

Proyecto Fin de Máster
Máster en Ingeniería Electrónica, Robótica y Auto-
mática

SIMULACIÓN EN MATLAB DE OSCILA-
DOR ELECTRONICO DE DIMENSION
CUATRO BASADO EN MEMRISTOR

Autor: Guillermo Vico Velázquez

Tutor: Francisco Javier Ros Padilla

Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023



Proyecto Fin de Máster
Máster en Ingeniería Electrónica, Robótica y Automática

SIMULACIÓN EN MATLAB DE OSCILADOR ELECTRONICO DE DIMENSION CUATRO BASADO EN MEMRISTOR

Autor:

Guillermo Vico Velázquez

Tutor:

Francisco Javier Ros Padilla

Profesor Titular

Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023

Proyecto Fin de Máster: SIMULACIÓN EN MATLAB DE OSCILADOR ELECTRONICO DE DIMENSION CUATRO BASADO EN MEMRISTOR

Autor: Guillermo Vico Velázquez
Tutor: Francisco Javier Ros Padilla

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Resumen

El memristor es un elemento que lleva estudiándose desde hace bastante tiempo, pero es en los últimos años donde la tecnología del silicio parece que ha disminuido su gran crecimiento, que vuelve a verse en el memristor una oportunidad de conseguir nuevas tecnologías.

Con el estudio de la característica eléctrica del memristor, se ha visto que tiene una gran variedad de aplicaciones como oscilador, lo que puede suplir los actuales osciladores. Es por ello que en este documento se ha buscado modelar un circuito basado en memristor de Leon O. Chua, generar un sistema dinámico y simular su comportamiento dinámico.

Para poder comprender bien tanto el memristor, como los sistemas dinámicos se ha realizado una revisión bibliográfica que permita contextualizar las simulaciones realizadas y las interpretaciones y conclusiones posteriores a ellas.

Abstract

The memristor is an element that has been studied for quite some time, but it is in recent years where silicon technology seems to have slowed down its great growth, which again sees the memristor as an opportunity to achieve new technologies.

With the study of the electrical characteristic of the memristor, it has been seen that it has a wide variety of applications as an oscillator, which can supplant the current oscillators. That is why in this paper we have sought to model a circuit based on Leon O. Chua's memristor, generate a dynamic system and simulate its dynamic behavior.

In order to understand both the memristor and the dynamic systems, a bibliographic review has been carried out to contextualize the simulations performed and the interpretations and conclusions made after them.

Índice

| | |
|--|-----------|
| <i>Resumen</i> | I |
| <i>Abstract</i> | III |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Planteamiento del problema | 1 |
| 1.2 Justificación | 1 |
| 1.3 Objetivo | 1 |
| 1.4 Metodología | 1 |
| 1.5 Estructura | 2 |
| 2 Fundamentos de sistemas dinámicos | 3 |
| 2.1 Flujos en la recta real | 4 |
| 2.1.1 Estabilidad en el flujo y puntos fijos | 5 |
| 2.1.2 Análisis de la estabilidad lineal | 6 |
| 2.2 Flujos en la circunferencia | 10 |
| 2.2.1 Oscilador Uniforme | 10 |
| 2.2.2 Oscilador no Uniforme | 10 |
| 2.3 Sistemas lineales en dos dimensiones | 12 |
| 2.3.1 Introducción | 13 |
| 2.3.2 Clasificación de los sistemas lineales | 15 |
| 2.3.3 Clasificación de los puntos fijos | 17 |
| 2.4 Bifurcaciones | 18 |
| 2.4.1 Silla-Nodo | 18 |
| 2.4.2 Bifurcación de Pitchfork | 19 |
| Bifurcación Supercrítica | 19 |
| Bifurcación Subcrítica | 20 |
| 2.4.3 Bifurcación de Hopf | 22 |
| 2.4.4 Bifurcación FCCL en sistemas lineales a trozos | 23 |
| 2.5 Sistemas Lineales a Trozos | 25 |
| 2.5.1 Ciclos limites | 26 |
| 2.5.2 Aplicación de Poincaré-Bendixson | 27 |
| 2.5.3 Forma generalizada de Liénard | 28 |
| 3 Memristor | 31 |
| 3.1 Introducción al Memristor | 31 |
| 3.1.1 Historia del Memristor | 32 |
| 3.2 Fabricación del memristor | 33 |
| 3.3 Tipos de Memristor | 35 |
| 3.4 Modelo eléctrico del Memristor | 36 |
| 3.5 Osciladores surgidos a partir del memristor | 37 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.6 | Aplicaciones del memristor | 39 |
| 4 | Análisis del sistema y simulación en Matlab | 41 |
| 4.1 | Sistema en 4D | 41 |
| 4.2 | Sistema en 3D | 43 |
| 4.3 | Análisis del sistema 3D | 44 |
| 4.3.1 | Equilibrios | 44 |
| 4.3.2 | Bifurcaciones | 45 |
| 4.4 | Métodos de continuación | 46 |
| 4.4.1 | Método Newton-Raphson | 46 |
| 4.4.2 | Método de Pseudo-Longitud de arco de Keller | 47 |
| 4.5 | Continuación del sistema en 3D | 48 |
| 4.5.1 | Ciclos límite en el sistema 3D | 48 |
| 4.5.2 | Continuación de ciclo límite en función de la cantidad conservada h | 52 |
| 4.5.3 | Curva de bifurcación silla-nodo | 52 |
| 5 | Resultados | 55 |
| 5.1 | Simulación del sistema en 4D | 55 |
| 5.2 | Simulación del sistema en 3D | 57 |
| 5.3 | Continuación del sistema en 3D | 57 |
| 5.3.1 | Continuación de ciclo límite en función de la cantidad conservada h | 58 |
| 5.3.2 | Continuación de ciclo límite en función del parámetro gamma | 60 |
| 5.3.3 | Continuación de curva de bifurcación de Silla-Nodo | 61 |
| 5.3.4 | Continuación del parámetro a | 62 |
| 6 | Conclusiones | 65 |
| 7 | Código | 67 |
| 7.1 | Ecuaciones de cierre | 67 |
| 7.1.1 | Tres zonas | 67 |
| 7.1.2 | Dos zonas derecha | 68 |
| 7.1.3 | Dos zonas izquierda | 68 |
| 7.1.4 | Ecuaciones de cierre para búsqueda de Silla Nodo | 69 |
| 7.2 | Sistema 3D y 4D con ODE45 | 70 |
| 7.2.1 | Definición del sistema en 4D | 70 |
| 7.2.2 | Aplicación del sistema en 4D | 70 |
| 7.2.3 | Definición del sistema en 3D | 71 |
| 7.2.4 | Aplicación del sistema en 3D | 72 |
| 7.3 | Función de continuación de parámetros en sistema 3D | 73 |
| 7.3.1 | Continuación generalizada | 73 |
| 7.3.2 | Continuación para SN | 84 |
| | <i>Índice de Figuras</i> | 93 |
| | <i>Bibliografía</i> | 95 |

1 Introducción

1.1 Planteamiento del problema

Los osciladores basados en memristores pueden llegar a tener una gran cantidad de aplicaciones además de un interesante comportamiento dinámico, que van desde las oscilaciones estables hasta el caos.

Estudiaremos la dinámica que tienen y en particular su comportamiento periódico, que es muy interesante para poder generar osciladores.

1.2 Justificación

Esta problemática ha generado que se plantee una solución para poder simularlo y continuarlo en base a dos artículos fundamentalmente. El primero es el del tutor Javier Ros, A multiple focus-center-cycle bifurcation in 4D discontinuous piecewise linear memristor oscillators [7], que es fundamental para poder comprender las bases del sistema dinámico que se va a utilizar y el artículo MEMRISTOR OSCILLATORS [16] de Leon Chua que es de donde surge el circuito del que se quiere estudiar la dinámica.

1.3 Objetivo

Los objetivos planteados para el TFM son los siguientes:

- Estudiar la dinámica en sistemas lineales, sistemas lineales a trozos, centrándose en distintos tipos de bifurcaciones.
- Realizar una simulación y comparación de los sistemas de dimensión tres y cuatro que aparecen en [9].
- Analizar las bifurcaciones y los puntos fijos presentes en el sistema.
- Continuación de ciclos límite y curvas de bifurcación.

1.4 Metodología

El método que se ha seguido comprende la revisión bibliográfica para asentar la base del proyecto, y la comprensión del oscilador basado en memristor de Chua y los sistemas dinámicos, junto al tutor. De forma global se ha representado el método seguido en la figura 1.1.

Una vez asentadas las bases, se ha proseguido con la simulación del sistema que ha permitido analizar el comportamiento dinámico del oscilador.

Tras elegir los algoritmos y conseguir los datos suficientes, se empezó a utilizar MATLAB simulando el sistema 3D y 4D, viendo las dificultades que presentaba el sistema. Finalmente, se utilizó la continuación basada en el método de pseudo-longitud de arco de Keller, para caracterizar el sistema y mostrar las distintas bifurcaciones presentes. Junto a esto se redactó y se hizo una comprensión de los resultados para ver de forma global como se ha utilizado todo lo visto teóricamente.

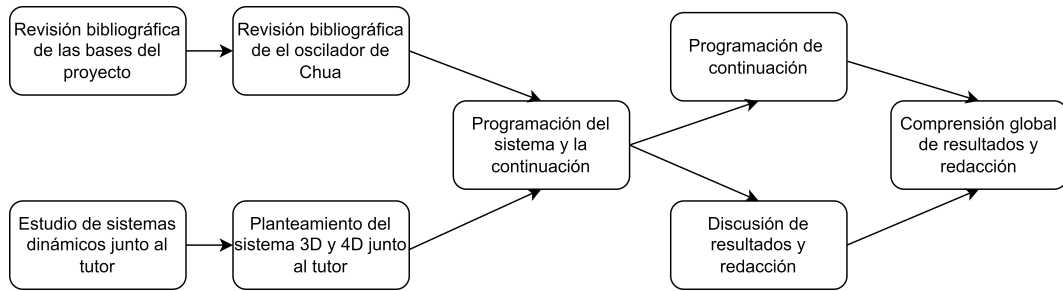


Figura 1.1 Metodología seguida a lo largo del proyecto..

1.5 Estructura

El proyecto se ha estructurado de forma que al principio se plantea la base del proyecto, una introducción a la dinámica de los sistemas lineales, como funcionan los sistemas lineales a trozos, las bifurcaciones más representativas y específicamente las que se van a utilizar.

Continuando con los fundamentos del proyecto, se ha explicado como funciona el memristor, su estructura externa y un contexto. Asimismo, se han mostrado ejemplos del funcionamiento. Sabiendo todos los conceptos de los sistemas dinámicos y el memristor, se han introducido teóricamente todo lo necesario para poder realizar las simulaciones y las continuaciones.

La parte final del trabajo muestra los resultados explicados, junto a la conclusión y posibles trabajos futuros que se plantean.

2 Fundamentos de sistemas dinámicos

Para poder entender el memristor, se ha de comprender como puede actuar cualquier sistema en el tiempo y ante cualquier perturbación. Este es un campo que abarca muchas posibilidades, donde se puede llegar a caracterizar el comportamiento de todo aquel elemento frente a una de sus variables. Por ello, se va a hacer una revisión de los fundamentos de los sistemas dinámicos, para luego estudiar a fondo el comportamiento del memristor.

La teoría de sistemas dinámicos [4] es un campo de las matemáticas y la física que se ocupa del estudio de cómo evolucionan los sistemas a lo largo del tiempo. Estos sistemas pueden ser aplicados a muchos ámbitos como físicos, biológicos, económicos... y se caracterizan por cambiar o evolucionar en respuesta a ciertas reglas matemáticas. Los principales conceptos clave en la teoría de sistemas dinámicos:

- **Sistema Dinámico:** Un sistema dinámico es cualquier sistema que evoluciona con el tiempo. Puede estar representado por ecuaciones diferenciales que describen cómo cambian sus variables en función del tiempo.
- **Trayectoria:** La trayectoria de un sistema dinámico es una curva que representa cómo cambian las variables del sistema a medida que avanza el tiempo. En sistemas continuos, esto a menudo se representa como una curva en un espacio de fase.
- **Atractor:** Un atractor es un conjunto al que tienden a converger las trayectorias de un sistema dinámico. Puede ser un punto, una curva, una superficie u otro objeto geométrico en el espacio de fase. Los atractores son útiles para entender el comportamiento a largo plazo de un sistema.
- **Estabilidad:** En sistemas dinámicos, la estabilidad se refiere a cómo se comportan las trayectorias cercanas a un punto de equilibrio (donde las derivadas son cero). Un punto de equilibrio se considera estable si las trayectorias cercanas tienden a permanecer cerca de él en el tiempo, y se considera inestable si las trayectorias se alejan de él.
- **Caos:** El caos es un concepto importante en la teoría de sistemas dinámicos. Se refiere a sistemas que son altamente sensibles a las condiciones iniciales, lo que significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a resultados muy diferentes. El atractor en sistemas caóticos se llama "atractor extraño".
- **Bifurcaciones:** Las bifurcaciones son cambios abruptos en el comportamiento de un sistema dinámico a medida que un parámetro se modifica gradualmente. Pueden dar lugar a cambios en la estabilidad, la periodicidad y la complejidad del sistema.

A continuación, se explicará en más detalle los sistemas dinámicos más básicos y los necesarios para poder entender lo que se pretende estudiar en el TFM.

2.1 Flujos en la recta real

Un sistema general se define por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Las soluciones que puede tener este sistema se pueden visualizar como trayectorias que fluyen a través de un espacio de fase n-dimensional con coordenadas (x, \dots, x_n) . Para $n = 1$ se obtiene una única ecuación de la forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2)$$

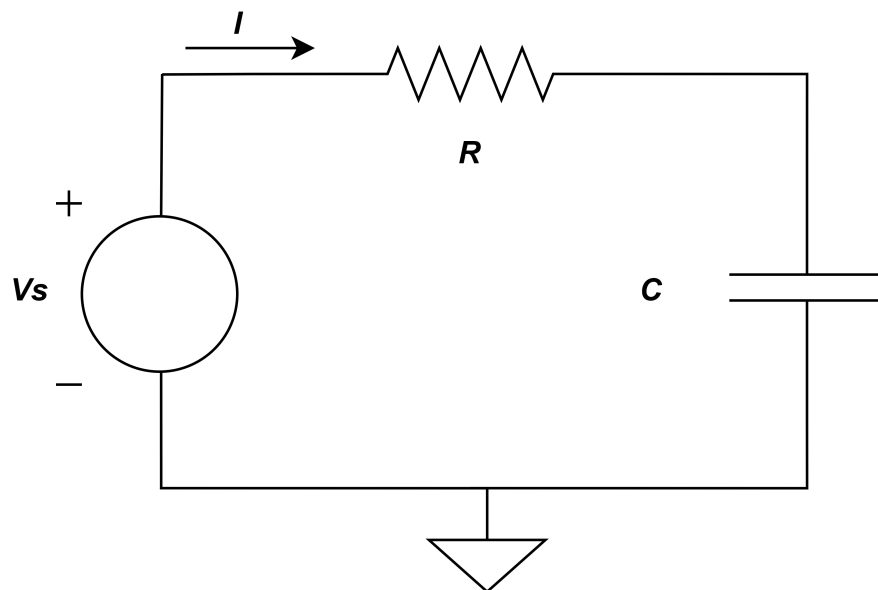


Figura 2.1 Circuito RC.

Así, el sistema queda caracterizado de tal forma que depende de una determinada variable y del propio tiempo. Viendo un ejemplo [2]:

En un circuito clásico RC, (figura 2.1) se puede ver un sistema definido por una única ecuación:

$$V_S = IR + Q/C = \dot{Q}R + Q/C \quad (2.3)$$

Así se puede hacer una función que relacione \dot{Q} y Q :

$$\dot{Q} = f(Q) = \frac{V_S}{R} + \frac{Q}{RC} \quad (2.4)$$

De esta forma, la figura 2.2 muestra como se comporta el sistema, tendiendo al nodo CV_S . A este nodo se le llama punto estable o sumidero y en ellos el flujo tiende hacia ellos. Además de los sumideros, hay otro tipo de puntos, llamados inestables, los vamos a distinguir así:

1. **Punto estable** (Sumidero): Este se representa según la figura y en ellos el flujo tiende a entrar hacia ellos, por ejemplo, en una dimensión como se ha visto en la figura 2.2.
2. **Punto inestable** (Fuente): En estos puntos el flujo tiende hacia fuera. Un caso sería para la función $\dot{x} = \sin(x)$ donde se produce una serie de sumideros y fuentes (figura 2.3).

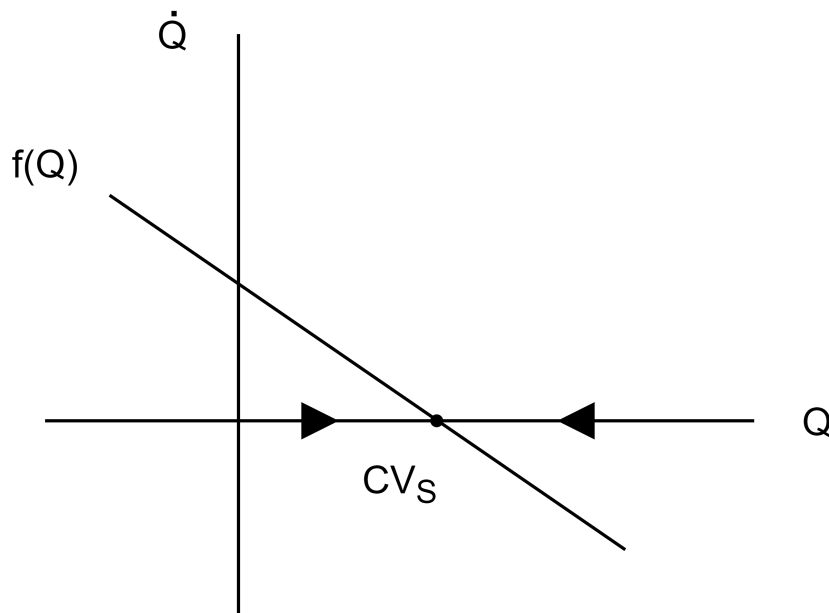


Figura 2.2 Función de la carga en el tiempo dependiente de la carga en un circuito RC.

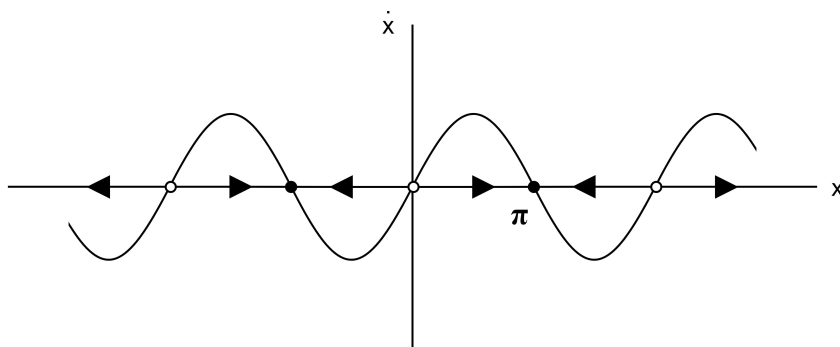


Figura 2.3 Sistema cuya función es el seno: $\dot{x} = \text{sen}(x)$.

2.1.1 Estabilidad en el flujo y puntos fijos

La representación de los sistemas de una dimensión ($\dot{x} = f(x)$) se pueden plantear como un fluido que fluye a lo largo de la recta real [20], este puede tener una cierta velocidad según se vaya acercando a los puntos fijos. Este fluido, se va a llamar fluido de fase y la recta real es el espacio de fase. El flujo va tender hacia la derecha cuando $f(x) > 0$ y a la izquierda si $f(x) < 0$.

Para encontrar la solución de $\dot{x} = f(x)$ partiendo de un punto inicial aleatorio x_0 , colocamos una partícula imaginaria (conocida como punto de fase) en x_0 , y se observa cómo es arrastrada por el flujo. A medida que pasa el tiempo, el punto de fase se mueve a lo largo del eje x según alguna función $x(t)$. Esta función se llama trayectoria basada en x_0 y representa la solución de la ecuación diferencial que parte de la condición inicial x_0 . Las figuras 2.2 y 2.3 muestran las distintas trayectorias de forma cualitativa y se llaman retrato de fase.

El aspecto del retrato de fase está controlado por los puntos fijos que se describieron anteriormente como sumideros o fuentes. Están definidos como $f(x_n) = 0$ (siendo n cada uno de estos puntos, donde los puntos estables se marcaran como x_s y los inestables como x_u) y en términos de flujo, se corresponden a puntos de estancamiento. En la figura 2.3 se ha echo una representación de un seno ($\dot{x} = \text{sen}(x)$) donde se encadenan una serie de estos puntos fijos, siendo el punto negro sólido estable y el punto abierto inestable.

Continuando con el flujo, los puntos fijos representan soluciones de equilibrio, donde si son estables, sucede que si $x = x_s$ inicialmente, entonces $x(t) = x_s$ (para todo el tiempo). Un equilibrio se define como estable si todas las perturbaciones suficientemente pequeñas que se alejan de él se amortiguan en el tiempo. Así, los equilibrios estables se representan geoméricamente mediante puntos fijos estables. Por el contrario, los equilibrios inestables, en los que las perturbaciones crecen en el tiempo, se representan mediante puntos fijos inestables.

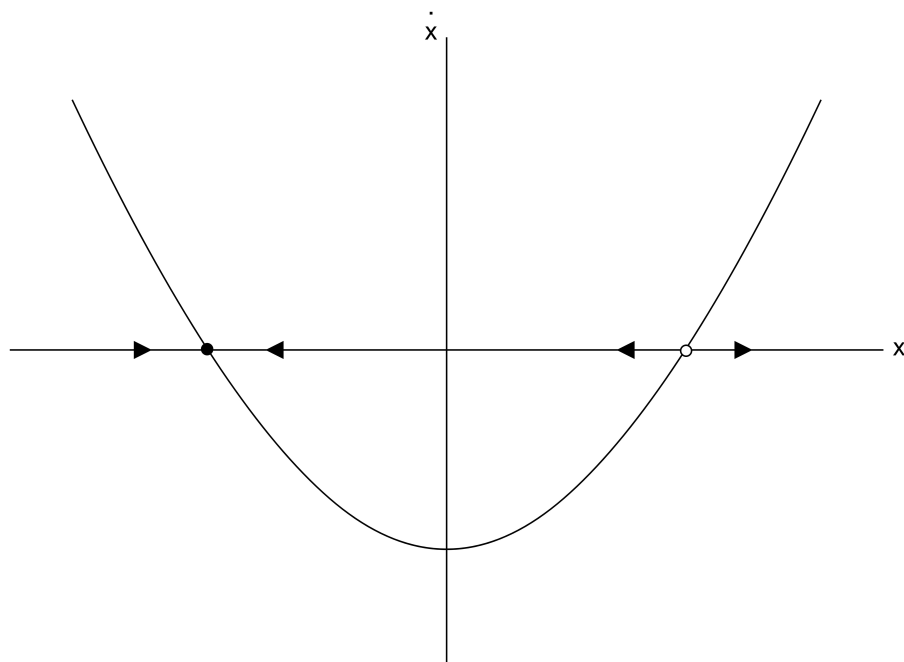


Figura 2.4 Sistema cuya función es la parábola: $\dot{x} = x^2 - 1$.

Cabe destacar que la estabilidad es local, ya que si se producen alteraciones grandes cerca de un punto fijo estable, el sistema puede tender al infinito (como el caso de un sistema cuya función sea una parábola, figura 2.4). Es por ello que la estabilidad puntos fijos son estables o inestables a nivel local, no a nivel global.

2.1.2 Análisis de la estabilidad lineal

En principio, con métodos gráficos se puede tener una idea de como se va a comportar el sistema. Hasta ahora nos hemos basado en métodos gráficos para determinar la estabilidad de los puntos fijos [3]. A menudo se desea tener una medida más cuantitativa de la estabilidad, como por ejemplo la tasa de decaimiento hacia un punto fijo estable. Un método para obtener esta tasa o para saber como afectan las perturbaciones se realizará mediante la linealización sobre un punto fijo:

Sea x_0 un punto fijo, y sea $d(t) = x(t) - x_0$ una pequeña perturbación lejos de x_0 . Para ver si la perturbación crece o decae, se deriva una ecuación diferencial para $d(t)$. La diferenciación da como resultado:

$$\dot{d} = \frac{d}{dt}(x - x_0) = \dot{x} \quad (2.5)$$

Así se puede llegar a $\dot{d} = \dot{x} = f(x) = f(x_0 + d)$. Aplicando la expansión de Taylor se obtiene:

$$f(x_0 + d) = f(x_0) + df'(x_0) + O(d^2) \quad (2.6)$$

Sabiendo que $f(x_0) = 0$ porque es un punto fijo y que $O(d^2)$ son los términos de mínimos cuadrados, se puede dejar la ecuación en lo siguiente:

$$\dot{d} = df'(x_0) + O(d^2) \quad (2.7)$$

Ahora bien, se pueden considerar dos casos: si $f'(x_0) \neq 0$, los términos $O(d^2)$ son despreciables y podemos escribir la aproximación:

$$\dot{d} = df'(x_0) \quad (2.8)$$

Esta es una ecuación lineal en d , y se llama la linealización sobre x_0 . Aquí se muestra que la perturbación $d(t)$ crece exponencialmente si $f'(x_0) > 0$ y decae si $f'(x_0) < 0$. Si $f'(x_0) = 0$, los términos $O(d^2)$ no son despreciables y es necesario un análisis no lineal para determinar la estabilidad.

Entrando en profundidad en el caso $f'(x_0) = 0$, es complicado afirmar cualquier cosa de forma general, por lo que hay que ir caso por caso. Se van a considerar una serie de ejemplos donde se cumple que cada uno de estos sistemas tiene un punto fijo $x = 0$ con $f'(x_0) = 0$ y, sin embargo, la estabilidad va a ser diferente en cada caso:

Cada uno de estos sistemas tiene un punto fijo $x^* = 0$ con $f'(x^*) = 0$. Sin embargo, la estabilidad es diferente en cada caso. La figura 2.4.1 muestra que (a) es estable y (b) es inestable.

El caso (d) es una línea completa de puntos fijos; las perturbaciones no crecen ni decaen.

- 1. Sistema $\dot{x} = -x^3$:** Es una función cúbica que es estable por el punto fijo que tiene en $x = 0$, como se puede ver en la figura 2.5, provocando que fluyan hacia él.

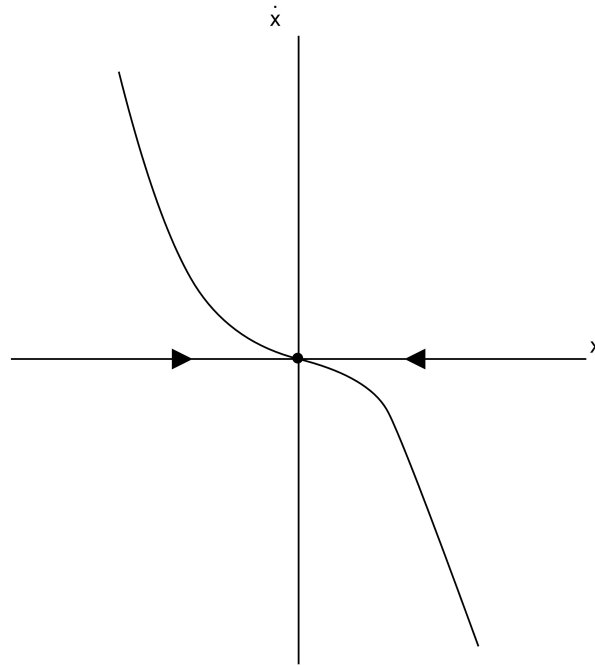


Figura 2.5 Sistema cuya función es: $\dot{x} = -x^3$.

2. **Sistema** $\dot{x} = x^3$: Este caso es también una función cúbica que, a diferencia de la anterior es inestable, haciendo que el sistema tienda al infinito (figura 2.6).

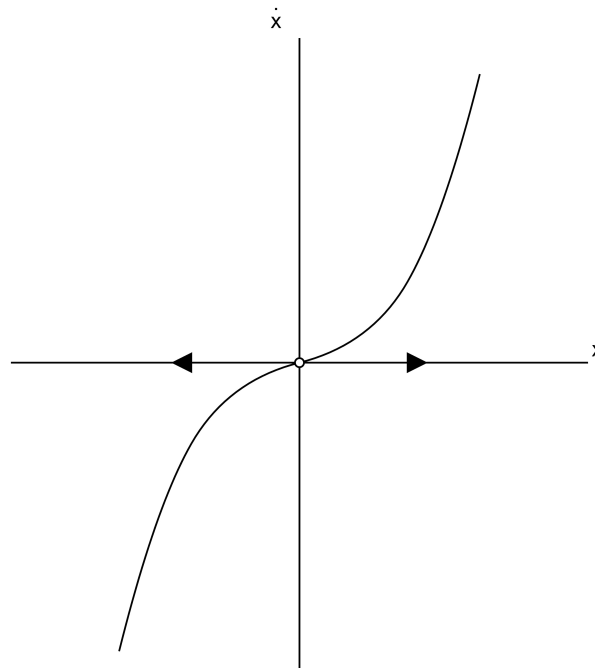


Figura 2.6 Sistema cuya función es: $\dot{x} = x^3$.

3. **Sistema** $\dot{x} = x^2$: Esta parábola (figura 2.7) es un caso muy interesante, ya que, en comparación con los anteriores, es una mezcla de ambos. A este se le llama punto fijo semi-estable en $x = 0$. Este nombre se basa en que el punto fijo atrae por la izquierda y repele por la derecha. Por lo tanto, este tipo de punto

fijo se indica gráficamente con un semicírculo.

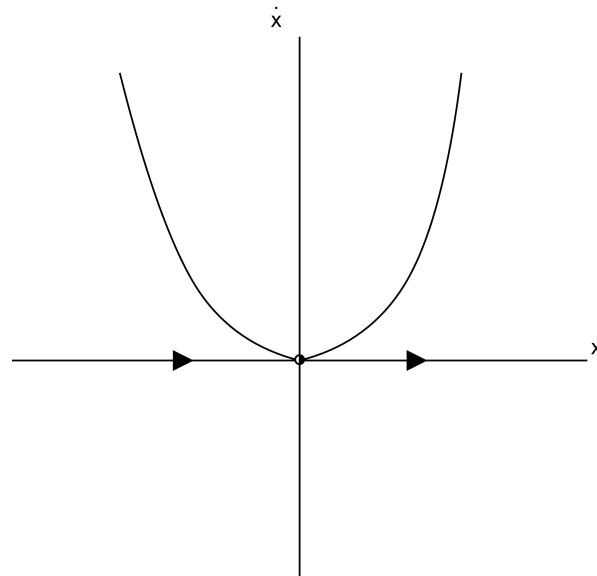


Figura 2.7 Sistema cuya función es: $\dot{x} = x^2$.

4. **Sistema $\dot{x} = 0$:** Esta función es una línea completa de puntos fijos (figura 2.8), donde las perturbaciones ni crecen ni decaen.

