

Proyecto fin de Máster  
Máster en Ingeniería Aeronáutica

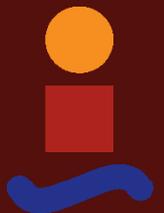
Simulación dinámica tridimensional de un  
monociclo eléctrico con conductor

Autor: Luis González-Santiago López

Tutor: Alfonso García-Agúndez Blanco y Daniel García Vallejo

**Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2024





Proyecto fin de Máster  
Máster en Ingeniería Aeronáutica

# **Simulación dinámica tridimensional de un monociclo eléctrico con conductor**

Autor:

Luis González-Santiago López

Tutor:

Alfonso García-Agúndez Blanco y Daniel García Vallejo  
Profesor Sustituto Interino y Profesor Titular

Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2024



Proyecto fin de Máster: Simulación dinámica tridimensional de un monociclo eléctrico con conductor

Autor: Luis González-Santiago López

Tutor: Alfonso García-Agúndez Blanco y Daniel García Vallejo

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Agradecimientos

---

**E**n primer lugar, me gustaría darle las gracias a mis familiares y amigos más cercanos, quienes me han apoyado incondicionalmente, pero sobre todo a mis padres, por darme la oportunidad de descubrir mi vocación y aportarme la confianza que en muchas ocasiones me ha faltado. En todo estos años no solo he crecido como profesional, si no que todo este aprendizaje también me lo llevo a nivel personal.

Por otro lado, quisiera darle las gracias a mis tutores Alfonso y Daniel, quienes más me han ayudado y animado durante la elaboración de este proyecto.

Por último, me gustaría enfatizar mi eterno agradecimiento a mis abuelos, Manuela y Diego, quienes me han dado todo en la vida y han sido un ejemplo a seguir.

*Luis González-Santiago López*

*Sevilla, 2024*



# Resumen

---

**E**n este estudio se ha desarrollado el modelado matemático que dicta la cinemática y dinámica del movimiento tridimensional de una persona montando en un monociclo eléctrico, con el fin de mejorar la estabilidad de este. Para ello, se ha considerado el sistema multicuerpo formado por cuatro subsistemas, siendo estos: el vehículo, el pie, la pierna y el tronco del usuario.

Para obtener las ecuaciones no lineales que rigen el movimiento a estudiar se seguirá el procedimiento de Euler-Lagrange, obteniéndose un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas de primer orden. Como la naturaleza del sistema es inherentemente inestable, es necesario diseñar un controlador para aumentar la estabilidad.

Este modelo será linealizado respecto a un punto de equilibrio que identifica una trayectoria de referencia a velocidad de crucero, a partir de una expansión en serie de Taylor dinámica, para posteriormente diseñar un controlador LQR que será implementado fuera del entorno lineal para poner a prueba sus prestaciones.



# Abstract

---

In this study, we have developed the mathematical model that determines the kinematics and dynamics of the three-dimensional movement of a person riding an electric unicycle, in order to improve its stability. For this purpose, the multi-body system consisting of four subsystems has been considered: the vehicle, the foot, the leg and the torso of the user.

The Euler-Lagrange method is used to obtain the non-linear equations governing the motion to be studied, resulting in a system of first-order algebraic differential equations. Since the nature of the system is inherently unstable, it is necessary to design a controller to increase stability.

This model is linearised with respect to an equilibrium point, which identifies a reference trajectory at cruising speed, from a dynamic Taylor series expansion, in order to subsequently design an LQR controller, which is implemented outside the linear environment to test its performance.



# Índice

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Notación</i>	IX
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Estado del arte	2
<b>2 Consideraciones e hipótesis</b>	<b>5</b>
<b>3 Modelado cinemático</b>	<b>9</b>
3.1 Cuerpo 2	11
3.2 Cuerpo 3	13
3.3 Cuerpo 4	15
3.4 Cuerpo 5	17
<b>4 Modelado energético</b>	<b>19</b>
<b>5 Linealización de las ecuaciones del movimiento</b>	<b>23</b>
<b>6 Formulación del controlador</b>	<b>27</b>
6.1 Controlador Movimiento Sagital	30
6.2 Controlador Movimiento Frontal-Lateral	32
<b>7 Resultados</b>	<b>35</b>
7.1 Dinámica Sagital	36
7.1.1 Influencia sobre los multiplicadores de Lagrange	36
7.1.2 Influencia sobre las variables generalizadas	39
7.1.3 Esfuerzo de control	43
7.2 Dinámica Frontal-Lateral	49
<b>8 Conclusiones</b>	<b>55</b>
<b>Apéndice A Teoría de estados</b>	<b>57</b>
<b>Apéndice B Controlador Óptimo Lineal Cuadrático</b>	<b>59</b>
<i>Índice de Figuras</i>	61

*Bibliografía*

63

# Notación

---

<b>A</b>	Matriz que rige la dinámica del sistema
<b>A<sub>f</sub></b>	Matriz que rige la dinámica del sistema contenida en el plano frontal-lateral del vehículo
<b>A<sub>s</sub></b>	Matriz que rige la dinámica del sistema contenida en el plano sagital del vehículo
<b>A*<sub>f</sub></b>	Matriz que rige la dinámica de las variables generalizadas controlables del sistema contenidas en el plano frontal-lateral del vehículo
<b>A*<sub>s</sub></b>	Matriz que rige la dinámica de las variables generalizadas controlables del sistema contenidas en el plano sagital del vehículo
<b>B</b>	Matriz de entrada al sistema que rige la dependencia de las actuaciones externas con las variables generalizadas
<b>B<sub>f</sub></b>	Matriz de entrada al sistema que rige la dependencia de las actuaciones externas con las variables generalizadas contenidas en el plano frontal-lateral del vehículo
<b>B<sub>s</sub></b>	Matriz de entrada al sistema que rige la dependencia de las actuaciones externas con las variables generalizadas contenidas en el plano sagital del vehículo
<b>B*<sub>f</sub></b>	Matriz de entrada al sistema que rige la dependencia de las actuaciones externas con las variables generalizadas controlables contenidas en el plano frontal-lateral del vehículo
<b>B*<sub>s</sub></b>	Matriz de entrada al sistema que rige la dependencia de las actuaciones externas con las variables generalizadas controlables contenidas en el plano sagital del vehículo
<b>β</b>	Constante definida a partir de las ecuaciones de Baumgarte
<b>C<sub>I</sub></b>	Número de pares de clase I presentes en el sistema
<b>C<sub>II</sub></b>	Número de pares de clase II presentes en el mecanismo
<b>d</b>	Posición vectorial del punto P del cuerpo respecto al punto O de este, respecto al sistema de referencia local del cuerpo k
<b>ε<sub>f</sub></b>	Vector definido por los polos que rigen la dinámica del sistema controlado contenida en el plano frontal-lateral del vehículo

$\boldsymbol{\varepsilon}_s$	Vector definido por los polos que rigen la dinámica del sistema controlado contenida en el plano sagital del vehículo
$\mathbf{g}$	Vector de aceleración gravitatoria
$G$	Número de grados de libertad del sistema
$\gamma$	Número de variables incontrolables del sistema
$\gamma_f$	Número de variables incontrolables contenidas en el plano sagital del sistema
$\gamma_s$	Número de variables incontrolables contenidas en el plano sagital del sistema
$\mathbf{I}_i$	Matriz de inercia del cuerpo $i$
$J$	Función de coste que rige el comportamiento del controlador LQR
$\mathcal{K}_i$	Contribución del cuerpo $i$ a la energía cinética total del sistema
$\mathbf{K}$	Matriz de ganancias que rige el comportamiento del controlador LQR
$\mathbf{K}_f$	Matriz de ganancias que rige el comportamiento del controlador LQR sobre la dinámica del plano frontal-lateral
$\mathbf{K}_s$	Matriz de ganancias que rige el comportamiento del controlador LQR sobre la dinámica del plano sagital
$L_i$	Longitud del cuerpo $i$
$\mathcal{L}$	Función Lagrangiana
$\boldsymbol{\lambda}$	Vector de multiplicadores de Lagrange
$m_i$	Masa del cuerpo $i$
$\mathbf{M}$	Matriz de masas del sistema de ecuaciones
$\mathbf{M}_c$	Matriz de controlabilidad del sistema
$\mathbf{M}_{V_{C_2}}$	Matriz que expresa la velocidad del punto de contacto entre el cuerpo 2, el vehículo, y el suelo, si se multiplica por el vector de variables generalizadas
$\mathbf{M}_{v_{G_i}}$	Matriz que expresa la velocidad del centro de gravedad del cuerpo $i$ si se multiplica por el vector de variables generalizadas
$\mathbf{M}_{w_i}$	Matriz que expresa la velocidad angular del centro de gravedad del cuerpo $i$ si se multiplica por el vector de variables generalizadas
$N$	Número de cuerpos que conforman el sistema estudiado
$\boldsymbol{\omega}_i$	Vector de velocidad angular del cuerpo $i$
$\Omega$	Valor de la velocidad angular de referencia del vehículo
$\mathcal{P}_i$	Contribución del cuerpo $i$ a la energía potencial total del sistema
$\phi_2$	Desplazamiento angular del centro de gravedad del monociclo respecto a la dirección $\vec{OX}'$
$\phi_5$	Desplazamiento angular relativo del centro de gravedad del torso del usuario respecto a la dirección $\vec{OX}_4$ , tomando como el origen de coordenadas a la cadera
$\psi_2$	Desplazamiento angular del centro de gravedad del monociclo respecto a la dirección $\vec{OZ}_1$
$Pot^*(\boldsymbol{\tau})$	Potencia virtual que ejerce un par $\boldsymbol{\tau}$
$Pot_{inst}$	Potencia instantánea asociada al control del sistema $\mathbf{q}$

Vector de coordenadas generalizadas del modelo

$\tilde{\mathbf{q}}$	Vector de coordenadas generalizadas incrementales del modelo
$\dot{\mathbf{q}}$	Vector de velocidades generalizadas del modelo
$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$	Vector de velocidades generalizadas incrementales del modelo
$\ddot{\mathbf{q}}$	Vector de aceleraciones generalizadas del modelo
$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}$	Vector de aceleraciones generalizadas incrementales del modelo
$\mathbf{q}^0$	Vector de coordenadas generalizadas de referencia del modelo
$\dot{\mathbf{q}}^0$	Vector de velocidades generalizadas de referencia del modelo
$\mathbf{q}_f$	Vector de variables generalizadas del modelo contenidas en el plano frontal-lateral del vehículo
$\mathbf{q}_s$	Vector de variables generalizadas del modelo contenidas en el plano sagital del vehículo
$q_i^*$	Variable generalizada virtual
$\mathbf{q}_f^*$	Vector de variables generalizadas controlables del modelo contenidas en el plano frontal-lateral del vehículo
$\mathbf{q}_s^*$	Vector de variables generalizadas controlables del modelo contenidas en el plano sagital del vehículo
$\mathbf{Q}$	Matriz de ponderación, que rige el comportamiento del controlador LQR, que define el seguimiento de las variables generalizadas respecto a la referencia
$\mathbf{Q}_f$	Matriz de ponderación, que rige el comportamiento del controlador LQR, que define el seguimiento de las variables generalizadas, contenidas en el plano frontal-lateral del vehículo, respecto a la referencia
$\mathbf{Q}_s$	Matriz de ponderación, que rige el comportamiento del controlador LQR, que define el seguimiento de las variables generalizadas, contenidas en el plano sagital del vehículo, respecto a la referencia
$\mathbf{Q}^{NC}$	Vector de fuerzas generalizadas
$\mathbf{R}$	Matriz de ponderación, que rige el comportamiento del controlador LQR, que define el esfuerzo de control
$\mathbf{R}_f$	Matriz de ponderación, que rige el comportamiento del controlador LQR, que define el esfuerzo de control contenido en el plano frontal-lateral del vehículo
$\mathbf{R}_s$	Matriz de ponderación, que rige el comportamiento del controlador LQR, que define el esfuerzo de control contenido en el plano sagital del vehículo
$\mathbf{r}_{C_i}$	Vector de posición del punto de contacto entre el cuerpo $i-1$ y el cuerpo $i$ , respecto al sistema de referencia global
$\mathbf{r}_{G_i}$	Vector de posición del centro de gravedad del cuerpo $i$ , respecto al sistema de referencia global

