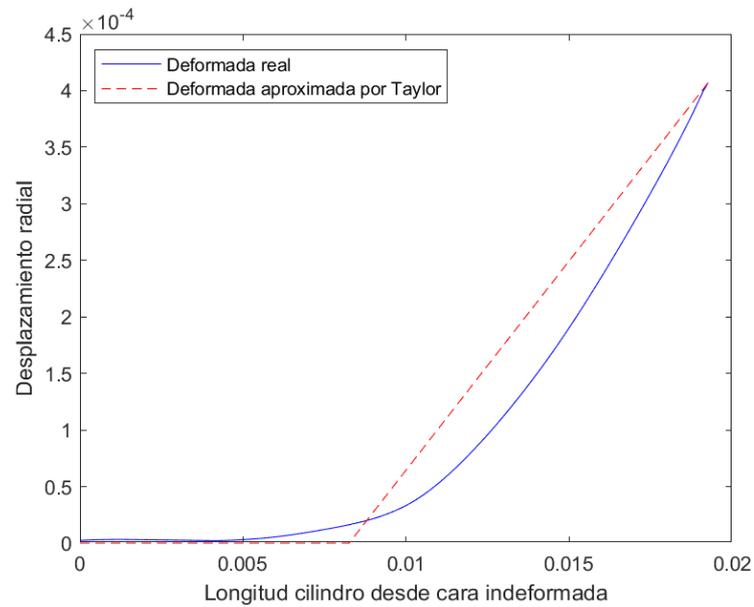


Figura 8-11. Deformadas real e ideal del cilindro tras choque

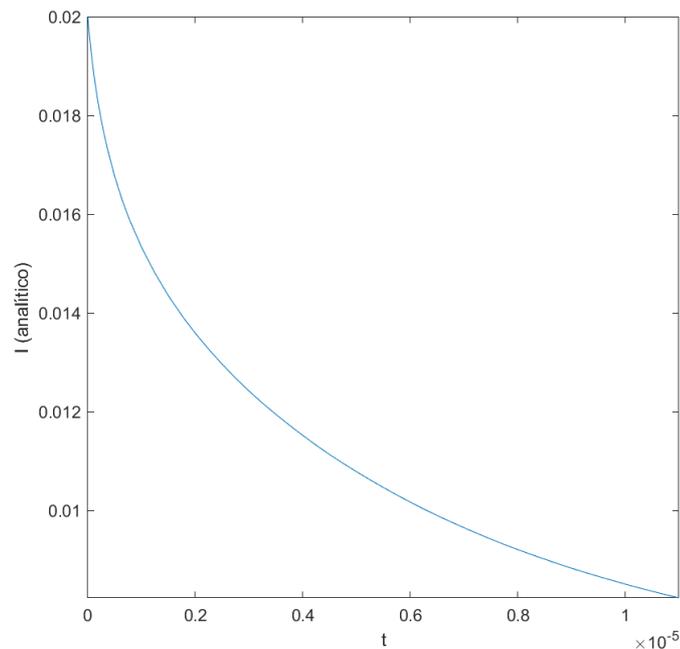


Figura 8-12. Longitud indeformada del cilindro

### 3. Obtención de las variables de deformación plástica y tensión aplicada, y del parámetro $C$

Mediante la aplicación de la expresión (14) se procede a hallar la evolución de la velocidad de deformación plástica equivalente a la que se ve sometida la zona troncocónica, la deformada, de la probeta debido a la acción del choque en el tiempo, así como la deformación plástica equivalente como tal, mediante integración de la anterior. Al igual que ocurría con la variable  $s$ , para hallar la deformación plástica equivalente es necesario nuevamente realizar un ajuste polinómico a su derivada respecto del tiempo, que se obtiene justo antes, para así poder realizar su integración simbólica a partir de un polinomio. En este caso a pesar de no correr riesgo de “overfitting” no se va a imponer un orden de ajuste demasiado elevado, debido a que un polinomio de orden 3 es suficiente aquí. Por su parte, en la Figura 8-13 se muestra la velocidad de deformación plástica equivalente, mientras que en la Figura 8-14 se hace lo propio para la deformación plástica equivalente como tal.