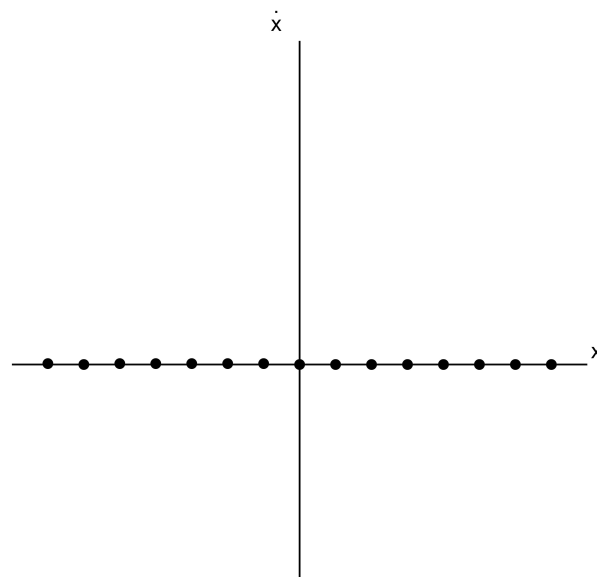


Figura 2.8 Sistema cuya función es: $\dot{x} = 0$.

En conclusión, la pendiente $f'(x_0)$ en el punto fijo determina su estabilidad. En términos cualitativos, se veía que la pendiente era siempre negativa en un punto fijo estable, sin llegar a entrar en más detalle. Ahora, con la nueva definición, se puede añadir la nueva característica, que es, que ahora se tiene una medida de lo estable que es un punto fijo. Esta magnitud va a desempeñar el papel de cuantificar la estabilidad, siendo una tasa de crecimiento o decaimiento exponencial. Del mismo modo, su recíproco $1/|f'(x_0)|$ es una escala de

tiempo característica; determina el tiempo necesario para que $x(t)$ varíe significativamente en el entorno de x_0 .

2.2 Flujos en la circunferencia

Hasta ahora se ha estudiado los flujos en el eje que siguen la ecuación $\dot{x} = f(x)$, que se ha visualizado como un campo vectorial sobre la recta. Ahora es el momento de considerar un nuevo tipo de ecuación diferencial y su correspondiente espacio de fase. Esta ecuación, será: $\dot{\theta} = f(\theta)$.

Así, esta corresponde a un campo vectorial en la circunferencia. Aquí θ es un punto del círculo y $\dot{\theta}$ es el vector velocidad en ese punto, que va a seguir la función determinada por $\dot{\theta} = f(\theta)$. Al igual que la línea, el círculo es unidimensional, pero tiene una nueva e importante propiedad: al fluir en una única dirección, una partícula puede volver finalmente (figura). Esto puede dar pie a que existan soluciones periódicas, como ya se verá a continuación.

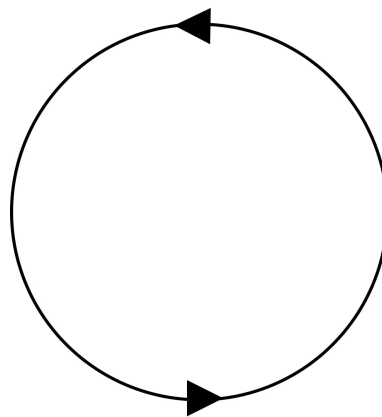


Figura 2.9 Sistema circular.

Dicho de otro modo, los campos vectoriales en el círculo proporcionan el modelo más básico de los sistemas que pueden oscilar. Sin embargo, en todos los demás aspectos, los flujos en el círculo son similares a los flujos en la recta.

2.2.1 Oscilador Uniforme

Definiendo la posibilidad más sencilla, esta es un punto en un círculo y suele llamarse ángulo o fase. Entonces el oscilador más simple de todos es aquel en el que la fase θ cambia uniformemente: $\dot{\theta} = \omega$. Resolviendo, se obtiene:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad (2.9)$$

donde ω es una constante (velocidad angular). La solución es la que corresponde a un movimiento uniforme alrededor del círculo con una frecuencia angular ω . Esta solución es periódica, en el sentido de que $\theta(t)$ cambia en 2π y por lo tanto vuelve al mismo punto del círculo, después de un tiempo $T = 2\pi/\omega$, siendo T el período de la oscilación.

La amplitud de oscilación y de fase no existen en este sistema, ya que si hubiera, sería espacio de fase bidimensional.

2.2.2 Oscilador no Uniforme

Este oscilador se va a tratar desde un ejemplo:

$$\dot{\theta}(t) = \omega - a \sin(\theta) \quad (2.10)$$

Para analizar el sistema 2.10, se va a realizar una serie de simplificaciones por comodidad ya que los resultados opuestos (donde las variables son negativas) son similares, estas son: $\omega > 0$ y $a \geq 0$.

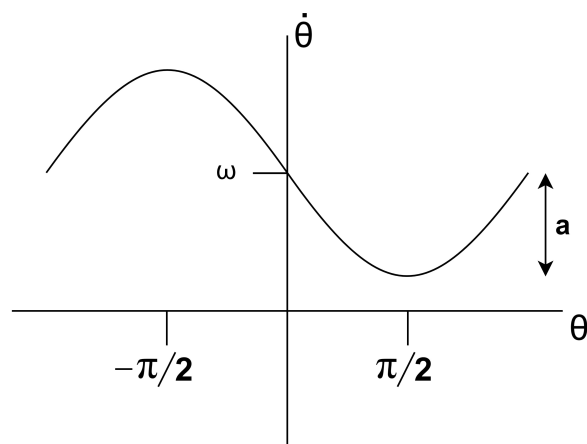


Figura 2.10 Sistema 2.10 donde esta representada la media y la amplitud.

Así, una gráfica típica de la función 2.10 se puede ver en la figura 2.10, donde ω es la media y a es la amplitud.

Primero se va a empezar por el caso $a = 0$, donde la ecuación 2.10 se reduce al oscilador uniforme. Así, se puede ver que el parámetro a introduce una no uniformidad del flujo alrededor del círculo: el flujo es más rápido en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ y más lento en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Esta falta de uniformidad se hace más pronunciada a medida que aumenta a . De este modo, se pueden distinguir tres casos:

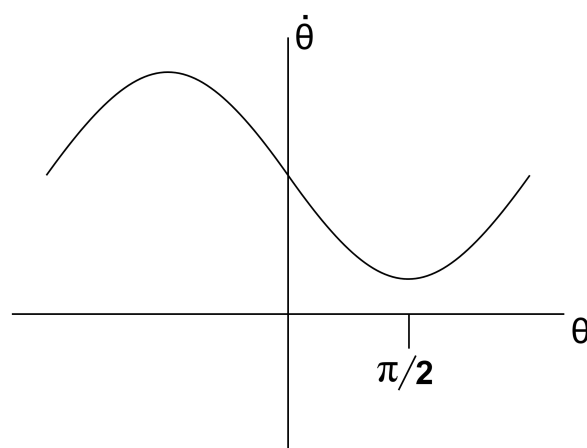


Figura 2.11 Primer caso con a menor que ω .

1. Cuando a es ligeramente inferior a ω (figura 2.11), la oscilación es muy brusca: el punto de fase $\theta(t)$ tarda mucho tiempo en pasar por un cuello de botella cerca de $\theta = -\frac{\pi}{2}$, tras lo cual recorre el resto del círculo en una escala de tiempo mucho más rápida.
2. Cuando $a = \omega$, el sistema deja de oscilar por completo, esto se debe a que existe un punto fijo semiestable

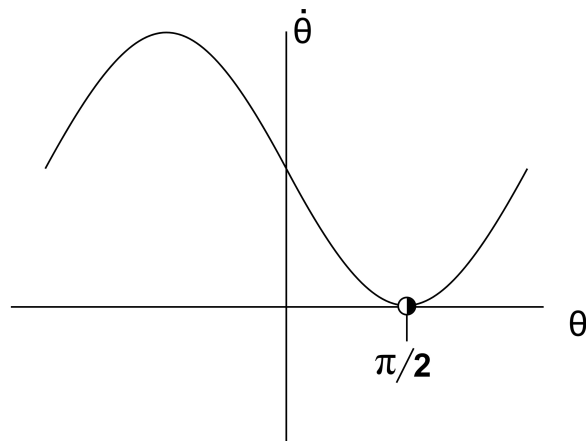


Figura 2.12 Segundo caso donde a es igual a ω .

en una bifurcación de Silla-Nodo (se explicará en futuros apartados) en $\theta = \frac{\pi}{2}$ (figura 2.12).

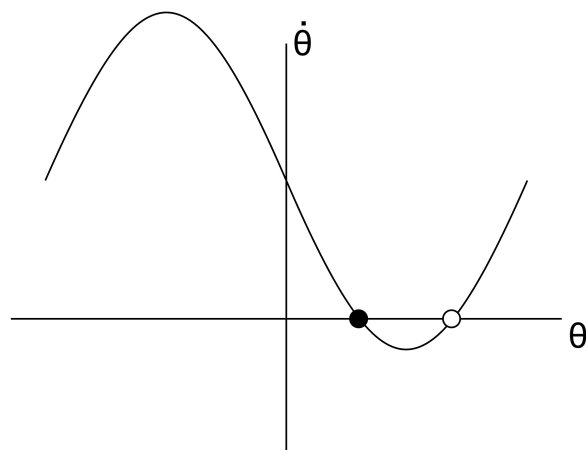


Figura 2.13 Tercer caso con a mayor que ω .

3. Por último, cuando $a > \omega$, el punto fijo semiestable se divide en un punto fijo estable y otro inestable (figura 2.13).

Del mismo modo, se puede ver cada uno de los sistemas en el círculo (figura 2.14). Esta visualización es más representativa, ya que se ve realmente como actúa el oscilador.

De este modo, quedan bien definidos los sistemas tanto en el eje como en el círculo. Antes de entrar en profundidad en las bifurcaciones, se va a presentar sistemas más complejos con flujos bidimensionales, ya que aquí aparecerán nuevas bifurcaciones.

2.3 Sistemas lineales en dos dimensiones

En los apartados anteriores se ha visto que en los espacios de fase unidimensionales el flujo tiene poco margen de maniobra, todas las trayectorias se ven obligadas a moverse de manera monótona o a permanecer constantes. En los espacios de fase de mayor dimensión, las trayectorias tienen mucho más margen de maniobra, por lo

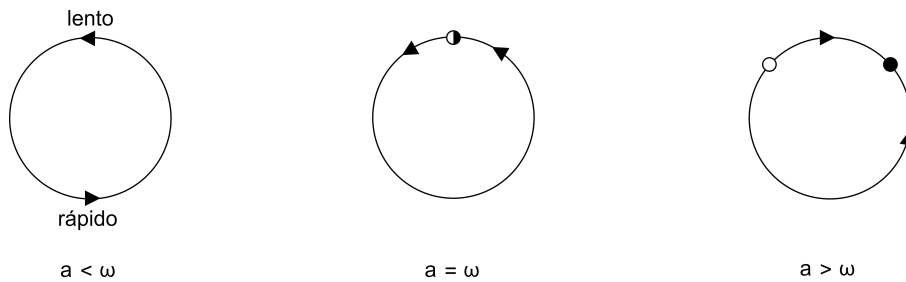


Figura 2.14 Todos los posibles casos estudiados representados en el círculo.

que es posible una gama más amplia de comportamientos dinámicos.

Para poder abarcar este tema se va a comenzar con el tipo más simple de sistemas de mayor dimensión, los sistemas lineales en dos dimensiones. Estos sistemas desempeñan un papel importante en la clasificación de los puntos fijos de los sistemas no lineales. Primero se va a comenzar con una explicación general acompañada de ejemplos y a continuación una clasificación de ellos.

2.3.1 Introducción

Un sistema lineal bidimensional es un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde a, b, c y d son parámetros. Normalmente, se suele representar de forma más compacta agrupando las variables en vectores y los parámetros en forma de matriz:

$$\dot{X} = AX. \tag{2.12}$$

El sistema es lineal en el sentido de que si x e y son soluciones, entonces también lo es cualquier combinación lineal $mx + ny$.

Las soluciones de $\dot{X} = AX$ pueden visualizarse como trayectorias que se mueven en el plano (x, y), que en este contexto se denomina plano de fase. Cabe destacar que para $\dot{X} = 0$ cuando $X = 0$, por lo que $x_0 = 0$ es siempre un punto fijo para cualquier elección de A.

Para poner en contexto a estos sistemas se va a presentar un sistema ejemplo $\dot{X} = AX$ que expandido queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Multiplicando las matrices y separando se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde se muestra que las dos ecuaciones están desacopladas, no hay y en la ecuación superior, ni x en la ecuación inferior. En este caso, cada ecuación puede resolverse por separado. Si se resuelve cada una se

puede interpretar el decaimiento en función de a :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 e^{at}, \\x(t) &= y_0 e^{-t}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

En la figura 2.15 se muestran todos los retratos de fase para diferentes valores de a . En cada caso, $y(t)$ decae exponencialmente, por ejemplo, para $a < 0$, $x(t)$ también decae exponencialmente y, por tanto, todas las trayectorias se aproximan al origen conforme t tiende a infinito. Sin embargo, la dirección no siempre va a ser la misma y dependerá del tamaño de a en comparación con -1 .

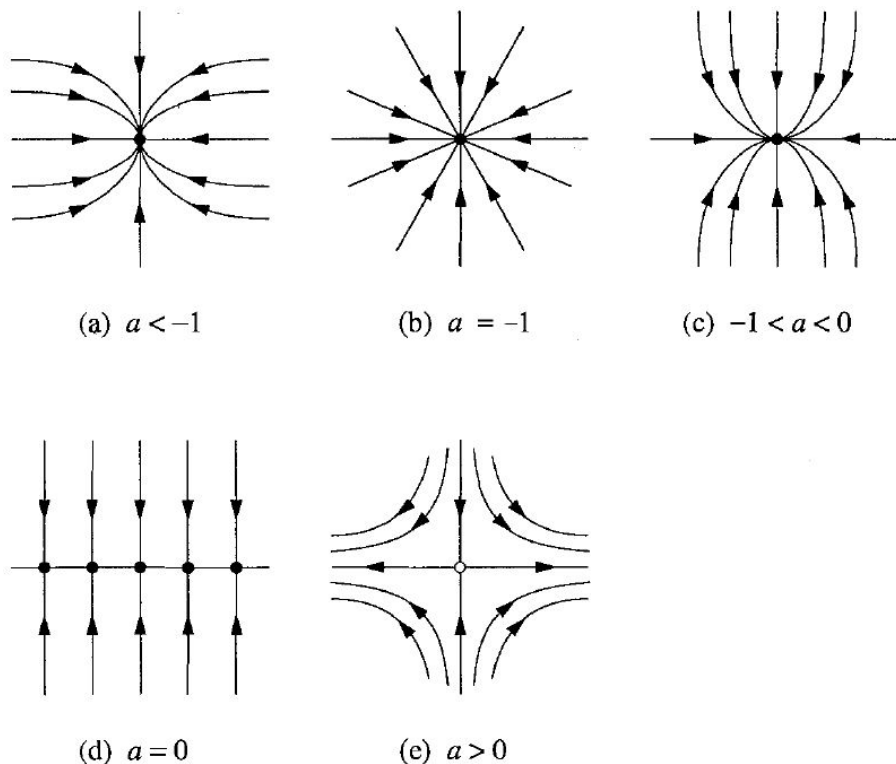


Figura 2.15 Todos los posibles casos. Fuente [20].

Para poder comprender lo dicho, se va a desmenuzar etapa a etapa en función de a :

1. Si se estudia el primer caso (figura 2.15a), se tiene $a < -1$, lo que implica que $x(t)$ decae más rápidamente que $y(t)$. Las trayectorias se acercan al origen de forma tangente a la dirección más lenta (aquí, la dirección del eje y). La explicación es que, cuando a es muy negativo, la trayectoria cae horizontalmente sobre el eje y , porque el decaimiento de $x(t)$ es casi instantáneo (en comparación).

Entonces, una vez que se acerca al eje y y tiende hacia el origen con una aproximación tangente al propio eje y . Por otro lado, mirando hacia el otro lado (hacia atrás en el tiempo), las trayectorias se vuelven todas paralelas a la dirección de decaimiento más rápida, es decir, la dirección del eje x . Así queda explicado el primer caso.

2. Entrando en el segundo caso (figura 2.15b), se da que $a = -1$. Aquí, ambas ecuaciones son bastante similares, el decaimiento tanto para x como para y es el mismo, esto es la ecuación: $y(t)/x(t) = y_0/x_0$. La relación de x e y es una constante, esto implica que todas las trayectorias van a ser líneas rectas que pasan por el origen, cuya pendiente es el propio cociente entre y_0/x_0 . Este caso se llama

nodo o estrella simétrica.

3. Entrando ya en la figura 2.15c, cuando $-1 < a < 0$, se tiene un caso bastante similar al primero. En este caso la diferencia va a estar en que x decae mas lento que y , dando como resultado que cuando se aproxime al origen, tiende a ser tangente a x y lejos de este paralelo a y .
4. Si se da que $a = 0$, se tiene directamente que a lo largo del eje x , va a haber una serie de puntos fijos por la ecuación $x(t) = x_0$. La dirección de decaimiento será paralela al eje y , de forma vertical.
5. Finalmente, un caso bastante interesante es para $a > 0$. Aquí, x_0 se vuelve inestable, debido al crecimiento exponencial en la dirección x , ocasionando que las trayectorias se desvíen de x_0 y se dirigen al infinito. Existe la excepción de que si la trayectoria comienza en el eje y esta si va a tender hacia el origen.

Cuando t tiende a infinito, las trayectorias son asintóticas al eje x y mirando hacia atrás, las trayectorias son asintóticas al eje y . En este caso, $x_0 = 0$ se denomina punto de silla.

En este caso, el eje y se denomina la colector estable del punto de silla y esta definido como el conjunto de condiciones iniciales x_0 , tal que $x(t) \rightarrow x_0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Asimismo, x será el colector inestable cambiando en el conjunto de condiciones iniciales que $t \rightarrow -\infty$ (esta expresión es indicativa en términos matemáticos).

2.3.2 Clasificación de los sistemas lineales

Para estudiar estos sistemas, se va a dar solución al caso general de una matriz arbitraria de 2×2 , a diferencia del ejemplo visto en la última sección, donde una de las entradas de la matriz A era cero. Las soluciones proporcionaran una variedad de retratos de fase que darán pie a su clasificación.

Se va a proceder de forma bastante similar al ejemplo visto, donde ya se comprobó que los ejes x e y desempeñan un papel geométrico crucial, determinando la dirección de las trayectorias para $t \rightarrow +\infty$ o para $t \rightarrow -\infty$.

También estaban los casos con trayectorias rectilíneas especiales: una trayectoria que comenzaba en uno de los ejes de coordenadas permanecía en ese eje para siempre y mostraba un crecimiento o decaimiento exponencial simple a lo largo del mismo. Para el caso general, se va a buscar un análogo de estas trayectorias, es decir, de la forma:

$$x(t) = e^{\lambda t} v \quad (2.16)$$

donde $v \neq 0$ es un vector fijo y λ es la tasa de crecimiento, ambos determinar. Si tales soluciones existen, corresponden a un movimiento exponencial a lo largo de la línea abarcada por el vector v . Para encontrar las condiciones sobre v y A , sustituimos $x(t) = e^{\lambda t} v$ en $\dot{x} = Ax$, y obtenemos $\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av$. Anulando el factor escalar no nulo $e^{\lambda t}$ se obtiene:

$$Av = \lambda v \quad (2.17)$$

que dice que las soluciones en línea recta deseadas existen si v es un autovector de A con su correspondiente autovalor λ . En este caso llamamos a la solución 2.16 una solución propia. En general, los autovalores de una matriz A vienen dados por la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$, donde I es la matriz identidad. Para una matriz de 2×2 como esta:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

la ecuación característica sería:

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

Esta ecuación puede quedar de la forma:

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0 \quad (2.20)$$

siendo τ la traza y Δ el determinante, ambos de A . Entonces, los autovalores serían:

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (2.21)$$

$$\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (2.22)$$

De estas ecuaciones podemos afirmar que los autovalores dependen únicamente de la traza y el determinante de la matriz A . La situación típica es que los autovalores sean distintos. En este caso, un teorema del álgebra lineal establece que los autovectores v_1 y v_2 , correspondientes son linealmente independientes y, por tanto, abarcan todo el plano (figura 2.16). En particular, cualquier condición inicial x , puede escribirse como una combinación lineal de vectores propios, por ejemplo x_0 .

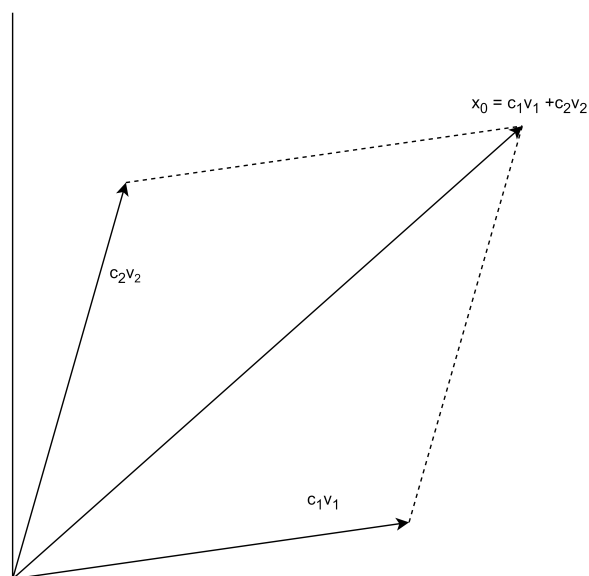


Figura 2.16 Combinación lineal de dos vectores.

Con esto lo que pretendemos es escribir la solución general para $x(t)$: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$. Esto, en sí, es una combinación lineal de soluciones de $\dot{x} = Ax$, que satisface $x(0) = 0$ y que por el teorema de unicidad es la única solución.

2.3.3 Clasificación de los puntos fijos

Los puntos fijos se pueden explicar en base a las ecuaciones vistas anteriormente, por lo que, se va a basar en eso y en la siguiente imagen (figura 2.17) para aclarar cada tipo:

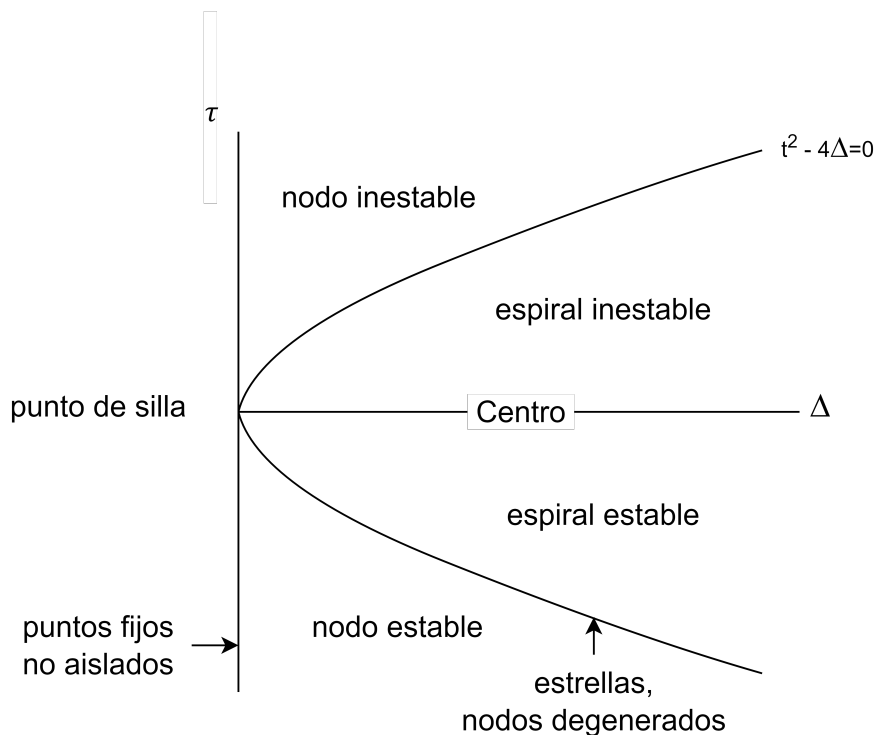


Figura 2.17 Los puntos fijos en función de la traza y el determinante. Fuente [20].

Los ejes son la traza τ y el determinante Δ de la matriz A y la curva está en función de los autovalores. El determinante y la traza se puede obtener escribiendo la ecuación característica en la forma $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$.

De la figura 2.17 se pueden hacer las siguientes observaciones:

- Si $\Delta > 0$ los valores propios son reales y tienen signos opuestos, por tanto, el punto fijo es un punto de silla.
- Si $\Delta < 0$ los autovalores son reales con el mismo signo (nodos) o complejos conjugados (espirales y centros). Los nodos satisfacen $\tau^2 - 4\Delta > 0$ y las espirales satisfacen $\tau^2 - 4\Delta < 0$. La parábola $\tau^2 - 4\Delta = 0$ es la frontera entre nodos y espirales, los nodos estrella y los nodos degenerados viven en esta parábola. La estabilidad de los nodos y espirales viene determinada por τ . Cuando $\tau = 0$, ambos autovalores tienen partes reales negativas, por lo que el punto fijo es estable. Las espirales y los nodos inestables tienen $\tau > 0$. Los centros neutralmente estables viven en el límite $\tau = 0$, donde los valores propios son puramente imaginarios.
- Si $\Delta = 0$, al menos uno de los valores propios es cero. Entonces el origen no es un punto fijo aislado. Puede haber una línea entera de puntos fijos o bien un plano de puntos fijos.

Además esta figura 2.17 también muestra que los puntos de silla, los nodos y las espirales son los principales tipos de puntos fijos y se dan en las principales regiones del plano de la figura. Los centros, estrellas, nodos degenerados y los puntos fijos no aislados son casos límite que se producen a lo largo de las curvas del plano.

De estos casos límite, los centros son, los más importantes, ya que se dan con mucha frecuencia en sistemas mecánicos sin fricción en los que se conserva la energía.

2.4 Bifurcaciones

Una bifurcación en sistemas dinámicos se refiere a un punto crítico o un cambio cualitativo en el comportamiento de un sistema dinámico, es decir cuando uno o más parámetros del sistema se modifican y cruzan ciertos valores críticos. Estos puntos críticos pueden manifestarse como cambios en la estabilidad, la periodicidad o la topología de las soluciones del sistema.

Las bifurcaciones son eventos importantes en la teoría de sistemas dinámicos, ya que pueden conducir a una variedad de comportamientos interesantes y complejos en el sistema.

2.4.1 Silla-Nodo

La bifurcación silla-nodo [15] es el mecanismo básico por el que los puntos fijos se crean y se destruyen. Al variar un parámetro, dos puntos fijos se acercan, chocan y se aniquilan mutuamente. Esta bifurcación es una de las formas en que los sistemas pueden cambiar de un comportamiento estable a un comportamiento inestable o viceversa. En una bifurcación silla-nodo existen dos principales conceptos:

1. **Punto de Silla (Saddle Point):** Es un punto crítico especial en el espacio de fase, siendo un punto de equilibrio inestable donde las trayectorias de las soluciones divergen en múltiples direcciones.
2. **Nodo:** Cuando el parámetro del sistema se encuentra en un valor específico llamado "valor de bifurcación," el punto de silla se convierte en un punto de equilibrio estable o nodo. En un nodo, las trayectorias de las soluciones convergen hacia el punto de equilibrio en lugar de alejarse de él.

La transición entre el punto de silla y el nodo es lo que se conoce como una bifurcación silla-nodo. La importancia de la bifurcación silla-nodo radica en que representa un cambio fundamental en la estabilidad del sistema. Cuando el sistema está cerca del valor de bifurcación, pequeñas perturbaciones pueden hacer que el sistema pase de un comportamiento estable a uno inestable o viceversa.

Ahora se va a presentar un ejemplo de la bifurcación silla-nodo, con un sistema de primer orden:

$$\dot{x} = r + x^2 \quad (2.23)$$

donde r es un parámetro, que puede ser positivo, negativo o cero. Dando lugar a tres casos diferentes.

1. Si r es negativo, hay dos puntos fijos, uno estable y otro inestable, como se vio en la figura 2.4.
2. Conforme r se aproxima a 0 desde abajo, la parábola va subiendo y los dos puntos fijos se acercan el uno al otro. En el momento $r = 0$, los puntos fijos se unen en un punto fijo semiestable, quedando la figura 2.7, como ya se vio en su momento.
3. En cuanto $r > 0$, este punto fijo semiestable desaparece, quedándose el sistema sin ningún punto fijo (figura 2.18).

Por consiguiente, se diría la bifurcación se diría que se presenta en $r = 0$.

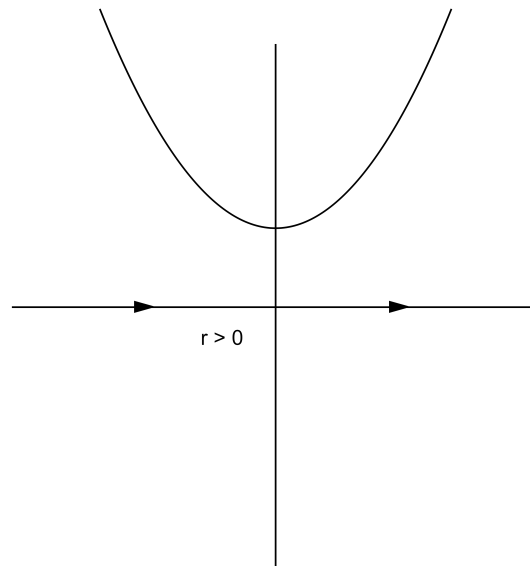


Figura 2.18 Sistema $\dot{x} = r + x^2$, donde $r > 0$.

2.4.2 Bifurcación de Pitchfork

La bifurcación de pitchfork [19] tiene la misma base que la anterior, pues los puntos de equilibrio de un sistema cambian su estabilidad a medida que se varía un parámetro. El nombre "pitchfork" se deriva de la forma característica de la bifurcación en la que se asemeja a un tenedor o tridente y aparece comúnmente en problemas físicos que tienen simetría. Pueden presentarse diferentes simetrías y formas dependiendo del sistema. En una bifurcación de pitchfork, generalmente se observan tres tipos de comportamiento de los puntos de equilibrio del sistema a medida que se varía un parámetro clave:

1. **Punto de Equilibrio Estable:** Para ciertos valores del parámetro, el sistema tiene un único punto de equilibrio estable. En este caso, el sistema tiende a regresar a este punto de equilibrio después de perturbaciones pequeñas.
2. **Puntos de Equilibrio Inestables:** A medida que el parámetro se modifica, pueden aparecer dos nuevos puntos de equilibrio inestables que son simétricos con respecto al punto de equilibrio estable original. Estos puntos inestables no atraen a las trayectorias cercanas y, por lo tanto, las perturbaciones pueden alejar al sistema de ellos.
3. **Punto de Equilibrio Estable Duplicado:** A medida que se continúa variando el parámetro, los dos puntos de equilibrio inestables pueden converger y desaparecer, dejando solo el punto de equilibrio estable original. En este punto, se produce una bifurcación de pitchfork.

La bifurcación de pitchfork se puede clasificar en dos tipos principales, que se van a estudiar particularmente.