$\mathbf{r}_{GC_i}$	Vector que define la posición relativa del centro de gravedad respecto al punto de contacto entre el cuerpo i-1 y el cuerpo i, definiéndose en el sistema de referencia local del cuerpo i
$\mathbf{r}_O$	Vector de posición del punto O del cuerpo k, respecto al sistema de referencia global
$\mathbf{r}_P$	Vector de posición del punto P del cuerpo k, respecto al sistema de referencia global
$\dot{\mathbf{r}}_P$	Vector de velocidad del punto P del cuerpo, respecto al sistema de referencia global
$\dot{\mathbf{r}}_O$	Vector de velocidad del punto O del cuerpo, respecto al sistema de referencia global
$\tilde{\mathbf{R}}$	Matriz de rotación entre el sistema de referencia global, $\langle X_1, Y_1, Z_1 \rangle$ , y el plano que contiene el movimiento del vehículo, $\langle X'', Y'', Z'' \rangle$
$R_i$	Radio del cuerpo i
$\mathbf{R}_{k1}$	Matriz de giro que relaciona el sistema de referencia local, definido en el cuerpo k, y el sistema de referencia global
$\mathbf{R}_{ji}$	Matriz de giro que relaciona el sistema de referencia local del cuerpo j y el sistema de referencia local del cuerpo i
$\mathbf{S}$	Matriz que modela las condiciones no holonómicas dentro del sistema de ecuaciones
$\boldsymbol{\tau}_c$	Par ejercido por el torso del usuario sobre la cadera, según el sistema de referencia local del cuerpo 4
$\boldsymbol{\tau}_m$	Par motor ejercido por el pie sobre el centro de gravedad del monociclo, en la dirección $\vec{OY}_2$
$\boldsymbol{\tau}_t$	Par ejercido por las piernas del usuario sobre el tobillo, en torno a la dirección $\vec{OY}_3$
$\boldsymbol{\tau}_{c_y}$	Par ejercido por el torso del usuario sobre la cadera en la dirección $\vec{OY}_4$ del sistema de coordenadas local del cuerpo 4
$\boldsymbol{\tau}_{c_x}$	Par ejercido por el torso del usuario sobre la cadera en la dirección $\vec{OX}_4$ del sistema de coordenadas local del cuerpo 4
$\theta_2$	Desplazamiento angular del centro de gravedad del monociclo respecto a la dirección $\vec{OY}_2$ , tomando como el origen de coordenadas el centro de gravedad del vehículo
$\theta_3$	Desplazamiento angular relativo del centro de gravedad del pie respecto a la dirección $\vec{OY}_2$ , tomando como el origen de coordenadas el centro de gravedad del vehículo
$\theta_4$	Desplazamiento angular relativo del centro de gravedad de la pierna del usuario respecto a la dirección $\vec{OY}_3$ , tomando como el origen de coordenadas el tobillo
$\theta_5$	Desplazamiento angular relativo del centro de gravedad del torso del usuario respecto a la dirección $\vec{OY}_4$ , tomando como el origen de coordenadas a la cadera
$\mathbf{u}$	Vector de variables de control del sistema

$\mathbf{u}_f$	Vector de variables de control del modelo contenidas en el plano frontal-lateral del vehículo
$\mathbf{u}_s$	Vector de variables de control del modelo contenidas en el plano sagital del vehículo
$\mathbf{v}_{C_2}$	Vector de velocidad del punto de contacto entre el cuerpo 2, el monociclo, y el suelo
$\mathbf{v}_{G_i}$	Vector de velocidad del centro de gravedad del cuerpo i
$\mathbf{W}_i$	Matriz antisimétrica que define la velocidad angular del cuerpo i
$W_{k(i,j)}$	Denota el valor correspondiente a la posición de la matriz $W_k$ cuya fila es i y la columna es j
$W^*(\boldsymbol{\tau})$	Trabajo virtual que ejerce un par $\boldsymbol{\tau}$
$x_C$	Desplazamiento traslacional del punto de contacto entre el suelo y el monociclo en la dirección $\vec{OX}''$
$\dot{x}_C$	Velocidad traslacional del punto de contacto entre el suelo y el monociclo en la dirección $\vec{OX}''$
$\langle X' Y' Z' \rangle$	Sistema de referencia intermedio, el cual define el movimiento angular de guiñada del vehículo
$\langle X'' Y'' Z'' \rangle$	Sistema de referencia intermedio, el cual define el movimiento angular de guiñada y de alabeo del monociclo, cuyo origen de coordenadas se fija en el punto de contacto entre la rueda del monociclo y el suelo
$\langle X_i Y_i Z_i \rangle$	Sistema de referencia local del cuerpo i
$y_C$	Desplazamiento traslacional del punto de contacto entre el suelo y el monociclo en la dirección $\vec{OY}''$
$\dot{y}_C$	Velocidad traslacional del punto de contacto entre el suelo y el monociclo en la dirección $\vec{OY}''$



# 1 Introducción

---

La viabilidad de disponer de un medio de transporte alternativo y complementario a los tradicionales resulta una propuesta innovadora y funcional, especialmente en entornos urbanos densos, ya que posibilita desplazamientos rápidos sin dependencia de estacionamiento ni afectación por el tráfico congestionado. Debido a estas ventajas, dispositivos como *hoverboards*, *segways* y *patinetes eléctricos*, conocidos comúnmente como VMP, han ganado creciente popularidad en el mercado, lo que ha impulsado en los últimos años la evolución hacia el monociclo eléctrico como una tendencia emergente en la movilidad personal, planteándose un balance eficaz entre la contribución motora y el esfuerzo humano, optimizando el rendimiento y la experiencia de uso.



**Figura 1.1** Ilustración del monociclo eléctrico comercial *Inmotion V8* (extraído de [1]).

El origen de estos vehículos encuentra una de sus primeras referencias en el diseño de la bicicleta de rueda alta, desarrollado por James Starley en 1866, un prototipo caracterizado por una gran rueda delantera acompañada de una rueda posterior de menor diámetro.

Esta configuración inspiró el diseño del primer monociclo, pues al alcanzar velocidades elevadas, la rueda posterior de menor tamaño tendía a elevarse, lo cual requería que el usuario mantuviera el equilibrio únicamente sobre la rueda frontal. A partir de este principio, el monociclo evolucionó, integrando progresivamente sistemas motorizados hasta los modelos eléctricos contemporáneos, denominados monociclos eléctricos o monociclos autoequilibrados, que constituyen el objeto central de este proyecto.

Por ello, se ha diseñado un monociclo eléctrico basado en la integración de un monociclo convencional con un sistema de asistencia inteligente. Este sistema busca maximizar la comodidad del usuario y reducir el esfuerzo mediante la combinación de un impulso eléctrico y la eliminación de la necesidad de pedaleo constante. Esta asistencia adicional no solo aligera la carga física del usuario, sino que también refuerza su estabilidad y seguridad durante la conducción.

En cuanto a la seguridad, un aspecto clave en el diseño de cualquier medio de transporte actual, se realiza un análisis exhaustivo de la estabilidad dinámica operativa del vehículo. Este estudio se enfoca en reducir la probabilidad de accidentes, minimizando la dependencia de la pericia del rider.

Además, la estabilidad y el control del monociclo se fundamentan en un modelo de control que regula el movimiento de forma autónoma. Este sistema de control emula la función de un autopiloto y es regulado directamente por las respuestas biomecánicas del usuario, en las que el cerebro actúa como controlador principal mientras que los músculos funcionan como actuadores. La finalidad es asegurar que el monociclo responda adecuadamente a las necesidades del usuario, optimizando tanto la estabilidad como la maniobrabilidad, proporcionando una experiencia de conducción precisa y segura.

La tecnología de autoequilibrio no solo caracteriza a nuestro prototipo de monociclo eléctrico, sino que también se ha implementado en numerosos vehículos de movilidad personal (VMP) disponibles actualmente.

En el presente proyecto, el monociclo se configura con una única rueda, lo cual determina que su maniobrabilidad dependa en gran medida de la inclinación corporal del usuario, eliminando de este modo la necesidad de dispositivos de control manual, como podría ser un manillar, ilustrándose en la Figura 1. Este diseño contribuye a la compactación del vehículo, optimizando tanto su almacenamiento como su operatividad en espacios urbanos reducidos.

## 1.1 Estado del arte

Como se mencionó anteriormente, el autoequilibrio constituye una tecnología común en estos VMP, si bien su aplicación es limitada fuera de este campo específico.

Diversas investigaciones en la literatura técnica abordan el estudio de modelos de sistemas multicuerpo análogos, basados en un movimiento pendular bidimensional que caracteriza el monociclo como un péndulo invertido doblemente articulado sobre una base móvil de desplazamiento unidireccional, conocido como *SPDI*.

Un ejemplo destacado se encuentra en el artículo [20], donde se modela la cinemática de un robot articulado rígido de dos eslabones y dos grados de libertad. En este modelo, los ángulos que forman los eslabones respecto a la vertical se tratan como variables generalizadas, designadas  $q_i$ , y son controladas a través de ecuaciones no lineales de Euler-Lagrange. Este estudio incorpora las fuerzas originadas por flexiones y deflexiones en las uniones cinemáticas del robot, específicamente en las articulaciones del codo y hombro. En este análisis, se sigue un enfoque análogo, pero considerando más grados de libertad.

El artículo en cuestión se enfoca en la respuesta del sistema bajo determinadas leyes de control, mientras que en nuestro caso, la ley de control dependerá de la retroalimentación de los errores en el seguimiento del Set-Point de las variables de estado, es decir, de la perturbación generada por los ajustes posturales del usuario para mantener el equilibrio de forma dinámica.

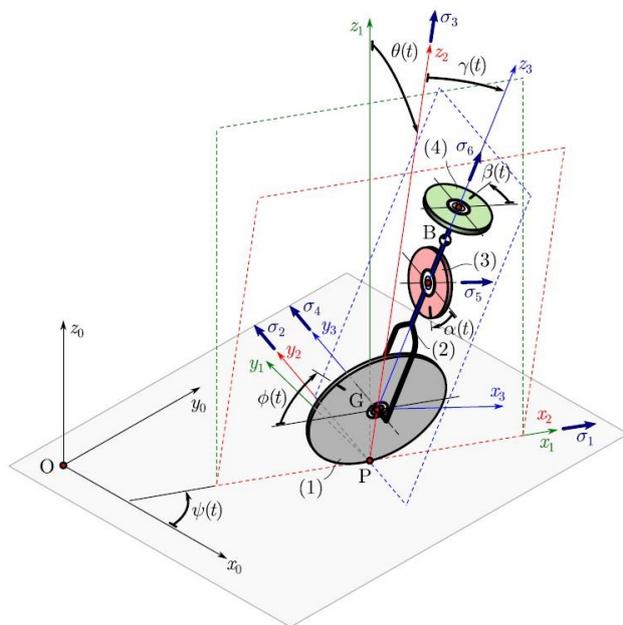


**Figura 1.2** Uso de un VMP. Extraído de [2].

Por otro lado, existen estudios en los cuales los eslabones y articulaciones del robot se modelan como elementos flexibles en lugar de rígidos, y se asume que dichas deformaciones generan vibraciones, siendo las uniones modeladas mediante resortes torsionales. Este enfoque se aborda en [13], mientras que el análisis comparativo entre modelos de articulaciones y eslabones rígidos y flexibles se desarrolla en [23, 13].