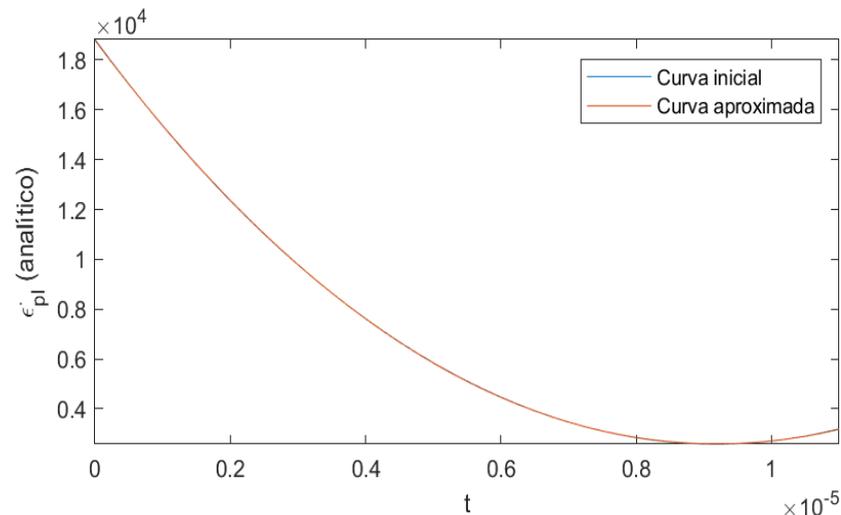


Figura 8-13. Velocidad de deformación equivalente experimental, en azul, y mediante curva ajustada, en rojo

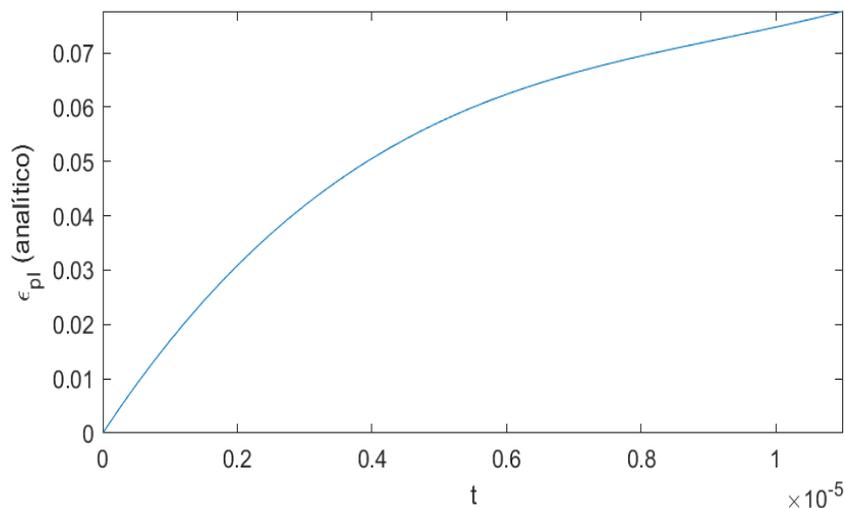


Figura 8-14. Deformación equivalente en la zona deformada de la probeta

La deformación plástica equivalente, como era de esperar, es creciente en todo momento, al igual que ocurría con  $s$  y  $h$ . La deformación plástica en un material solo puede crecer o, como mínimo, mantenerse a lo largo del tiempo.

Por su parte, lo que a continuación queda es hallar la curva correspondiente a la tensión a la que se ve sometida la probeta, mediante la expresión (13), y comparar dicha curva con las curvas obtenidas para distintos valores de  $C$  para el modelo de JC, ahora que conocemos tanto la deformación plástica equivalente como su velocidad. En la Figura 8-15 se muestran las gráficas en cuestión. Ahí podemos ver que la forma de las curvas del modelo de JC difiere de la de la acción externa aplicada debido al choque. En los momentos iniciales esto es normal porque la tensión de fluencia que predice JC es la de fluencia en estado elástico del material mientras que la tensión debida al impacto debería evolucionar de forma que de inicio fuera la más alta posible y luego descendiera según avanza el impacto, ya que según la expresión (14) esa tensión aplicada será más alta cuanto mayor sea la longitud indeformada del cilindro y cuanto mayor sea la aceleración de la misma. En el instante inicial dicha aceleración también ha de ser la más alta puesto que la cara que entra en contacto con la pared rígida, al no haber entrado en fluencia aún, mantiene su máxima rigidez, lo que hace que la aceleración en ese instante, como ya habíamos indicado, sea la máxima. Sin embargo, esto no es lo que se aprecia en la Figura 8-15. Lo que se observa en la curva correspondiente a la tensión a la que se ve sometido el material, la curva azul, es que el principio de la misma se sitúa mucho más abajo,