Bifurcación Supercrítica

En una bifurcación supercrítica, los puntos de equilibrio inestables que aparecen durante la bifurcación desaparecen a medida que el parámetro continúa variando. En este caso, el sistema pasa de tener un punto de equilibrio estable a tener dos puntos de equilibrio estables. La bifurcación supercrítica a menudo se asocia con un cambio suave en el comportamiento del sistema.

La forma normal de la bifurcación de horquilla supercrítica es:

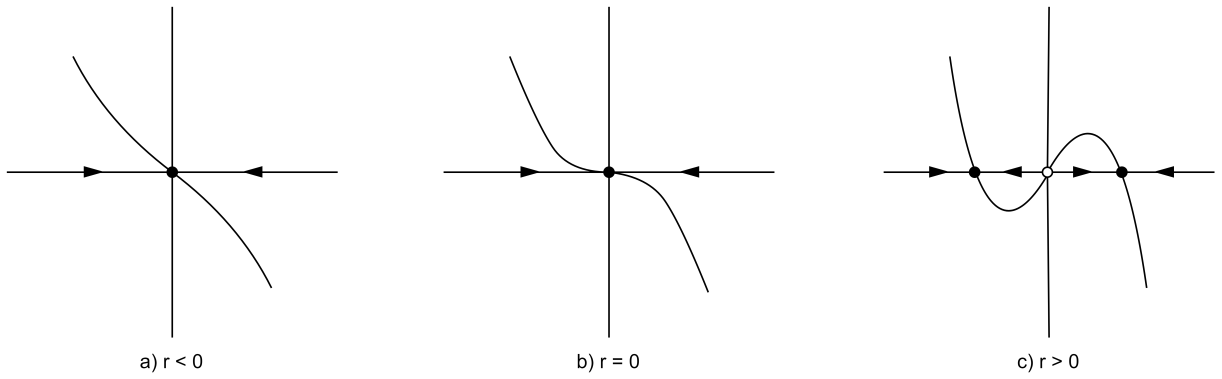


Figura 2.19 Sistema $\dot{x} = rx - x^3$, donde r va cambiando.

$$\dot{x} = rx - x^3 \tag{2.24}$$

Esta ecuación es invariante si se cambia la variable x por $-x$. Es decir, si sustituimos x por $-x$ y luego anulamos los signos menos resultantes a ambos lados de la ecuación, volvemos a obtener la misma. Este fenómeno que hace que no varíen, es la expresión matemática de la simetría izquierda-derecha mencionada anteriormente. Como en el caso de la bifurcación Silla-Nodo, se va a ver como afecta el parámetro r al sistema:

1. Cuando $r < 0$, el origen es el único punto fijo y es estable.
2. Cuando $r = 0$, el origen sigue siendo estable, pero mucho más débilmente, ya que la linealización desaparece. Ahora las soluciones ya no decaen exponencialmente rápido, sino que el decaimiento es una función algebraica mucho más lenta. A este decaimiento se le denomina deceleración crítica en la física.
3. Finalmente, cuando $r > 0$, el origen se ha vuelto inestable y aparecen dos nuevos puntos fijos estables a cada lado del origen, situados simétricamente en x .

La razón del término "pitchfork" queda reflejada cuando se traza el diagrama de bifurcación x frente a r (figura 2.20). En esta se ve algo parecido a un tenedor de lado, viendo la ramificación de la estabilidad.

Bifurcación Subcrítica

En una bifurcación subcrítica, los puntos de equilibrio inestables que aparecen durante la bifurcación persisten a medida que el parámetro continúa variando. Esto significa que hay dos puntos de equilibrio inestables y un punto de equilibrio estable coexistiendo en el sistema. Cerca de la bifurcación, el sistema puede experimentar oscilaciones o cambios abruptos en su comportamiento.

En el caso de la bifurcación supercrítica $\dot{x} = rx - x^3$, el término cúbico es estabilizador, actúa como una fuerza restauradora que tira de $x(t)$ hacia $x = 0$. Si en cambio el término cúbico fuera desestabilizador, como en $\dot{x} = rx + x^3$, aparece la bifurcación subcrítica. En este caso el diagrama es diferente (figura 2.21), esta invertida la estabilidad.

En comparación con la figura 2.20, los puntos fijos no nulos x son inestables y sólo existen por debajo de la bifurcación ($r < 0$), de ahí el término "subcrítico". Y lo que es más importante, el origen es estable para $r < 0$ e inestable para $r > 0$, como en el caso supercrítico, pero ahora la inestabilidad para $r > 0$ no se ve contrarrestada por el término cúbico, de hecho, el término cúbico ayuda a llevar las trayectorias hasta el infinito.

En los sistemas físicos reales, a esta inestabilidad suele oponerse la influencia estabilizadora de los términos de orden superior. Suponiendo que el sistema sigue siendo simétrico cuando se cambia x por $-x$, el primer

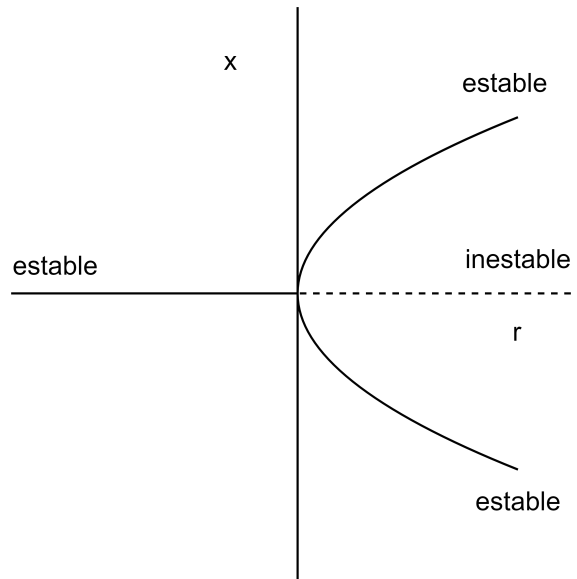


Figura 2.20 Representación de r frente a x .

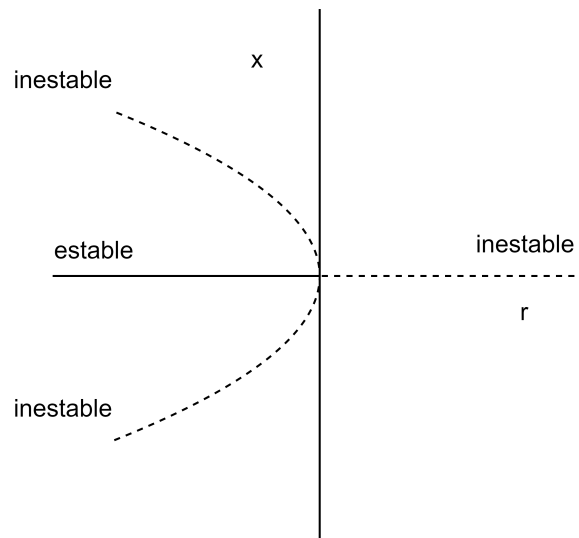


Figura 2.21 Representación de r frente a x .

término estabilizador debe ser x^5 . Así, el ejemplo canónico de un sistema con una bifurcación subcrítica, es el de la ecuación:

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5 \quad (2.25)$$

Este sistema es muy interesante (figura 2.22), pues presenta características que están presentes en si temas reales. Analizando el sistema, para x pequeño (cercano a 0), la imagen es similar a la 2.21, pues el origen es localmente estable para $r < 0$ y existen dos ramas hacia atrás de puntos fijos inestables bifurcándose desde el origen cuando $r = 0$. La nueva característica, debida al término x^5 , es que las ramas inestables dan la vuelta y se hacen estables en $r = r_s$. Estas ramas estables de gran amplitud existen para todo $r > r_s$.

Algunas cosas importantes a destacar son:

- En el intervalo $r_s < r < 0$, coexisten dos estados estables cualitativamente diferentes, el origen y los puntos fijos de gran amplitud (rama superior). La condición inicial x_0 , determina a qué punto fijo se aproxima conforme t tiende a infinito. Una consecuencia es que el origen es estable a pequeñas

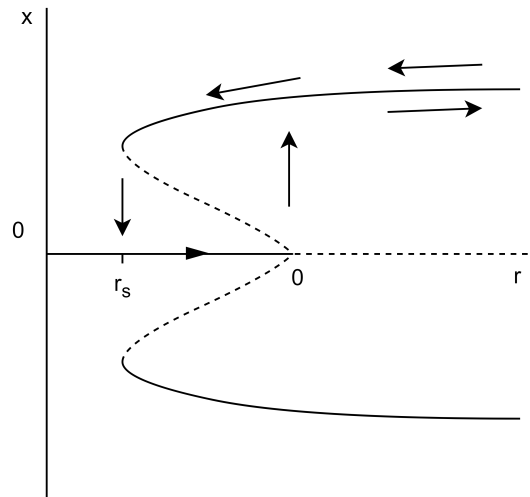


Figura 2.22 Representación de r frente a x , para el caso $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$.

perturbaciones, de tal forma que el origen es localmente estable, pero no globalmente estable.

- La existencia de diferentes estados estables permite la posibilidad de saltos e histéresis a medida que se varía r . Supongamos que empezamos el sistema en el estado $x = 0$ y luego aumentamos lentamente el parámetro r siguiendo el camino indicado por las flechas a lo largo del eje r de la figura 2.22). Entonces, el estado permanece en el origen hasta $r = 0$, momento en el que el origen pierde estabilidad. Ahora, el más mínimo empujón hará que el estado salte a una de las ramas de gran amplitud. Con nuevos aumentos de r , el estado se desplaza a lo largo de la rama de gran amplitud. Si ahora se reduce r , el estado permanece en la rama de gran amplitud, incluso cuando r baja por debajo de 0 . Entonces, se puede reducir r aún más para que el estado vuelva al origen. Esta falta de reversibilidad al variar un parámetro se denomina histéresis y es fundamental en el sistema planteado en el TFM.
- La bifurcación en r , es una bifurcación de silla-nodo, en la que nacen puntos fijos estables e inestables de la nada al aumentar r .

2.4.3 Bifurcación de Hopf

La bifurcación de Hopf[17] ocurre cuando un parámetro específico del sistema alcanza un valor crítico llamado "valor propio de Hopf". Cuando el parámetro es menor que este valor crítico, el sistema permanece en un estado de equilibrio estable. Cuando el parámetro supera el valor propio de Hopf, el sistema presenta oscilaciones regulares y sostenidas en lugar de converger hacia un estado de equilibrio. Estas oscilaciones pueden ser sinusoidales (armónicas) o seguir otros patrones de periodicidad, dependiendo de la naturaleza del sistema y de las condiciones iniciales. La frecuencia de las oscilaciones generadas después de la bifurcación de Hopf está relacionada con la velocidad del cruce de los valores propios conjugados a través del eje imaginario. Cuanto más rápido cruza el parámetro crítico este eje, mayor será la frecuencia de las oscilaciones. El punto de equilibrio estable antes de la bifurcación de Hopf se vuelve inestable después de la bifurcación.

La bifurcación de Hopf ocurre cuando un par de valores propios conjugados de la matriz jacobiana de un sistema dinámico cruza el eje imaginario en el plano complejo. Cuando estos valores propios cruzan el eje imaginario desde la izquierda hacia la derecha (o viceversa), el sistema experimenta una bifurcación de Hopf. Antes de la bifurcación de Hopf, el sistema tiene un punto de equilibrio estable (un mínimo o máximo local) donde las soluciones tienden a converger. Después de la bifurcación, este punto de equilibrio se vuelve inestable, y el sistema exhibe oscilaciones regulares alrededor de él.

Entrando en detalle, suponiendo que un sistema bidimensional tiene un punto fijo estable, las formas en las que podría perder estabilidad al variar un parámetro, por ejemplo μ . Los autovalores del jacobiano son la clave, si el punto fijo es estable, los autovalores deben estar ambos en el semiplano izquierdo. Puesto que

los autovalores satisfacen una ecuación cuadrática con coeficientes reales, hay dos situaciones posibles, o bien los valores propios son ambos reales y negativos o bien son conjugados complejos. Para desestabilizar el punto fijo, necesitamos que uno o ambos de los valores propios crucen hacia el semiplano derecho al variar μ .

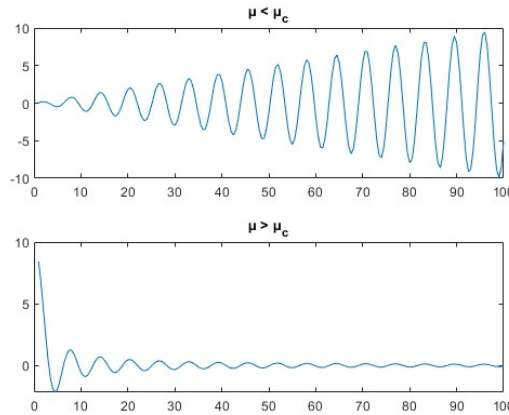


Figura 2.23 Oscilaciones en función de un parámetro μ .

El caso en que un autovalor real pasa por $\lambda = 0$, es el caso de las bifurcaciones de silla-nodo y pitchfork. La diferencia está en el caso de que los dos autovalores complejos conjugados cruzan simultáneamente el eje imaginario hacia el semiplano derecho. Un sistema físico que alcanza el equilibrio mediante oscilaciones amortiguadas exponencialmente es el de la figura 2.23. Si se controla la velocidad de decaimiento en función de un parámetro de control μ se puede ver que si el decaimiento se hace cada vez más lento y finalmente cambia a crecimiento en un valor crítico μ_c , el estado de equilibrio perderá estabilidad. En muchos casos, el movimiento resultante es una oscilación de ciclo límite, sinusoidal y de pequeña amplitud en torno al estado estacionario anterior (figura 2.23). Es el caso en que el sistema ha sufrido una bifurcación de Hopf.

En términos de flujo en fase una bifurcación de Hopf se produce cuando una espiral estable se transforma en una espiral inestable rodeada por un pequeño ciclo límite casi elíptico. Un ejemplo de bifurcación de Hopf supercrítica viene dado por el siguiente sistema:

$$\dot{r} = \mu r - r^3 \tag{2.26}$$

$$\dot{\Omega} = \omega + br^2 \tag{2.27}$$

En el sistema hay tres parámetros: μ controla la estabilidad del punto fijo en el origen, ω da la frecuencia de las oscilaciones infinitesimales y b determina la dependencia de la frecuencia respecto a la amplitud para las oscilaciones de mayor amplitud. La figura 2.24 representa los retratos de fase para μ por encima y por debajo de la bifurcación. Cuando $\mu < 0$ el origen es una espiral estable cuyo sentido de giro depende del signo de ω . Para $\mu = 0$ el origen sigue siendo una espiral estable, aunque muy débil: el decaimiento es sólo algebraicamente rápido. Finalmente, para $\mu > 0$ hay una espiral inestable en el origen y un ciclo límite circular estable en $r = \sqrt{\mu}$.

La bifurcación de Hopf a menudo se asocia con la transición de un comportamiento caótico a un comportamiento ordenado y oscilatorio en sistemas dinámicos. Esta transición puede ser de gran importancia en la física, la biología y otras disciplinas.

2.4.4 Bifurcación FCCL en sistemas lineales a trozos

En los sistemas lineales a trozos, se produce una bifurcación similar a la de Hopf de los sistemas diferenciables descrita en el apartado anterior, es la bifurcación FCCL.

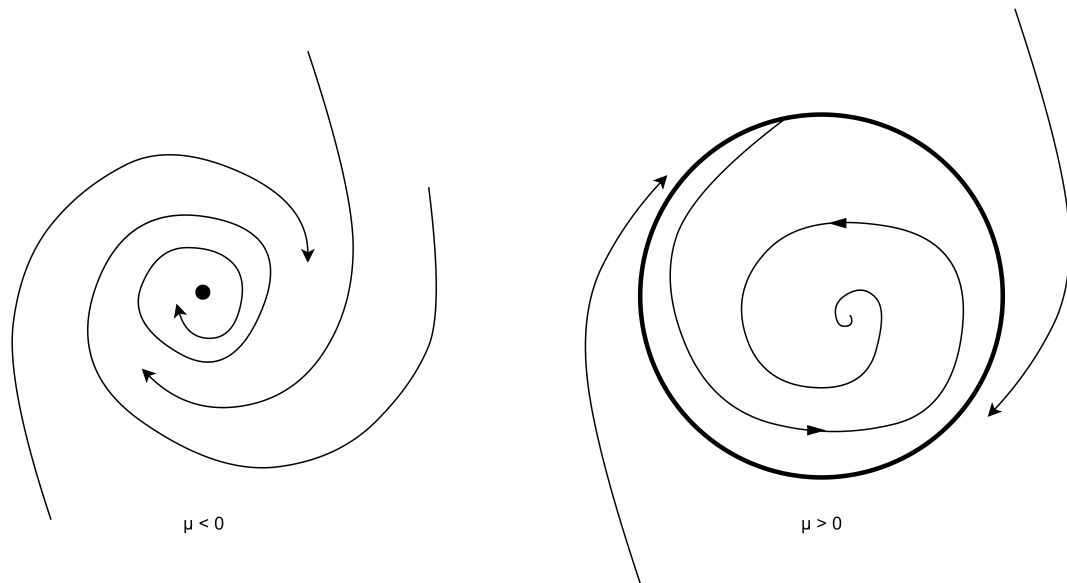


Figura 2.24 Oscilaciones en función de un parámetro μ .

Las bifurcaciones Foco-Centro-Ciclo-Límite (FCCL) implican la interacción de un foco, en este punto, las trayectorias del sistema tienden a alejarse o converger hacia el punto de equilibrio en una manera espiral; un centro, donde las trayectorias del sistema alrededor del punto de equilibrio situado en una de las zonas de linealidad son periódicas y oscilan de manera circular sin alejarse ni converger hacia el punto de equilibrio y un ciclo límite. Esta bifurcación se origina cuando los autovalores complejos conjugados de la matriz de linealidad de la zona correspondiente cruzan el eje imaginario para el valor crítico de bifurcación. Esta bifurcación se va a explicar para el caso de este TFM, es decir un sistema que se divide en tres zonas separadas, dos laterales y una central, en tres dimensiones.

El parámetro de bifurcación en este caso es la traza de la zona central (T_C) del sistema [9]. Para valores de la traza de la zona central menores que el valor crítico de bifurcación hay un foco que es estable bidimensionalmente en el plano focal e inestable para la tercera dimensión, esto implica que las trayectorias tenderán a un foco (figura 2.25). Si la traza de la zona central es igual al valor crítico de bifurcación, se crea un centro lineal, es decir hay infinitos ciclos limites encerrados en la zona central del sistema. En cambio, fuera de la zona central las trayectorias tenderán al centro lineal. Por último, si la traza de la zona central es mayor al valor crítico de bifurcación, se generará un ciclo límite, como en la figura.

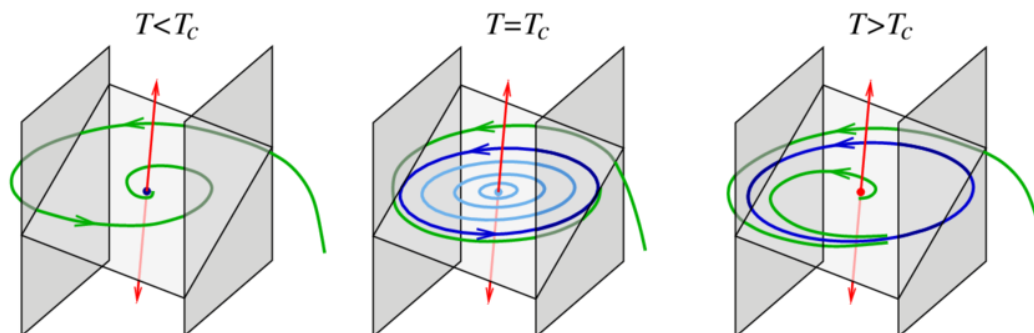


Figura 2.25 Bifurcación FCCL en tres zonas. [9].

2.5 Sistemas Lineales a Trozos

Los sistemas lineales a trozos, son sistemas dinámicos que pueden describirse como una combinación de múltiples sistemas lineales, cada uno de los cuales es activo solo en una región específica del espacio de estados. En cada trozo, el sistema se comporta de manera lineal, lo que significa que sus ecuaciones de dinámica son ecuaciones lineales. Las características clave de los sistemas lineales a trozos incluyen:

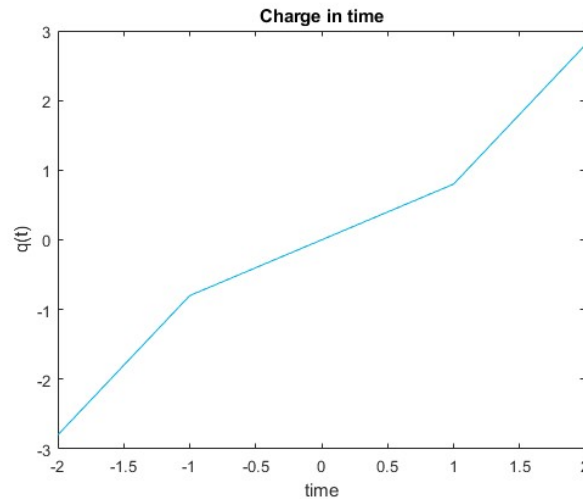


Figura 2.26 Carga en función del tiempo (ejemplo de sistema a trozos).

- **Cambios Discretos:** Los sistemas lineales a trozos pueden experimentar cambios discretos en su comportamiento cuando la trayectoria del sistema cruza las fronteras entre las subregiones. Estos cambios pueden incluir transiciones entre diferentes conjuntos de ecuaciones de dinámica lineal.
- **Continuidad:** A pesar de los cambios discretos en las ecuaciones de dinámica, se espera que el sistema sea continuo en el espacio de estados. Esto significa que las trayectorias del sistema deberían poder atravesar las fronteras de las subregiones sin discontinuidades.
- **Aplicaciones:** Los sistemas lineales a trozos se utilizan en una variedad de aplicaciones en ingeniería y control de sistemas, especialmente cuando se trata de sistemas cuyo comportamiento es inherentemente no lineal en ciertas condiciones y lineal en otras. Ejemplos de sistemas lineales a trozos incluyen sistemas de control automático, sistemas eléctricos y electrónicos, y sistemas de procesamiento de señales.
- **Control y Estabilidad:** La ventaja de utilizar sistemas lineales a trozos radica en su capacidad para describir sistemas complejos que pueden tener comportamientos lineales en algunas regiones y no lineales en otras. Esto facilita el diseño de estrategias de control y análisis de estabilidad.

Un ejemplo puede ser la función saturación, que en el ejemplo del TFM afecta a la función carga (figura 2.26), esta se rige por las ecuaciones:

$$q(t) = \begin{cases} b(t+1) - a & t \leq -1 \\ at & -1 < t < 1 \\ b(t-1) + a & t \geq 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

2.5.1 Ciclos límites

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada y se refiere a un comportamiento recurrente en un sistema dinámico en el que las variables del sistema siguen un patrón repetitivo a lo largo del tiempo sin converger hacia un punto fijo o estacionario (figura 2.27). En cuanto al término aislado, significa que las trayectorias vecinas no están cerradas, sino que forman una espiral hacia el ciclo límite o se alejan de él.

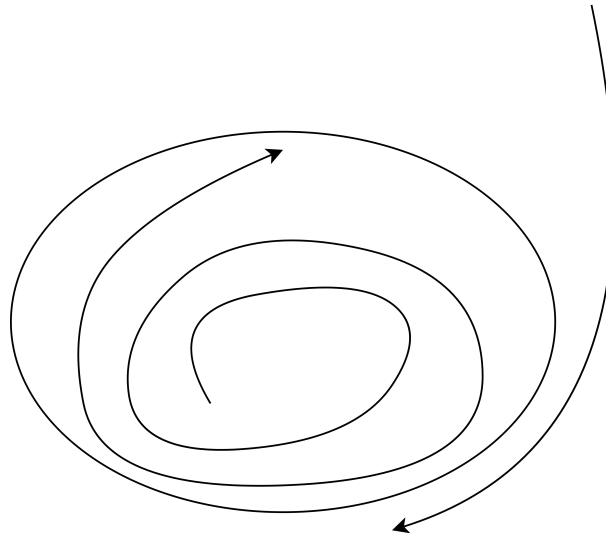


Figura 2.27 Ciclo límite estable.

En un ciclo límite, el sistema pasa por un conjunto específico de estados o condiciones en un orden predecible, y después de completar un ciclo, vuelve al mismo estado o condición inicial para comenzar otro ciclo idéntico. Esto implica que el sistema nunca se aleja indefinidamente de un conjunto de valores y, en cambio, oscila alrededor de estos valores de manera periódica. Los ciclos límites pueden ser de diferentes amplitudes, lo que significa que pueden tener diferentes números de estados o pasos en cada ciclo. Algunos sistemas dinámicos pueden exhibir ciclos límites de periodo fijo, lo que significa que el número de estados en el ciclo es constante y no cambia con el tiempo. Otros sistemas pueden mostrar ciclos límites de periodo variable, donde el número de estados en cada ciclo puede cambiar con el tiempo.

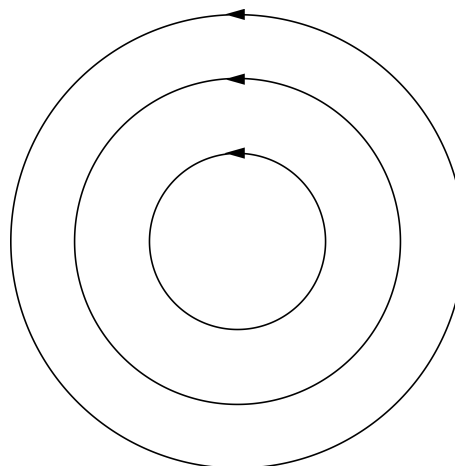


Figura 2.28 Orbitas cerradas.

Si todas las trayectorias vecinas se aproximan al ciclo límite, decimos que el ciclo límite es estable o atrayente. En caso contrario, el ciclo límite es inestable o, en casos excepcionales, semiestable. Los ciclos límite estables son muy importantes desde el punto de vista científico, ya que modelan sistemas que muestran

oscilaciones autosostenidas. En otras palabras, estos sistemas oscilan incluso en ausencia de forzamientos periódicos externos. Algunos ejemplos son el latido de un corazón o las peligrosas vibraciones autoexcitadas en puentes y alas de avión. En todos los casos existe una oscilación estándar con un periodo, una forma de onda y una amplitud determinados. Si el sistema se perturba ligeramente, siempre vuelve al ciclo estándar.

Los ciclos límite son fenómenos no lineales, es decir, no pueden darse en sistemas lineales. De hecho, un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ puede tener órbitas cerradas, pero no estarán aisladas, si $x(t)$ es una solución periódica, entonces también lo es $cx(t)$ para cualquier constante c distinta de cero. Por tanto, $x(t)$ está rodeada por una familia de órbitas cerradas de un parámetro (figura 2.28).

En consecuencia, la amplitud de una oscilación lineal viene determinada totalmente por sus condiciones iniciales; cualquier pequeña perturbación de la amplitud persistirá para siempre. En cambio, las oscilaciones de ciclo límite vienen determinadas por la estructura del propio sistema.

2.5.2 Aplicación de Poincaré-Bendixson

La aplicación de Poincaré o aplicación de retorno discreta sirve para establecer que órbitas cerradas existen en un sistema dinámico [15]. Así, lo que se busca es que, a través del corte de una órbita por un plano, hallar los ciclos límites de un sistema:

1. Lo primero es definir la sección de Poincaré que será un plano en el espacio. A través de ella pasará un sistema que tiene ciertas ecuaciones diferenciales.

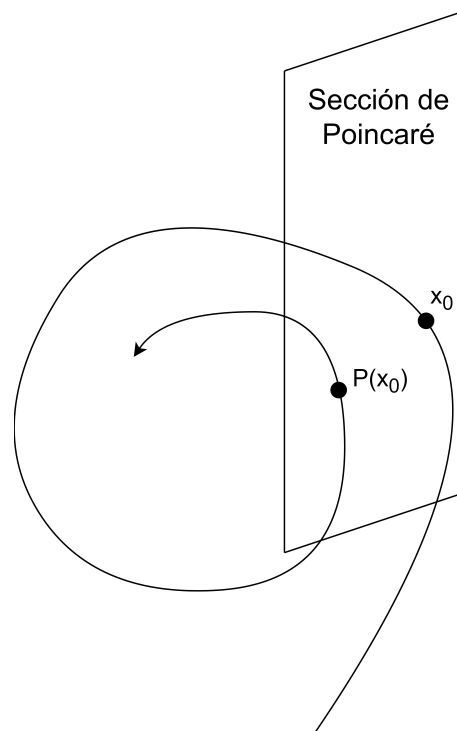


Figura 2.29 Ejemplo de la aplicación de Poincaré.

2. La siguiente etapa será ver como por la sección pasa la órbita por un x_0 y también la imagen ($P(x)$) de ese punto por medio de la aplicación. Es decir, como se ve en la figura ambos puntos cortan la sección. Si ambos puntos son el mismo esto será un ciclo límite y corresponderá a un punto fijo de la aplicación de Poincaré. De esta forma si se quiere buscar los ciclos límites de un sistema, se tendrá que buscar los puntos fijos de la aplicación de Poincaré.

3. El paso que continua es usar la aplicación matemáticamente. Los multiplicadores característicos de esta aplicación (autovalores), con respecto al círculo unidad, determinan como afectará a la posibilidad de que haya ciclos límites:

- Si los multiplicadores están dentro del círculo unidad, el ciclo límite será estable.
- Si los multiplicadores están fuera del círculo unidad, el ciclo límite será inestable.
- Si están en la circunferencia dará como resultado un ciclo límite no hiperbólico.

La clave de esta aplicación está en como se atraviesa el círculo unidad, dando como resultado una serie de posibilidades:

- Si se entra o sale por el (1,0), es decir si el autovalor es real y es igual a 1, da lugar a una bifurcación Silla-Nodo.
- Si se entra o sale por el (-1,0), es decir si el autovalor es real y es igual a -1, da lugar a una duplicación de periodo. Esto consiste en que se una perturbación en un ciclo límite genera uno igual con un periodo el doble de grande.
- Salir a través de cualquier punto de la circunferencia distinto a los anteriores, es decir, aparece una pareja de complejos conjugados. Esto da como resultado una bifurcación de Toro (también denominada Neimark-Sacker), la cual consiste en que, un ciclo límite, tras perder la estabilidad (por una perturbación), comienza a oscilar en un toroide.

2.5.3 Forma generalizada de Liénard

La ecuación de Liénard [20] es una forma especial de ecuación diferencial no lineal que se utiliza en la teoría de sistemas dinámicos para describir el comportamiento de sistemas oscilatorios amortiguados y forzados. La ecuación de Liénard se puede expresar de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2.29)$$

Esta ecuación describe la evolución de una variable x en función del tiempo. La función $f(x)$ controla los efectos de la velocidad de cambio de x y, por lo tanto, está relacionada con la amortiguación o la resistencia en el sistema. La función $g(x)$ representa una fuerza o un término de excitación que puede depender de la posición x . La ecuación de Liénard puede describir una amplia gama de comportamientos dinámicos, incluyendo oscilaciones amortiguadas y no amortiguadas, comportamiento caótico, y mucho más, dependiendo de las formas específicas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Una forma común de la ecuación de Liénard es cuando $f(x)$ es una función lineal y $g(x)$ es una función no lineal.