Adicionalmente, varios estudios sobre péndulos invertidos con desplazamiento traslacional exploran diversas técnicas de control, como el regulador cuadrático lineal (LQR) [29, 22, 15], o comparan múltiples estrategias de control, incluyendo redes neuronales [10, 15]. Otros análisis se centran en controladores difusos implementados mediante la técnica de Mamdani [24].

Los estudios sobre control de autobalanceo se profundizan en [15] y en el proyecto de grado [17], en el cual se presenta un diagrama de bloques en el que el lazo de control externo se conecta en cascada con el interno.



**Figura 1.3** Representación gráfica del modelado de un monociclo autónomo extraído del artículo [11].

Cabe señalar que la mayoría de las referencias citadas emplean el enfoque metodológico de Lagrange. No obstante, también existen estudios de control no lineal, como se muestra en [21], donde se aborda el caso de un brazo robótico con articulaciones flexibles y eslabones rígidos.

Por último, se encuentran ejemplos tridimensionales, como el modelo *SPDI* en [14], que sigue en la línea de lo mencionado anteriormente, sin embargo hay referencias en la literatura que se asemejan mucho más al estudio que se realiza en este proyecto, como es el caso del artículo [9], donde se realiza un modelado cinemático de un monociclo autónomo a partir de la *aproximación de Appell*, el cual se mueve en una trayectoria bidimensional sin deslizamiento. Al igual que se considerará en este estudio, se pretende controlar la dirección a partir de un controlador, pero en el artículo se hace uso de un controlador no lineal complejo, partiendo de la función de Lyapunov, consiguiendo resultados muy buenos.

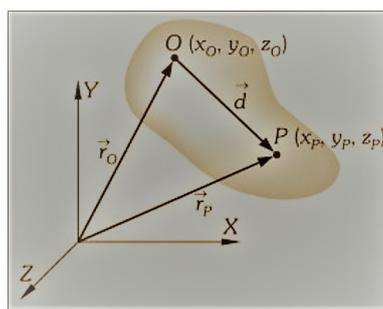
Además de este artículo, en la literatura hay estudios más completos que también analizan la dinámica del sistema, como es el caso del artículo [11], reflejado en la Figura 1.3, donde se realiza una simulación más realista al modelar las actuaciones pese a no modelar tampoco al conductor. Aquí también se hace uso de técnicas sofisticadas de control como Lyapunov y modelos adaptativos, para poder controlar también la orientación.



## 2 Consideraciones e hipótesis

A continuación, se conformará el modelado matemático que será el objeto del presente estudio, el cual se focalizará en un monociclo eléctrico conducido por un usuario, estando constituido por cuatro subsistemas. Pero antes de realizar el detalle del modelado, se narrarán las consideraciones e hipótesis que se han asumido.

Cada uno de estos subsistemas se considerará como un *sólido rígido*, explicado conceptualmente como el sistema de partículas en el cual dos puntos cualesquiera que formen parte del mismo, como podrían ser el punto O y el punto P de la Figura 2.1, permanecerán equidistantes en todo momento [18], es decir, la variable vectorial  $d$  tendrá un módulo constante e invariante en el tiempo, imponiendo pues que sean constantes tanto la morfología como el volumen del cuerpo. En otras palabras, esta sería la consecuencia de asumir que la deformación que sufre el sólido es tan pequeña que se podría considerar despreciable en el análisis del movimiento de este, es por este motivo por lo que se realiza esta hipótesis [12].



**Figura 2.1** Sólido rígido indeformable, obteniendo un módulo del vector  $d$  constante e invariante en el tiempo. Imagen tomada de *Física General* [12].

El vehículo de movilidad personal se modelará como un *sistema multicuerpo*, definido como una recopilación de cuerpos o componentes, cuya cinemática queda restringida según las conexiones que unen estos subsistemas[25], las cuales se describirán más adelante. Añadiendo el hecho de que se deben contemplar múltiples salidas y entradas, provocando la denominación del sistema matemático como *multivariable*.

Antes de comenzar con el formalismo matemático, se han de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- La caracterización geométrica del sistema se ha realizado a partir de la integración del monociclo, extraído de [3], y del usuario, extraído de [4].
- La numeración de los sistemas de coordenadas de referencia utilizados se corresponde a la siguiente estructura, quedando ilustrada en la representación del sistema a analizar 3.1:

1. El sistema de referencia global inercial, situado en el suelo  $\langle X_1 Y_1 Z_1 \rangle$ .
2. El sistema de referencia intermedio  $\langle X' Y' Z' \rangle$ , el cual define el movimiento angular de guiñada del monociclo.
3. El sistema de referencia intermedio, el cual define el movimiento de guiñada y el movimiento de alabeo del vehículo, cuyo origen de coordenadas se fija en el punto de contacto entre la rueda del monociclo y el suelo  $\langle X'' Y'' Z'' \rangle$ .
4. El sistema de referencia local del cuerpo 2, es decir, el monociclo  $\langle X_2 Y_2 Z_2 \rangle$ , será representado con el color rojo.
5. El sistema de referencia local del cuerpo 3, identificando así los pies del rider  $\langle X_3 Y_3 Z_3 \rangle$  (hasta el tobillo), será ilustrado con el color blanco.
6. El sistema de referencia local del cuerpo 4, lo que equivale al tren inferior del cuerpo del usuario  $\langle X_4 Y_4 Z_4 \rangle$  (desde el tobillo hasta la cadera), modelado con el color naranja.
7. El sistema de referencia local del cuerpo 5, aludiendo de esta forma al tren superior del usuario  $\langle X_5 Y_5 Z_5 \rangle$  (desde la cadera hasta la cabeza), será caracterizado con el color rosa.

Destacándose que los sistemas de referencia locales, ubicados en cada uno de los 4 componentes que conforman el modelado del sistema, tendrán su origen ubicado en el centro de gravedad de los mismos, tomando la hipótesis inicial de que coincidirá con el centro geométrico de estos.

- Los grados de libertad que definirán el movimiento de cada cuerpo del sistema a modelar son:
  - **Cuerpo 2:** El monociclo, modelado matemáticamente como un disco delgado macizo que gira sin deslizamiento ni rozamiento, tendrá 5 grados de libertad, quedando bloqueado únicamente el correspondiente al desplazamiento en la dirección  $\vec{0Z}$ , caracterizando la perpendicular al plano de referencia, siendo en este caso el suelo. Por tanto, las variables que se utilizarán serán:
    - \*  $x_c$ : desplazamiento traslacional del punto de contacto entre el suelo y el monociclo en la dirección  $\vec{0X''}$ .
    - \*  $y_c$ : desplazamiento traslacional del punto de contacto entre el suelo y el vehículo en la dirección  $\vec{0Y''}$ .
    - \*  $\psi_2$ : desplazamiento angular del centro de gravedad del monociclo respecto a la dirección  $\vec{0Z}_1$ . Esta variable representa la guiñada del disco.
    - \*  $\phi_2$ : desplazamiento angular del centro de gravedad del vehículo respecto a la dirección  $\vec{0X}'$ . Esta variable representa la inclinación del disco.
    - \*  $\theta_2$ : desplazamiento angular del centro de gravedad del monociclo respecto a la dirección  $\vec{0Y}_2$ . Esta variable refleja el giro propio del vehículo.
  - **Cuerpo 3:** el primer eslabón, considerado con forma cilíndrica en los cálculos, tendrá un único grado de libertad, ya que se une al anterior subsistema por medio de un par cinemático de rotación situado en el centro de gravedad del monociclo, el cual corresponde a la rotación del pie respecto a la dirección  $\vec{0Y}_2$  del sistema de referencia local del monociclo, (se denotará mediante la variable relativa  $\theta_3$ ).

- **Cuerpo 4:** el segundo eslabón, representado como una barra cilíndrica, como el cuerpo anterior, tendrá un único grado de libertad, a causa de que también se une al anterior cuerpo a través de un par cinemático de rotación, quien alude a la rotación de las piernas respecto a la dirección  $\vec{0Y}_3$  del sistema de referencia local del pie, pero desplazando el origen de coordenadas al tobillo, ya que en esta articulación será el lugar donde se coloca el par mencionado con anterioridad (se denotará mediante la variable  $\theta_4$ ).
- **Cuerpo 5:** el tercer y último eslabón también es caracterizado matemáticamente con forma cilíndrica. En esta ocasión se contemplan dos grados de libertad, debido a que se une al anterior sólido por medio de un par esférico que tiene restringida la rotación respecto a su eje longitudinal local, reflejando las rotaciones del torso respecto a la dirección  $\vec{0Y}_4$  y  $\vec{0X}_4$  del sistema de referencia local de las piernas, pero trasladando el origen de coordenadas a la cadera, ya que es donde se sitúa esta articulación (se denotarán mediante las variables relativas  $\theta_5$  y  $\phi_5$ , respectivamente).

Cabe destacar que se impondrá la condición de no deslizamiento de la rueda del vehículo, lo cual se modelará como una restricción holónoma y se explicará más adelante en detalle.

Tras conocer los grados de libertad que se tienen en cuenta, destacándose que considerarán positivos tanto los momentos como los desplazamientos angulares antihorarios, se define el vector de variables generalizadas con referencia inercial tal y como se expone:

$$\mathbf{q} = (x_C, y_C, \psi_2, \phi_2, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \phi_5, \theta_5)^T \quad (2.1)$$

- Se considerarán los siguientes momentos ejercidos para controlar el movimiento:
  - $\tau_m$ : el par motor ejercido por el pie sobre el centro de gravedad del monociclo, en la dirección  $\vec{0Y}_2$  del sistema de referencia local del cuerpo 2.
  - $\tau_t$ : el par ejercido por las piernas del usuario sobre el tobillo, en torno a la dirección  $\vec{0Y}_3$  del sistema de referencia local del cuerpo 3.
  - $\tau_c$ : el par ejercido por el torso del usuario sobre la cadera. Teniendo que descomponerse para el desarrollo matemático en dos momentos, siendo cada uno de estos caracterizado por una dirección de referencia, en la dirección  $\vec{0Y}_4$  se ilustrará  $\tau_{c_y}$  y en la  $\vec{0X}_4$  será  $\tau_{c_x}$ , basado en el sistema de coordenadas local del cuerpo 4.

Para el desarrollo matemático se definirá el vector de variables de control de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = (\tau_m, \tau_t, \tau_{c_x}, \tau_{c_y})^T \quad (2.2)$$

En la Figura 2.2 puede apreciarse una representación gráfica en la que se identifican numerosas variables a las que se hará alusión a lo largo del proyecto. Se destaca en rojo la numeración que seguirán los sólidos que conforman el sistema multicuerpo, así como en amarillo los puntos de contacto de interés entre los cuerpos, siendo estas las articulaciones que son definidas mediante los puntos  $C_i$ .