alcanzándose incluso valores negativos. La razón por la que esto ocurre se debe a que  $dH/dt$  (imagen derecha de la Figura 8-9) sube ligeramente, por motivos de ajuste, en los momentos correspondientes al inicio del impacto, por lo que los resultados en ese tramo no debemos considerarlo. Según avanza el impacto la tensión a la que se ve sometida la probeta va disminuyendo hasta ser 0, aunque por lo anteriormente comentado lo que se produce en la mencionada figura es una subida hasta llegar a un pico para posteriormente bajar. Por tanto, estamos en una situación en la que nos vemos obligados a tomar una nueva simplificación que supondrá una nueva fuente de error. Esta simplificación consistiría en tomar el valor pico de la curva azul, correspondiente a la tensión a la que somete el material, y considerar que el mismo tiene lugar al principio, como hemos indicado que debe ser (véase la línea verde horizontal).

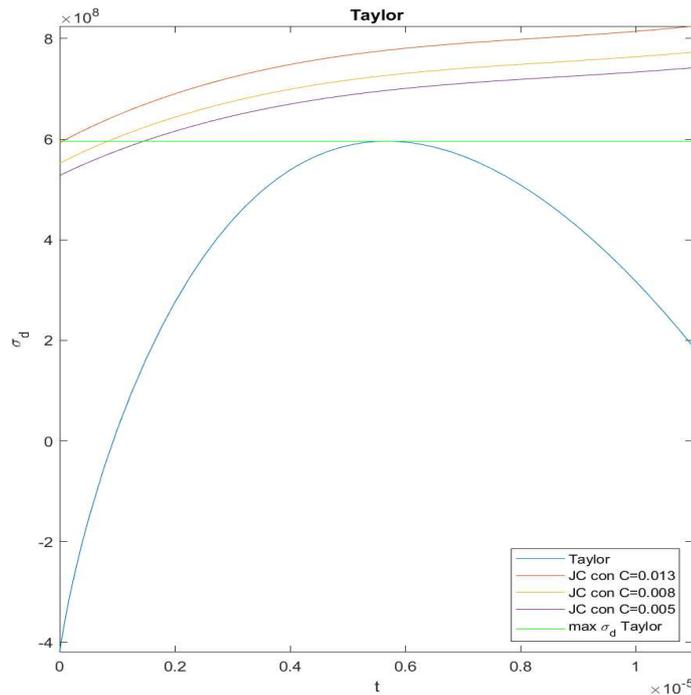


Figura 8-15. Comparación de curvas de JC para disitintas  $C$  y curva de las tensiones a las que se ve sometido el material

**$C$  tendría un valor igual a 0.013, siendo el valor real del mismo de 0.012.** Se puede ver cómo la línea verde es coincidente con la línea roja de JC, en el instante  $t = 0$ , correspondiente a una  $C$  de valor 0.013. No se aprecia una diferencia excesivamente grande entre estos valores a pesar de la cantidad de las simplificaciones que se han tenido que tomar en el camino (ajustes polinómicos para obtener tanto las expresiones analíticas de las variables primarias,  $l_t$  y  $d$ , como las expresiones reducidas de  $ds/dt$  y de la velocidad de deformación equivalente, y la simplificación que se acaba de indicar sobre la curva de la tensión a la que se somete la probeta).

Así pues, la realización de este método requiere de poco material, si nos referimos al número de probetas que se necesitarían para llevar a cabo estas experimentaciones. Sin embargo, el coste del aparataje puede llegar a ser considerable, no solo por el equipo encargado de impactar la bala sino también por la necesidad de contar con aparatos que sean capaces de grabar el movimiento con precisión a muy alta velocidad. Además, se antoja de vital importancia el juicio del ingeniero en la toma de decisiones relativas a las simplificaciones que tienen lugar, así como de la influencia que éstas pueden tener en los resultados finales.