Esta ecuación es una generalización del oscilador de van der Pol $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ $x + p(x^2 - 1)x + x = 0$. Mecánicamente puede interpretarse como la ecuación de movimiento para una masa unitaria sujeta a una fuerza amortiguadora no lineal $f(x)\dot{x}$ y una fuerza restauradora no lineal $g(x)$.

El Teorema de Liénard supone que $f(x)$ y $g(x)$ cumplen:

1. $f(x)$ y $g(x)$ son diferenciables y continuas para todo x .
2. $g(-x) = -g(x)$ para todo x (es una función par).
3. $g(x) > 0$ para $x > 0$.

4. $f(-x) = f(x)$ para todo x (es una función impar).
5. La función par $F(x) = \int_0^x f(u) \cdot du$, tiene un cero positivo en $x = a$, es negativo para $0 < x < a$, es positivo y no decreciente para $x > a$ y $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Así, el sistema tiene un único ciclo límite estable alrededor del origen en el plano de fase.

Utilizando la función $F(x)$, la ecuación de Liénard se puede expresar como un sistema, haciendo $x_1 = x$, $x_2 = \frac{dx}{dt} + F(x)$ de donde se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - F(x_1) \\ -g(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F(x_1) \\ g(x_1) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

A partir de aquí se define la forma canónica de Liénard para sistemas lineales a trozos en dimensión 2, ver sección 2.1 de [7], donde en la primera columna de la matriz de linealización aparecen los invariantes lineales traza y determinante, con la primera súper diagonal de -1. La generalización a dimensión 3 será la que se use en el sistema tridimensional con:

$$A = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Este resultado cumple lo visto acerca de los ciclos límites. Las suposiciones sobre $g(x)$ significan que la fuerza restauradora actúa como un muelle ordinario y tiende a reducir cualquier desplazamiento, mientras que las suposiciones sobre $f(x)$ implican que el amortiguamiento es negativo a x pequeño y positivo a x grande. Dado que las oscilaciones pequeñas se amplifican y las grandes se amortiguan, no es sorprendente que el sistema tienda a establecerse en una oscilación autosostenida de cierta amplitud intermedia.

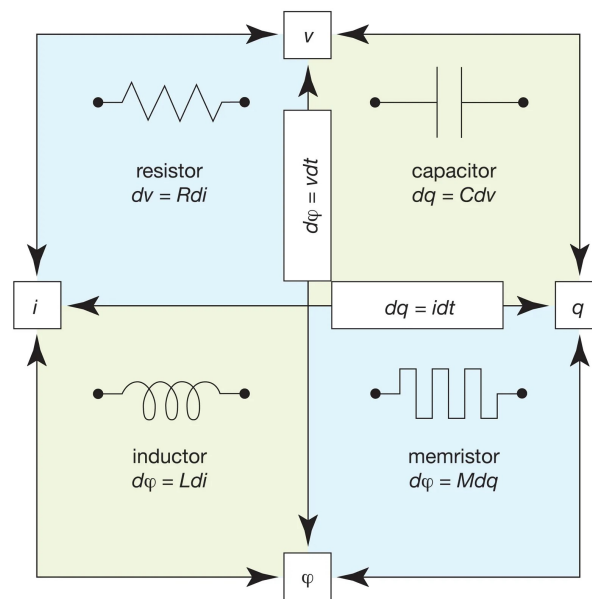
3 Memristor

En este capítulo se va a presentar el memristor, desde sus propiedades, características y aplicaciones que tiene según los artículos y los libros presentados por los investigadores Leon O. Chua, Makoto Itoh y avances que se han ido realizando con el paso de los años hasta la actualidad. De igual forma, este capítulo se centrará en describir el memristor como un oscilador, centrándose en el artículo [7] para un posterior análisis y simulación.

3.1 Introducción al Memristor

Un memristor [14] en esencia es un componente eléctrico de dos terminales. Su principal función es limitar o controlar el flujo de corriente eléctrica en un circuito. De esta principal función sale su nombre, pues no solo controla el flujo, sino que también tiene la habilidad de recordar la cantidad de carga que ha fluído previamente a través de él. Los memristores son importantes porque conservan la memoria sin alimentación y no son volátiles. Esto dará pie a todas sus aplicaciones, ya que lo hace un elemento muy interesante.

Los memristores son semiconductores que unen un condensador, una resistencia y un inductor para formar un cuarto nuevo tipo de elemento 'básico'. Su principal atributo es la memristancia y esta varía en función de la corriente y el flujo.



[21]

Figura 3.1 Comparación de los cuatro elementos pasivos básicos de la electrónica.

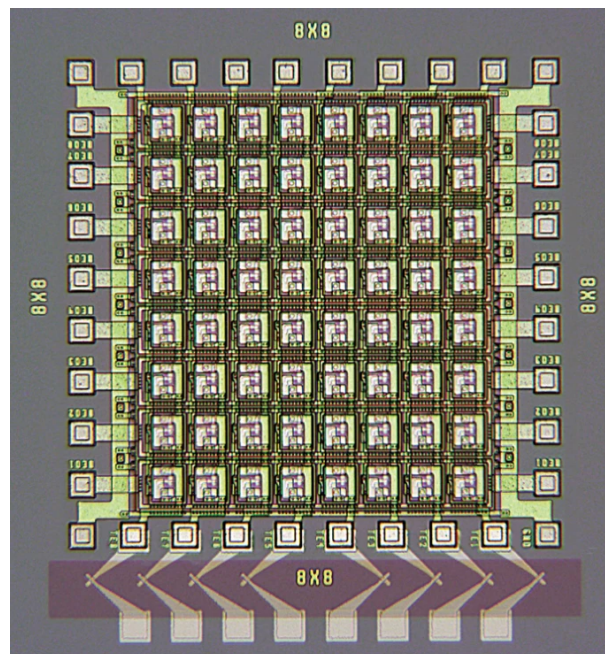
Según la teoría estudiada por los autores previamente mencionados, los memristores, son un tipo de elemento de circuito pasivo que mantiene una relación entre las integrales temporales de corriente y tensión a través de un elemento de dos terminales.

Por tanto, se puede afirmar, que la resistencia de un memristor varía en función del acceso a una "historia" de la tensión aplicada. Cuando la corriente fluye en un sentido, la resistencia aumenta, por el contrario, cuando la corriente fluye en sentido contrario, la resistencia disminuye. Cabe destacar, tanto que la resistencia no puede bajar de cero, como que cuando la corriente se detiene la resistencia permanece en el valor que tenía anteriormente. Así se puede concluir que la propiedad de memoria de estos elementos se basa en recordar la corriente que ha circulado por ellos por última vez.

Los memristores, encajan dentro del grupo de memorias RAM resistivas. Estas son un tipo de memoria no volátil, es decir, que si se desconecta de la fuente de energía seguirá manteniendo los datos, a diferencia de lo que ocurriría con una memoria RAM convencional, que son memorias volátiles y necesitan estar constantemente con suministro eléctrico para no borrarse. Además, al seguir siendo una memoria de acceso aleatorio y rápida, también tiene las ventajas de la DRAM, por lo que se podría considerar a nivel técnico un híbrido entre la DRAM y la NAND flash.

3.1.1 Historia del Memristor

La historia del memristor no tiene un comienzo muy antiguo pues datan de principios del siglo XIX, pero en los últimos 50 años ha ido creciendo fuertemente [1]. Leon Chua ha sido el principal divulgador acerca de este dispositivo, donde en la tarea de renovar el anticuado plan de estudios de análisis de circuitos de la Universidad de Purdue en 1964 le llevó a postular por primera vez el dispositivo. Fue en 1971 cuando Chua comunicó su predicción de un dispositivo que se comporta como una resistencia no lineal con memoria, al que entonces denominó memristor. Treinta y siete años después, el equipo de los laboratorios Hewlett Packard, dirigido por R. Stanley Williams, conectó sus observaciones experimentales con la predicción teórica de Chua y se encontró el cuarto elemento fundamental de los circuitos tal y como los conocemos.



[1]

Figura 3.2 Micrografía óptica de una red neuronal memristiva integrada, formada por una barra transversal de sinapsis memristiva de 8×8 conectada a ocho neuronas artificiales memristivas.

Los trabajos sobre la conmutación resistiva no volátil (el comportamiento memristivo) empezaron en serio

ya en la década de 1960, pero sorprendentemente, los estudios sobre este comportamiento se remontan a principios del siglo XIX, por lo que son anteriores tanto a la resistencia (Ohm en 1827) como al inductor (Faraday en 1831). Puede haber muchas razones por las que una tecnología naciente sea, en un primer momento, olvidada. El tiempo fue probablemente un problema para la tecnología memristiva inicial: la década de 1970 coincidió con grandes avances en la tecnología del silicio y la revolución de la informática digital. Y quizá siempre fue improbable que se prestara atención a la tecnología memristiva mientras la tecnología del silicio siguiera avanzando a pasos agigantados. Más recientemente, los avances en la tecnología del silicio han decaído y se ha intensificado el interés por la tecnología memristiva.

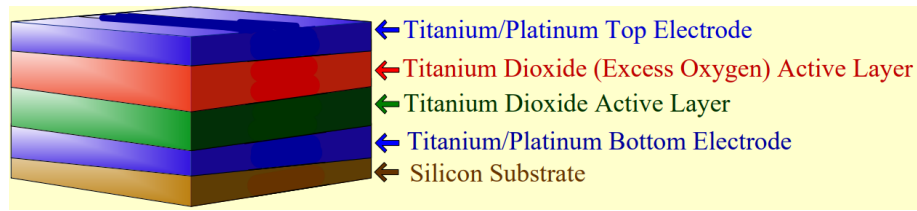
En resumen, se pueden distinguir las siguientes etapas en la historia del memristor [22]:

1. **Concepto Teórico (1971):** - El concepto del memristor fue teorizado por primera vez por el ingeniero eléctrico Leon Chua en un artículo publicado en 1971. Chua predijo la existencia de un cuarto elemento pasivo fundamental en los circuitos, junto al resistor, el condensador y el inductor. Nombró a este componente hipotético el "memristor," una combinación de las palabras "memoria" y "resistor."
2. **Ausencia de Realización Física (1971-2008):** - Durante varias décadas después de la propuesta de Chua, no hubo una realización física del memristor, y este permaneció como un concepto puramente teórico. Muchos investigadores intentaron crear memristores, pero no tuvieron éxito.
3. **Confirmación Experimental (2008):** - En 2008, investigadores de los Laboratorios Hewlett-Packard (HP), liderados por R. Stanley Williams y su equipo, anunciaron un descubrimiento revolucionario. Demostraron la existencia de un dispositivo memristor físico. El dispositivo estaba basado en una película delgada de dióxido de titanio y exhibía el comportamiento memristivo esperado, incluida la capacidad de cambiar la resistencia en función de la historia de la tensión aplicada.
4. **Implicaciones y Aplicaciones (2008-Presente):** - El descubrimiento del memristor tuvo importantes implicaciones en el campo de la electrónica. Los investigadores se dieron cuenta de que los memristores podrían utilizarse en aplicaciones de memoria no volátil, computación neuromórfica y otras aplicaciones. Tienen el potencial de revolucionar el almacenamiento de memoria y la computación debido a su capacidad de conmutación de alta velocidad y bajo consumo de energía.
5. **Investigación y Desarrollo Continuo (Presente):** - Desde el descubrimiento inicial, se ha llevado a cabo una extensa investigación sobre la tecnología de los memristores. Los investigadores han trabajado en perfeccionar los materiales de los memristores, explorar nuevas aplicaciones y comprender la física fundamental detrás del comportamiento memristivo. Empresas e instituciones de todo el mundo continúan invirtiendo en la investigación de memristores.
6. **Comercialización (En Progreso):** - Los memristores todavía están en proceso de comercialización para diversas aplicaciones. Algunas empresas han anunciado productos de memoria basados en memristores, y también se están desarrollando sistemas de computación neuromórfica basados en memristores. Es un área emocionante de la tecnología que promete transformar el futuro de la electrónica.

El descubrimiento del memristor llenó un vacío teórico en la electrónica y abrió nuevas posibilidades en cuanto a la tecnología de memoria y la computación. Sus propiedades únicas tienen el potencial de revolucionar la forma en que almacenamos y procesamos información, y la investigación en curso tiene como objetivo desbloquear todo su potencial.

3.2 Fabricación del memristor

Cualquier elemento de un circuito pensado teóricamente no es útil realmente a no ser que no pueda fabricarse en la práctica. El caso de que la fabricación no fuera fácil no atrajo la atención de los investigadores del memristor. Sin embargo, ahora están empezando algunas empresas industriales como HP y laboratorios a nivel de investigación a fabricarlos. Los memristores deben fabricarse [12] con un alto rendimiento para poder utilizarlos en chips y mantener el coste de la electrónica a un precio asequible. Como ejemplo concreto, en la Fig. 4 se muestra la estructura de un memristor de película fina de dióxido de titanio.



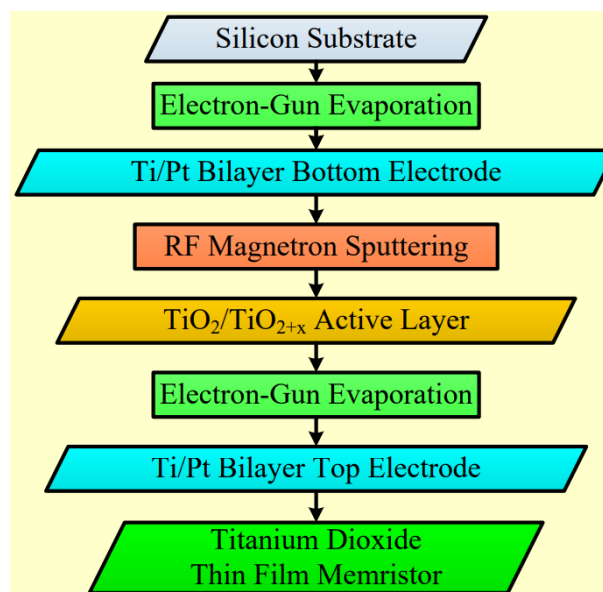
[18]

Figura 3.3 Capas de un memristor de capa fina TiO_2/TiO_{2+x} activo..

El memristor de película delgada de dióxido de titanio consta de las siguientes capas:

- Capa - 1: el electrodo bicapa inferior de titanio/platino (Ti/Pt).
- Capa - 2: capa activa de dióxido de titanio (TiO_2).
- Capa - 3: capa activa de dióxido de titanio con exceso de oxígeno (TiO_{2+x}).
- Capa - 4: electrodo bicapa superior de titanio/platino (Ti/Pt).

Los electrodos superior e inferior de Ti/Pt son conexiones metálicas. El TiO_{2+x} con exceso de oxígeno proporciona portadores de carga cuando se aplica tensión a través de los electrodos superior e inferior. Los portadores de carga fluyen entonces hacia la capa activa de TiO_2 ; de este modo cambiando la resistencia de la capa de TiO_2 y la del memristor (esto disminuye la resistencia). Por otro lado, si se invierte la dirección de la corriente a través de los electrodos del memristor, el exceso de portadores de carga de la capa de TiO_2 se desplaza hacia la capa activa de TiO_2 . de la capa de TiO_2 se desplazan hacia la capa de TiO_{2+x} (esto aumenta la resistencia).



[18]

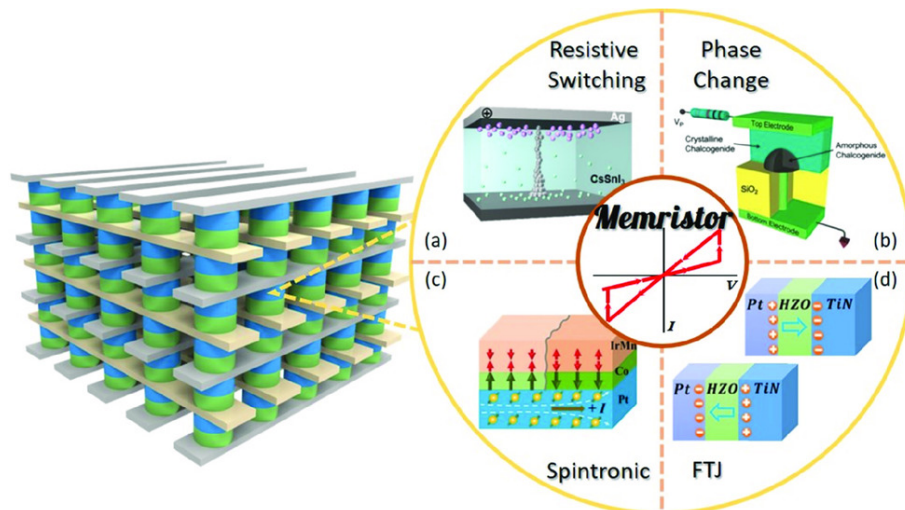
Figura 3.4 Etapas de la fabricación de un memristor.

El memristor mencionado se construyó utilizando procesos fotolitográficos estándar sobre un sustrato de silicio. Los pasos de fabricación se representan en la (figura 3.4). Se deposita una bicapa de titanio y platino (Ti/Pt) de unos pocos nanómetros de espesor sobre el sustrato de silicio mediante evaporación por haz de electrones. A continuación, se deposita una capa de dióxido de titanio (TiO_2) mediante pulverización catódica por magnetrón de radiofrecuencia a temperatura ambiente. A continuación se forma la capa de dióxido de titanio con exceso de oxígeno (TiO_{2+x}) mediante el mismo proceso. La capa de TiO_{2+x} se hace con la adición

de átomos de oxígeno en exceso mediante el flujo de gas de oxígeno durante el proceso de formación de la capa.

3.3 Tipos de Memristor

Los memristores son componentes electrónicos de varios tipos, cada uno con características únicas y adecuados para distintas aplicaciones. Los principales tipos de memristores son:



[13]

Figura 3.5 Tipos de memristor.

1. Memristores de Conmutación Resistiva (ReRAM o RRAM): Los memristores de conmutación resistiva son el tipo más común y se basan en el efecto de conmutación de resistencia en ciertos materiales, como óxidos de metales de transición (por ejemplo, dióxido de titanio). Cambian sus estados de resistencia cuando se aplica voltaje, lo que les permite almacenar y procesar información. Los ReRAM se utilizan en aplicaciones de memoria no volátil y computación neuromórfica.
2. Memristores Iónicos/Electroquímicos: Los memristores iónicos o electroquímicos dependen del movimiento de iones dentro de un electrolito de estado sólido para cambiar su estado de resistencia. Estos memristores se utilizan en tecnologías de memoria emergentes como la memoria de puente conductivo (CBRAM) y se exploran para aplicaciones en computación neuromórfica.
3. Memristores de Cambio de Fase: Los memristores de cambio de fase utilizan materiales como vidrios de calcogenuros, que cambian de fase (amorfo a cristalino o viceversa) cuando se someten a una corriente eléctrica específica. Pueden almacenar múltiples niveles de resistencia, lo que los hace adecuados para dispositivos de memoria no volátil de varios niveles.
4. Memristores Spintrónicos: Los memristores spintrónicos utilizan el espín de los electrones, además de su carga, para cambiar los estados de resistencia. Los memristores spintrónicos tienen el potencial de ser utilizados en memoria y lógica de alta velocidad y bajo consumo de energía.
5. Memristores Moleculares: Los memristores moleculares se basan en moléculas orgánicas que pueden cambiar sus estados de resistencia a través de diversos mecanismos, como reacciones redox o captura de carga. Se investigan por su potencial en electrónica flexible y dispositivos a escala molecular.
6. Memristores Filamentarios: Los memristores filamentarios, también conocidos como memristores de conmutación filamentaria, dependen de la formación y disolución de filamentos conductores dentro de

un material aislante. Este mecanismo se utiliza en ciertos dispositivos memristivos como las memorias de cambio de valencia (VCM).

7. Memristores Superconductores: Los memristores superconductores se basan en materiales superconductores que pueden cambiar su estado resistivo cuando el material pasa de un estado superconductor a un estado normal. Se exploran para aplicaciones en electrónica superconductora y computación cuántica.
8. Memristores Fotónicos: Los memristores fotónicos son un tipo relativamente nuevo que utiliza la luz en lugar de señales eléctricas para cambiar los estados de resistencia. Se investigan para aplicaciones en procesamiento de información óptica y computación óptica.
9. Memristores Nanoelectromecánicos: Los memristores nanoelectromecánicos se basan en el movimiento mecánico a escala nanométrica que cambia el estado de resistencia. Estos son relativamente experimentales y se exploran por su potencial en computación de bajo consumo y sensores.

La elección del tipo de memristor depende de la aplicación específica y de las características deseadas, como velocidad, consumo de energía, escalabilidad y no volatilidad. Los investigadores continúan explorando nuevos materiales y mecanismos para ampliar la gama de tipos de memristores y mejorar su rendimiento para diversas aplicaciones electrónicas y de computación.

3.4 Modelo eléctrico del Memristor

Un memristor es un tipo de componente electrónico con una propiedad única llamada "memristancia". Fue teorizado en 1971 por Leon Chua, quien propuso que debería existir un cuarto elemento fundamental pasivo de circuito de dos terminales además del resistor, el capacitor y el inductor. El memristor fue realizado experimentalmente en 2008 por investigadores de Hewlett-Packard (HP).

El nombre "memristor" es una combinación de las palabras "memoria" y "resistor". Lo que hace al memristor diferente de otros elementos pasivos del circuito es su capacidad para "recordar" la cantidad de carga que ha pasado a través de él en el pasado. En términos simples, un memristor cambia su resistencia en función de la cantidad de carga que ha pasado previamente por él.

El memristor se describe a menudo mediante su relación matemática entre la carga (q) y el enlace de flujo magnético (Φ):

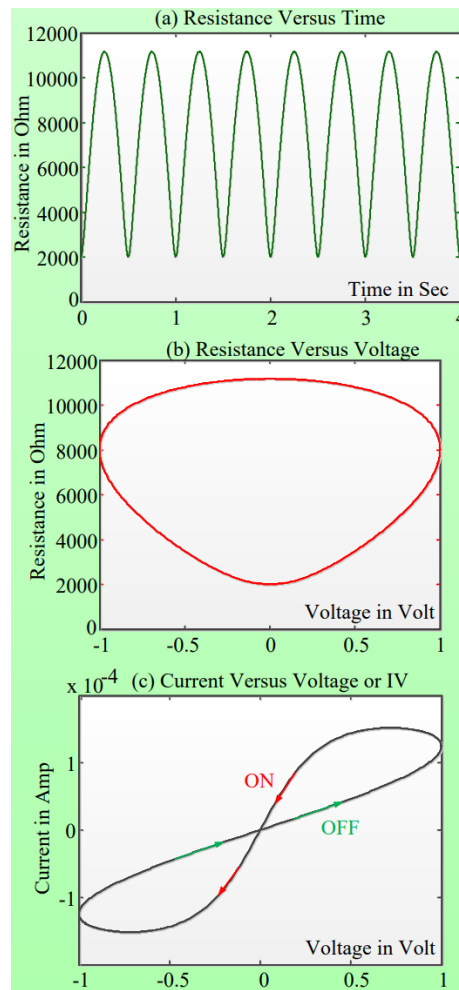
$$v(t) = M(q(t)) \cdot i(t)$$

donde:

- $v(t)$ es el voltaje a través del memristor en el tiempo t .
- $i(t)$ es la corriente que fluye a través del memristor en el tiempo t .
- $M(q(t))$ es la función de memristancia, que depende de la carga total $q(t)$ que ha pasado por el memristor.

En cuanto a la característica eléctrica que presenta un memristor estándar se puede explicar a través de la imagen. La resistencia frente al tiempo característica del memristor se presenta en la figura superior. La resistencia instantánea está en el intervalo $[R_{ON}, R_{OFF}]$. Los valores de resistencia dependen de la tensión aplicada. Para una tensión senoidal con periodo T , la memristancia tiene sus valores extremos (máximo o mínimo) en los instantes de tiempo: $t = (2n + 1)T/2$.

La resistencia frente a la tensión característica se presenta en la figura intermedia. Inicialmente el voltaje a través del memristor es de 0 voltios y la corriente es de 0 amperios. El valor de la memristancia también depende del signo de $v(t)$, esto se debe al hecho de que la corriente sigue a la tensión mientras que la resistencia sigue aumentando mientras la tensión sea positiva. Cuando la tensión vuelve a 0 voltios, la resistencia es máxima R_{OFF} .



[18]

Figura 3.6 Característica eléctrica de un memristor..

La corriente frente a la tensión (I-V) característica del memristor se presenta en la figura inferior que muestra su efecto de histéresis. El cambio en la pendiente de la característica I-V demuestra una conmutación entre diferentes estados de resistencia, donde la resistencia es positiva cuando aumenta la tensión aplicada y negativa cuando disminuye. La tensión simétrica da lugar a una histéresis I-V de doble bucle que puede colapsar hasta convertirse en una línea recta a altas frecuencias.

3.5 Osciladores surgidos a partir del memristor

Han surgido una gran variedad de osciladores basados en memristor, de los que aquí se van a presentar algunos:

1. Oscilador de Relajación Basado en Memristor:

Este es un tipo básico de oscilador en el que se utiliza un memristor junto con otros componentes pasivos como resistencias y condensadores para crear una forma de onda oscilatoria. El cambio de resistencia en el memristor ayuda a establecer la frecuencia de oscilación.

2. Circuito de Chua con Oscilador:

El circuito de Chua es un conocido oscilador caótico. Aparte de condensadores, inductores y resistencias, su principal elemento es el dispositivo no lineal llamado diodo de Chua. Existe una versión donde el elemento no lineal es un memristor. El comportamiento no lineal del memristor contribuye a la dinámica caótica del oscilador.

3. Oscilador de Puente de Wien Basado en Memristor:

El oscilador de puente de Wien es un tipo de oscilador lineal utilizado en aplicaciones de frecuencia de audio. Reemplazando ciertos componentes con memristores, puedes crear una versión basada en memristor que exhiba propiedades interesantes de control de frecuencia.

4. Oscilador Colpitts Basado en Memristor:

El oscilador Colpitts es otro tipo común de oscilador LC. Integrando memristores en el circuito, puedes lograr variaciones en la frecuencia y la modulación de amplitud.

5. Lazo de Fase (PLL) Basado en Memristor:

Los PLL se utilizan ampliamente para la síntesis y sincronización de frecuencia. Los memristores se pueden incorporar en el oscilador controlado por voltaje (VCO) o en los componentes del divisor de frecuencia de un PLL para lograr características de control únicas.

6. Osciladores Caóticos Basados en Memristor:

Los memristores se pueden usar en circuitos osciladores caóticos para generar señales caóticas. Estos osciladores caóticos se utilizan en comunicaciones seguras y generación de números aleatorios.

7. Osciladores de Modulación por Ancho de Pulso (PWM) Basados en Memristor:

Los osciladores PWM se utilizan en aplicaciones como el control de motores y la electrónica de potencia. Los memristores se pueden integrar en los circuitos PWM para proporcionar opciones de modulación y control novedosas.

8. Osciladores No Lineales Basados en Memristor:

Los memristores se pueden utilizar en varias configuraciones de osciladores no lineales, incluidos osciladores Van der Pol, osciladores FitzHugh-Nagumo y otros, para introducir efectos de memoria y comportamiento no lineal en la respuesta oscilatoria.

9. Redes de Osciladores Basadas en Memristor:

Se pueden conectar múltiples osciladores basados en memristores en una red para crear comportamientos oscilatorios complejos, que se pueden utilizar para modelar redes neuronales y otros sistemas dinámicos.

Estos son solo algunos ejemplos de los tipos de osciladores que se pueden crear utilizando memristores. Los circuitos basados en memristores ofrecen versatilidad y el potencial para aplicaciones novedosas en electrónica y procesamiento de señales debido a sus propiedades únicas de cambio de resistencia. El diseño específico y las características de los osciladores basados en memristores pueden variar según la aplicación deseada y los requisitos de rendimiento.

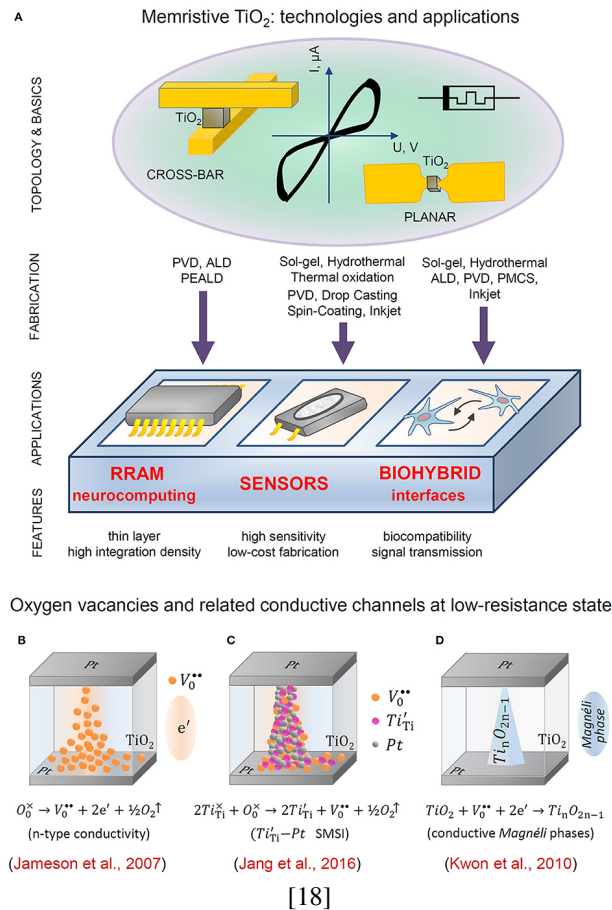


Figura 3.7 Aplicaciones del memristor basado en TiO₂.

3.6 Aplicaciones del memristor

Las principales aplicaciones mencionadas en la mayoría de artículos se pueden resumir en estas:

1. Memoria No Volátil: Los memristores pueden utilizarse en aplicaciones de memoria no volátil, ofreciendo una alternativa de alta velocidad y bajo consumo de energía a la memoria flash tradicional. Tienen el potencial de aumentar la velocidad y la eficiencia energética de los dispositivos de almacenamiento de datos.
2. Computación Neuromórfica: Los memristores son especialmente prometedores en el campo de la computación neuromórfica, donde pueden imitar el comportamiento de las sinapsis en el cerebro humano. Esto puede llevar al desarrollo de sistemas informáticos altamente eficientes y altamente paralelos para tareas de inteligencia artificial y aprendizaje automático.
3. Electrónica Reconfigurable: Los memristores pueden utilizarse para crear circuitos electrónicos reconfigurables, lo que permite ajustes en la funcionalidad del circuito sobre la marcha. Esto es valioso en aplicaciones como la electrónica de radiofrecuencia adaptativa.
4. Procesamiento de Señales Analógicas: Los memristores pueden utilizarse en circuitos de procesamiento de señales analógicas, lo que permite funciones como filtrado, modulación y acondicionamiento de señales. Pueden proporcionar ventajas en términos de velocidad y eficiencia energética.