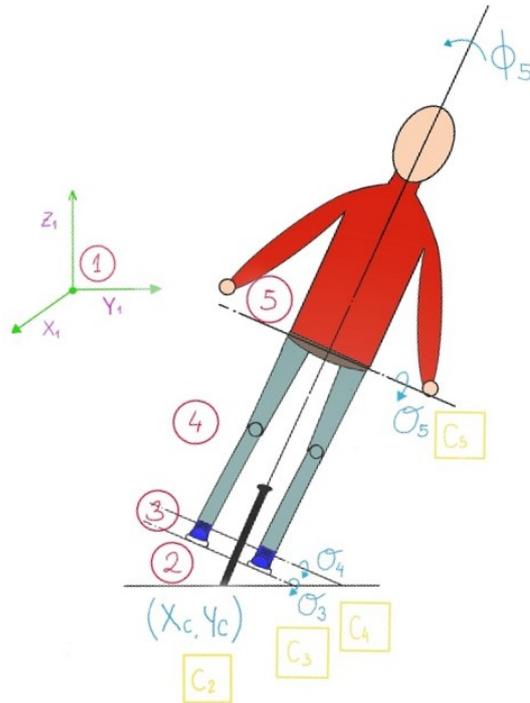
Además, en la Figura 2.2 se definen algunas de las variables generalizadas que se desglosan en la Ecuación 2.1. Para mejorar la comprensión del sistema, se profundizará en el modelado del monociclo, el segundo cuerpo, así como de las variables que rigen su comportamiento cinemático en la representación de la Figura 3.2.

Por último, se debe analizar el número de grados de libertad que tendrá el mecanismo,  $G$ , atendiendo a la ecuación de Grübler [28], la cual se expresa de la siguiente forma:

$$G = 3 \cdot (N - 1) - 2 \cdot C_I - C_{II} \quad (2.3)$$

Siendo  $N$  el número de cuerpos considerados,  $C_I$  el número de pares de clase I (en este caso serían únicamente los cinemáticos de rotación, ya que son los que permiten un grado de libertad del movimiento relativo) y  $C_{II}$  el número de pares de clase II (en esta ocasión sería la unión de la cadera, porque permite dos grados de libertad del movimiento relativo). Concluyendo en que el mecanismo tendrá cuatro grados de libertad, siendo este el motivo por el que se han declarado cuatro variables de control.

Por otro lado, siguiendo las especificaciones técnicas del monociclo *Inmotion V8* (extraído de [1]), la particularización de las variables que son necesarias para caracterizar el comportamiento mecánico del sistema a analizar en este estudio se exponen en la Tabla 2.1.



**Figura 2.2** Representación gráfica a mano alzada del modelado del sistema multicuerpo.

**Tabla 2.1** Parámetros que caracterizan el comportamiento biomecánico del sistema.

Magnitud	Símbolo	Valor	Unidades
Masa del cuerpo 2	$m_2$	15	kg
Masa del cuerpo 3	$m_3$	2	kg
Masa del cuerpo 4	$m_4$	35	kg
Masa del cuerpo 5	$m_5$	40	kg
Radio del cuerpo 2	$R_2$	25	cm
Radio del cuerpo 3	$R_3$	3	cm
Radio del cuerpo 4	$R_4$	15	cm
Radio del cuerpo 5	$R_5$	20	cm
Longitud del cuerpo 3	$L_3$	20	cm
Longitud del cuerpo 4	$L_4$	85	cm
Longitud del cuerpo 5	$L_5$	75	cm

### 3 Modelado cinemático

---

En primer lugar, se modelará matemáticamente cada uno de los cuerpos que compone el sistema, con el objetivo de calcular todas las variables que dictan la cinemática y dinámica de cada uno de los sólidos.

El procedimiento para realizar este cálculo se podría dividir en varios pasos que parten de lo mostrado en la Figura 2.1. Habiéndose extraído de la referencia [25].

Siguiendo la nomenclatura,  $\mathbf{r}_P$  representaría el vector posición del punto P del cuerpo ilustrado, k, respecto al sistema de referencia global. Análogamente, se denota la posición del punto O como  $\mathbf{r}_O$ , sin embargo, el vector que ilustra la posición del punto P respecto al punto O,  $\mathbf{d}$ , está definido en un sistema de referencia local de dicho cuerpo. Estas variables se relacionan tal y como se refleja en la ecuación 3.1.

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_O + \mathbf{R}_{k1} \mathbf{d} \quad (3.1)$$

Considerando que la matriz  $\mathbf{R}_{k1}$  ilustra la orientación del sólido tomando como referencia al sistema de referencia inercial (nótese que se toma la inercial por ser la referencia de los vectores:  $\mathbf{r}_P$  y  $\mathbf{r}_O$ ), por tanto,  $\mathbf{R}_{k1}$  define la matriz de giro que relaciona el sistema de referencia local y el global.

Derivando la expresión 3.1 respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_O + \dot{\mathbf{R}}_{k1} \mathbf{d} \quad (3.2)$$

Es sabido que la matriz de giro es ortogonal, pudiendo entonces aplicarse la siguiente propiedad matemática:

$$\mathbf{R}_{k1}^T \mathbf{R}_{k1} = \mathbf{R}_{k1} \mathbf{R}_{k1}^T = \mathbf{I} \quad (3.3)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación 3.3, se consigue la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{R}}_{k1}^T \mathbf{R}_{k1} + \mathbf{R}_{k1}^T \dot{\mathbf{R}}_{k1} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Transformando la ecuación 3.4, se alcanza la siguiente relación:

$$\dot{\mathbf{R}}_{k1}^T \mathbf{R}_{k1} = -\mathbf{R}_{k1}^T \dot{\mathbf{R}}_{k1} = \mathbf{W}_k \implies \boxed{\dot{\mathbf{R}}_{k1} = \mathbf{R}_{k1} \mathbf{W}_k} \quad (3.5)$$

Sustituyendo ahora esta última relación en la ecuación 3.2, se reformula de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_O + \mathbf{R}_{k1} \mathbf{W}_k \mathbf{d} \quad (3.6)$$

Donde  $\mathbf{W}$  denota la matriz antisimétrica de la velocidad angular del cuerpo,  $\boldsymbol{\omega}$ , de forma que:

$$\mathbf{W}_k = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_{k(3)} & \boldsymbol{\omega}_{k(2)} \\ \boldsymbol{\omega}_{k(3)} & 0 & -\boldsymbol{\omega}_{k(1)} \\ -\boldsymbol{\omega}_{k(2)} & \boldsymbol{\omega}_{k(1)} & 0 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{\omega}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{k(3,2)} \\ \mathbf{W}_{k(1,3)} \\ \mathbf{W}_{k(2,1)} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

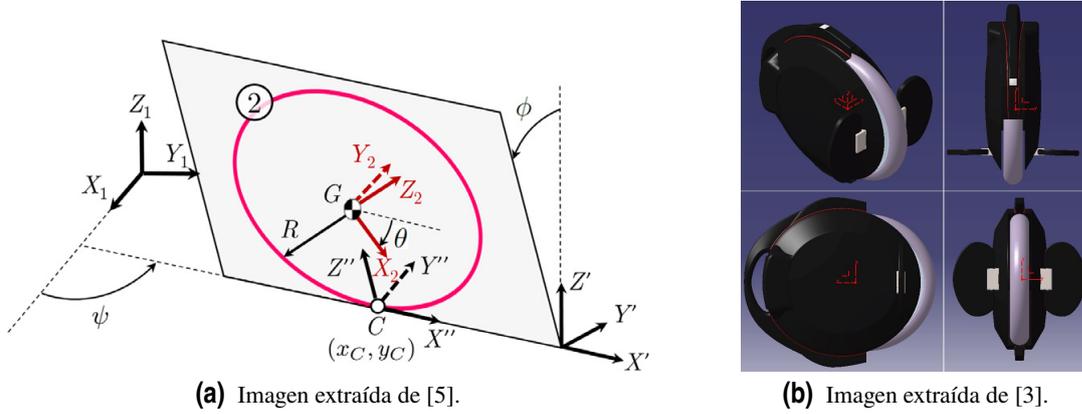
Una vez hecho esto, se procederá a mostrar el modelado de las ecuaciones que rigen el sistema completo, para posteriormente analizar su estabilidad.



**Figura 3.1** Representación gráfica del modelado del sistema completo.

### 3.1 Cuerpo 2

Al considerar una caracterización del sólido tal y como se ilustra en la Figura 3.2, pueden enumerarse cuatro sistemas de referencia que se han de contemplar: el sistema inercial o cuerpo 1, denotado como  $\langle X_1, Y_1, Z_1 \rangle$ , los sistemas de referencia intermedios,  $\langle X', Y', Z' \rangle$  y  $\langle X'', Y'', Z'' \rangle$ , además del que representa al vehículo,  $\langle X_2, Y_2, Z_2 \rangle$ .



(a) Imagen extraída de [5].

(b) Imagen extraída de [3].

**Figura 3.2** Representación geométrica del monociclo eléctrico.

Teniendo en cuenta que los desplazamientos angulares son positivos si se producen en sentido antihorario, la orientación de estos sistemas de referencia respecto al inercial se reflejará mediante las matrices que rigen las rotaciones elementales.

Por otro lado, se define el vector que refleja el punto de contacto inicial entre el monociclo y el suelo como  $\mathbf{r}_{C_2}$ , expresado de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}_{C_2} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

A partir de este vector, puede ilustrarse la expresión que dicta la relación del mismo con el vector que rige la posición del centro de gravedad del monociclo,  $\mathbf{r}_{G_2}$ , siendo la siguiente:

$$\mathbf{r}_{G_2} = \mathbf{r}_{C_2} + \mathbf{r}_{GC_2} \quad (3.9)$$

Donde  $\mathbf{r}_{GC_2}$  es calculado de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}_{GC_2} = \tilde{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Siendo  $\tilde{\mathbf{R}}$  definida como la matriz de rotación intermedia, entre el sistema de referencia global,  $\langle X_1, Y_1, Z_1 \rangle$ , y el plano que contiene el movimiento del vehículo,  $\langle X'', Y'', Z'' \rangle$ . Considerando la secuencia de rotación 3-1-2, se consigue la siguiente ecuación:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \cos(\psi_2) & -\sin(\psi_2) & 0 \\ \sin(\psi_2) & \cos(\psi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_2) & -\sin(\phi_2) \\ 0 & \sin(\phi_2) & \cos(\phi_2) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Una vez se ha obtenido la posición del centro de gravedad del cuerpo, puede calcularse el vector velocidad de dicho cuerpo,  $\mathbf{v}_{G_2}$ , expresándolo en ese mismo punto de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{G_2} = \frac{\partial \mathbf{r}_{G_2}}{\partial t} = \mathbf{M}_{V_{G_2}} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.12)$$

Para seguir caracterizando la cinemática del sólido, se ha de calcular la velocidad angular de este, lo cual se hará calculando la matriz de rotación entre los sistemas de referencia 1 y 2, dando lugar a la siguiente expresión:

$$\mathbf{R}_{21} = \tilde{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \sin(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