A modo de resumen, con el objetivo de que el lector pueda adquirir una visión más global de todos los resultados que en este capítulo se han ido obteniendo para los distintos parámetros de JC del material, se muestra en la Tabla 8-5 una comparación de los mismos, para los valores reales y los obtenidos.

Tabla 8-5. Resultados finales para los distintos parámetros de JC

Valores	$A$ (MPa)	$B$ (MPa)	$C$	$n$	$m$
Reales	487	2511	0.012	0.983	1.162
Obtenidos	486.873	2484.159	0.013	0.9792	1.1605

En definitiva, con los métodos propuestos tanto en lo que a las técnicas de ensayo se refiere como a las técnicas de postprocesamiento de datos, se puede decir que los resultados que se obtienen son muy adecuados. Sin embargo, conviene aclarar que, a pesar de que el resultado obtenido para el parámetro  $C$  en concreto también guarda gran similitud con su correspondiente valor real, es aconsejable no olvidar todo el proceso que ha sido necesario llevar a cabo, así como las simplificaciones que se han tomado (en teoría cuantos menos pasos de éstos sean necesarios realizar para llevar a cabo la labor mucho mejor ya que se estaría induciendo un error menor).



## 9 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

*“La ignorancia es muy atrevida”*

*- Sergio Ramos-*

### 9.1 Conclusiones

A la hora de lograr el valor del parámetro relacionado con la velocidad de deformación (parámetro dinámico),  $C$ , los métodos de ajuste, imprescindibles si queremos trabajar con expresiones analíticas para poder seguir adecuadamente el método propuesto aquí, empiezan a suponer una fuente de error. En el caso que aquí se ha estudiado, el valor que se ha logrado para este parámetro es de 0.013, frente al 0.012 real. Si bien es cierto que la diferencia entre ambos valores no es muy elevada sí que se ha inducido un error mayor que para los demás parámetros, los correspondientes a los parámetros estáticos. Esto es normal si consideramos que para hallar  $C$  hemos tenido que imponer una mayor cantidad de simplificaciones. Por tanto, se puede concluir que cuando se trata de estimar el valor del parámetro dinámico de JC la aplicación de la metodología propuesta es válida siempre y cuando no estemos interesados en lograr resultados muy precisos. De ser éste el caso, sería necesario implantar modificaciones a dicho método propuesto con tal de mejorar su fiabilidad. En el apartado 9.2 se muestran diferentes posibles vías de mejora en la aplicación de dicha metodología.

### 9.2 Trabajos futuros

Con el fin de mejorar la fiabilidad de los resultados que se obtienen para el parámetro  $C$ , se propone estudiar tres posibles vías: por un lado, investigar métodos de ajuste alternativos que generen expresiones analíticas relativamente simples como para poder ser integradas de manera simbólica en un software numérico y que aporten la posibilidad de un ajuste más fino. Por otro lado, también se podría intentar investigar la posibilidad de incluir, si se encontrase, alguna metodología que si bien trabajase con expresiones analíticas, éstas fueran integrales en vez de derivadas. De esta forma podríamos trabajar con los ajustes polinómicos que aquí se han propuesto con órdenes muy elevados sin correr riesgo alguno de “overfitting”, mejorando evidentemente la fiabilidad de los resultados obtenidos. Por último, también convendría estudiar la posibilidad de aplicar este mismo método, el que aquí se ha expuesto, pero de manera puramente numérica, para así evitar tener que utilizar expresiones analíticas, lo cual nos llevaría al uso de las herramientas matemáticas de ajuste aquí empleadas pero sin caer en aproximaciones ocasionadas por el orden polinómico utilizado que generen un error respecto de la realidad.