5. **Generadores de Oscilación y Caos:** Los memristores pueden integrarse en circuitos de oscilación para producir un comportamiento oscilatorio único y controlable. Esto es útil en áreas como las comunicaciones seguras y la generación de números aleatorios.
6. **Almacenamiento de Energía:** Los memristores pueden utilizarse en dispositivos de almacenamiento de energía como supercondensadores basados en memristores, que podrían ofrecer una mayor densidad de energía y una carga/descarga más rápida en comparación con las tecnologías de almacenamiento de energía tradicionales.
7. **Aplicaciones de Sensores:** Los memristores pueden utilizarse como sensores para diversas variables ambientales, como temperatura, presión y humedad. Su cambio de resistencia en respuesta a estímulos los hace adecuados para aplicaciones de sensores.
8. **Computación Cuántica:** Los memristores pueden encontrar aplicaciones en la computación cuántica como componentes para construir bits cuánticos (qubits) o para la interfaz entre sistemas de computación clásica y cuántica.

Es importante tener en cuenta que, si bien los memristores tienen un gran potencial, su adopción comercial aún está en sus primeras etapas y muchos esfuerzos de investigación y desarrollo están en curso para aprovechar su máximo potencial. Con el avance de la tecnología y la profundización de nuestra comprensión del comportamiento de los memristores, podemos esperar ver emerger aún más aplicaciones innovadoras en el futuro.

4 Análisis del sistema y simulación en Matlab

EL sistema dinámico objeto de este trabajo, es el oscilador de orden cuatro, basado en memristor, analizado en el artículo A multiple focus-center-cycle discontinuos piecewise linear memristor oscillators [7]. El citado artículo se centra en el análisis de la existencia de múltiples oscilaciones estables en la versión lineal a trozos del sistema (PWL) en 4D del circuito canónico propuesto por Itoh y Chua, que aparece en el artículo [16].

A continuación, se va a comprobar como el sistema en 4D se puede afrontar como un sistema en 3D, facilitando el analisis y la simulación del mismo. Además, se va a poner en práctica toda la teoría anteriormente comentada.

4.1 Sistema en 4D

Para analizar el sistema, primero va a ser necesario mostrar el circuito con el memristor (figura 4.1) extraído del artículo de Leon O. Chua. En el circuito se puede ver que C_1 y C_2 son las capacitancias, L la inductancia de la bobina, G la conductancia.

Las variables fundamentales para describir el estado del circuito son las tensiones V_1 y V_2 en los condensadores C_1 y C_2 , la intensidad i_3 a través de la bobina L y el flujo del memristor.

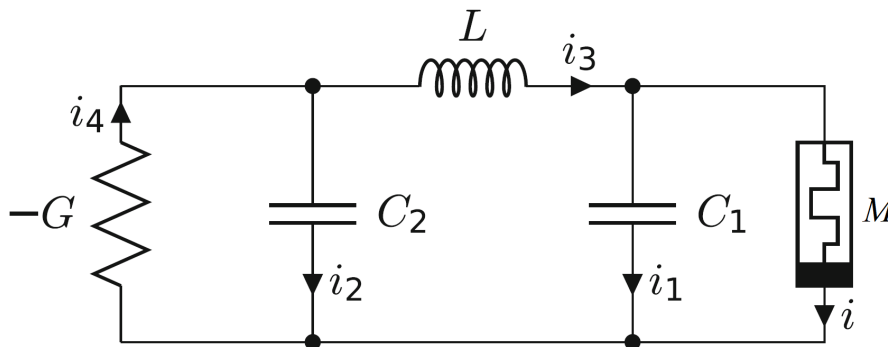


Figura 4.1 Oscilador de orden cuatro.

La intensidad que pasa por el condensador C_1 es la suma de la corriente de la bobina menos la que pasa a través del memristor (M). Cabe destacar que la corriente que pasa por el memristor es el flujo ($W(\varphi) = dq/d\varphi$) por el voltaje ($v = d\varphi/dt$):

$$\begin{aligned}
 i_1 &= i_3 - i \rightarrow \\
 C_1 \frac{dv_1}{dt} &= i_3 - W(\varphi)v_1
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

La siguiente ecuación que se puede obtener es que el voltaje que pasa por el Condensador C_2 es el mismo que la suma del voltaje de la bobina más el del condensador C_1 :

$$\begin{aligned}
 v_2 &= v_3 + v_1 \rightarrow \\
 L \frac{di_3}{dt} &= v_2 - v_1
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

En cuanto a la primera rama de la izquierda ($G = 1/R$), aplicando Kirchoff ahí, es la corriente i_4 es la suma de la corriente de la bobina más la del condensador C_2 :

$$\begin{aligned}
 i_4 &= i_3 + i_2 \rightarrow \\
 C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -i_3 - Gv_2
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Finalmente si se añade la definición de v_1 :

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dv_1}{dt} &= i_3 - W(\varphi)v_1 \\
 L \frac{di_3}{dt} &= v_2 - v_1 \\
 C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -i_3 - Gv_2 \\
 v_1 &= \frac{d\varphi_1}{dt}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Así, adaptando las variables para reducir su número, se pueden representar las ecuaciones de 4.6 como:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \alpha y - \alpha W(\omega)x \\
 \frac{dy}{dt} &= z - x \\
 \frac{dz}{dt} &= -\beta y - \gamma z \\
 \frac{dw}{dt} &= x
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Donde se han definido las variables siguientes: $\alpha = 1/C_1 > 0$, $\beta = 1/C_2 > 0$, $\gamma = G/C_1 > 0$ y $W(w) = \frac{dq(w)}{dw}$. En cuanto a las variables de estado, $x = v_1$, $y = i_3$, $z = v_2$ y $w = \varphi$. Para simplificar más todavía el sistema, se van a realizar una serie de cambios de variable, como aparece en [7] $((y_1, y_2, y_3, y_4) = (w, y, z, x)$ de tal manera que el sistema en cuatro dimensiones quede definitivamente definido:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_4 \\
\dot{y}_2 &= y_3 - y_4 \\
\dot{y}_3 &= -\beta y_2 - \gamma y_3 \\
\dot{y}_4 &= y_2 - W(y_1)y_4
\end{aligned} \tag{4.6}$$

En el circuito también existe una cantidad conservada H que proviene de realizar Kirchoff la rama inferior del circuito: $(i_{C_1} + i_G + i_{C_2} + i_M)$. Donde, tras una serie de transformaciones se llega a definir la cantidad conservada H :

$$\begin{aligned}
C_1 C_2 \frac{H}{d\tau} &= C_1 \frac{dv_1}{d\tau} - G \left(\frac{di_3}{d\tau} + \frac{d\phi}{d\tau} \right) + C_2 \frac{dv_2}{d\tau} + \frac{dq}{d\tau} = 0, \\
H(x, y, z, w) &= \beta(x + \alpha q(w)) - \alpha \gamma(y + w) + \alpha z, \\
H(x, y, z, w) &= h, \\
H(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \beta(y_4 + q(y_1)) - \gamma(y_1 + y_2) + y_3.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Al ser un conjunto invariante como se demuestra en [7], la dinámica del sistema es esencialmente tridimensional.

Cabe mencionar dos elementos del sistema 4D para la posterior experimentación en Matlab. La función $q(x)$ carga (figura 2.26) es una función sistema a trozos (PWL) cuya función se escribe de la siguiente forma:

$$q(x) = \begin{cases} b(x+1) - a & x \leq -1, \\ ax & -1 < x < 1, \\ b(x-1) + a & x \geq 1. \end{cases} \tag{4.8}$$

Y su derivada $W(x)$ es discontinua, por lo que el sistema 4D es discontinuo:

$$W(x) = \begin{cases} b & x > -1, \\ a & x < 1. \end{cases} \tag{4.9}$$

4.2 Sistema en 3D

Para determinar el sistema de dimensión tres, en el artículo, se ha usado la cantidad conservada h anteriormente mencionada y se ha visto que la dinámica del sistema de dimensión 4 es topológicamente equivalente a la dinámica del sistema continuo de dimensión tres:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{\omega}{\beta}(x_1 + x_2) - q(x_1) - \frac{1}{\beta}x_3 + \frac{h}{\beta}, \\
\dot{x}_2 &= x_3 - \frac{\omega}{\beta}(x_1 + x_2) + q(x_1) + \frac{1}{\beta}x_3 - \frac{h}{\beta}, \\
\dot{x}_3 &= -\beta x_2 + \gamma x_3.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Considerando que $x_1 + x_2 = x_3$, para que el equilibrio del sistema satisfaga $x_2 = x_3 = 0$. Se va a utilizar también la forma generaliza de Liénard para expresar el sistema 3D. Esto facilita su uso y permite expresal el sistema en función de las trazas (t), los determinantes (d) y la suma de los menores diagonales de orden 2 (m), de las zonas externas (subíndice e) y de la zona central (subíndice c).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t_e & -1 & 0 \\ m_e & 0 & -1 \\ d_e & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t_c - t_e \\ m_c - m_e \\ d_c - d_e \end{bmatrix} \text{sat}(x_1) + h/\beta \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

donde,

$$\begin{aligned} t_C &= \gamma - a, m_C = 1 + \beta - \gamma a, d_C = \gamma - a\beta, \\ t_E &= \gamma - b, m_E = 1 + \beta - \gamma b, d_E = \gamma - b\beta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para pasar del sistema 3D al sistema 4D hay que utilizar el siguiente cambio que aparece en la proposición 3 del artículo:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ (\gamma^2 - \beta - 1)x_1 - \gamma x_2 + x_3 \\ (\gamma^3 - 2\beta\gamma)x_1 + (\beta - \gamma^2)x_2 + \gamma x_3 \\ \gamma x_1 - x_2 - q(x_1) + h/\beta \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Para el análisis del sistema se utiliza la versión tridimensional, normalmente en forma generalizada de Liénard.

4.3 Análisis del sistema 3D

El análisis realizado al sistema tridimensional incluye la determinación de los equilibrios del mismo y el cálculo de un diagrama básico de bifurcación.

4.3.1 Equilibrios

Para determinar los puntos de equilibrio del sistema (4.10), tenemos que resolver el sistema formado por $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

Nótese que $x_1 + x_2 = x_3$, lo que facilita los cálculos al implicar $x_3 = 0$. A partir de la tercera ecuación de 4.10, obtenemos $x_2 = 0$ y al sustituir en la primera, se tiene que $\frac{\gamma}{\beta}x_1 - q(x_1) + \frac{h}{\beta} = 0$. Por tanto, los equilibrios son de la forma $x_2 = x_3 = 0$ y x_1 verificando la ecuación $\beta q(x_1) - \gamma x_1 = h$.

De forma genérica, se tiene un número finito de equilibrios de la forma $(x_1, 0, 0)$, con x_1 verificando $\beta q(x_1) - \gamma x_1 = h$, para cualquier valor real de h .

Reproduciendo a continuación la Proposición 4 de [7], donde se determina el número de equilibrios del sistema 3D. Los casos no genéricos $d_C = 0$ y $d_E = 0$, son excluidos por brevedad.

La Proposición 4 es válida para el sistema canónico 4.11, con $\beta \neq 0$ y dice así:

1. Si $d_C d_E > 0$, el sistema tiene un punto de equilibrio real para cualquier $h \in \mathbb{R}$, de tal forma que para $h = \pm d_C$ hay una BEB (Boundary Equilibrium Bifurcation), véase la figura a de 4.3.
2. Si $d_C \cdot d_E < 0$, el sistema tiene un punto de equilibrio real para $|h| > |d_C|$ y tres puntos de equilibrio real para $|h| < |d_C|$. Por lo tanto, para $h = \pm d_C$ el sistema tiene dos puntos de equilibrio y un non-smooth fold BEB, véase la figura b de 4.3.

Se determina de esta forma el equilibrio en la zona central con $|x_1| \leq 1$ verificando 4.13 $\beta q(x_1) - \lambda x_1 = h$ que equivale a $\beta a x_1 - \lambda x_1 = h$. De donde $x_1 = \frac{h}{\beta a - \gamma} = -\frac{h}{d_C}$, con $d_C \neq 0$. Por tanto el equilibrio central

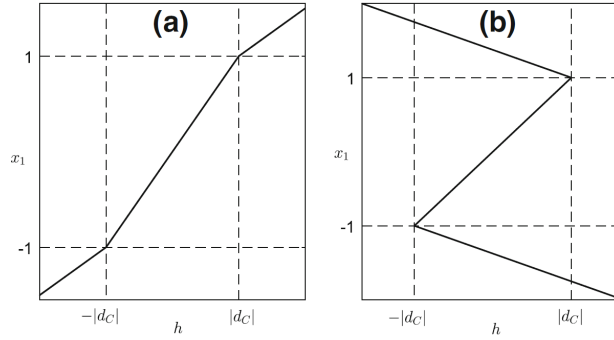


Figura 4.2 Puntos de equilibrio reales del sistema canónico según la proposición 4 de [7].

tiene la expresión $(-\frac{h}{d_C}, 0, 0)$ con $|h| \leq |d_C|$ para que permanezca en la zona central.

4.3.2 Bifurcaciones

La estabilidad de los equilibrios del sistema $(x_1, 0, 0)$ con x_1 verificando $\beta q(x_1) - \gamma x_1 = h$, cuando pertenecen a la zona central, es decir, se cumple $|x_1| < 1$, viene determinado por las raíces del polinomio característico de la matriz de la zona central $\lambda^3 - t_C \lambda^2 + m_C \lambda - d_C = 0$, como se explica en [7].

Estos equilibrios pueden sufrir la denominada bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite, ver los artículos [11], [10] y [8], bajo la hipótesis $m_C > 0$ y $m_C t_C - d_C = 0$.

Estas condiciones aseguran que la matriz A_C tiene un par de autovalores imaginarios puros. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\sigma \pm i\omega$ los tres autovalores de A_C . Bajo la hipótesis de existencia de una pareja de autovalores complejos, $\sigma \pm i\omega$ y siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ el otro autovalor definimos el parámetro $\varepsilon = m_C t_C - d_C$, comprobamos que su signo es el mismo que el de σ :

$$\varepsilon = m_C t_C - d_C = 2\sigma((\sigma + \lambda)^2 + \omega^2) \quad (4.14)$$

Por tanto, para $\varepsilon = 0 = \sigma$, tenemos un centro lineal en la zona central sobre el correspondiente plano focal.

Si asumimos β fijo y analizamos la expresión:

$$\varepsilon(a, \gamma) = m_C t_C - d_C = a^2 \gamma - a \gamma^2 + \beta \gamma - a = 0 \quad (4.15)$$

Para $\beta = 1$, se tiene $\varepsilon(a, \gamma) = (1 - a\gamma)(\gamma - a)$. Si $\gamma = a$, se tiene $t_C = d_C = 0$ sin equilibrios para $h \neq 0$. Si $h = 0$ y $m_C = 2 - a^2 > 0$ hay una bifurcación Hopf-zero ver [6]. En este trabajo nos limitaremos al caso $\beta > 1$ que es el que presenta mas riqueza dinámica. Resolviendo la ecuación 4.15 respecto de γ , obtenemos:

$$\gamma_{\pm}(a) = \frac{\beta + a^2}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta + a^2}{2a}\right)^2 - 1} \quad (4.16)$$

que está garantizado que sea una expresión real al ser $\beta > 1$.

Estudiaremos el caso $\gamma > 0$, $0 < a < b$ y $1 < \beta < \Phi$, donde $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ es la razón áurea. Reproducimos a continuación un resultado teórico de [7] que garantiza la existencia de la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite.

Teorema: Considerando el sistema 3D 4.11 con $|h| \leq |d_C| \neq 0$, $\gamma > 0$, $0 < a < b$ y $1 < \beta < \Phi$ y la función 4.16, se verifican los siguientes puntos:

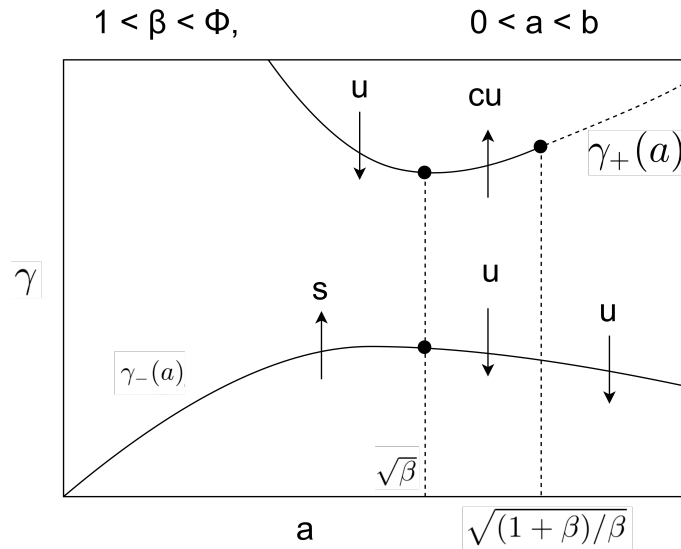


Figura 4.3 Curvas de gamma en función de a para el teorema.

1. En los puntos $(a, \gamma) = (a, \gamma_-(a))$ con $a < \sqrt{\beta}$ ($a > \sqrt{\beta}$) el sistema 3D sufre una bifurcación Foco-Centro- Cilo Límite, de forma que un ciclo límite estable (inestable) bifurca para $\gamma > \gamma_-(a)$ ($\gamma < \gamma_-(a)$).
2. En los puntos $(a, \gamma) = (a, \gamma_+(a))$ con $a < \sqrt{\beta}$ ($\sqrt{\beta} < a < \sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}}$) el sistema 3D sufre una bifurcación Foco-Centro- Cilo Límite, de manera que un ciclo límite inestable (completamente inestable) bifurca para $\gamma < \gamma_+(a)$ ($\gamma > \gamma_+(a)$).

En la figura 4.3 se esquematizan las bifurcaciones del teorema anterior.

4.4 Métodos de continuación

Un método de continuación numérica es una técnica utilizada en matemáticas para estudiar y analizar la dependencia de las soluciones de un sistema de ecuaciones o de un problema en función de uno o varios parámetros. El objetivo principal de estos métodos de continuación es rastrear cómo cambian las soluciones a medida que se modifica un parámetro continuo. En esta sección solo se van a ver los dos que aplican al TFM pues hay una gran variedad de métodos que aumentan o disminuyen en complejidad, pero con estos dos es suficiente.

4.4.1 Método Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un algoritmo utilizado para encontrar aproximaciones de las raíces de una función real en una variable. Se trata de realizar una iteración por medio de una suposición inicial (x_0) para converger hacia la raíz de la función. Cuanto más cerca esté x_0 de la raíz real, más rápido convergerá el método.

De forma matemática se escribe de la forma:

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

El punto x_1 será el siguiente punto inicial, así se repite el paso 2 utilizando el punto más reciente (x_1) para calcular el siguiente punto (x_2) y así sucesivamente. En general, se puede representar así:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

El método de Newton para una variable se puede aplicar a varias variables, la única diferencia es que en vez de ser la derivada será el Jacobiano de la función. Es igual de rápido que con una variable y sigue siendo necesario estar muy cerca de la solución. En el caso de la aplicación en este TFM, es para resolver el sistema que se genera cuando se aplica el método de Pseudo-Longitud de arco de Keller, que se explica a continuación.

4.4.2 Método de Pseudo-Longitud de arco de Keller

El Método Pseudo-Longitud de arco de Keller consiste en obtener los puntos de una curva que sea la rama de soluciones de un sistema, trazando arcos que son la pendiente de un punto de esa rama. Analizando paso a paso el método, primero debe cumplir la hipótesis del teorema de la función implícita:

- Teniendo la función $g(u, \lambda) = 0$, cuyo punto solución del que partir (u_0, λ_0) tal que $g(u_0, \lambda_0) = 0$.
- También, la parcial de g respecto a u , $g_u((u_0, \lambda_0))$ es distinto de 0.
- La función g y su parcial respecto a u , sean diferenciables cerca de (u_0, λ_0) .

Esto garantiza que existe una rama de soluciones $u(\lambda)$ tal que $g(u(\lambda), \lambda) = 0$. Siendo esta función $u(\lambda)$ la curva representada. El siguiente paso es trazar la tangente a la curva $(\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0)$ y avanzar en esa dirección una longitud (Δs) , que será el paso de continuación. A continuación, se busca la solución $g(u, \lambda) = 0$ en la dirección ortogonal a la tangente. Para buscar el punto de corte se utilizará el método de Newton, obteniendo (u_1, λ_1) . Así se actuará de forma iterativa hasta tener toda la curva. Lo interesante de este método es que se puedan superar bifurcaciones Silla-Nodo y otro tipo de casos difíciles, siempre que se tome el paso Δs suficientemente pequeño.

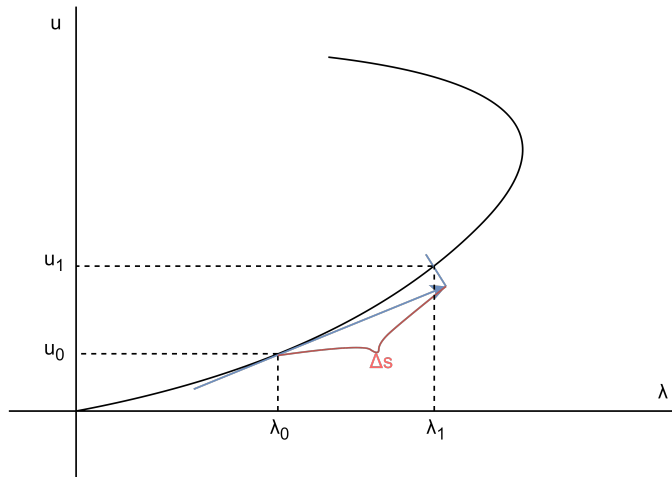


Figura 4.4 Oscilador de orden cuatro.

Para aplicarlo matemáticamente, este método se expresa según la ecuación 4.17. En esta primero se pone el vector ortogonal que va hacia (u_1, λ_1) y se multiplica por el vector tangente en el punto (u_0, λ_0) . Esto da la proyección ortogonal sobre la dirección de la tangente, es decir, el incremento s .

$$\begin{bmatrix} u_1 - u_0 \\ \lambda_1 - \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{\lambda}_0 \end{bmatrix} = \Delta s \tag{4.17}$$

Operando esto queda según la ecuación 4.18, además de $g(u_1, \lambda_1) = 0$, valiendo para un sistema de cualquier dimensión.

$$(u_1 - u_0)^T \dot{u}_o + (\lambda_1 - \lambda_0) \dot{\lambda}_0 - \Delta s = 0 \quad (4.18)$$

El sistema que se utiliza para resolver las continuaciones es una mezcla de los dos sistemas vistos. Primero, es necesario aplicar el método de Pseudo-Longitud de arco de keller, para obtener el sistema:

$$\begin{aligned} g(u_1, \lambda_1) &= 0 \\ (u_1 - u_0)^T \dot{u}_o + (\lambda_1 - \lambda_0) \dot{\lambda}_0 - \Delta s &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Y luego usar el método de Newton para poder obtener las soluciones. El método de Newton en las continuaciones puede llegar a tener de 6 a 7 variables, por lo que aumenta la complejidad, aunque sea igual de sencillo aplicar el método.

En cuanto a los métodos de continuación para este caso, lo que se ha hecho es que el sistema G que se utilizaba en el Método Pseudo-Longitud de arco de keller, fuera la ecuación de cierre, junto a la variable de continuación que es la que se utiliza para ir modificando el sistema, ya fuera h, gamma u a. Por otro lado, para aplicar el método de Newton, es necesario hacer el jacobiano que a nivel de Matlab se ha realizado con la definición de derivada, aplicando límites y con un paso muy pequeño, pues igualmente se ha de hacer de forma discreta el cálculo, es decir, si se tiene un jacobiano de 3x3, por ejemplo:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

lo que se hace para calcular la derivada parcial de cualquier elemento, por ejemplo el 1,1, es:

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{f_1(x_1 + h, x_2, x_3) - f_1(x_1, x_2, x_3)}{h} \quad (4.21)$$

Así se aplica la derivada para todos elementos de la matriz.

4.5 Continuación del sistema en 3D

Una vez que están definidos los sistemas tanto de 3D como de 4D, se va a trabajar con el sistema 3D para ver como afecta la continuación de ciertos parámetros en la dinámica del sistema, generando ciclos límites y bifurcaciones.

4.5.1 Ciclos límite en el sistema 3D

Debido a que el sistema es lineal en cada zona, es posible determinar su solución por zonas y luego plantear el sistema de ecuaciones que debe cumplir.

Suponemos la existencia de un ciclo limite en el sistema 3D de tres zonas. Con el término de tres zonas, lo que se busca es separar en tres partes diferenciadas la orbita, como muestra la ecuación de la forma

generalizada de Liénard, donde esta el determinante de la zona central y de la zona externa. Gracias a la función saturación se van a presentar tres zonas, la zona izquierda, central y derecha:

Si $x < -1$, entonces la función saturación es -1:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t_e & -1 & 0 \\ m_e & 0 & -1 \\ d_e & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t_c - t_e \\ m_c - m_e \\ d_c - d_e \end{bmatrix} + \frac{h}{\beta} \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Así esto se puede representar como $\dot{x} = A_E x + b_L$, donde A_E es la matriz de las zonas externas y b_L , lo que resta de la ecuación, propio de la zona izquierda.

Si $|x| < 1$, la función saturación es x:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t_e & -1 & 0 \\ m_e & 0 & -1 \\ d_e & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t_c - t_e \\ m_c - m_e \\ d_c - d_e \end{bmatrix} x + \frac{h}{\beta} \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

quedando finalmente,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t_c & -1 & 0 \\ m_c & 0 & -1 \\ d_c & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \frac{h}{\beta} \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Este es el caso de la zona central que queda como $\dot{x} = A_C x + b_C$, donde A_C es la matriz de la zona central y b_C , es el termino independiente de la zona central.

Finalmente el caso $x > 1$ para la zona derecha es similar al de la zona izquierda:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t_e & -1 & 0 \\ m_e & 0 & -1 \\ d_e & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t_c - t_e \\ m_c - m_e \\ d_c - d_e \end{bmatrix} + \frac{h}{\beta} \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Quedando la ecuación como $\dot{x} = A_E x + b_R$, siendo b_R , es el termino independiente de la zona central. Por consiguiente, ya están definidas las tres ecuaciones de cada zona. Entonces el siguiente paso será resolver cada zona lineal.

En cada zona lineal, hay una ecuación de la forma $\dot{x} = Ax + b$ con una condición inicial $x(0)$. Por la teoría de la ecuaciones diferenciales ordinarias [5], se puede obtener que la solución es $x(\tau) = e^{A\tau}x(0) + e^{A\tau} \int_0^\tau e^{-As} b ds$, donde τ es el tiempo. Esto se puede simplificar, para poder usarlo más fácilmente. La simplificación va a ser gracias a que el término independiente b no es función de τ , es una constante. Ahora se va a proceder a operar, lo primero es introducir lo que esta a la izquierda de la integral dentro y se resuelve:

$$\int_0^\tau e^{A(\tau-s)} b ds \quad (4.26)$$

Se procede a hacer cambio de variable $w = \tau - s$, $dw = -ds$, el límite inferior es τ y el superior 0. De esta forma se resuelve fácilmente quedando este término: $\int_0^\tau e^{As} b ds$ y si se junta todo sale lo siguiente:

$$x(\tau) = e^{A\tau}x(0) + \int_0^\tau e^{As} b ds \quad (4.27)$$

Cabe destacar que $e^{A\tau}$ se denomina exponencial matricial. Este sería el resultado definitivo, pero no es cómodo trabajar con una integral, por lo que se va a resolver y reducir todavía más la ecuación, bajo la hipótesis de A no singular, es decir, determinante $d \neq 0$. La función exponencial matricial se integra de igual

forma que cualquier exponencial por lo que el resultado es sencillo:

$$x(\tau) = e^{A\tau}x(0) + (e^{A\tau} - e^{A0})A^{-1}b \quad (4.28)$$

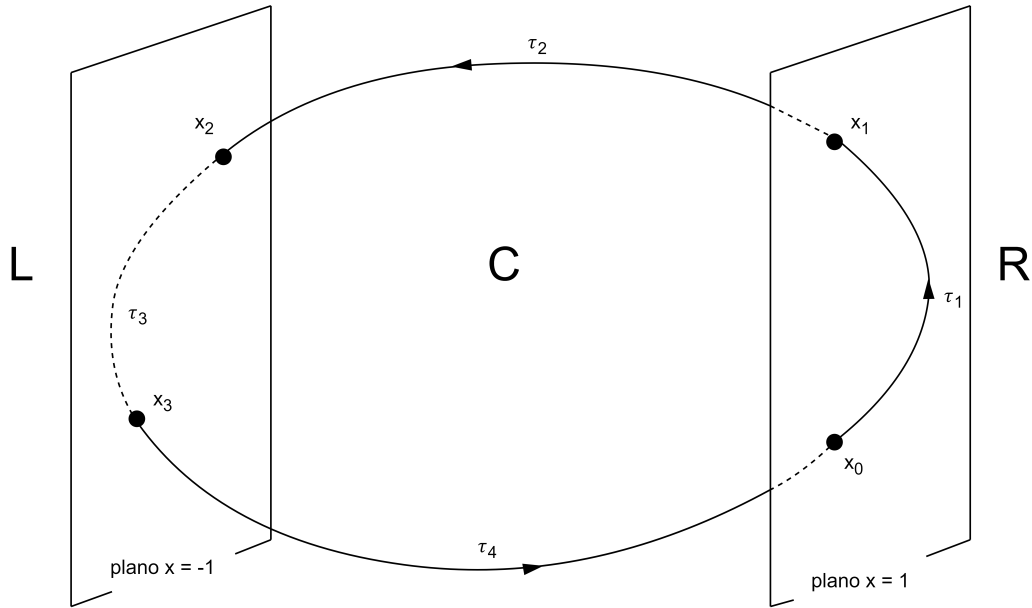


Figura 4.5 Representación de los cuatro puntos de corte con los dos planos $x = -1$ y $x = 1$.

De aquí hay dos cosas a mencionar, e^{A0} es la matriz identidad por definición de la exponencial matricial y el sistema puede presentar equilibrios ($\dot{x} = 0 = Ax + b$) que son $\bar{x} = -A^{-1}b$. Continuando:

$$x(\tau) = e^{A\tau}x(0) + (e^{A\tau} - I)(-\bar{x}) \quad (4.29)$$

Dando como resultado: $x(\tau) = \bar{x} + e^{A\tau}(x(0) - \bar{x})$. Una vez llegado a este punto es necesario ver como se escribe específicamente para cada zona y como se va a aplicar para representar el ciclo límite de tres zonas. Para ello lo más fácil es representar los dos planos $x = -1$ y $x = 1$, junto a los 4 puntos de corte del ciclo límite en los planos (figura 4.5). De esta forma, se pueden ver las tres zonas claramente diferenciadas.