A partir de esta matriz resultante, se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\mathbf{W}_2 = \left| \mathbf{R}_{21}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{21}}{\partial \psi_2} \right| \dot{\psi}_2 + \left| \mathbf{R}_{21}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{21}}{\partial \phi_2} \right| \dot{\phi}_2 + \left| \mathbf{R}_{21}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{21}}{\partial \theta_2} \right| \dot{\theta}_2 \quad (3.14)$$

De forma que el vector velocidad angular vendrá caracterizado por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{R}_{21} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{2(3,2)} \\ \mathbf{W}_{2(1,3)} \\ \mathbf{W}_{2(2,1)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{21} \mathbf{M}_{\omega_2} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.15)$$

Donde  $\mathbf{W}_{2(i,j)}$  denota el valor correspondiente a la posición de la matriz  $\mathbf{W}_2$  cuya fila es  $i$  y la columna es  $j$ . Pudiendo expresarse también de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{R}_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \left( \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \psi_2} \right)_{(3,2)} & \left( \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \psi_2} \right)_{(1,3)} & \left( \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \psi_2} \right)_{(2,1)} \\ \left( \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \phi_2} \right)_{(3,2)} & \left( \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \phi_2} \right)_{(1,3)} & \left( \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \phi_2} \right)_{(2,1)} \\ \left( \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_2} \right)_{(3,2)} & \left( \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_2} \right)_{(1,3)} & \left( \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_2} \right)_{(2,1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (3.16)$$

Por otro lado, la velocidad en el punto de contacto entre el monociclo y el suelo,  $\mathbf{v}_{C_2}$ , se calcularía de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_{C_2} = \mathbf{v}_{G_2} - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{GC_2} = \mathbf{M}_{V_{C_2}} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.17)$$

Considerando que el monociclo tendrá una forma de disco delgado, se podría definir la matriz de inercia,  $\mathbf{I}_2$ , expresada en el sistema de referencia local de este cuerpo como se muestra a continuación, lo cual se extrae de [8]:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Una vez se han obtenido el valor de las variables que rigen el movimiento del cuerpo, se ha de calcular su contribución al cálculo energético del sistema multicuerpo, de forma que la energía cinética y la potencial, respectivamente, equivalen a:

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( m_2 \mathbf{M}_{V_{G_2}}^T \mathbf{M}_{V_{G_2}} + \mathbf{M}_{\omega_2}^T \mathbf{I}_2 \mathbf{M}_{\omega_2} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.19)$$

$$\mathcal{P}_2 = m_2 \mathbf{g} \mathbf{r}_{G_2} \quad (3.20)$$

### 3.2 Cuerpo 3

Si se tiene en cuenta que el punto de contacto entre el cuerpo 2 y el cuerpo 3 es igual al centro de gravedad del cuerpo 2, es decir,  $\mathbf{r}_{C_3} = \mathbf{r}_{G_2}$ , se puede calcular la posición del centro de gravedad como:

$$\mathbf{r}_{G_3} = \mathbf{r}_{C_3} + \mathbf{r}_{GC_3} \quad (3.21)$$

Siendo  $\mathbf{r}_{GC_3}$  calculado a partir de la matriz de rotación entre los sistemas de referencia 1 y 3 (definiéndose  $L_i$  como la semilongitud del eslabón i):

$$\mathbf{r}_{GC_3} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{31} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Una vez se ha obtenido la posición del centro de gravedad del pie, puede calcularse el vector velocidad de dicho cuerpo,  $\mathbf{v}_{G_3}$ , expresándolo en ese mismo punto de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{G_3} = \frac{\partial \mathbf{r}_{G_3}}{\partial t} = \mathbf{M}_{V_{G_3}} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.23)$$

Para seguir caracterizando la cinemática del cuerpo, se ha de calcular la velocidad angular de este, dando lugar a la siguiente expresión:

$$\mathbf{R}_{31} = \mathbf{R}_{21} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{32}) & 0 & \sin(\theta_{32}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_{32}) & 0 & \cos(\theta_{32}) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Donde:

$$\theta_{32} = \theta_3 - \theta_2 \quad (3.25)$$

A partir de esta matriz resultante, se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\mathbf{W}_3 = \left| \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \psi_2} \right| \dot{\psi}_2 + \left| \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \phi_2} \right| \dot{\phi}_2 + \left| \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_2} \right| \dot{\theta}_2 + \left| \mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_3} \right| \dot{\theta}_3 \quad (3.26)$$

De forma que el vector velocidad angular vendrá caracterizado por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{R}_{31} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{3(3,2)} \\ \mathbf{W}_{3(1,3)} \\ \mathbf{W}_{3(2,1)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{31} \mathbf{M}_{\omega_3} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.27)$$

Pudiendo expresarse también de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{R}_{31} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \psi_2}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \psi_2}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \psi_2}\right)_{(2,1)} \\ \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \phi_2}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \phi_2}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \phi_2}\right)_{(2,1)} \\ \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_2}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_2}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_2}\right)_{(2,1)} \\ \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_3}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_3}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{31}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{31}}{\partial \theta_3}\right)_{(2,1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (3.28)$$

Considerando que el pie tendrá una forma cilíndrica, se podría definir la matriz de inercia,  $\mathbf{I}_3$ , expresada en el sistema de referencia local de este cuerpo como se muestra a continuación, lo cual se extrae de [8]:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{1}{12} m_3 \left[ L_3^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3R_3^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \quad (3.29)$$

Tras calcular el valor de las variables que rigen el movimiento del cuerpo, se ha de calcular su contribución al cálculo energético del sistema multicuerpo, de forma que:

$$\mathcal{K}_3 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( m_3 \mathbf{M}_{V_{G_3}}^T \mathbf{M}_{V_{G_3}} + \mathbf{M}_{\omega_3}^T \mathbf{I}_3 \mathbf{M}_{\omega_3} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.30)$$

$$\mathcal{P}_3 = m_3 \mathbf{g} \mathbf{r}_{G_3} \quad (3.31)$$

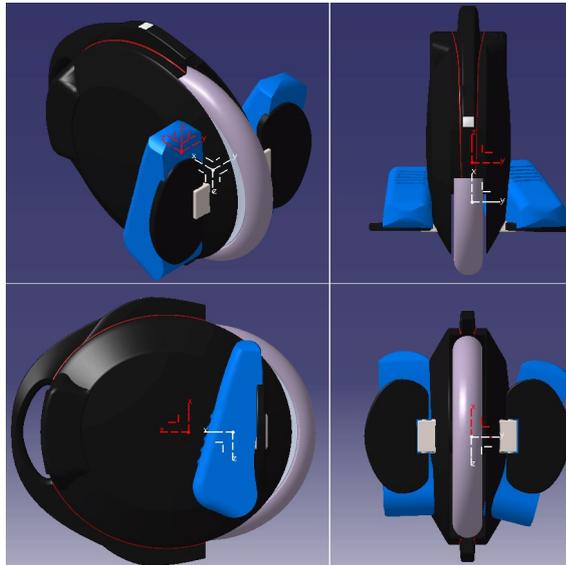


Figura 3.3 Representación gráfica del modelado del sistema: Cuerpos 2 y 3.

### 3.3 Cuerpo 4

Tras considerar que el punto de contacto entre el cuerpo 3 y el cuerpo 4 es el extremo del cuerpo 3, es decir:

$$\mathbf{r}_{C_4} = \mathbf{r}_{C_3} + 2\mathbf{r}_{GC_3} \quad (3.32)$$

Se puede calcular la posición del centro de gravedad como:

$$\mathbf{r}_{G_4} = \mathbf{r}_{C_4} + \mathbf{r}_{GC_4} \quad (3.33)$$

Siendo  $\mathbf{r}_{GC_4}$  calculado a partir de la matriz de rotación entre los sistemas de referencia 1 y 4:

$$\mathbf{r}_{GC_4} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{41} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_4 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Una vez se ha obtenido la posición del centro de gravedad de las piernas, puede calcularse el vector velocidad de dicho cuerpo,  $\mathbf{v}_{G_4}$ , expresándolo en ese mismo punto de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{G_4} = \frac{\partial \mathbf{r}_{G_4}}{\partial t} = \mathbf{M}_{V_{G_4}} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.35)$$

Para seguir caracterizando la cinemática del cuerpo, se ha de calcular la velocidad angular de este, dando lugar a la siguiente expresión:

$$\mathbf{R}_{41} = \mathbf{R}_{31} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{43}) & 0 & \sin(\theta_{43}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_{43}) & 0 & \cos(\theta_{43}) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Donde:

$$\theta_{43} = \theta_4 - \theta_3 \quad (3.37)$$

A partir de esta matriz resultante, se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\mathbf{W}_4 = \left| \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \psi_2} \right| \dot{\psi}_2 + \left| \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \phi_2} \right| \dot{\phi}_2 + \left| \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_2} \right| \dot{\theta}_2 + \quad (3.38)$$

$$+ \left| \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_3} \right| \dot{\theta}_3 + \left| \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_4} \right| \dot{\theta}_4 \quad (3.39)$$

De forma que el vector velocidad angular vendrá caracterizado por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \mathbf{R}_{41} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{4(3,2)} \\ \mathbf{W}_{4(1,3)} \\ \mathbf{W}_{4(2,1)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{41} \mathbf{M}_{\omega_4} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.40)$$

Pudiendo expresarse también de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \mathbf{R}_{41} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \psi_2} \right)_{(3,2)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \psi_2} \right)_{(1,3)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \psi_2} \right)_{(2,1)} \\ \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \phi_2} \right)_{(3,2)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \phi_2} \right)_{(1,3)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \phi_2} \right)_{(2,1)} \\ \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_2} \right)_{(3,2)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_2} \right)_{(1,3)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_2} \right)_{(2,1)} \\ \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_3} \right)_{(3,2)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_3} \right)_{(1,3)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_3} \right)_{(2,1)} \\ \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_4} \right)_{(3,2)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_4} \right)_{(1,3)} & \left( \mathbf{R}_{41}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{41}}{\partial \theta_4} \right)_{(2,1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (3.41)$$

Considerando que el objeto tendrá una forma cilíndrica, se podría definir la matriz de inercia,  $\mathbf{I}_4$ , expresada en el sistema de referencia local de este cuerpo como se muestra a continuación, lo cual se extrae de [8]:

$$\mathbf{I}_4 = \frac{1}{12} m_4 \left[ L_4^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 R_4^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \quad (3.42)$$

Tras hallar el valor de las variables que rigen el movimiento del sólido, se ha de calcular su contribución al cálculo energético del sistema multicuerpo, de forma que:

$$\mathcal{K}_4 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( m_4 \mathbf{M}_{V_{G_4}}^T \mathbf{M}_{V_{G_4}} + \mathbf{M}_{\omega_4}^T \mathbf{I}_4 \mathbf{M}_{\omega_4} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.43)$$

$$\mathcal{P}_4 = m_4 \mathbf{g} \mathbf{r}_{G_4} \quad (3.44)$$

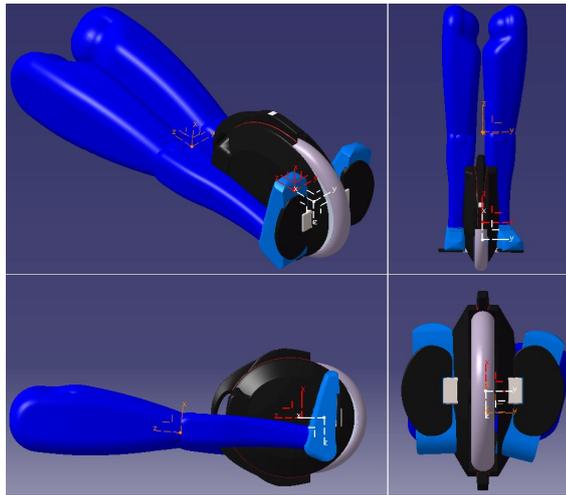


Figura 3.4 Representación gráfica del modelado del sistema: Cuerpos 2, 3 y 4.