---

## REFERENCIAS

---

- [1] Elastic-Perfectly plastic model for steel reinforcement [en línea]. *ResearchGate*. [Consulta 15/10/2021 a las 16:15]. Disponible en: [https://www.researchgate.net/figure/Elastic-perfectly-plastic-model-for-steel-reinforcement\\_fig6\\_238107254](https://www.researchgate.net/figure/Elastic-perfectly-plastic-model-for-steel-reinforcement_fig6_238107254)
- [2] Idealization of stress-strain curves for elastic-plastic material with hardening [en línea]. *ResearchGate*. [Consulta 16/10/2021 a las 18:30]. Disponible en: [https://www.researchgate.net/figure/Idealization-of-stress-strain-curve-for-elastic-plastic-material-with-isotropic-hardening\\_fig1\\_263414557](https://www.researchgate.net/figure/Idealization-of-stress-strain-curve-for-elastic-plastic-material-with-isotropic-hardening_fig1_263414557)
- [3] N. Kim. *Introduction to Non Linear Finite Element Analysis*. Gainesville, Florida, USA: Springer, 2015
- [4] Finite Element car crash simulation using LS Dyna [en línea]. *ResearchGate*. [Consulta 24/10/2021 a las 18:00]. Disponible en: [https://www.researchgate.net/figure/Finite-element-car-crash-simulation-using-LS-Dyna-impact-variable-values-for-this-test\\_fig2\\_341578950](https://www.researchgate.net/figure/Finite-element-car-crash-simulation-using-LS-Dyna-impact-variable-values-for-this-test_fig2_341578950)
- [5] Thermal and Stress Finite Element Analysis results [en línea]. *ResearchGate*. [Consulta 24/10/2021 a las 18:15]. Disponible en: [https://www.researchgate.net/figure/Thermal-left-and-stress-right-finite-element-analysis-results-The-stress-analysis\\_fig4\\_308500078](https://www.researchgate.net/figure/Thermal-left-and-stress-right-finite-element-analysis-results-The-stress-analysis_fig4_308500078)
- [6] S. Sen, *Taylor impact test revisited: Determination of plasticity parameters for metals at high strain rate*, *International Journal of Solids and Structures* 193-194 (2020) 357-374
- [7] Taylor impact test set up [en línea]. *ResearchGate*. [Consulta 01/02/2022 a las 10:00]. Disponible en: [https://www.researchgate.net/figure/Schematic-drawing-of-the-Taylor-impact-test-set-up-10\\_fig2\\_285387044](https://www.researchgate.net/figure/Schematic-drawing-of-the-Taylor-impact-test-set-up-10_fig2_285387044)
- [8] Cao, Z. *Investigation of Taylor Impact Test of Isotropic and Anisotropic Material Through Geometrical Characteristics of Specimens*. University of Alabama, Department of Aerospace Engineering and Mechanics, 2010
- [9] Onda [en línea]. *Wikipedia*. [Consulta 02/01/2021 a las 12:00]. Disponible en: <https://es.wikipedia.org/wiki/Onda>
- [10] Wave Relationship [en línea]. *HyperPhysics*. [Consulta 05/01/2021 a las 15:30]. Disponible en: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/wavrel.html>
- [11] Acoustics and Vibration Animations [en línea]. *The Pennsylvania State University*. [Consulta 10/01/2021 a las 17:00]. Disponible en: <https://www.acs.psu.edu/drussell/demos/waves/wavemotion.html>
- [12] Ondas sísmicas [en línea]. *UDC*. [Consulta 10/01/2021 a las 19:15]. Disponible en: [https://www.udc.es/dep/dtcon/estructuras/ETSAC/Investigacion/Terremotos/ondas\\_s%EDsmicas.htm](https://www.udc.es/dep/dtcon/estructuras/ETSAC/Investigacion/Terremotos/ondas_s%EDsmicas.htm)
- [13] J. Cerv, *Wave motion in a thick cylindrical rod undergoing longitudinal impact*, *Wave Motion* 66 (2016) 88-105