Partiendo del punto de x_0 en la figura, se pueden ver cuatro curvas que intersecan a los planos frontera en 4 puntos. Cada curva tiene una ecuación, que es la definida previamente y a la que se denomina ecuación de cierre. Cada ecuación de cierre parte de un punto y llega a otro, tiene el equilibrio correspondiente a su zona (derecha, centro o izquierda) y un tiempo de vuelo, que es lo que tarda en llegar de una intersección a la siguiente. Las cuatro ecuaciones de cierre vectoriales son:

$$\begin{aligned} x_1 &= x(\tau_1) = \bar{x}_R + e^{A\tau_1}(x_0 - \bar{x}_R) \\ x_2 &= x(\tau_2) = \bar{x}_C + e^{A\tau_2}(x_1 - \bar{x}_C) \\ x_3 &= x(\tau_3) = \bar{x}_L + e^{A\tau_3}(x_2 - \bar{x}_L) \\ x_0 &= x(\tau_4) = \bar{x}_C + e^{A\tau_4}(x_3 - \bar{x}_C) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Donde las intersecciones son $x_1 = x(\tau_1)$, $x_2 = x(\tau_2)$, $x_3 = x(\tau_3)$ y $x_0 = x(\tau_4)$ y tienen la forma: $x_0 = (1, y_0, z_0)^T$, $x_1 = (1, y_1, z_1)^T$, $x_2 = (1, y_2, z_2)^T$ y $x_3 = (1, y_3, z_3)^T$.

$$x_0 = (1, y_0, z_0)^T, \quad (4.31)$$

Estas serían la ecuaciones con las que se podría representar el ciclo límite del sistema de tres zonas. Son un total de 12 ecuaciones escalares con 12 variables: $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, y_0, z_0, y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3$. Es importante analizar la primera componente de la ecuación 4.24 ($\dot{x} = t_C x - y + h/\beta$) que proporciona el flujo del sistema en la zona central, para detectar trayectorias tangentes a los planos frontera. Para el plano $x=1$, dicha tangencia, se alcanza cuando $\dot{x} = 0$ para $x = 1$, es decir, sobre la recta vertical 4.32. Dicha recta, divide al plano $x = 1$ en tres zonas. La propia recta donde el flujo es tangente al plano, el semiplano $x = 1$ con $y < t_C + h/\beta$ donde el flujo entra en la zona derecha R y el el semiplano $x = 1$ con $y > t_C + h/\beta$ donde el flujo entra en la zona central C.

$$\begin{aligned} y &= t_C + h/\beta \\ x &= 1 \end{aligned} \tag{4.32}$$

De manera análoga en el plano $x = -1$, hay una recta de tangencia para $\dot{x} = t_C(-1) - y + h/\beta = 0$ con $x = 1$ en la recta vertical 4.33, que separa el flujo entrante y el saliente de la zona central. Por tanto, para que las intersecciones x_1, x_2, x_3 y x_0 correspondan a un ciclo límite del sistema 3D, se debe cumplir que x_0 esté en el semiplano de flujo entrante en la zona derecha, es decir, $y_0 < t_C + h/\beta$ y que x_1 esté en el semiplano de flujo entrante en la zona central $y_1 > t_C + h/\beta$. De forma análoga, deben cumplirse $y_2 > -t_C + h/\beta$ y $y_3 < -t_C + h/\beta$.

$$\begin{aligned} y &= t_C + h/\beta \\ x &= 1 \end{aligned} \tag{4.33}$$

El punto interesante que quedaría es obtener el ciclo límite de dos zonas, el cual se asemeja bastante a lo visto anteriormente. Planteando las dos zonas que sean la derecha y la central, el sistema tendría la forma:

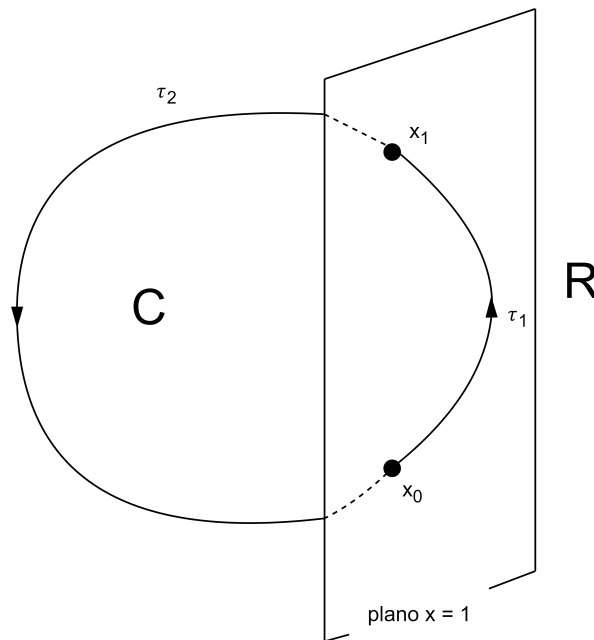


Figura 4.6 Representación del ciclo límite de dos zonas.

Las ecuaciones de cierre son dos vectoriales, ya que hay únicamente dos puntos de intersección $x_0 = x(\tau_0) = (1, y_0, z_0)^T$ y $x_1 = x(\tau_1) = (1, y_1, z_1)^T$:

$$\begin{aligned} x_1 = x(\tau_1) &= \bar{x}_R + e^{A_E \tau_1} (x_0 - \bar{x}_R) \\ x_0 = x(\tau_0) &= \bar{x}_L + e^{A_E \tau_2} (x_1 - \bar{x}_L) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Son un total de 6 ecuaciones escalares que dependen de 6 variables: $\tau_{01}, \tau_{02}, y_0, z_0, y_1, z_1$. Debiendo cumplir que $y_0 < t_c + h/\beta$ y que $y_1 > t_c + h/\beta$.

4.5.2 Continuación de ciclo límite en función de la cantidad conservada h

Esta continuación en función h tiene como principal objetivo analizar y ver la transición de un ciclo límite de tres zonas a uno de dos zonas con las ecuaciones de cierre anteriormente presentadas. Tiene cierta complejidad a la hora de realizar las transiciones, ya que es muy fácil que el sistema pierda la estabilidad al cambiar de parámetros. Es decir, cuando se pasa de tres a dos zonas, los puntos de corte a los cuales hacen referencia las ecuaciones varían, además de los tiempos de vuelo, pues, poniendo el ejemplo de dos zonas (derecha-centro), se pasa de tener cuatro tiempos de vuelo ($\tau_{01}, \tau_{02}, \tau_{03}$ y τ_{04}) a dos tiempos de vuelo (τ_{01} y τ_{02}) y de existir dos puntos de corte en el plano $x = -1$ a ningún punto de corte.

La continuación tiene además dos puntos destacables: $|h|$ no puede superar el valor absoluto del determinante de la zona central, para que el equilibrio de la zona central no toque los planos frontera. Junto a eso, el sistema pasará de tres zonas a dos zonas derecha al aumentar la primera componente del equilibrio de la zona central $x_1 = -\frac{h}{d_C}$ y pasará de tres zonas a dos zonas izquierda al disminuir esta.

4.5.3 Curva de bifurcación silla-nodo

Para entender las dos próximas continuaciones, es muy interesante estudiar como van apareciendo y desapareciendo los ciclos límite y la bifurcación Silla-Nodo. Es por ello, que se va a tomar como referencia la figura 4.7.

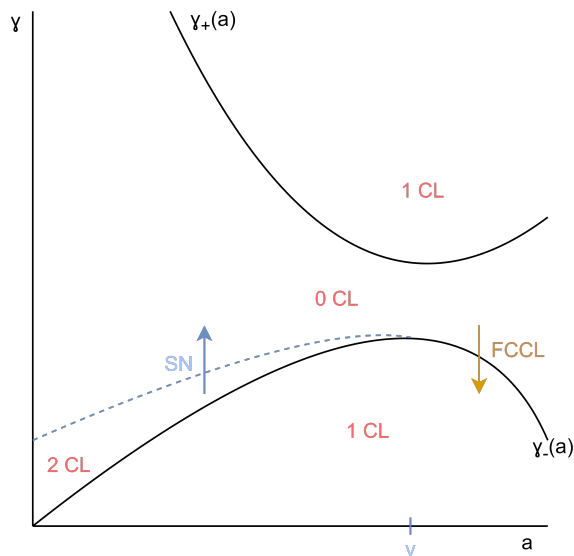


Figura 4.7 Diagrama básico de bifurcaciones del sistema 3D en el plano (a, gamma) con beta = 1.2 fijo.

Lo primero a destacar de la figura es que la variable del eje de abscisas es a y el eje de ordenadas es gamma, Estos parámetros del sistema (3D) han sido elegidos para describir las bifurcaciones dejando β fijo. Según se quiera variar un parámetro u otro, afectará de forma diferente al sistema. Por ejemplo, si lo que se hace es variar γ dejando el parámetro a constante, a la derecha de la figura se va a ver como se pasa de no tener ningún ciclo límite, partiendo de la zona central, a tener uno, mediante una bifurcación FCCL. Cuando se varía γ realmente se hace un barrido vertical buscando los ciclos límites, haciendo una línea vertical.

Otro punto importante, es que hay dos curvas diferentes en la imagen, esto es debido a que a la hora de resolver las ecuaciones, para determinar donde tiene lugar la bifurcación FCCL, esta presenta dos soluciones, calculadas en la sección 4.3.2:

$$\gamma_{\pm} = \frac{\beta + a^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{\beta + a^2}{2a} - 1} \quad (4.35)$$

Por otro lado, se va viendo como conforme se cruzan las dos curvas puede aumentar el número de ciclos límites. A la izquierda, de hecho se pasa de tener dos ciclos límites a no haber ninguno, al cruzar una curva de una bifurcación de Silla-Nodo. La curva donde se pasa de dos ciclos límites a cero ciclos límites parte de un punto de la curva $\gamma_- a$ con $v = \sqrt{\beta}$.

Con respecto la evolución de a , si lo que se modifica es a lo que se va a ir viendo es como se avanza horizontalmente, pudiéndose captar el momento de paso de uno a dos ciclos límites y de dos a cero ciclos límites.

Finalmente, se va a comentar como calcular la curva de bifurcación SN comentada anteriormente. Para conseguir este objetivo se ha de añadir una ecuación a las ecuaciones de cierre ya construidas. Esta ecuación se basa en la aplicación de Poincaré (ver [15]) ya explicada en capítulos anteriores. Una vez conocida esta aplicación, se va a presentar desde nuestro ejemplo para un sistema de dos zonas. La matriz de monodromía de este sistema sería $M = e^{A_E \tau_2} e^{A_E \tau_1}$, mientras que para el de tres zonas sería $M = e^{A_C \tau_4} e^{A_E \tau_3} e^{A_C \tau_2} e^{A_E \tau_1}$, que es semejante a la matriz que tiene los autovalores de la aplicación de Poincaré (P), es decir:

$$M = e^{A_E \tau_C} e^{A_E \tau_E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P(y_0, z_0) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Sabiendo esto, los autovalores de M son 1 y los 2 multiplicadores característicos de la aplicación de Poincaré. Entonces, como se busca una bifurcación Silla-Nodo de órbitas periódicas, en la referencia citada se demuestra que esta aplicación tiene que tener un multiplicador igual a 1. Entonces ya se tendría dos autovalores igual a 1 y otro autovalor λ real. También se sabe que la traza y el determinante de una matriz son invariantes lineales de la matriz M . Entonces, el determinante es la multiplicación de los autovalores y la traza es la suma de estos:

$$\begin{aligned} \det(M) &= \lambda \\ \text{traza}(M) &= \lambda + 2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Si se resta una ecuación a la otra, da como resultado la ecuación de cierre necesaria para obtener la curva de bifurcación Silla-Nodo, la cual es valido tanto para dos zonas como para tres zonas:

$$\text{traza}(M) - \det(M) = 2 \quad (4.38)$$

5 Resultados

Tras explicar en el apartado anterior como aplicar la teoría vista, aquí se muestra como se ha implementado específicamente en Matlab y los resultados que se han obtenido. Los puntos x_0 de comienzo de todas las continuaciones esta escrito en el código de la continuación de Keller.

5.1 Simulación del sistema en 4D

Para realizar la simulación en Matlab se ha usado la función ODE45 (sección 7.2.2) y se ha resuelto el sistema que ya se había visto en la sección anterior 4.6.

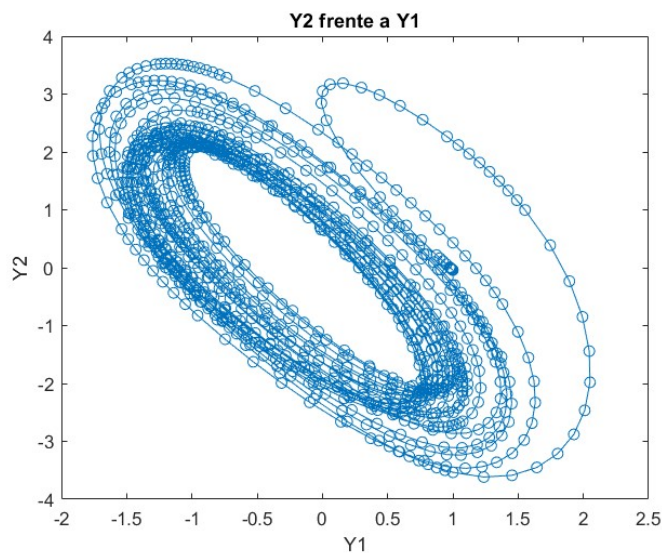


Figura 5.1 y_2 frente a y_1 para el sistema 4D.

Al simular el sistema se ha obtenido el resultado la figura 5.1, donde se ha representado la variable y_2 frente a y_1 . Se puede apreciar como hay un foco inestable para los valores $a = 0.8$, $b = 2$, $\beta = 1.2$, $\gamma = 0.6021$ y $h = 0$. Para las figuras se han tomado las condiciones iniciales $y_1 = 1$, $y_2 = -0.04$, $y_3 = 2.25$ e $y_4 = -2.20$, obtenidas del sistema 3D ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$), de las cuales se ha trasladado las condiciones iniciales usando la ecuación 4.13.

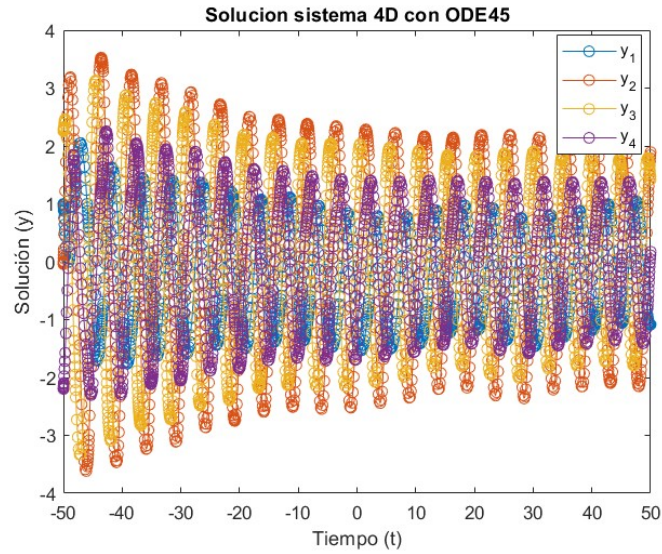


Figura 5.2 Solución del sistema 4D.

Las soluciones de y respecto del tiempo se pueden ver en la figura 5.2. Esta imagen sirve para comprobar la aparición de oscilaciones y el carácter estable que aparece de las mismas.

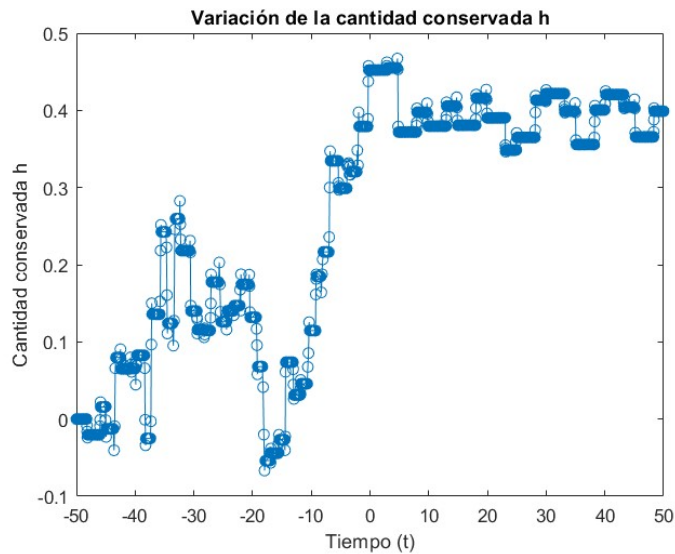


Figura 5.3 Representación de la cantidad conservada h en el sistema 4D.

A partir de los datos de salida de la función ODE45 y utilizando la definición de la cantidad conservada $h = \beta * (y_4 + q(y_1) - \gamma * (y_1 + y_2) + y_3$, dando lugar a la figura 5.3. Donde observamos que en la integración numérica del sistema 4D, la cantidad conservada h , no se mantiene constante como debería, sino que presenta una oscilación de amplitud 0.6 pico a pico.

La integración anterior ha sido realizada con las tolerancias por defecto del integrador ODE45, tolerancia relativa 10^{-3} y tolerancia absoluta 10^{-6} . Para investigar los errores numéricos que originan esta anomalía en h , se ha activado la opción "stats" en el integrador de Matlab comprobando la realización de 285 pasos, con 98 pasos fallidos. El método de par encajado por Runge-Kutta hace una estimación del error y repite los pasos fallidos cuando la tolerancia lo exige.

Dividiendo las tolerancias por 1000, la amplitud de la oscilación en h se reduce a 710^{-4} con 1646 pasos de integración y 778 fallidos. Se ha empleado el método ODE15 para problemas Stiff y el método de orden variable ode113 comprobando en ambos casos que el comportamiento es similar al del ode45.

El origen de esta inestabilidad numérica es sin duda la discontinuidad del sistema 4D, lo que hace recomendable utilizar el sistema 3D, continuo, para cualquier simulación y empleando la ecuación 4.13 para pasar cada punto del sistema 3D al sistema 4D.

5.2 Simulación del sistema en 3D

En cuanto al sistema 3D se ha procedido de la misma forma que en el caso anterior. Se ha tomado el sistema que mencionó en la sección anterior (ecuación 4.11) y se ha simulado con la función ODE45 (código en 7.2.4), manteniendo los parámetros $a = 0.8$, $b = 2$, $\beta = 1.2$, $\gamma = 0.6021$ y usando las condiciones iniciales $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

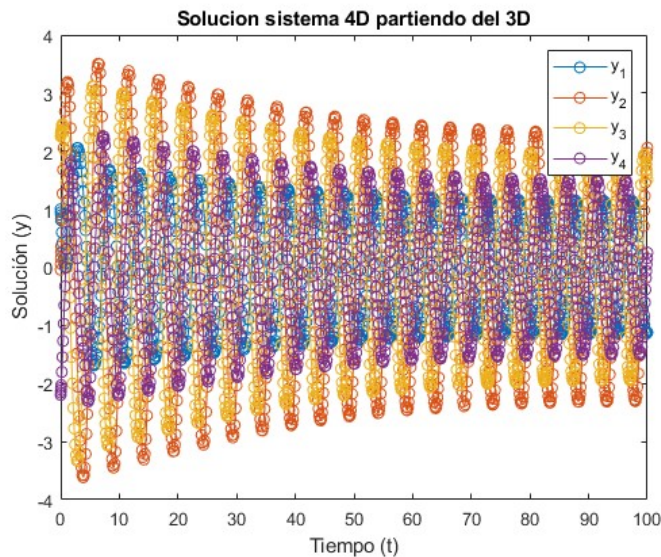


Figura 5.4 Solución del sistema 3D.

Las soluciones en este caso (5.4) se ven como parten siendo oscilaciones que empiezan a decaer hasta que llega un momento que se estabilizan en un ciclo límite.

A su vez, se ha representado la variable x_2 frente a x_1 , para comprobar la estabilidad del sistema. En la figura 5.5, se ha podido ver que tanto empezando con un punto exterior ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$) como un punto interior el sistema tiende a un ciclo límite. De esta manera se garantiza su estabilidad, para cualquier valor de origen.

5.3 Continuación del sistema en 3D

Una vez representados los sistemas 3D y 4D, se ha buscado la continuación de parámetros, previa definición de las ecuaciones de cierre para ciclos límites de dos y tres zonas. De esta forma, la representación de los planos y los puntos de corte para un ciclo límite de tres zonas tendrá la forma de la figura 5.6. Así se ve la trayectoria que realiza, con los cuatro tiempos de vuelo como se vio en anteriores capítulos.

El otro caso es el del ciclo límite de dos zonas, mostrado en la figura 5.7. La única diferencia es que este ciclo límite no atravesaría el otro plano $x = -1$. Por tanto, si el ciclo límite siempre está en la zona central y

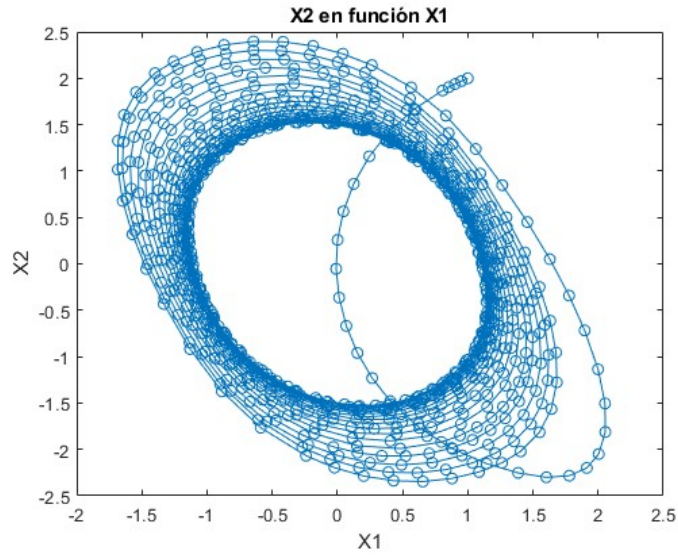


Figura 5.5 x_2 frente a x_1 para el sistema 3D.

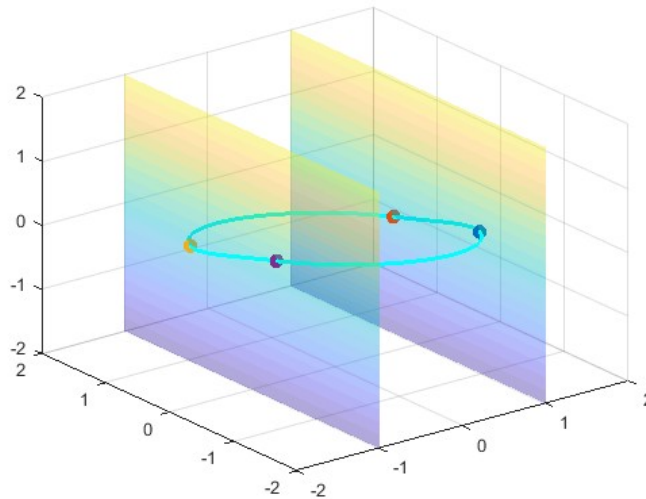


Figura 5.6 Ciclo límite que atraviesa tres zonas.

derecha, se puede trabajar con un sistema de dos zonas de linealidad con frontera $x = 1$.

5.3.1 Continuación de ciclo límite en función de la cantidad conservada h

La continuación de la cantidad conservada ha sido compleja pues las transiciones de dos a tres zonas tienen facilidad para perder la estabilidad. Aún así, se ha conseguido representar tanto transición de tres zonas a dos zonas derecha, como de tres zonas a dos zonas izquierda. En el caso de la transición a dos zonas derecha es el que se muestra en la imagen 5.8. Es interesante que conforme el parámetro h aumenta el ciclo límite va haciéndose más pequeño, hasta pasar de tres a dos zonas.

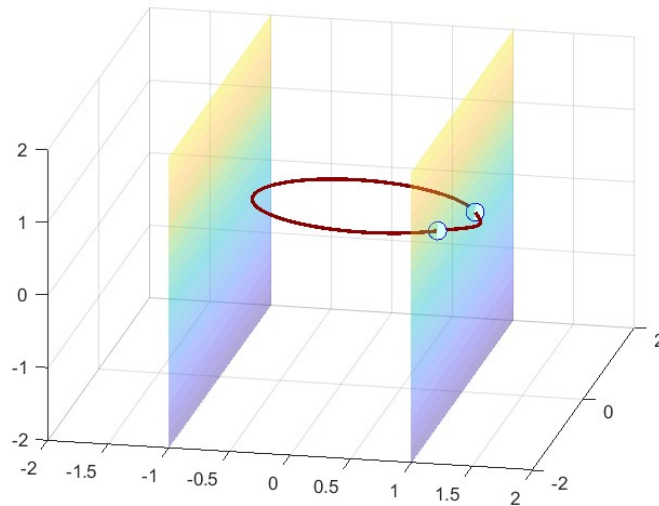


Figura 5.7 Ciclo límite que atraviesa dos zonas.

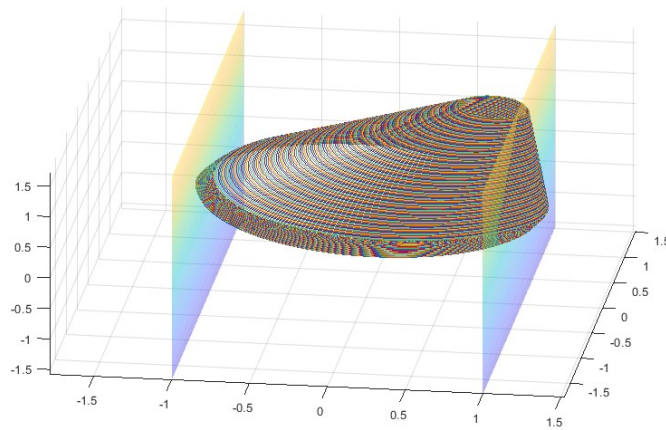


Figura 5.8 Transición de ciclo límite de tres a dos zonas en función de h , con h creciente sin llegar a $|h| = |d_C|$.

Para esta continuación se ha partido de la condición inicial y valores de los parámetros $a = 0.8$, $b = 2$, $\beta = 1.2$ y el punto inicial $x = [0.5 \ 2 \ 0.5 \ 2 \ -1 \ 0]$, ($\tau_1 = 0.5$, $\tau_2 = 2$, $\tau_3 = 0.5$, $\tau_4 = 2$, $y_0 = -1$ y $z_0 = 0$). El código correspondiente aparece en la sección 7.3.1.

Partiendo del valor de h en 5.3.2, se aumenta, pudiendo observar como el ciclo límite de tres zonas disminuye su amplitud y abandona la zona límite L , ver figura 5.8.

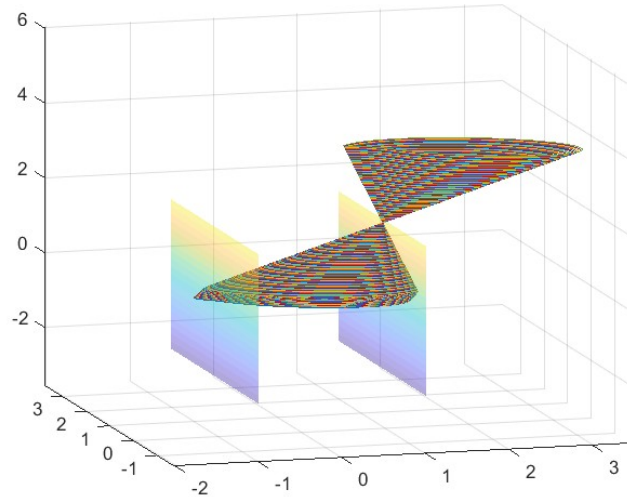


Figura 5.9 Transición de ciclo límite de tres a dos zonas en función de h y $|h| > |d_C|$.

Cuando $|h|$ se aproxima a $|d_C|$ el equilibrio de la zona central, que tiene la expresión $(-\frac{h}{|d_C|}, 0, 0)$, se aproxima a una de las fronteras y tiene lugar una BEB (Boundary Equilibrium Bifurcation). Numéricamente se observa que sigue existiendo un ciclo límite para $|h| > |d_C|$.

La continuación con h decreciente es análoga a la anterior (figura 5.10), la única diferencia es que las orbitas se desplazan hacia abajo en z .

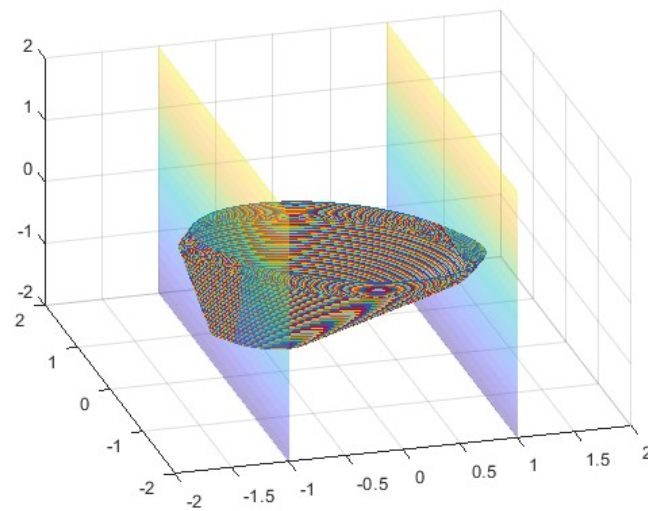


Figura 5.10 Transición de ciclo límite de tres a dos zonas en función de h , con h decreciente.

5.3.2 Continuación de ciclo límite en función del parámetro gamma

En esta sección lo que se pretende es mantener a constante y seguir una recta vertical en el plano (a, γ) , partiendo de los valores $a = 0.8$, $b = 2$, $\beta = 1.2$ y el punto inicial $x = [0.5 \ 2 \ 0.5 \ 2 \ -1 \ 0]$, $(\tau_1 = 0.5, \tau_2 = 2, \tau_3 = 0.5, \tau_4 = 2, y_0 = -1$ y $z_0 = 0)$.

De esta continuación es interesante ver como se representa cualquier variable en función de γ (figura 5.11), pues se puede ver los dos ciclo límites y como colapsan en cierto punto de γ , donde se obtiene la aparición de un pliegue o bifurcación Silla-Nodo.

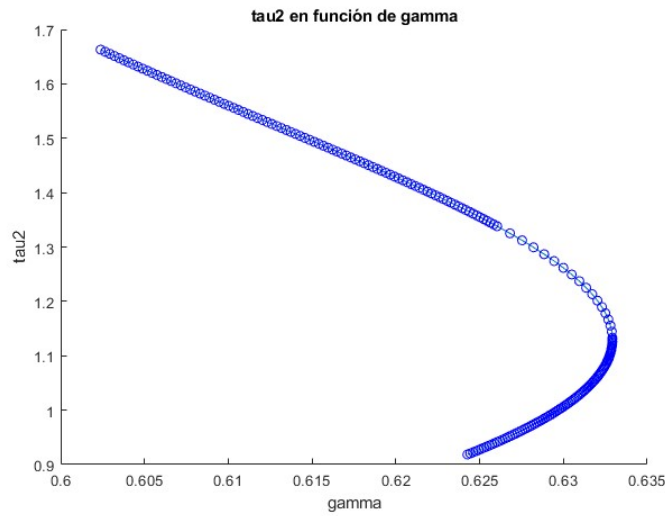


Figura 5.11 Representación de la continuación de γ en función del tiempo de vuelo dos.