### 3.4 Cuerpo 5

Al imponer que el punto de contacto entre el cuerpo 4 y el cuerpo 5 es el extremo del cuerpo 4, es decir:

$$\mathbf{r}_{C_5} = \mathbf{r}_{C_4} + 2\mathbf{r}_{GC_4} \quad (3.45)$$

Se puede calcular la posición del centro de gravedad como:

$$\mathbf{r}_{G_5} = \mathbf{r}_{C_5} + \mathbf{r}_{GC_5} \quad (3.46)$$

Siendo  $\mathbf{r}_{GC_5}$  calculado a partir de la matriz de rotación entre los sistemas de referencia 1 y 5:

$$\mathbf{r}_{GC_5} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{51} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_5 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Una vez se ha obtenido la posición del centro de gravedad del tronco, puede calcularse el vector velocidad de dicho cuerpo,  $\mathbf{v}_{G_5}$ , expresándolo en ese mismo punto de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{G_5} = \frac{\partial \mathbf{r}_{G_5}}{\partial t} = \mathbf{M}_{V_{G_5}} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.48)$$

Para seguir caracterizando la cinemática del cuerpo, se ha de calcular la velocidad angular de este, dando lugar a la siguiente expresión:

$$\mathbf{R}_{51} = \mathbf{R}_{41} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{52}) & -\sin(\phi_{52}) \\ 0 & \sin(\phi_{52}) & \cos(\phi_{52}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{54}) & 0 & \sin(\theta_{54}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_{54}) & 0 & \cos(\theta_{54}) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Donde:

$$\theta_{54} = \theta_5 - \theta_4 \quad (3.50)$$

$$\phi_{52} = \phi_5 - \phi_2 \quad (3.51)$$

A partir de esta matriz resultante, se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\mathbf{W}_5 = \left| \mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \psi_2} \right| \dot{\psi}_2 + \left| \mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \phi_2} \right| \dot{\phi}_2 + \left| \mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_2} \right| \dot{\theta}_2 + \left| \mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_3} \right| \dot{\theta}_3 + \quad (3.52)$$

$$+ \left| \mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_4} \right| \dot{\theta}_4 + \left| \mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \phi_5} \right| \dot{\phi}_5 + \left| \mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_5} \right| \dot{\theta}_5 \quad (3.53)$$

De forma que el vector velocidad angular vendrá caracterizado por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\omega}_5 = \mathbf{R}_{51} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{5(3,2)} \\ \mathbf{W}_{5(1,3)} \\ \mathbf{W}_{5(2,1)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{51} \mathbf{M}_{\omega_5} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.54)$$

Además, se puede expresar matricialmente siguiendo la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\omega}_5 = \mathbf{R}_{51} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \psi_2}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \psi_2}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \psi_2}\right)_{(2,1)} \\ \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \phi_2}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \phi_2}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \phi_2}\right)_{(2,1)} \\ \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_2}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_2}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_2}\right)_{(2,1)} \\ \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_3}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_3}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_3}\right)_{(2,1)} \\ \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_4}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_4}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_4}\right)_{(2,1)} \\ \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \phi_5}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \phi_5}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \phi_5}\right)_{(2,1)} \\ \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_5}\right)_{(3,2)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_5}\right)_{(1,3)} & \left(\mathbf{R}_{51}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{51}}{\partial \theta_5}\right)_{(2,1)} \end{pmatrix}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (3.55)$$

Considerando que el sólido tendrá una forma cilíndrica, se podría definir la matriz de inercia,  $\mathbf{I}_5$ , expresada en el sistema de referencia local de este cuerpo como se muestra a continuación, lo cual se extrae de [8]:

$$\mathbf{I}_5 = \frac{1}{12} m_5 \left[ L_5^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3R_5^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \quad (3.56)$$

Tras hallar el valor de las variables que rigen el movimiento del cuerpo, se ha de calcular su contribución al cálculo energético del sistema multicuerpo, de forma que:

$$\mathcal{K}_5 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( m_5 \mathbf{M}_{V_{G_5}}^T \mathbf{M}_{V_{G_5}} + \mathbf{M}_{\omega_5}^T \mathbf{I}_5 \mathbf{M}_{\omega_5} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.57)$$

$$\mathcal{P}_5 = m_5 \mathbf{g} \mathbf{r}_{G_5} \quad (3.58)$$

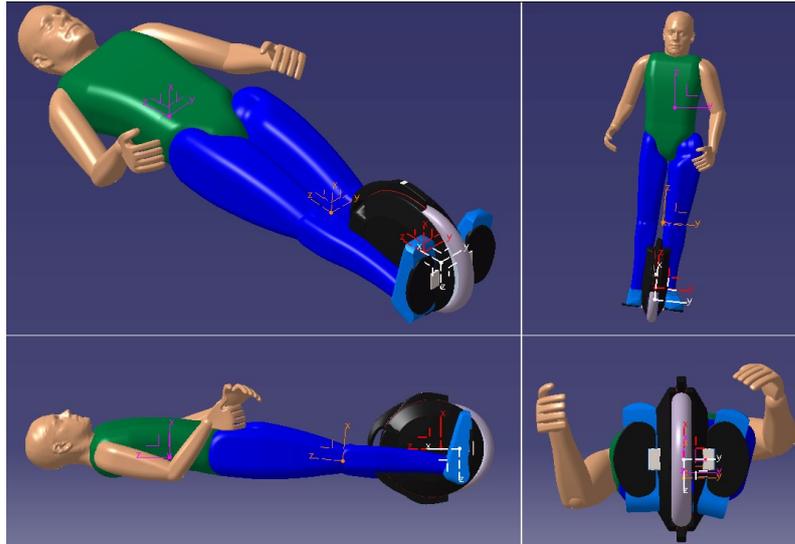


Figura 3.5 Representación gráfica del modelado del sistema: Cuerpos 2, 3, 4 y 5.

## 4 Modelado energético

---

El modelado energético se realizará a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange las cuales pueden demostrarse aplicando la *Segunda Ley de Newton*, de forma que al compararlo se consigue simplificar el análisis [26]. Este modelo se rige a través de este sistema de ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^{NC} \quad (4.1)$$

En la cual se ha de enfatizar que el término  $\mathcal{L}$  alude a la función Lagrangiana, determinada como la variación entre la energía cinética del mecanismo y la energía potencial del mismo [26], tal y como se aprecia en la ecuación (4.2).

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} \quad (4.2)$$

De forma que el cálculo de estas variables energéticas se regirán a través de la siguientes igualdades ilustradas en la ecuación (4.3), tomando como referencia el centro de gravedad de cada sólido que forme el mecanismo a estudiar.

$$\begin{cases} \mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{j=1}^{N^{\circ} \text{Cuerpos}} \left( m_j \mathbf{M}_{V_{G_j}}^T \mathbf{M}_{V_{G_j}} + \mathbf{M}_{\omega_j}^T \mathbf{I}_j \mathbf{M}_{\omega_j} \right) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathcal{P} = \sum_{j=1}^{N^{\circ} \text{Cuerpos}} \left( m_j \mathbf{g} \mathbf{r}_{G_j} \right) \end{cases} \quad (4.3)$$

También se ha de enfatizar la determinación del vector de fuerzas generalizadas,  $\mathbf{Q}^{NC}$ , el cual tiene una componente por cada variable generalizada, contemplando cualquier fuerza y/o momento no conservativo que actúa en el movimiento, quedando determinado mediante la ecuación (4.4). Nótese también que las variables virtuales se denotarán con el superíndice “\*” a lo largo del documento.

$$\mathbf{Q}^{NC} = \sum_{j=1}^{N^{\circ} \text{Fuerzas}} \mathbf{F}_{apli_j}^{NC} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j^*}{\partial q_i^*} + \sum_{k=1}^{N^{\circ} \text{Momentos}} \mathbf{M}_{apli_k}^{NC} \cdot \frac{\partial \theta_k^*}{\partial r_k^*} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k^*}{\partial q_i^*} \quad (4.4)$$

Típicamente, para simplificar el cálculo, se aplica el concepto de trabajo virtual ejercido por estas fuerzas y/o momentos externos [16], recalando que las fuerzas internas de reacción internas no ejercen trabajo virtual [28]. Al multiplicar los dos miembros de la Ecuación 4.4 por el término  $\delta q_i^*$  se obtiene la expresión (4.5), entendiendo conceptualmente esta magnitud como el trabajo que realizaría una determinada fuerza o momento externo, en el caso hipotético en el que se produjese

un desplazamiento infinitesimal en la dirección que contiene al vector [12].

$$\sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{Variables}} Q_i^{NC} \delta q_i^* = \sum_{j=1}^{N^{\circ} \text{Fuerzas}} \delta W^*(\mathbf{F}_{apli_j}^{NC}) + \sum_{k=1}^{N^{\circ} \text{Momentos}} \delta W^*(\mathbf{M}_{apli_k}^{NC}) \quad (4.5)$$

También se suele aplicar el concepto de potencia virtual, calculada de forma análoga a lo expresado con anterioridad, pero se ha de multiplicar ambos miembros de la ecuación por velocidades virtuales angulares y lineales, respectivamente [28], tal y como se muestra en la ecuación (4.6).

$$\sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{Variables}} Q_i^{NC} \dot{q}_i^* = \sum_{j=1}^{N^{\circ} \text{Fuerzas}} Pot^*(\mathbf{F}_{apli_j}^{NC}) + \sum_{k=1}^{N^{\circ} \text{Momentos}} Pot^*(\mathbf{M}_{apli_k}^{NC}) \quad (4.6)$$

Para modelar este sistema de ecuaciones es necesario proceder al análisis cinemático del sistema multicuerpo, determinando así la función Lagrangiana,  $\mathcal{L}$ , y, posteriormente, las fuerzas generalizadas que intervienen,  $\mathbf{Q}^{NC}$ .

Tras definir la cinemática que dicta el movimiento del sistema multicuerpo, en la Sección 3, es necesario describir le modelado matemático del que se hará uso particularmente en este proyecto.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{M}_{V_{C_2}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}^{NC} \\ \mathbf{M}_{V_{C_2}} \dot{\mathbf{q}} = - \frac{\partial (\mathbf{M}_{V_{C_2}} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - 2\beta \mathbf{M}_{V_{C_2}} \dot{\mathbf{q}} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Tal y como se refleja en el sistema de ecuaciones 4.7, se han contemplado restricciones no holónomas, imponiéndose de esta manera la condición de no deslizamiento, es decir, que la velocidad del vehículo en el punto de contacto con el suelo sea nula. Lo que se traduce en la siguiente expresión:

$$\mathbf{C}_{nh}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}_{V_{C_2}} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.8)$$

Además de esto, en la misma ecuación en la que se ha impuesto esta restricción, se hará uso de las ecuaciones de Baumgarte [7], mediante las cuales se busca asegurar el cumplimiento de la restricción anteriormente mencionada, ya que mejora la precisión numérica de la resolución de las ecuaciones diferenciales, consiguiendo así aumentar la estabilidad de la solución numérica.