- [14] Parámetros de Lamé [en línea]. *Wikipedia*. [Consulta 15/01/2021 a las 12:20]. Disponible en: [https://es.wikipedia.org/wiki/Par%C3%A1metros\\_de\\_Lam%C3%A9](https://es.wikipedia.org/wiki/Par%C3%A1metros_de_Lam%C3%A9)
- [15] Función de Bessel [en línea]. *Wikipedia*. [Consulta 15/01/2021 a las 15:00]. Disponible en: [https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n\\_de\\_Bessel](https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Bessel)
- [16] PLANE183 [en línea]. *Ansys Help*. [Consulta 16/01/2021 a las 16:30]. Disponible en: [https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans\\_help\\_v182/ans\\_elem/Hlp\\_E\\_PLANE183.html](https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_elem/Hlp_E_PLANE183.html)
- [17] Número de Courant-Friedrichs-Levy [en línea]. *Wikipedia*. [Consulta 18/01/2021 a las 12:30]. Disponible en: [https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_de\\_Courant-Friedrichs-Levy](https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Courant-Friedrichs-Levy)
- [18] Difference Between Implicit vs Explicit Analysis [en línea]. *Enterfea*. [Consulta 18/01/2021 a las 17:30]. Disponible en: <https://enterfea.com/implicit-vs-explicit/>
- [19] Johnson-Cook plasticity [en línea]. *Abaqus*. [Consulta 07/11/2021 a las 15:30]. Disponible en: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEMATRefMap/simamat-c-johnsoncook.htm>
- [20] A. V. Sobolev, M. V. Radchenko, *Use of Johnson-Cook plasticity model for numerical simulations of the SNF shipping cask drop tests*, Nuclear Energy and Technology 2 (2016) 272-276
- [21] A. Fernández, F. Gallego. Manual de Ingeniería Fluidomecánica. 4ª Ed. Málaga, España: Universidad de Málaga, 2012
- [22] The influence of Johnson-Cook parameters on stress-strain graph and their requirements [en línea]. *YouTube*. [Consulta 18/11/2021 a las 12:30]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=LV-ooT0dg7k>
- [23] How to find Johnson-Cook Parameters by using Stress-Strain Graph explained through Excel Sheets [en línea]. *YouTube*. [Consulta 18/11/2021 a las 13:30]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=vRTgY1HikUQ>
- [24] Difference between Ductile and Brittle Materials with Stress Strain Curve [en línea]. *Information Palace*. [Consulta 10/12/2021 a las 18:00]. Disponible en: <https://medium.com/@informationpalace/difference-between-ductile-and-brittle-materials-with-stress-strain-curve-b9df68d23447>
- [25] Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, *Apuntes de clase de la asignatura 'Mecánica de Medios Continuos no Lineal'*, Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla.
- [26] 1. MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS [en línea]. *YouTube*. [Consulta 10/12/2021 a las 11:20]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=gdfyOAJGSfs>
- [27] Deducción de mínimos cuadrados para polinomio de cualquier grado y ejemplo [en línea]. *YouTube*. [Consulta 11/12/2021 a las 13:15]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=4bGC3tVr8Wc>
- [28] 4.3 REGRESIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS: LINEAL Y CUADRÁTICA [en línea]. *Numerictron*. [Consulta 21/12/2021 a las 17:10]. Disponible en: <https://sites.google.com/site/numerictron/unidad-4/4-3-regresion-por-minimos-cuadrados-lineal-y-cuadratica>

- [29] Ecuaciones lineales. Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales [en línea]. *Descartes 2D*. [Consulta 15/12/2021 a las 12:25]. Disponible en: [http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/sistemas\\_ecuaciones\\_lineales\\_irm/compatibilidad.htm](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/sistemas_ecuaciones_lineales_irm/compatibilidad.htm)
- [30] Método del Hessiano. Máximos y Mínimos Relativos. Explicación y Ejemplo [en línea]. *YouTube*. [Consulta 27/12/2021 a las 15:20]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=FmRQJfvPI8Y>
- [31] polyfit. Polynomial curve fitting [en línea]. *MATLAB*. [Consulta 10/10/2021 a las 10:10]. Disponible en: <https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/polyfit.html>
- [32] Underfitting vs. Overfitting [en línea]. *ResearchGate*. [Consulta 27/12/2021 a las 11:10]. Disponible en: [https://www.researchgate.net/figure/Underfitting-vs-Overfitting\\_fig2\\_317957265](https://www.researchgate.net/figure/Underfitting-vs-Overfitting_fig2_317957265)
- [33] Korkmaz, M. *Confirmation of Johnson-Cook model parameters for nimonic 80A alloy by Finite Element Method*. Gazi Üniversitesi, Politeknik Dergisi, 625-632 (2020)
- [34] Contact formulations in Abaqus/Standard [en línea]. *Abaqus*. [Consulta 02/10/2021 a las 15:00]. Disponible en: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEITNRefMap/simaitn-c-contactpairform.htm#simaitn-c-acontactpair-masterslave>
- [35] Wilkins, M L. *Impact of cylinders on a rigid boundary*. University of California, Lawrence Livermore Laboratory, 1972