En la figura 5.12 se muestra la trayectoria de esta continuación en el plano de parámetros (a , γ).

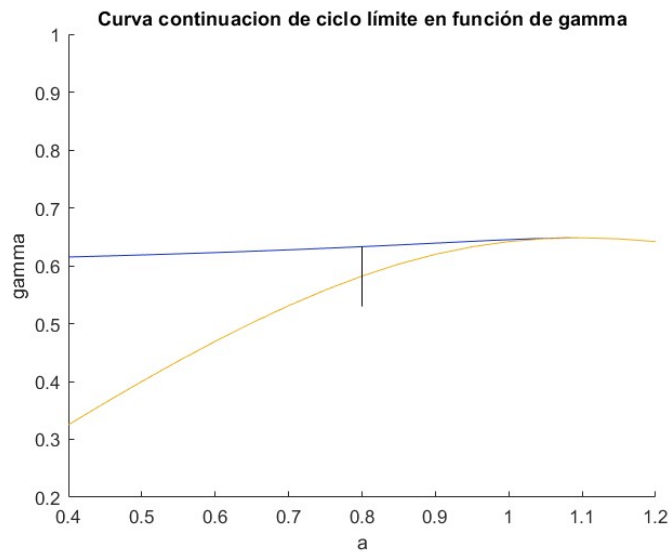


Figura 5.12 Representación de la continuación de γ .

5.3.3 Continuación de curva de bifurcación de Silla-Nodo

A partir del punto de bifurcación obtenido en la sección 5.3.2, se continua la bifurcación por la curva donde se genera la bifurcación Silla-Nodo.

De forma similar a la continuación de la cantidad conservada h , se ha realizado esta bifurcación (7.3.2), con los parámetros $a = 0.54$, $b = 2$, $\beta = 1.2$, $\gamma = 0.62$ y $h = 0$ y punto inicial $x = [1.76, 0.80, 1.76, 0.80, -2.72, 1.05]$.

En el plano de parámetros (a, γ) , se representan las curvas $\gamma_+(a)$ y $\gamma_-(a)$ (ver expresión 4.16 y sección 4.3.2), donde tiene lugar la bifurcación FCCL, ver figura 5.13.

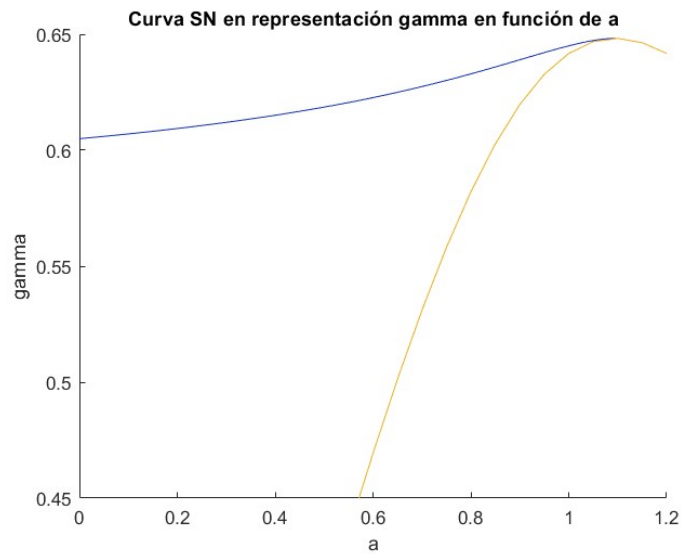


Figura 5.13 Continuación Silla-Nodo en la representación de γ en función de a .

En cuanto a la curva de Silla-Nodo partiendo de la continuación de a se ha visto la forma que presenta mostrado en la figura 5.13.

5.3.4 Continuación del parámetro a

Esta continuación, a diferencia de la anterior, va a realizar una línea horizontal en la curva buscando cortar tanto la curva $\gamma_-(a)$ como la curva de bifurcación Silla-Nodo. De esta forma γ se mantiene constante mientras a va disminuyendo cortando las curvas mencionadas (figura 5.14). Los parámetros son $a = 0.54$, $b = 2$, $\beta = 1.2$, $\gamma = 0.62$ y $h = 0$ y punto inicial $x = [1.26 \ 1.41 \ 1.26 \ 1.41 \ -1.76 \ 0.78]$.

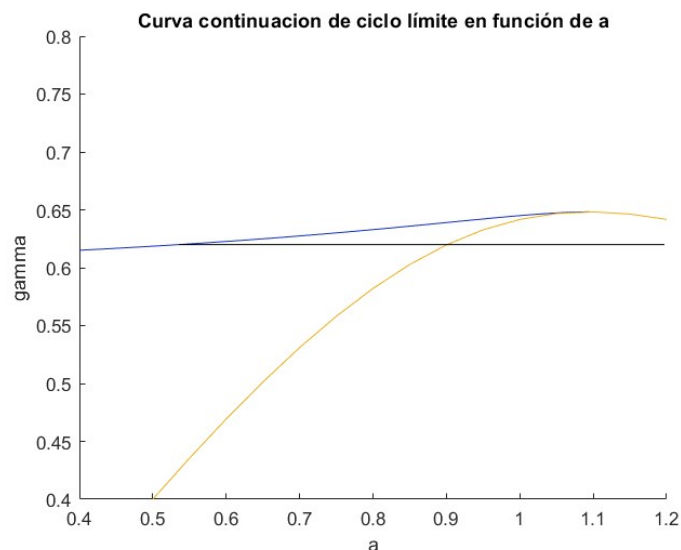


Figura 5.14 Representación de la continuación de a .

La continuación de a (código en 7.3.1) tiene como objetivo mostrar la curva vista al comienzo de la sección,

pero también se pretende buscar un ciclo de histéresis como el mostrado en la bifurcación de pitchfork subcrítica. Para conseguir este ciclo de histéresis es necesario calcular la amplitud que es $A = \sqrt{1 + y_0^2 + z_0^2}$. Una vez calculada, si se representa en función de a se consigue la figura 5.15.

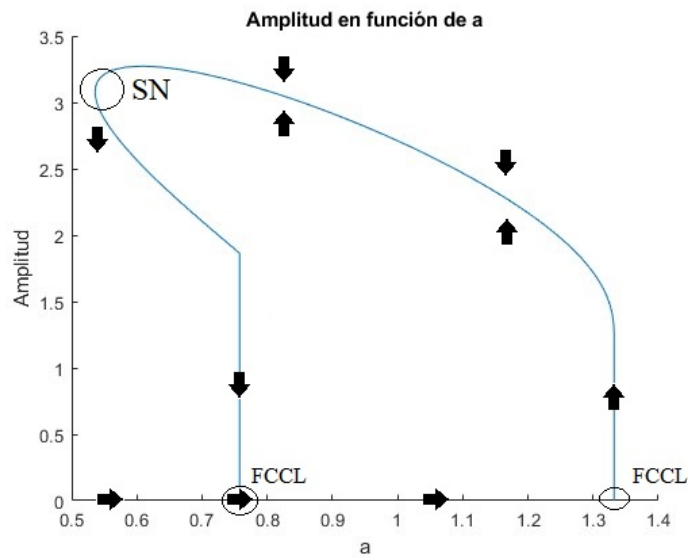


Figura 5.15 Representación de la continuación de a en función de la amplitud.

En la figura se puede ver un ciclo de histéresis, que una vez dentro se forma un continuo movimiento por la curva. A la vez, se representa las bifurcaciones que existen, primero la bif. Silla-Nodo en el extremo izquierdo de la curva donde convergen las dos curvas y las dos bif. FCCL en dos puntos claves.

6 Conclusiones

En esta sección se plantearán las conclusiones a las que se ha llegado en base a los objetivos propuestos y a todo lo que se ha realizado a lo largo del desarrollo del documento y del proyecto. De esta forma, se puede comprobar como el recorrido de todo el trabajo realizado ha llegado a ciertos puertos. Asimismo, se van a diferenciar aspectos positivos y negativos de todos los resultados y posibles futuras implementaciones a partir de estos.

Recordando los objetivos, se procede a evaluar cada uno de los objetivos planteados en el comienzo del documento:

- Se ha hecho una revisión bibliográfica de los principales sistemas dinámicos que afectan al sistema, yendo desde un estudio general a uno más concreto. Primero se ha mostrado como funciona en sí la estabilidad en sistemas dinámicos sencillos, pasando por una explicación de los osciladores y los sistemas lineales. Se han estudiado las principales bifurcaciones, Silla-Nodo, FCCL, pitchfork y Hopf, desde un punto de vista específico con ejemplos. Del mismo modo, se ha tratado de mostrar como actúan las funciones a trozos, ya que el sistema en sí es de este tipo. De esta forma ha quedado todo cerrado para poder comprender todos los aspectos que se han hablado después.
- A través del circuito de Leon O. Chua y los estudios realizados por Javier Ros y Enrique Ponce acerca del oscilador electrónico basado en memristor de dimensión cuatro, se ha podido hacer una simulación del circuito, además del planteamiento de todas las ecuaciones necesarias. La simulación ha incluido tanto el sistema 4D como la adaptación al sistema 3D.
- La continuación del sistema 3D ha sido realmente compleja, pues es muy fácil que se pierda la estabilidad, ya sea por los parámetros iniciales, por si el modelo es de dos o tres zonas, la complejidad de las ecuaciones o la adaptación a código de todo ello. Aun así, se ha conseguido evaluar todas las continuaciones planteadas estas simulaciones con sus variables más importantes, γ , h y a .

Para trabajos futuros, se puede intentar analizar otro modelo de oscilador basado en memristor o intentar aplicar nuevos modelos a este. Del trabajo realizado cabe mencionar que todavía se puede mejorar el paso de dos zonas a tres zonas en la continuación de h , ya que no es un paso muy fluido.

7 Código

7.1 Ecuaciones de cierre

7.1.1 Tres zonas

```
function [f] = CloseEquation3(x,a,b,beta,gamma,h,paramContinuacion)
%% Declaro las constantes del sistema 3D
switch paramContinuacion
    case "a"
        a = x(7);
    case "b"
        b = x(7);
    case "beta"
        beta = x(7);
    case "gamma"
        gamma = x(7);
    case "h"
        h = x(7);
end
[Ac, Ae, x_R, x_L, x_C] = constantes(a,b,beta,gamma,h);

%% Funcion ecuacion de cierre
tau1 = x(1); % Tiempo de vuelo de la zona derecha
tau2 = x(2); % Tiempo de vuelo de la zona central entre x1 y x2
tau3 = x(3); % Tiempo de vuelo de la zona izquierda
tau4 = x(4); % Tiempo de vuelo de la zona central entre x3 y x4
y0 = x(5);
z0 = x(6);
x0 = [1; y0; z0];
e1T = [1 0 0];

% Los 4 puntos de corte
x1 = (x_R + expm(Ae*tau1) * (x0 - x_R));
x2 = (x_C + expm(Ac*tau2) * (x1 - x_C));
x3 = (x_L + expm(Ae*tau3) * (x2 - x_L));
fx0 = x_C + expm(Ac*tau4) * (x3 - x_C) - x0;

% Las 6 ecuaciones de cierre
f(1,1) = fx0(1);
f(2,1) = fx0(2);
f(3,1) = fx0(3);
f(4,1) = e1T * x1 - 1;
```

```
f(5,1) = e1T * x2 + 1;
f(6,1) = e1T * x3 + 1;
end
```

7.1.2 Dos zonas derecha

```
function [f] = CloseEquation2R(x,a,b,beta,gamma,h,paramContinuacion)
%% Declaro las constantes del sistema 3D
switch paramContinuacion
case "a"
a = x(5);
case "b"
b = x(5);
case "beta"
beta = x(5);
case "gamma"
gamma = x(5);
case "h"
h = x(5);
end
[Ac, Ae, x_R, ~, x_C] = constantes(a,b,beta,gamma,h);

%% Funcion ecuacion de cierre
tau1 = x(1); % Tiempo de vuelo de la zona derecha
tau2 = x(2); % Tiempo de vuelo de la zona central
y0 = x(3);
z0 = x(4);
x0 = [1; y0; z0];
e1T = [1 0 0];

% Los 2 puntos de corte
x1 = (x_R + expm(Ae*tau1) * (x0 - x_R));
fx0 = x_C + expm(Ac*tau2) * (x1 - x_C) - x0;

% Las 4 ecuaciones de cierre
f(1,1) = fx0(1);
f(2,1) = fx0(2);
f(3,1) = fx0(3);
f(4,1) = e1T * x1 - 1;
end
```

7.1.3 Dos zonas izquierda

```
function [f] = CloseEquation2L(x,a,b,beta,gamma,h,paramContinuacion)
%% Declaro las constantes del sistema 3D
switch paramContinuacion
case "a"
a = x(5);
case "b"
b = x(5);
case "beta"
beta = x(5);
case "gamma"
gamma = x(5);
end
```



```

        case "h"
            h = x(5);
        end
        [Ac, Ae, ~, x_L, x_C] = constantes(a,b,beta,gamma,h);

%% Funcion ecuacion de cierre
tau1 = x(1); % Tiempo de vuelo de la zona izquierda
tau2 = x(2); % Tiempo de vuelo de la zona central
y0 = x(3);
z0 = x(4);
x0 = [-1; y0; z0]; % Punto de corte equivalente a x2 en 3 zonas
e1T = [1 0 0];

% Los 2 puntos de corte
x1 = (x_L + expm(Ae*tau1) * (x0 - x_L)); % Punto de corte equivalente a x3
    en 3 zonas
fx0 = x_C + expm(Ac*tau2) * (x1 - x_C) - x0;

%    x1 = x_C + expm(Ac*tau1) * (x0 - x_C);
%    fx0 = x_L + expm(Ae*tau2) * (x1 - x_L) - x0;
%    x0 = x_L + expm(Ae*tau2) * (x1 - x_L);
%    fx1 = x_C + expm(Ac*tau1) * (x0 - x_C) - x1;

% Las 4 ecuaciones de cierre
f(1,1) = fx0(1);
f(2,1) = fx0(2);
f(3,1) = fx0(3);
f(4,1) = e1T * x1 + 1;
end

```

7.1.4 Ecuaciones de cierre para búsqueda de Silla Nodo

```

function [f] = CloseEquation3SN(x,a,b,beta,gamma,h,paramContinuacion)
%% Declaro las constantes del sistema 3D
if paramContinuacion == "a"
    gamma = x(7);
    a = x(8);
end
[Ac, Ae, x_R, x_L, x_C] = constantes(a,b,beta,gamma,h);

%% Funcion ecuacion de cierre
tau1 = x(1); % Tiempo de vuelo de la zona derecha
tau2 = x(2); % Tiempo de vuelo de la zona central entre x1 y x2
tau3 = x(3); % Tiempo de vuelo de la zona izquierda
tau4 = x(4); % Tiempo de vuelo de la zona central entre x3 y x4
y0 = x(5);
z0 = x(6);
x0 = [1; y0; z0];
e1T = [1 0 0];

% Los 4 puntos de corte
x1 = (x_R + expm(Ae*tau1) * (x0 - x_R));
x2 = (x_C + expm(Ac*tau2) * (x1 - x_C));
x3 = (x_L + expm(Ae*tau3) * (x2 - x_L));
fx0 = x_C + expm(Ac*tau4) * (x3 - x_C) - x0;

```

```

% Matriz de monodromia
if paramContinuacion == "a"
    M = expm(Ac*tau4)*expm(Ae*tau3)*expm(Ac*tau2)*expm(Ae*tau1) ;
end

% Las 7 ecuaciones de cierre
f(1,1) = fx0(1);
f(2,1) = fx0(2);
f(3,1) = fx0(3);
f(4,1) = e1T * x1 - 1;
f(5,1) = e1T * x2 + 1;
f(6,1) = e1T * x3 + 1;
if paramContinuacion == "a"
    f(7,1) = trace(M)-det(M)-2;
end
end

```

7.2 Sistema 3D y 4D con ODE45

7.2.1 Definición del sistema en 4D

```

function Fun4D = sistema4D (t,y,a,b,beta, gamma)
% W es la derivada de q en el tiempo
syms xt
W(xt) = piecewise(xt<-1, b, (-1<=xt) & (xt<=1), a, xt>1, b);

% Definir sistema segun 8
Fun4D = zeros(4,1);
Fun4D(1) = y(4);
Fun4D(2) = y(3)-y(4);
Fun4D(3) = -beta*y(2) + gamma*y(3);
Fun4D(4) = y(2) - W(y(1))*y(4);
end

```

7.2.2 Aplicación del sistema en 4D

```

%% Integral del sistema 4D

%% Constantes
% Declaro las constantes
a=0.8; b=2; beta=1.2;

% gamma = gamma_a + 0.02
g_paso=(beta+a^2)/(2*a);
gamma_a=g_paso-sqrt(g_paso^2-1);

gamma = gamma_a + 0.02;

%% Carga (q) y derivada W
% Definir q y W
syms q(xt)
q(xt) = piecewise(xt<-1, b*(xt+1)-a, (-1<=xt) & (xt<=1), a*xt, xt>1, b*(xt-1)+a
);

```

```

%% Integrar sistema 4D
% punto inicial de integracion y0
x3d = [1,2,3]; h = 0;
[y0, ~, ~, ~, ~] = xttoy(x3d(1), x3d(2), x3d(3), h, a, b, beta, gamma);
% y0 = [1., -0.0416829, 2.25448, -2.19789];

[T,Y] = ode45(@(t,y)sistema4D(t,y,a,b,beta,gamma), [-50,50], y0);
% [T,Y] = ode45(@(t,y)sistema4D(t,y,a,b,beta,gamma), [-50,50], y0, odeset('AbsTol',
    '1e-9', 'RelTol', 1e-9, 'Stats', 'on'));

prompt = "Plot Y(t)? s/n: ";
txt = input(prompt, "s");

if txt == "s"
    figure('Name', "Solucion sistema 4D con ODE45")
    plot(T, Y(:,1), '-o', T, Y(:,2), '-o', T, Y(:,3), '-o', T, Y(:,4), '-o')
    title('Solucion sistema 4D con ODE45');
    xlabel('Tiempo (t)');
    ylabel('Solución (y)');
    legend('y_1', 'y_2', 'y_3', 'y_4')
end

prompt = "Plot Y2 en función de Y1? s/n: ";
txt = input(prompt, "s");
if txt == "s"
    figure
    plot(Y(:,1), Y(:,2), '-o')
    title('Y2 frente a Y1');
    xlabel('Y1');
    ylabel('Y2');
end

%% Calculo H en función del tiempo
sz = size(Y);
H = zeros(sz(1), 1);
H = beta * (Y(:,4) + q(Y(:,1))) - gamma * (Y(:,1) + Y(:,2)) + Y(:,3);

prompt = "Plot H(t)? s/n: ";
txt = input(prompt, "s");
if txt == "s"
    figure
    plot(T, H, '-o')
    title('Variación de la cantida conservada h');
    xlabel('Tiempo (t)');
    ylabel('Cantidad conservada h');
end

```

7.2.3 Definición del sistema en 3D

```

function Fun3D = sistema3D(t,x,a,b,beta,gamma,h)

%% Constantes
% Declaro las constantes del sistema 3D
tc = gamma - a; te = gamma - b; mc = 1 + beta - gamma*a;
me = 1 + beta - gamma*b; dc = gamma - a*beta; de = gamma - b*beta;

```

```

%% Funcion saturacion
syms xt
sat(xt) = piecewise(xt<-1, -1, (-1<=xt) & (xt<=1), xt, xt>1, 1);

%% Definicion del sistema según (15)
Fun3D = zeros(3,1);
Fun3D(1) = te*x(1)-x(2)+(tc-te)*sat(x(1))+h/beta;
Fun3D(2) = me*x(1)-x(3)+(mc-me)*sat(x(1))+(gamma*h)/beta;
Fun3D(3) = de*x(1) + (dc-de)*sat(x(1))+h;
end

```

7.2.4 Aplicación del sistema en 3D

```

%% Integral del sistema 3D

%% Constantes
% Declaro las constantes
a=0.8; b=2; beta=1.2;

% gamma = gamma_a + 0.02
g_paso=(beta+a^2)/(2*a);
gamma_a=g_paso-sqrt(g_paso^2-1);

gamma = gamma_a + 0.02;

% Cantidad conservada H
h=0; % h=0;

%% Carga (q)
% Deifinir q
syms q(xt)
q(xt) = piecewise(xt<-1, b*(xt+1)-a, (-1<=xt) & (xt<=1), a*xt, xt>1, b*(xt-1)+a
);

%% Integrar sistema 3D
% punto inicial de integracion y0
y0=[1,2,3]';
% [T,X] = ode45(@(t,x)sistema3D(t,x,a,b,beta,gamma,h), [0,100],y0);
% misopciones1=odeset('Stats','on');

misopciones1=odeset('Stats','on');

% luego aumentar la precisión mediante la opción
% misopciones2=odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9,'Stats','on');
% [T,Y]=ode15s(@(t,y)sistema3D(t,y,mu), [0 2000],Y0,misopciones2);
% Comprobar el numero de pasos fallidos "failed attempts" para
% descartar que tengamos problemas en la integración

misopciones2=odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9,'Stats','on');

prompt = "Mis opciones 1 o 2?: ";
txt = input(prompt,"s");

if txt == "1"
    misopciones = misopciones1;

```

```

else
    misopciones = misopciones2;
end

[T,X] = ode45(@(t,x)sisistema3D(t,x,a,b,beta,gamma,h), [0,100],y0,misopciones);

prompt = "Plot X(t)? s/n: ";
txt = input(prompt,"s");

if txt == "s"
    figure ('Name', "Solucion sistema 3D con ODE45")
    plot(T,X(:,1),'-o',T,X(:,2),'-o',T,X(:,3),'-o')
    title('Solucion sistema 3D con ODE45');
    xlabel('Tiempo (t)');
    ylabel('Solución (x)');
    legend('x_1','x_2','x_3')
end

%% Conversion a 4D segun proposición 3
sz = size(X);
y4D = zeros(sz(1),sz(2)+1);
y4D(:,1) = X(:,1);
y4D(:,2) = (gamma^2-beta-1)*X(:,1)-gamma*X(:,2)+X(:,3);
y4D(:,3) = gamma * (gamma^2-2*beta)*X(:,1)+(beta - gamma^2)*X(:,2)+gamma*X(:,3)
;
y4D(:,4) = gamma*X(:,1) - X(:,2) - q(X(:,1)) + h/beta;

prompt = "Plot Y(t)? s/n: ";
txt = input(prompt,"s");
if txt == "s"
    figure ('Name', "Solucion sistema 4D partiendo del 3D")
    plot(T,y4D(:,1),'-o',T,y4D(:,2),'-o',T,y4D(:,3),'-o',T,y4D(:,4),'-o')
    title('Solucion sistema 4D partiendo del 3D');
    xlabel('Tiempo (t)');
    ylabel('Solución (y)');
    legend('y_1','y_2','y_3','y_4')
end

prompt = "Plot X2 en función de X1? s/n: ";
txt = input(prompt,"s");
if txt == "s"
    figure
    plot(X(:,1),X(:,2),'-o')
    title('X2 en función X1');
    ylabel('X2');
    xlabel('X1');
end

```

7.3 Función de continuación de parámetros en sistema 3D

7.3.1 Continuación generalizada

```

%% Formato
format short g
format compact

```

```

%% Que continuacion se va a mirar
prompt = "¿Que parametro de continuacion se va a usar?: ";
paramCont = input(prompt,"s");
if paramCont == 'a'
    prompt = "¿Que zona, gamma superior o inferior? s/i:";
    qGamma = input(prompt,"s");
    if isempty(qGamma)
        qGamma = 's';
    end
end
end
%% Constantes
switch paramCont
    case "a"
        a=1.2; b=2; beta=1.2; h=0;
        if qGamma == 's'
            % gamma parte superior
            gamma = 1.56;
        else
            % gamma parte inferior
            gamma=0.62;
        end
    case "b"
        a=0.8; b=2; beta=1.2;
        % gamma = gamma_a + 0.02
        g_paso=(beta+a^2)/(2*a);
        gamma_a= g_paso - sqrt(g_paso^2 - 1);
        gamma = gamma_a + 0.02;
        % Cantidad conservada H
        h=0;
    case "beta"
        a=0.8; b=2; beta=1.2;
        % gamma = gamma_a + 0.02
        g_paso=(beta+a^2)/(2*a);
        gamma_a= g_paso - sqrt(g_paso^2 - 1);
        gamma = gamma_a + 0.02;
        % Cantidad conservada H
        h=0;
    case "gamma"
        a=0.8; b=2; beta=1.2;
        % gamma = gamma_a + 0.02
        g_paso=(beta+a^2)/(2*a);
        gamma_a= g_paso - sqrt(g_paso^2 - 1);
        gamma = gamma_a + 0.02;
        % Cantidad conservada H
        h=0;
    case "h"
        a=0.8; b=2; beta=1.2;
        % gamma = gamma_a + 0.02
        g_paso=(beta+a^2)/(2*a);
        gamma_a= g_paso - sqrt(g_paso^2 - 1);
        gamma = gamma_a + 0.02;
        % Cantidad conservada H
        h=0;
%     h = 0.301098288112172;
end
%% Declaro las constantes del sistema 3D

```

```

% [Ac, Ae, x_R, x_L, x_C] = constantes(a,b,beta,gamma,h);

%% Funcion Close equation y comprobacion
% Punto inicial
switch paramCont
    case "a"
        if qGamma == 's'
            % xini para gamma superior+
            xini = [0.916935680868434 4.63911250905786 0.916935680868434
                4.63911250905786 0.20076261455218 -0.0504367341359493]';
        else
            % xini para gamma inferior-
            xini = [1.2592385985657 1.41216455197594 1.2592385985657
                1.41216455197594 -1.75719723495496 0.781455877485027]';
        end
        zona = 3; tablazona1 = "C";
        varCont = a;
    case "b"
        xini = [0.5 2 0.5 2 -1 0]';
        zona = 3;
        varCont = b;
    case "beta"
        xini = [0.5 2 0.5 2 -1 0]';
        zona = 3; tablazona1 = "C";
        varCont = beta;
    case "gamma"
        xini = [0.5 2 0.5 2 -1 0]';
        zona = 3; tablazona1 = "C";
        varCont = gamma;
    case "h"
        xini = [0.5 2 0.5 2 -1 0]';
        zona = 3; tablazona1 = "C";
%     xini =
%     [1.01262658175160,3.83512023522635,-0.153978927949083,1.60831164657090,0.301098288112172]';

%     zona = 1; tablazona1 = "D";
        varCont = h;
end
% Declaracion de las Close equation en funcion del parametro de
% continuacion
G1 = @(x)CloseEquation2R(x,a,b,beta,gamma,h,"");
G2 = @(x)CloseEquation2L(x,a,b,beta,gamma,h,"");
G3 = @(x)CloseEquation3(x,a,b,beta,gamma,h,"");
G4 = @(y)CloseEquation2R(y,a,b,beta,gamma,h,paramCont);
G5 = @(z)CloseEquation2L(z,a,b,beta,gamma,h,paramCont);
G6 = @(x)CloseEquation3(x,a,b,beta,gamma,h,paramCont);
% Punto inicial segun la zona
if zona == 1 % Resolver la funcion para sacar un u0
    % Right zone
    u0 = fsolve(G1,xini);
%     tablaC1 = 1; tablaL1 = 1; tablaR1 = u0'; tablaR1(5) = 0;
%     u0 = xini;
    u0(5,1) = varCont;
elseif zona == 2
    % Left zone
    u0 = fsolve(G2,xini);

```

```

    tablaC1 = 1; tablaR1 = 1; tablaL1 = u0'; tablaL1(5) = 0;
    u0(5,1) = varCont;
else
    % Central zone
    u0 = fsolve(G3,xini);
    tablaL1 = 1; tablaR1 = 1; tablaC1 = u0'; tablaC1(7) = 0;
    u0(7,1) = varCont;
    % Chequear si se cumplen las condiciones
    % tc = gamma - a;
    [check,x0,x1,x2,x3] = checkCE3(u0,a,b,beta,gamma,h);
    if check == 0
        disp('No se cumplen las condiciones, cambie xini');
        quit
    end
end
end
% Dibujar el ciclo limite
prompt = "¿Quieres dibujar primer ciclo? s/n: ";
txt = input(prompt,"s");
if txt == "s"
    figure (Name='Ciclo límite para u0')
    DibujarCL(tablaR1,tablaL1,tablaC1,tablazona1,a,b,beta,gamma,h,"h")
end
%% Variables para la ContKellerdim
%Tabla para guardar los datos (x)
tablaR=zeros(250,5);
tablaL=zeros(250,5);
tabla=zeros(250,7);
% Constantes de la continuacion
TOLREL=1e-7;TOLABS=1e-7;iteramax=10;pasomin=1e-4;
pasomax=0.1;cada=1; pasoTiempo = 0.005;
% Constantes de iniciacion de variables
moverParamCont = true; for1 = 0; comienzo = true; derecha = true;
limiteFor = 250;
Dc = gamma - a * beta;
prompt = "¿Que paso de continuacion? (0.01) : ";
pasocont = input(prompt); % pasocont=0.01;
if isempty(pasocont)
    pasocont = 0.01;
end
%% Continuacion de Kellerdim
%Interpolacion entre ultimos dos puntos o coger ultimo valor positivo de 3
%zonas
while moverParamCont
    if paramCont == 'h'
        Dc = abs(gamma - a * b);
        if -Dc <= h && h>=Dc % -|Dc|<= h <=|Dc|
            disp('h fuera de rango')
        end
    end
    switch zona
        %% 2 zonas Centro Derecha
        case 1
            for1 = for1 + 1;
            if ~comienzo
                u0R = [u0(1,1); u0(2,1) + u0(4,1); u0(5,1); u0(6,1); u0(7,1)];
                %
                u0R(1) = u0(1); tau1'
                %
                u0R(2) = u0(2) + u0(4); tau2'
            end
        end
    end
end

```



```

%          uOR(3) = u0(5); y0
%          uOR(4) = u0(6); z0
%          uOR(5) = u0(7); h
elseif comienzo
    uOR = u0;
end
mR=max(size(G4(uOR))); JR=funjacnum(G4,uOR);
vR=-JR(:,1:mR)\JR(:,mR+1);
vR=[vR;1];
vR=vR/norm(vR);

for nn=for1:limiteFor
    tablazona(nn,1)="D";

    y=uOR+pasocont*vR;
    err=2*(TOLREL*norm(uOR)+TOLABS);
    itera=0;
    while err>norm(uOR)*TOLREL+TOLABS && itera<iteramax
        JR=funjacnum(G4,y);
        GextR=[G4(y);(y-uOR)'*vR-pasocont];
        JextR=[JR;vR'];
        e=JextR\GextR;
        y=y-e;
        itera=itera+1;
        err=norm(e);
    end
    if itera==iteramax
        disp('No converge')
        %pause
    else
        %display(x);
    end
    ladoderecho=zeros(mR,1);
    vR=JextR\ladoderecho;
    vR=vR/norm(vR);
    tablaR(nn,:)=y'; uOR=y;

    for1 = nn;
    t1 = 0:pasoTiempo:tablaR(nn,2);
    dimension = size(t1);
    xcenR = zeros(dimension(2),3);
    switch paramCont
        case "a"
            a = uOR(5,1);
        case "b"
            b = uOR(5,1);
        case "beta"
            beta = uOR(5,1);
        case "gamma"
            gamma = uOR(5,1);
        case "h"
            h = uOR(5,1);
    end
    [AcR, ~, x_RR, ~, x_CR] = constantes(a,b,beta,gamma,h);
    xOR = [1; uOR(3,1); uOR(4,1)];
    e1T = [1 0 0];
    x1R = x_RR + expm(AcR*uOR(1,1)) * (xOR - x_RR);