Por otro lado, el vector que contiene las fuerzas generalizadas a considerar resultaría de lo expuesto en la Ecuación 4.4. De forma que, evaluando pues las fuerzas y momentos considerados en el análisis, se puede mostrar el resultado de la potencia virtual, hallada a partir de la Ecuación 4.6, quedando la siguiente expresión:

$$Pot^*(\boldsymbol{\tau}_m) + Pot^*(\boldsymbol{\tau}_t) + Pot^*(\boldsymbol{\tau}_{c_x}) + Pot^*(\boldsymbol{\tau}_{c_y}) = \boldsymbol{\tau}_m (\delta \dot{\theta}_2^* - \delta \dot{\theta}_3^*) + \boldsymbol{\tau}_t (\delta \dot{\theta}_3^* - \delta \dot{\theta}_4^*) + \boldsymbol{\tau}_{c_y} (\delta \dot{\theta}_4^* - \delta \dot{\theta}_5^*) + \boldsymbol{\tau}_{c_x} (\delta \dot{\phi}_2^* - \delta \dot{\phi}_5^*) \quad (4.9)$$

En segundo lugar, se procede a verificar el cálculo aplicando la Ecuación 4.5, donde se obtiene el trabajo virtual, debiendo concluir con el mismo valor de la fuerza generalizada en ambos casos.

$$W^*(\boldsymbol{\tau}_m) + W^*(\boldsymbol{\tau}_t) + W^*(\boldsymbol{\tau}_{c_x}) + W^*(\boldsymbol{\tau}_{c_y}) = \boldsymbol{\tau}_m (\delta \theta_2^* - \delta \theta_3^*) + \boldsymbol{\tau}_t (\delta \theta_3^* - \delta \theta_4^*) + \boldsymbol{\tau}_{c_y} (\delta \theta_4^* - \delta \theta_5^*) + \boldsymbol{\tau}_{c_x} (\delta \phi_2^* - \delta \phi_5^*) \quad (4.10)$$

De forma que al particularizar en este análisis se obtendría el siguiente vector:

$$\mathbf{Q}^{NC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\tau}_{c_x} \\ \boldsymbol{\tau}_m \\ \boldsymbol{\tau}_t - \boldsymbol{\tau}_m \\ \boldsymbol{\tau}_{c_y} - \boldsymbol{\tau}_t \\ -\boldsymbol{\tau}_{c_x} \\ -\boldsymbol{\tau}_{c_y} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Antes de proceder a linealizar las ecuaciones, se detalla el cambio de nomenclatura que se va a realizar, para que sea más cómoda su interpretación, ya que se expresará un procedimiento con matrices con dependencias genéricas. Esto se ilustra en la siguientes ecuaciones. En primer lugar, se detalla la matriz que introducirá el efecto de las restricciones holónomas.

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_{V_{C_2}} \quad (4.12)$$

Por otro lado, si se analiza en detalle la primera ecuación perteneciente al sistema de ecuaciones 4.7, puede apreciarse que el único término que depende de la segunda derivada del vector de variables generalizadas es el primero, pudiendo desglosarse de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.13)$$

Reagrupando entonces los términos de la primera ecuación perteneciente al sistema de ecuaciones 4.7, se obtiene que:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Z}(\mathbf{q}) \mathbf{u} \quad (4.14)$$

Siendo el vector  $\mathbf{u}$  definido como se refleja en la Ecuación 2.2, se considera además:

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{Q}^{NC} = \mathbf{Z}(\mathbf{q}) \mathbf{u} \quad (4.16)$$

Simplificando el término derecho de la Ecuación 4.14, aplicando que  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Z}(\mathbf{q}) \mathbf{u} \quad (4.17)$$

De forma análoga, englobando en una única función el término derecho de la segunda ecuación que se ha presentado en el sistema de ecuaciones 4.7, se obtiene que.

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 2\beta \mathbf{M}_{V_{C_2}} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.18)$$



## 5 Linealización de las ecuaciones del movimiento

---

En esta sección se mostrará la metodología que se sigue en el presente estudio para linealizar el sistema de ecuaciones. Esto se realizará partiendo de lo expuesto en el modelado energético que rige el comportamiento del sistema multicuerpo, lo cual se expresa en la Sección 4. Donde el término de Baumgarte se excluirá, ya que en la intención de introducirlo es la de mejorar la estabilidad del método numérico de integración de las ecuaciones no lineales.

Siendo conocido un comportamiento de referencia conocido de las variables generalizadas, su derivada y las variables de control, se hace uso de la expansión en serie de Taylor, tal y como se expone en el artículo [5], resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}^0)\ddot{\mathbf{q}}^0 + \mathbf{S}(\mathbf{q}^0)^T \boldsymbol{\lambda}^0 &= \mathbf{H}(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) + \mathbf{Z}(\mathbf{q}^0) \mathbf{u}^0 \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^0)\ddot{\mathbf{q}}^0 &= -\mathbf{d}(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) \end{cases} \quad (5.1)$$

Lo que podría reflejarse en forma matricial tal y como se ilustra en la expresión 5.2. La cual reagrupa el sistema de ecuaciones definido por la Ecuación 4.17 y la Ecuación 4.18, para facilitar las operaciones algebraicas, desembocando en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}) & \mathbf{S}(\mathbf{q})^T \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Z}(\mathbf{q}) \mathbf{u} \\ -\mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.2)$$

Como los vectores de variables que se acaban de mencionar son referencias conocidas ( $\boldsymbol{\lambda}^0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}^0$  y  $\mathbf{q}^0$ ), las variables restantes pueden obtenerse aplicando la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^0 \\ \boldsymbol{\lambda}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}^0) & \mathbf{S}(\mathbf{q}^0)^T \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^0) & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) + \mathbf{Z}(\mathbf{q}^0) \mathbf{u}^0 \\ -\mathbf{d}(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.3)$$

Teniendo en cuenta que la linealización implica conceptualmente que las variables serán incrementales de aquí en adelante, pueden definirse tal y como se refleja a continuación:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \tilde{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^0 + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}^0 + \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^0 + \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}^0 + \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{cases} \quad (5.4)$$

Tras definir los valores nominales, se continuará realizando la expansión en serie de Taylor de las ecuaciones dinámicas ilustradas en el sistema de ecuaciones 4.7, concluyendo en:

$$\begin{aligned}
& \left( \mathbf{M}(\mathbf{q}^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial q_j} \Big|_0 \tilde{q}_j + \dots \right) (\ddot{\mathbf{q}}^0 + \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \\
& + \left( \mathbf{S}^T(\mathbf{q}^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{S}^T(\mathbf{q})}{\partial q_j} \Big|_0 \tilde{q}_j + \dots \right) (\boldsymbol{\lambda}^0 + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = \\
& = \left( \mathbf{Z}(\mathbf{q}^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{q})}{\partial q_j} \Big|_0 \tilde{q}_j + \dots \right) (\mathbf{u}^0 + \tilde{\mathbf{u}}) + \\
& + \mathbf{H}(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_j} \Big|_0 \tilde{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} \Big|_0 \dot{\tilde{q}}_j
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Donde  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial q} \Big|_0$  y  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}} \Big|_0$  denotan  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial q} \Big|_{q^0, \dot{q}^0}$  y  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}} \Big|_{q^0, \dot{q}^0}$ , respectivamente.

Truncando la expansión expuesta de forma que se retengan los términos que corresponden al primer orden se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}(\mathbf{q}^0) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\partial (\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^0)}{\partial \mathbf{q}} \Big|_0 \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{S}^T(\mathbf{q}^0) \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial (\mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \mathbf{q}} \Big|_0 \tilde{\mathbf{q}} = \\
& = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \Big|_0 \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_0 \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\partial (\mathbf{Z}(\mathbf{q}) \mathbf{u}^0)}{\partial \mathbf{q}} \Big|_0 \tilde{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Análogamente, se procederá a realizar la expansión en serie de Taylor del resto de expresiones definidas en el sistema de la ecuaciones 4.7, dando lugar a:

$$\begin{aligned}
& \left( \mathbf{S}(\mathbf{q}^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{q})}{\partial q_j} \Big|_0 \tilde{q}_j + \dots \right) (\ddot{\mathbf{q}}^0 + \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \mathbf{d}(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) + \\
& + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_j} \Big|_0 \tilde{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} \Big|_0 \dot{\tilde{q}}_j + \dots = 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Reteniendo de nuevo los términos de primer orden se llega a la siguiente relación:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}^0) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\partial (\mathbf{S}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^0)}{\partial \mathbf{q}} \Big|_0 \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \Big|_0 \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_0 \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0 \tag{5.8}$$

Agrupando ahora lo expuesto en las ecuaciones 5.6 y 5.8, puede expresarse en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}^0) & \mathbf{S}(\mathbf{q}^0)^T \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}^0) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \dot{\tilde{\lambda}} \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\mathbf{q}^0) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} + \\
& + \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{q}) \mathbf{u}^0}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 - \left. \frac{\partial (\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^0)}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 - \left. \frac{\partial (\mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 & \left. \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_0 \\ \left. - \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 - \left. \frac{\partial (\mathbf{S}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^0)}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 & \left. - \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{pmatrix} \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Tomando en consideración que las ecuaciones que rigen las variaciones de los multiplicadores de Lagrange no contribuyen al análisis de estabilidad del sistema, se despreciarán por simplicidad.

De esta forma, la matriz  $\mathbf{A}$  y la matriz  $\mathbf{B}$ , mostradas en la Sección A, vendrán definidas tal que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Donde  $\mathbf{0}_n$  es una matriz cuadrada nula de dimensión  $n$ ,  $\mathbf{I}_n$  es la matriz identidad de la misma dimensión y  $n$  es la dimensión del vector de variables generalizadas. Las submatrices  $\mathbf{A}_{21}$  y  $\mathbf{A}_{22}$  se definen como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{21} &= \mathbf{M}_0^{-1} \left( (\mathbf{I}_n - \mathbf{S}_0^T \mathcal{T}_0 \mathbf{S}_0 \mathbf{M}_0^{-1}) \left( \left. \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{q}) \mathbf{u}^0}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 - \left. \frac{\partial (\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^0)}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left. \frac{\partial (\mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 \right) - \mathbf{S}_0^T \mathcal{T}_0 \left( \left. \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 + \left. \frac{\partial (\mathbf{S}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^0)}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 \right) \right), \\
\mathbf{A}_{22} &= \mathbf{M}_0^{-1} \left( (\mathbf{I}_n - \mathbf{S}_0^T \mathcal{T}_0 \mathbf{S}_0 \mathbf{M}_0^{-1}) \left. \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_0 - \mathbf{S}_0^T \mathcal{T}_0 \left. \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_0 \right), \\
\mathbf{B}_2 &= \mathbf{M}_0^{-1} \left( (\mathbf{I}_n - \mathbf{S}_0^T \mathcal{T}_0 \mathbf{S}_0 \mathbf{M}_0^{-1}) \mathbf{Z}(\mathbf{q}^0) \right)
\end{aligned} \quad (5.11)$$

Donde  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(\mathbf{q}^0)$ ,  $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}(\mathbf{q}^0)$  y  $\mathcal{T}_0 = (\mathbf{S}_0 \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{S}_0^T)^{-1}$ .