## GLOSARIO

A: Parámetro de Johnson-Cook. En la práctica es el límite de fluencia estático	23
a: Radio exterior del cilindro	18
$A_f$ : Área de la sección de la cara de contacto en un ensayo Taylor	10
$A_0$ : Área de la sección indeformada en un ensayo Taylor	10
$a_0, a_1, a_2, \dots, a_q$ : Coeficientes característicos de un polinomio genérico	40
B: Parámetro de Johnson-Cook, de endurecimiento por deformación plástica	23
b: Término independiente de la recta ajustada (método válido solo para orden 1)	45
$\beta$ : Parámetro intermedio para calcular el error de la recta ajustada (método válido solo para orden 1)	45
C: Parámetro de Johnson-Cook, de endurecimiento por velocidad de deformación plástica	12
$C_0$ : Número de Courant	22
$c_1$ : Velocidad de propagación de la onda longitudinal en una probeta en un ensayo Taylor	17
$c_2$ : Velocidad de propagación de la onda de cizalla en una probeta en un ensayo Taylor	17
D: Suma de los cuadrados de los residuos en un ajuste polinómico	41
d: Diámetro de la base del cilindro que choca con la pared en ensayos de Taylor	8
$D_0$ : Diámetro inicial de la base del cilindro que choca con la pared en ensayos de Taylor	7
$\Delta_1 f, \Delta_2 f, \dots, \Delta_q f$ : Matrices cuadradas de $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, q \times q$ reducidas de $H_f$	42
$\Delta x$ : Lado del elemento, cuadrado, que hay que considerar para capturar correctamente el paso de la onda	22
$\Delta t$ : Paso de tiempo que define la discretización temporal	22
$e(b)$ : Error del término independiente de la recta ajustada (método válido solo para orden 1)	46
$e(\varphi)$ : Error de la pendiente de la recta ajustada (método válido solo para orden 1)	46
$\dot{\epsilon}_0$ : Parámetro velocidad de deformación de referencia	23
$\overline{\epsilon}_p$ : Variable deformación plástica equivalente	11
f: Frecuencia de la onda	14
$\varphi$ : Pendiente de la recta ajustada (método válido solo para orden 1)	45
G: Módulo de elasticidad a cizalla	17
$\gamma$ : Parámetro intermedio para calcular la tensión axial que depende de la longitud de onda	18
$\Gamma_c$ : Superficie de contacto	35
H: Variable diferencia de longitud total del cilindro respecto de la inicial en un ensayo Taylor	8
$H_f$ : Matriz Hessiana	42
h: Parámetro dependiente de p	18
$J_0$ y $J_1$ : Funciones de Bessel de primer tipo	18
k: Parámetro dependiente de p	18
l: Variable longitud de la parte del cilindro en un ensayo Taylor que se mantiene elástica	8
$\Lambda$ : Longitud de onda	14
$\lambda$ : Coeficiente de Lamé	17