```

```

for i = 1:dimension(2)
    t = t1(i);
    xcenR(i,:) = x_CR + expm(AcR*t) * (x1R - x_CR);
end
minimoR = min(xcenR(:,1));
tiempoMinR = t1(find(xcenR(:,1) == minimoR));
if minimoR <= - 1
    zona = 3;
    derecha = true;
    comienzo = false;
    break
end
end
if for1 == limiteFor
    moverParamCont = false;
end
%% 2 zonas Centro Izquierda
case 2
    for1 = for1 + 1;
    if ~comienzo
        u0L = [u0(3,1); u0(2,1) + u0(4,1); x2L3(2,1); x2L3(3,1); u0
            (7,1)];
        %
        % u0L(1) = u0(2,1) + u0(4,1); tau1'
        % u0L(2) = u0(3,1); tau2'
        % u0L(3) = u0(5);
        % u0L(4) = u0(6);
        % u0L(5) = u0(7);
    elseif comienzo
        u0L = u0;
    end

    mL=max(size(G5(u0L))); JL=funjacnum(G5,u0L);
    vL=-JL(:,1:mL)\JL(:,mL+1);
    vL=[vL;1];
    vL=vL/norm(vL);

    for nn=for1:limiteFor
        tablazona(nn,1)="L";
        z=u0L+pasocont*vL;
        err=2*(TOLREL*norm(u0L)+TOLABS);
        itera=0;
        while err>norm(u0L)*TOLREL+TOLABS && itera<iteramax
            JL=funjacnum(G5,z);
            GextL=[G5(z);(z-u0L)'*vL-pasocont];
            JextL=[JL;vL'];
            e=JextL\GextL;
            z=z-e;
            itera=itera+1;
            err=norm(e);
        end
        if itera==iteramax
            disp('No converge')
            %pause
        else
            %display(x);
        end
        ladoderecho=[zeros(mL,1);1];

```

```

vL=JextL\ladoderecho;
vL=vL/norm(vL);
tablaL(nn,:)=z'; u0L=z;

for1 = nn;
t1 = 0:pasoTiempo:tablaL(nn,2);
dimension = size(t1);
xcenL = zeros(dimension(2),3);

switch paramCont
    case "a"
        a = u0L(5,1);
    case "b"
        b = u0L(5,1);
    case "beta"
        beta = u0L(5,1);
    case "gamma"
        gamma = u0L(5,1);
    case "h"
        h = u0L(5,1);
end
[AcL, ~, ~, ~, x_CL] = constantes(a,b,beta,gamma,h);
x0L = [-1; u0L(3,1); u0L(4,1)];
e1T = [1 0 0];
x1L = x_CL + expm(AcL*u0L(1,1)) * (x0L - x_CL);

for i = 1:dimension(2)
    t = t1(i);
    xcenL(i,:) = x_CL + expm(AcL*t) * (x1L - x_CL);
end
maxL = max(xcenL(:,1));
tiempoMaxL = t1(find(xcenL(:,1) == maxL));
maximoL = xcenL(find(xcenL(:,1) == maxL),:);
if maxL >= 1
    zona = 3;
    derecha = false;
    comienzo = false;
    break
end
end
if for1 == limiteFor
    moverParamCont = false;
end
%% 3 ZONAS
case 3
    for1 = for1 + 1;
    if ~comienzo && derecha
        u0(1) = u0R(1);
        u0(2) = u0R(2)-tiempoMinR;
        u0(3) = 0;
        u0(4) = tiempoMinR;
        u0(5) = u0R(3);
        u0(6) = u0R(4);
        u0(7) = u0R(5);
    elseif ~comienzo && ~derecha
        u0(1) = 0;
        u0(2) = u0L(2)-tiempoMaxL;

```

```

u0(3) = u0L(1);
u0(4) = tiempoMaxL;
u0(5) = maximoL(2);
u0(6) = maximoL(3);
u0(7) = u0L(5);
end
m=max(size(G6(u0))); J=funjacnum(G6,u0);
v=-J(:,1:m)\J(:,m+1);
v=[v;1];
v=v/norm(v);
for nn=for1:limiteFor
    tablazona(nn,1)="C";
    x=u0+pasocont*v;
    err=2*(TOLREL*norm(u0)+TOLABS);
    itera=0;
    while err>norm(u0)*TOLREL+TOLABS && itera<iteramax
        J=funjacnum(G6,x);
        Gext=[G6(x);(x-u0)'*v-pasocont];
        Jext=[J;v'];
        e=Jext\Gext;
        x=x-e;
        itera=itera+1;
        err=norm(e);
    end
    if itera==iteramax
        disp('No converge')
        %pause
    else
        %display(x);
    end
    ladoderecho=[zeros(m,1);1];
    v=Jext\ladoderecho;
    v=v/norm(v);
    tabla(nn,:)=x'; u0=x;

    if tabla(nn,1) < 0
        comienzo = false;
        zona = 2; % zona centro izquierda
        for1 = nn;
        switch paramCont
            case "a"
                a = u0(7,1);
            case "b"
                b = u0(7,1);
            case "beta"
                beta = u0(7,1);
            case "gamma"
                gamma = u0(7,1);
            case "h"
                h = tabla(nn,7);
        end
        [AcC, AeC, x_RC, x_LC, x_CC] = constantes(a,b,beta,gamma,h);
        x0L3 = [1; tabla(nn,5); tabla(nn,6)];
        x1L3 = (x_RC + expm(AeC*tabla(nn,1)) * (x0L3 - x_RC));
        x2L3 = (x_CC + expm(AcC*tabla(nn,2)) * (x1L3 - x_CC));
        break
    elseif tabla(nn,3) < 0

```

```

        comienzo = false;
        zona = 1; % zona centro derecha
        for1 = nn;
        break
    end
end
if for1 == limiteFor
    moverParamCont = false;
end
end
end

%% Representacion de amplitud y CL
prompt = "¿Que variable quieres representar en funcion del parametro de
continucion?: ";
paramRepr = input(prompt,"s");
if isempty(paramRepr)
    paramRepr = "tau2";
end
for n=1:length(tabla)
    switch paramRepr
        case "tau1"
            PaRe = 1;
        case "tau2"
            PaRe = 2;
        case "tau3"
            PaRe = 3;
        case "tau4"
            PaRe = 4;
        case "y0"
            if tablazona(n) == "C"
                PaRe = 5;
            else
                PaRe = 3;
            end
        case "z0"
            if tablazona(n) == "C"
                PaRe = 6;
            else
                PaRe = 4;
            end
        case "Amplitud"
            PaRe = 8;
            if tablazona(n) == "C"
                y0Posic = 5;
                z0Posic = 6;
                tabla(n,PaRe) = sqrt(1 + (tabla(n,y0Posic))^2 + tabla(n,z0Posic)
                    ^2);
            elseif tablazona(n) == "D"
                y0Posic = 3;
                z0Posic = 4;
                tablaR(n,PaRe) = sqrt(1 + (tabla(n,y0Posic))^2 + tabla(n,z0Posic)
                    ^2);
            else
                y0Posic = 3;
                z0Posic = 4;
            end
        end
    end
end

```

```

        tablaL(n,PaRe) = sqrt(1 + (tabla(n,y0Posic))^2 + tabla(n,z0Posic
        )^2);
    end
    otherwise
        PaRe = 2;
    end
    if tablazona(n) == "C"
        tablaRepX(n) = tabla(n,7);
        tablaRepY(n) = tabla(n,PaRe);
    elseif tablazona(n) == "D"
        tablaRepX(n) = tablaR(n,5);
        tablaRepY(n) = tablaR(n,PaRe);
    else
        tablaRepX(n) = tablaL(n,5);
        tablaRepY(n) = tablaL(n,PaRe);
    end
end
end

[tabRepOX,tabRepOY] = OrdenarPuntos2D(tablaRepX,tablaRepY);

prompt = ";Representacion del parametro en formato linea, puntos o ambos? l/p/a
: ";
txt = input(prompt,"s");

figure (Name=sprintf('%s en funcion de parametro continuacion',paramRepr))
hold on
title(sprintf('%s en función de %s',paramRepr, paramCont))
xlabel(sprintf('%s', paramCont))
ylabel(sprintf('%s',paramRepr))
if txt == "l"
%     if paramCont == 'a' && qGamma == 'i'
%         tabRepOX(251) = tabRepOX(250);
%         tabRepOY(251) = 0;
%     end
    plot(tabRepOX,tabRepOY)
elseif txt == "p"
    for n=1:length(tabla)
        switch paramRepr
            case "tau1"
                PaRe = 1;
            case "tau2"
                PaRe = 2;
            case "tau3"
                PaRe = 3;
            case "tau4"
                PaRe = 4;
            case "y0"
                if tablazona(n) == "C"
                    PaRe = 5;
                else
                    PaRe = 3;
                end
            case "z0"
                if tablazona(n) == "C"
                    PaRe = 6;
                else
                    PaRe = 4;
                end
            end
        end
    end
end
end

```

```

        end
        case "Amplitud"

            otherwise
                PaRe = 2;
            end
        if tablazona(n) == "C"
            plot(tabla(n,7),tabla(n,PaRe),'-ob') % -ob,'-ob'
        elseif tablazona(n) == "D"
            plot(tablaR(n,5),tablaR(n,PaRe),'-ok') % -ok
        else
            plot(tablaL(n,5),tablaL(n,PaRe),'-or')
        end
    end
end
else
plot(tabRepOX,tabRepOY)
for n=1:length(tabla)
    switch paramRepr
        case "tau1"
            PaRe = 1;
        case "tau2"
            PaRe = 2;
        case "tau3"
            PaRe = 3;
        case "tau4"
            PaRe = 4;
        case "y0"
            if tablazona(n) == "C"
                PaRe = 3;
            else
                PaRe = 5;
            end
        case "z0"
            if tablazona(n) == "C"
                PaRe = 6;
            else
                PaRe = 4;
            end
        case "Amplitud"

            otherwise
                PaRe = 2;
            end
        if tablazona(n) == "C"
            plot(tabla(n,7),tabla(n,PaRe),'-ob') % -ob,'-ob'
        elseif tablazona(n) == "D"
            plot(tablaR(n,5),tablaR(n,PaRe),'-ok') % -ok
        else
            plot(tablaL(n,5),tablaL(n,PaRe),'-or')
        end
    end
end
end
hold off

prompt = "¿Quieres dibujar todos los CL? s/n: ";
txt = input(prompt,"s");
if txt == "s" && paramCont ~= "gamma"

```



```

[check,x0,x1,x2,x3] = checkCE3(u0,a,b,beta,gamma,h);
if check == 0
    disp('No se cumplen las condiciones, cambie xini');
    quit
end
%% Variables para la ContKellerdim
% Tabla para guardar los datos (x)
tabla=zeros(250,8);
% Constantes de la continuacion
TOLREL=1e-7;TOLABS=1e-7;iteramax=10;pasomin=1e-4;
pasomax=0.1;cada=1; pasoTiempo = 0.005;
% Constantes de iniciacion de variables
limiteFor = 250;
prompt = "¿Que paso de continuacion? (0.01) : "; % pasocont=0.02 para la zona
der
pasocont = input(prompt);
if isempty(pasocont)
    pasocont = 0.01;
end
%% Continuacion de Kellerdim
%% 3 ZONAS
m=max(size(G6(u0))); J=funjacnum(G6,u0);
v=-J(:,1:m)\J(:,m+1);
v=[v;1];
v=v/norm(v);
for nn=1:limiteFor
    x=u0+pasocont*v;
    err=2*(TOLREL*norm(u0)+TOLABS);
    itera=0;
    while err>norm(u0)*TOLREL+TOLABS && itera<iteramax
        J=funjacnum(G6,x);
        Gext=[G6(x);(x-u0)'*v-pasocont];
        Jext=[J;v'];
        e=Jext\Gext;
        x=x-e;
        itera=itera+1;
        err=norm(e);
    end
    if itera==iteramax
        disp('No converge')
        %pause
    else
        %display(x);
    end
    ladoderecho=[zeros(m,1);1];
    v=Jext\ladoderecho;
    v=v/norm(v);
    tabla(nn,:)=x';
    u0=x;
end
%% Representacion de amplitud y CL
prompt = "¿Que variable quieres representar en funcion del parametro de
continuation?: ";
paramRepr = input(prompt,"s");
if isempty(paramRepr)
    paramRepr = "gamma";
end

```

```

for n=1:length(tabla)
    switch paramRepr
        case "tau1"
            PaRe = 1;
        case "tau2"
            PaRe = 2;
        case "tau3"
            PaRe = 3;
        case "tau4"
            PaRe = 4;
        case "y0"
            PaRe = 5;
        case "z0"
            PaRe = 6;
        case "Amplitud"
            PaRe = 9;
            y0Posic = 5;
            z0Posic = 6;
            tabla(n,PaRe) = sqrt(1 + (tabla(n,y0Posic))^2 + tabla(n,z0Posic)^2);
        otherwise
            PaRe = 7;

    end
    tablaRepX(n) = tabla(n,8);
    tablaRepY(n) = tabla(n,PaRe);
end

[tabRepOX,tabRepOY] = OrdenarPuntos2D(tablaRepX,tablaRepY);

prompt = "¿Representacion del parametro en formato linea, puntos o ambos? l/p/a
: ";
txt = input(prompt,"s");

figure (Name=sprintf('%s en funcion de parametro continuacion',paramRepr))
hold on
title(sprintf('%s en función de %s',paramRepr, paramCont))
xlabel(sprintf('%s', paramCont))
ylabel(sprintf('%s',paramRepr))
if txt == "l"
    plot(tabRepOX,tabRepOY)
elseif txt == "p"
    for n=1:length(tabla)
        switch paramRepr
            case "tau1"
                PaRe = 1;
            case "tau2"
                PaRe = 2;
            case "tau3"
                PaRe = 3;
            case "tau4"
                PaRe = 4;
            case "y0"
                if tablazona(n) == "C"
                    PaRe = 3;
                else
                    PaRe = 5;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        case "z0"
            PaRe = 6;
        case "Amplitud"

            otherwise
                PaRe = 7;
        end
        plot(tabla(n,8),tabla(n,PaRe),'-ob') % -ob,'-ob'
    end
else
    plot(tabRep0X,tabRep0Y)
    for n=1:length(tabla)
        switch paramRepr
            case "tau1"
                PaRe = 1;
            case "tau2"
                PaRe = 2;
            case "tau3"
                PaRe = 3;
            case "tau4"
                PaRe = 4;
            case "y0"
                PaRe = 5;
            case "z0"
                PaRe = 6;
            case "Amplitud"

                otherwise
                    PaRe = 7;
            end
            plot(tabla(n,8),tabla(n,PaRe),'-ob') % -ob,'-ob'
        end
    end
end
hold off

\section{Funciones auxiliares}

\subsection{Dibujar ciclo limite}

\begin{lstlisting}[style=Matlab-editor]
function DibujarCL(datosR,datosL,datos3,datosZona,a,b,beta,gamma,h,
    paramContinuacion)
%% Generar puntos del ciclo limite
pasoTiempo = 0.001;

sumx0 = zeros(3,height(datos3));
sumx1 = zeros(3,height(datos3));
sumx2 = zeros(3,height(datos3));
sumx3 = zeros(3,height(datos3));

Longitud3 = zeros(1,height(datos3));

%% Generar trayectoria
for n = 1:height(datosZona)
    %% ZONA CENTRAL
    if datosZona(n,1) == "C"
        tau1 = datos3(n,1);

```

```

tau2 = datos3(n,2);
tau3 = datos3(n,3);
tau4 = datos3(n,4);
y0 = datos3(n,5);
z0 = datos3(n,6);
x0 = [1; y0;z0];

switch paramContinuacion
    case "a"
        a = datos3(n,7);
    case "b"
        b = datos3(n,7);
    case "beta"
        beta = datos3(n,7);
    case "gamma"
        gamma = datos3(n,7);
    case "h"
        h = datos3(n,7);
end
[Ac, Ae, x_R, x_L, x_C] = constantes(a,b,beta,gamma,h);

x1 = (x_R + (expm(Ae*tau1) * (x0 - x_R)));
x2 = (x_C + expm(Ac*tau2) * (x1 - x_C));
x3 = (x_L + expm(Ae*tau3) * (x2 - x_L));

sumx0(:,n)= x0;
sumx1(:,n)= x1;
sumx2(:,n)= x2;
sumx3(:,n)= x3;

% Derecha
t1 = 0:pasoTiempo:tau1;
for i = 1:width(t1)
    t = t1(i);
    xder(i,:) = x_R + expm(Ae*t) * (x0 - x_R);
end

% Centro 1
t1 = 0:pasoTiempo:tau2;
for i = 1:width(t1)
    t = t1(i);
    xcen1(i,:) = x_C + expm(Ac*t) * (x1 - x_C);
end

% Izquierda
t1 = 0:pasoTiempo:tau3;
for i = 1:width(t1)
    t = t1(i);
    xizq(i,:) = x_L + expm(Ae*t) * (x2 - x_L);
end

% Centro 2
t1 = 0:pasoTiempo:tau4;
for i = 1:width(t1)
    t = t1(i);
    xcen2(i,:) = x_C + expm(Ac*t) * (x3 - x_C);
end

```

```

% Total
Xtotal = [xder; xcen1; xizq; xcen2];
Longitud3(n) = height(Xtotal); % Parametro que hace que no se dibujen
    los ceros que se general en la tabla XTOTAL
XTOTAL(1:height(Xtotal),((n-1)*3+1):((n-1)*3+3)) = Xtotal;
%% ZONA DERECHA
elseif datosZona(n,1) == "D" % Estamos en la zona derecha-centro
    tauR1 = datosR(n,1);
    tauR2 = datosR(n,2);
    yOR = datosR(n,3);
    zOR = datosR(n,4);

    xOR = [1; yOR;zOR];

    switch paramContinuacion
        case "a"
            a = datosR(n,5);
        case "b"
            b = datosR(n,5);
        case "beta"
            beta = datosR(n,5);
        case "gamma"
            gamma = datosR(n,5);
        case "h"
            h = datosR(n,5);
    end
    [Ac, Ae, x_R, ~, x_C] = constantes(a,b,beta,gamma,h);

    x1R = (x_R + expm(Ae*tauR1) * (xOR - x_R));

    sumx0(:,n)= xOR;
    sumx1(:,n)= x1R;

% Derecha
t1 = 0:pasoTiempo:tauR1;
for i = 1:width(t1)
    t = t1(i);
    xderR(i,:) = x_R + expm(Ae*t) * (xOR - x_R);
end
% centro
t1 = 0:pasoTiempo:tauR2;
for i = 1:width(t1)
    t = t1(i);
    xcenR(i,:) = x_C + expm(Ac*t) * (x1R - x_C);
end

% Total
Xtotal = [xderR; xcenR];
Longitud3(n) = height(Xtotal); % Parametro que hace que no se dibujen
    los ceros que se general en la tabla XTOTAL
XTOTAL(1:height(Xtotal),((n-1)*3+1):((n-1)*3+3)) = Xtotal;
%% ZONA IZQUIERDA
elseif datosZona(n,1) == "L" % tau1<0 estamos en la zona izquierda centro
    tauL1 = datosL(n,1); % Tiempo de vuelo de la zona izquierda
    tauL2 = datosL(n,2); % Tiempo de vuelo de la zona central
    yOL = datosL(n,3);

```

```

z0L = datosL(n,4);
x0L = [-1; y0L;z0L];

switch paramContinuacion
    case "a"
        a = datosL(n,5);
    case "b"
        b = datosL(n,5);
    case "beta"
        beta = datosL(n,5);
    case "gamma"
        gamma = datosL(n,5);
    case "h"
        h = datosL(n,5);
end
[Ac, Ae, ~, x_L, x_C] = constantes(a,b,beta,gamma,h);

x1L = (x_L + expm(Ae*tauL1) * (x0L - x_L));

sumx0(:,n)= x0L;
sumx1(:,n)= x1L;

% Centro
t1 = 0:pasoTiempo:tauL2;
for i = 1:width(t1)
    t = t1(i);
    xcenL(i,:) = x_C + expm(Ac*t) * (x1L - x_C);
end

% Izquierda
t1 = 0:pasoTiempo:tauL1;
for i = 1:width(t1)
    t = t1(i);
    xizqL(i,:) = x_L + expm(Ae*t) * (x0L - x_L);
end

% Total
Xtotal = [xcenL; xizqL];
Longitud3(n) = height(Xtotal); % Parametro que hace que no se dibujen
    los ceros que se general en la tabla XTOTAL
XTOTAL(1:height(Xtotal),((n-1)*3+1):((n-1)*3+3)) = Xtotal;
end
end

%% Dibujar
figure (Name='Ciclo Limite')
XX1 = ones (21,21);
[YY1, ZZ1] = meshgrid (-2:0.2:2);
surf(XX1, YY1, ZZ1, 'FaceAlpha', 0.4, 'EdgeColor', 'none')

hold on

XXm1 = - 1 * ones (21,21);
[YYm1, ZZm1] = meshgrid (-2:0.2:2);
surf(XXm1, YYm1, ZZm1, 'FaceAlpha', 0.4, 'EdgeColor', 'none' )

for n = 1:height(datosZona)

```

```
%         if datosZona(n) == "C"
%             plot3(XTOTAL(1:Longitud3(n), (n-1)*3+1), XTOTAL(1:Longitud3(n), (n
-1)*3+2), XTOTAL(1:Longitud3(n), (n-1)*3+3))
%             p.color = "blue";
%         elseif datosZona(n) == "R"
%             plot3(XTOTAL(1:Longitud3(n), (n-1)*3+1), XTOTAL(1:Longitud3(n), (n
-1)*3+2), XTOTAL(1:Longitud3(n), (n-1)*3+3))
%             p.color = "black";
%         end

%         if datosZona(n) == "C"
%             plot3(sumx0(1,n), sumx0(2,n), sumx0(3,n), '-o')
%             plot3(sumx1(1,n), sumx1(2,n), sumx1(3,n), '-o')
%             plot3(sumx2(1,n), sumx2(2,n), sumx2(3,n), '-o')
%             plot3(sumx3(1,n), sumx3(2,n), sumx3(3,n), '-o')
%         elseif datosZona(n) == "L" || datosZona(n) == "R"
%             plot3(sumx0(1,n), sumx0(2,n), sumx0(3,n), '-o')
%             plot3(sumx1(1,n), sumx1(2,n), sumx1(3,n), '-o')
%         end

        plot3(XTOTAL(1:Longitud3(n), (n-1)*3+1), XTOTAL(1:Longitud3(n), (n-1)*3+2)
            , XTOTAL(1:Longitud3(n), (n-1)*3+3))
    end

    xlim([-2 2])

hold off
end
```


Índice de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Metodología seguida a lo largo del proyecto. | 2 |
| 2.1 | Circuito RC | 4 |
| 2.2 | Función de la carga en el tiempo dependiente de la carga en un circuito RC | 5 |
| 2.3 | Sistema cuya función es el seno: $\dot{x} = \text{sen}(x)$ | 5 |
| 2.4 | Sistema cuya función es la parábola: $\dot{x} = x^2 - 1$ | 6 |
| 2.5 | Sistema cuya función es: $\dot{x} = -x^3$ | 8 |
| 2.6 | Sistema cuya función es: $\dot{x} = -x^3$ | 8 |
| 2.7 | Sistema cuya función es: $\dot{x} = x^2$ | 9 |
| 2.8 | Sistema cuya función es: $\dot{x} = 0$ | 9 |
| 2.9 | Sistema circular | 10 |
| 2.10 | Sistema 2.10 donde esta representada la media y la amplitud | 11 |
| 2.11 | Primer caso con a menor que ω | 11 |
| 2.12 | Segundo caso donde a es igual a ω | 12 |
| 2.13 | Tercer caso con a mayor que ω | 12 |
| 2.14 | Todos los posibles casos estudiados representados en el círculo | 13 |
| 2.15 | Todos los posibles casos. Fuente [20] | 14 |
| 2.16 | Combinación lineal de dos vectores | 16 |
| 2.17 | Los puntos fijos en función de la traza y el determinante. Fuente [20] | 17 |
| 2.18 | Sistema $\dot{x} = r + x^2$, donde $r > 0$ | 19 |
| 2.19 | Sistema $\dot{x} = rx - x^3$, donde r va cambiando | 20 |
| 2.20 | Representación de r frente a x | 21 |
| 2.21 | Representación de r frente a x | 21 |
| 2.22 | Representación de r frente a x , para el caso $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$ | 22 |
| 2.23 | Oscilaciones en función de un parámetro μ | 23 |
| 2.24 | Oscilaciones en función de un parámetro μ | 24 |
| 2.25 | Bifurcación FCCL en tres zonas. [9] | 24 |
| 2.26 | Carga en función del tiempo (ejemplo de sistema a trozos) | 25 |
| 2.27 | Ciclo límite estable | 26 |
| 2.28 | Orbitas cerradas | 26 |
| 2.29 | Ejemplo de la aplicación de Poincaré | 27 |
| 3.1 | Comparación de los cuatro elementos pasivos básicos de la electrónica | 31 |
| 3.2 | Micrografía óptica de una red neuronal memristiva integrada, formada por una barra transversal de sinapsis memristiva de 8×8 conectada a ocho neuronas artificiales memristivas | 32 |
| 3.3 | Capas de un memristor de capa fina TiO_2/TiO_{2+x} activo. | 34 |
| 3.4 | Etapas de la fabricación de un memristor | 34 |
| 3.5 | Tipos de memristor | 35 |
| 3.6 | Característica eléctrica de un memristor. | 37 |
| 3.7 | Aplicaciones del memristor basado en TiO_2 . | 39 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.1 | Oscilador de orden cuatro | 41 |
| 4.2 | Puntos de equilibrio reales del sistema canónico según la proposición 4 de [7] | 45 |
| 4.3 | Curvas de γ en función de a para el teorema | 46 |
| 4.4 | Oscilador de orden cuatro | 47 |
| 4.5 | Representación de los cuatro puntos de corte con los dos planos $x = -1$ y $x = 1$ | 50 |
| 4.6 | Representación del ciclo límite de dos zonas | 51 |
| 4.7 | Diagrama básico de bifurcaciones del sistema 3D en el plano (a, γ) con $\beta = 1.2$ fijo | 52 |
| 5.1 | y_2 frente a y_1 para el sistema 4D | 55 |
| 5.2 | Solución del sistema 4D | 56 |
| 5.3 | Representación de la cantidad conservada h en el sistema 4D | 56 |
| 5.4 | Solución del sistema 3D | 57 |
| 5.5 | x_2 frente a x_1 para el sistema 3D | 58 |
| 5.6 | Ciclo límite que atraviesa tres zonas | 58 |
| 5.7 | Ciclo límite que atraviesa dos zonas | 59 |
| 5.8 | Transición de ciclo límite de tres a dos zonas en función de h , con h creciente sin llegar a $ h = d_C $ | 59 |
| 5.9 | Transición de ciclo límite de tres a dos zonas en función de h y $ h > d_C $ | 60 |
| 5.10 | Transición de ciclo límite de tres a dos zonas en función de h , con h decreciente | 60 |
| 5.11 | Representación de la continuación de γ en función del tiempo de vuelo dos | 61 |
| 5.12 | Representación de la continuación de γ | 61 |
| 5.13 | Continuación Silla-Nodo en la representación de γ en función de a | 62 |
| 5.14 | Representación de la continuación de a | 62 |
| 5.15 | Representación de la continuación de a en función de la amplitud | 63 |

Bibliografía

- [1] *The memristor revisited*, Nature Electronics **5** (2018), no. 1, 261.
- [2] Vincent Acary and Bernard Brogliato, *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems: applications in mechanics and electronics*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [3] David K Arrowsmith and Colin M Place, *An introduction to dynamical systems*, Cambridge university press, 1990.
- [4] Michael Brin and Garrett Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge university press, 2002.
- [5] Elisabet Vela Enrique Ponce, Javier Ros, *Bifurcations in continuous piecewise linear differential systems*, vol. 311, Springer, 2022.
- [6] Elisabet Vela Enrique Ponce, Javier Ros, *Unfolding the fold-hopf bifurcation in piecewise linear continuous differential systems with symmetry*, Physica D: Nonlinear Phenomena **250** (2013), 34–46.
- [7] Javier Ros Enrique Ponce, Andrés Amador, *A multiple focus-center-cycle bifurcation in 4d discontinuous piecewise linear memristor oscillators*.
- [8] Emilio Freire, *The focus-center-limit cycle bifurcation in symmetric 3d piecewise linear systems*, SIAM Journal on Applied Mathematics **65** (2005), no. 6, 1933–1951.
- [9] Emilio Freire, Enrique Ponce, and Javier Ros, *Limit cycle bifurcation in siso control systems with saturation*, IFAC Proceedings Volumes **38** (2005), no. 1, 646–651.
- [10] Emilio Freire, Enrique Ponce, and Javier Ros, *Bistability and hysteresis in symmetric 3d piecewise linear oscillators with three zones*, International Journal of Bifurcation and Chaos **18** (2008), no. 12, 3633–3645.
- [11] Emilio Freire, Enrique Ponce, and Javier Ros, *Following a saddle-node of peoridic orbits' bifurcation curve in chua's circuit*, International Journal of Bifurcation and Chaos **19** (2009), no. 02, 487–495.
- [12] Georgii A Illarionov, Sofia M Morozova, Vladimir V Chrishtop, Mari-Ann Einarsrud, and Maxim I Morozov, *Memristive tio2: synthesis, technologies, and applications*, Frontiers in Chemistry **8** (2020), 724.
- [13] In Hyuk Im, Seung Ju Kim, and Ho Won Jang, *Memristive devices for new computing paradigms*, Advanced Intelligent Systems **2** (2020), no. 11, 2000105.
- [14] Vahid Keshmiri, *A study of the memristor models and applications*, 2014.
- [15] Yuri A Kuznetsov, Iu A Kuznetsov, and Y Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, vol. 112, Springer, 1998.
- [16] Leon O. Chua Makoto Itoh, *Memristor oscillators*, International Journal of Bifurcation and Chaos **18** (11), 3183–3206.

- [17] Jerrold E Marsden and Marjorie McCracken, *The hopf bifurcation and its applications*, vol. 19, Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] Saraju P Mohanty, *Memristor: from basics to deployment*, IEEE Potentials **32** (2013), no. 3, 34–39.
- [19] Indika Rajapakse and Steve Smale, *The pitchfork bifurcation*, arXiv preprint arXiv:1609.05996 (2016).
- [20] Steven Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos*, 4 ed., Perseus Books, 2018.
- [21] William L. Hosch. The Editors of Encyclopaedia Britannica, *memristor*.
- [22] R Stanley Williams, *How we found the missing memristor*, IEEE spectrum **45** (2008), no. 12, 28–35.