$l_0$ : Longitud inicial del cilindro en un ensayo Taylor	7
$l_t$ : Longitud del cilindro en un ensayo Taylor en un instante determinado	8
$m$ : Parámetro de Johnson-Cook, de ablandamiento por temperatura	23
$\dot{m}$ : Flujo másico que atraviesa cualquier sección transversal de la barra en un ensayo Taylor	10
$\dot{m}_1$ : Flujo másico a través de una sección transversal de la zona indeformada de la barra en Taylor	10
$\dot{m}_2$ : Flujo másico a través de la sección transversal de la cara de contacto de la barra en Taylor	10
$\bar{\mu}$ : Coeficiente de fricción	37
$\mu$ : Coeficiente de Poisson	18
$N$ : Número de puntos experimentales de los que se dispone	45
$n$ : Parámetro de JC de endurecimiento por deformación plástica	23
$n_p$ : Orden del polinomio de la curva ajustada	43
$p$ : variable compleja que sustituye al tiempo	18
$pol$ : salida de la función 'polyfit'	43
$r$ : Variable radial cilindro	18
$r_i$ : Valor del residuo en $i$	40
$r_l$ : Coeficiente de correlación lineal	45
$\rho$ : Densidad del material	10
$s$ : Variable longitud plástica	8
$\sigma_Y$ : Tensión de fluencia del material según JC	12
$\sigma_Y'$ : Tensión de fluencia del material en la probeta cilíndrica en un ensayo de Taylor	11
$\sigma_Z$ : Tensión axial en un ensayo de Taylor	17
$\sigma_Z^*$ : Tensión axial adimensionalizada en un ensayo de Taylor	17
$S_X$ : Suma de los valores de la variable independiente	44
$S_{XX}$ : Suma de los cuadrados de los valores de la variable independiente	44
$S_{XY}$ : Suma de los productos cruzados	44
$S_Y$ : Suma de los valores de la variable dependiente	44
$S_{YY}$ : Suma de los cuadrados de los valores de la variable dependiente	44
$T$ : Periodo de la onda	14
$t$ : Variable tiempo	7
$t_1(M)$ : Tensión normal aplicada en un punto de contacto $M$	37
$t_2(M)$ : Tensión tangencial (dirección 1) aplicada en un punto de contacto $M$	37
$t_3(M)$ : Tensión tangencial (dirección 2) aplicada en un punto de contacto $M$	37
$t_1^A(M)$ : Tensión normal aplicada en un punto de contacto $M$ en el sólido $A$	36
$t_2^A(M)$ : Tensión tangencial (dirección 1) aplicada en un punto de contacto $M$ en el sólido $A$	36
$t_3^A(M)$ : Tensión tangencial (dirección 2) aplicada en un punto de contacto $M$ en el sólido $A$	36
$t_1^B(M)$ : Tensión normal aplicada en un punto de contacto $M$ en el sólido $B$	36
$t_2^B(M)$ : Tensión tangencial (dirección 1) aplicada en un punto de contacto $M$ en el sólido $B$	36

$t_3^B(M)$ : Tensión tangencial (dirección 2) aplicada en un punto de contacto M en el sólido B	36
$t_{23}(M)$ : Tensión tangencial resultante aplicada en un punto de contacto M	37
$\theta$ : Temperatura del material	24
$\theta_T$ : Temperatura de transición del material	24
$\theta_m$ : Temperatura de fusión del material	24
$\hat{\theta}$ : Función 'a trozos' dependiente de la temperatura del material	24
$u_1^A(M)$ : Desplazamiento normal de un punto de contacto M en el sólido A	36
$u_2^A(M)$ : Desplazamiento tangencial (dirección 1) de un punto de contacto M en el sólido A	36
$u_3^A(M)$ : Desplazamiento tangencial (dirección 2) de un punto de contacto M en el sólido A	36
$u_1^B(M)$ : Desplazamiento normal de un punto de contacto M en el sólido B	36
$u_2^B(M)$ : Desplazamiento tangencial (dirección 1) de un punto de contacto M en el sólido B	36
$u_3^B(M)$ : Desplazamiento tangencial (dirección 2) de un punto de contacto M en el sólido B	36
$u_y(M)$ : Desplazamiento radial del radio exterior de la base de contacto en un ensayo de Taylor	9
$u_{x1}(M)$ : Desplazamiento longitudinal de la cara opuesta a la de contacto en un ensayo de Taylor	9
$u_{x2}(M)$ : Desplazamiento longitudinal de la cara de contacto en un ensayo de Taylor	9
V: Velocidad de propagación de la onda	14
$v_0$ : Velocidad de impacto en un ensayo Taylor	17
$x_d$ : Número de datos correspondientes a la variable independiente	43
$x_i$ : Valor de la variable independiente en el punto i	40
$y_d$ : Número de datos correspondientes a la variable dependiente	43
$y_i$ : Valor experimental de la variable dependiente en el punto i	40
$y(x_i)$ : Valor ajustado de la variable dependiente en el punto i	40
z: Variable axial del cilindro	18