Orientando la representación matricial a la teoría de estados expuesta en el apéndice A, se hará uso del vector de estado que se muestra a continuación:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Para terminar de definir el sistema de control con el procedimiento narrado, se asumirá que la matriz  $\mathbf{D}$  es nula y de la misma dimensión que la matriz  $\mathbf{B}$ , además de que la matriz  $\mathbf{C}$  se define como la identidad, de la misma dimensión que la matriz  $\mathbf{A}$ .

Procediendo a la particularización del estudio realizado para obtener el valor de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , es necesario mostrar el punto de expansión de referencia seleccionado.

Partiendo de la hipótesis de que el usuario está con el tronco superior erguido y pilotando el vehículo siguiendo una trayectoria de referencia rectilínea y uniforme, se consigue obtener un vector de estado de referencia como se indica a continuación:

$$\mathbf{q}^0 = \begin{cases} x_C^0 = \Omega R_2 t \\ y_C^0 = 0 \\ \psi_2^0 = 0^\circ \\ \phi_2^0 = 0^\circ \\ \theta_2^0 = \Omega t \\ \theta_3^0 = -80^\circ \\ \theta_4^0 = 21.64^\circ \\ \phi_5^0 = 0^\circ \\ \theta_5^0 = 0^\circ \end{cases} \quad (5.13)$$

Teniendo en cuenta que lo deseable en este tipo de vehículos es seguir un movimiento equilibrado, se debe considerar lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{q}}^0 = \begin{cases} \dot{x}_C^0 = \Omega R_2 \\ \dot{y}_C^0 = 0 \\ \dot{\psi}_2^0 = 0 \\ \dot{\phi}_2^0 = 0 \\ \dot{\theta}_2^0 = \Omega \\ \dot{\theta}_3^0 = 0 \\ \dot{\theta}_4^0 = 0 \\ \dot{\phi}_5^0 = 0 \\ \dot{\theta}_5^0 = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Donde se resalta que el valor de la posición angular del tronco inferior se obtiene al imponer que estos vectores de referencia cumplan las ecuaciones que dictan la cinemática y dinámica que describe el sistema multicuerpo, habiéndose expresado en el sistema de ecuaciones 5.2. Por ende, la segunda derivada del vector de estados debe ser nula.

Además de esto, se considerará una velocidad angular del cuerpo 2 constante e igual al equivalente a una velocidad de crucero del movimiento típico de 18 km/h, o lo que es lo mismo, 5 m/s.

Por otro lado, al introducir los valores de referencia que se acaban de mostrar en el modelo matemático de ecuaciones, el cual rige la cinemática y dinámica del sistema, se obtiene que los multiplicadores de Lagrange son nulos, algo que era esperable dado que su interpretación física reside en las fuerzas de reacción laterales al vehículo que aseguran el cumplimiento de la restricción no holónoma, es decir, la condición de no deslizamiento. Además de esto resulta los pares que ejerce el ser humano para mantener a trayectoria de referencia se resumen en el vector de actuaciones que se muestra a continuación:

$$\mathbf{u}^0 = \begin{cases} \tau_{mot}^0 = 0 \\ \tau_{tob}^0 = 134.29 \text{ Nm} \\ \tau_{cad_x}^0 = 0 \\ \tau_{cad_y}^0 = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

## 6 Formulación del controlador

---

Antes de hallar un controlador formalmente, se ha de analizar la controlabilidad del sistema, siendo necesario para ello hallar la matriz de controlabilidad, lo cual resulta de aplicar la Ecuación D.-2. Tras esto, se podría conocer el número total de variables de estado incontrolables, mediante la Ecuación D.-3.

Conceptualmente, se está comprobando que se puede aplicar cualquier señal de control, entendiéndola sin restricciones, que consigue llevar a las variables de estado desde un valor inicial a otro final en un tiempo finito.

Haciendo uso del vector de estado definido en la Ecuación 2.1, se llega a la conclusión de que se tienen 6 variables que no son controlables, por lo que se puede afirmar que el movimiento del sistema estudiado es naturalmente incontrolable.

Tras este resultado, al analizar los valores de la matriz de estados, lo cual se ilustra en la siguiente ecuación, se observa que las variables que rigen el movimiento del sistema contenido en el plano sagital del monociclo está desacoplado del movimiento frontal (incluyendo aquí también al transversal).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 18.65 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.54 & 0.30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.01 & 36.84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.58 & 41.41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Por esta razón, se seguirá un procedimiento para cada movimiento, el cual consta de los siguientes pasos:

- En primer lugar, se definirán dos submatrices, las cuales corresponderán a la dinámica sagital y frontal, siendo respectivamente denominadas como:  $\mathbf{A}_s$  y  $\mathbf{A}_f$ .
- En segundo lugar, se analiza la controlabilidad de ambos subsistemas, de forma que, en caso de que se observe que alguna variable no es controlable, se definirá una submatriz, denominadas:  $\mathbf{A}_{\text{mov}}^*$ , donde el subíndice “mov” denotará la dinámica a la que corresponde. Imponiendo que dicha matriz de menor dimensión sea cuadrada y dependa únicamente de variables que sean controlables.
- En tercer lugar, se procederá a calcular el controlador, uno para cada movimiento si es que procede, de forma que sea capaz de conseguir que dichas variables sean estables ante una perturbación que las saque levemente del punto de equilibrio.
- En cuarto lugar, se recalculan las nuevas submatrices de estado, las cuales incorporan ya la acción de su respectivo controlador, si aplica.
- En quinto lugar, se extienden las submatrices resultantes, de forma que se incluyen las variables que previamente se habían considerado incontrolables, es decir, se amplía la dimensión de las matrices que se acaban de calcular para que se incluyan las ecuaciones excluidas inicialmente, sobre las cuales afectará indirectamente la acción del controlador.
- Tras esto, se procede a integrar numéricamente la solución obtenida de cada dinámica de forma independiente.

Siguiendo con lo enunciado, se reagruparán los términos de la matriz  $\mathbf{A}$  para obtener ambos comportamientos por separado, es decir, se crearán dos submatrices:  $\mathbf{A}_s$  y  $\mathbf{A}_f$ . Las cuales se muestran a continuación, junto a las matrices de entrada,  $\mathbf{B}_s$  y  $\mathbf{B}_f$ :

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.01 & 36.84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.58 & 41.41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0 & -0.04 \\ 0.75 & -0.02 & -0.20 \\ -0.66 & 0.36 & 0.19 \\ -0.28 & -0.01 & 0.20 \\ 0.10 & 0 & -0.27 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18.65 & 0 & 0 & 0.54 & 0.30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.10 \\ 0.09 \\ -0.28 \end{pmatrix}$$

De igual manera, se crearán los siguientes subvectores de estado:  $\mathbf{q}_s$  y  $\mathbf{q}_f$  y de entrada:  $\mathbf{u}_s$  y  $u_f$ :

$$\mathbf{q}_s = \begin{pmatrix} x_C \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \dot{x}_C \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u}_s = \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_f \\ \tau_{c_y} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_f = \begin{pmatrix} y_C \\ \psi_2 \\ \phi_2 \\ \phi_5 \\ \dot{y}_C \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_5 \end{pmatrix} \quad u_f = \tau_{c_x};$$

Aplicando ahora el análisis de controlabilidad de ambas matrices, a partir de la Ecuación D.-2 y la Ecuación D.-3, se obtiene que ambas dinámicas son incontrolables. En concreto, se aprecia que la dinámica contenida en el plano sagital tiene dos estados incontrolables, sin embargo, la dinámica frontal-lateral tiene cuatro. Al observar detalladamente las matrices de estado, se puede intuir cual es esas variables son:  $y_C$ ,  $x_C$ ,  $\psi_2$ ,  $\dot{y}_C$ ,  $\dot{x}_C$  y  $\dot{\psi}_2$ . El razonamiento reside en que las coordenadas que definen el punto de contacto están desacopladas y se obtienen como consecuencia del valor de las otras variables, pero en el caso de la evolución de la guiñada del monociclo, cabe esperar que no sea controlable al no tener un par que permita controlar el giro alrededor del eje  $\vec{0Z}$ , por lo que ante perturbaciones frontal-laterales lo lógico es que el controlador no sea capaz de estabilizar.

Al no obtener una matriz controlable, es necesario subdividir las matrices mostradas anteriormente, con el objetivo de buscar matrices controlables de menor dimensión. Por lo que siguiendo con la hipótesis que se acaba de mencionar, se eliminarán columnas y filas de las matrices originales. En concreto, respecto a la dinámica sagital se eliminará la primera y la sexta fila, además de la primera y la sexta columna, es decir, se elimina la influencia paramétrica de las variables:  $x_C$  y  $\dot{x}_C$ . Sin embargo, respecto a la dinámica frontal se debe mencionar que se eliminan la primera y la quinta fila, además de la primera y la quinta columna, es decir, se extrae la influencia paramétrica de las variables:  $y_C$  y  $\dot{y}_C$ , lo que da lugar a las siguientes matrices:

$$\mathbf{A}_s^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2.96 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.01 & 36.84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.58 & 41.41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_s^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & -0.02 & -0.20 \\ -0.66 & 0.36 & 0.19 \\ -0.28 & -0.01 & 0.20 \\ 0.10 & 0 & -0.27 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_f^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8.71 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18.65 & 0 & 0.54 & 0.30 & 0 \\ 0 & 0 & 23.89 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_f^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.10 \\ 0.09 \\ -0.28 \end{pmatrix}$$

Como se comentaba en el análisis de la controlabilidad, se han eliminado algunas de las variables incontrolables del sistema, por lo que los vectores de estado reducidos de estos movimientos será:

$$\mathbf{q}_s^* = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_f^* = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \phi_2 \\ \phi_5 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_5 \end{pmatrix}$$

Una vez se han identificado la matriz controlable sagital y la matriz incontrolable frontal-lateral reducida, se procede al diseño de dos controladores lineales cuadráticos, los cuales se calculan tal y como se detalla en la Sección B.

## 6.1 Controlador Movimiento Sagital

En primer lugar se abordará la dinámica sagital, de forma que se seleccionaran las siguientes matrices:

$$\mathbf{Q}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación de Riccati, Ecuación D.-5, se obtiene la siguiente matriz de ganancias:

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} -0.77 & -53.28 & -710.35 & -305.33 & -8.10 & -15.54 & -109.83 & -61.44 \\ -0.14 & 20.24 & -392.4 & -165.31 & -1.38 & 30.01 & -71.63 & -33.58 \\ 0.62 & 15.29 & 159.39 & -126.76 & 6.47 & 2.94 & 24.81 & -26.63 \end{pmatrix}$$

Aplicando ahora la Ecuación D.-7 para introducir el efecto del controlador en el sistema, se obtiene la matriz siguiente:

$$\hat{\mathbf{A}}_s^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.70 & 43.54 & 557.90 & 204.30 & 7.34 & 12.90 & 86.07 & 40.29 \\ -0.58 & -34.19 & -321.64 & -118.91 & -6.05 & -21.49 & -51.56 & -23.61 \\ -0.34 & -15.28 & -196.69 & -62.95 & -3.61 & -4.58 & -37 & -12.45 \\ 0.25 & 9.50 & 115.72 & 20.80 & 2.58 & 2.32 & 17.96 & -0.95 \end{pmatrix}$$

A continuación, tras obtener la modificación de la dinámica que rige la planta del sistema reducido, debemos extender la matriz de estudio para contemplar las variables excluidas consideradas inicialmente incontrolables y el lazo de control interno que se acaba de calcular. Esto se traduce en que la planta se construya de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{A}}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{s(6,1)} & A_{s(6,2)} & A_{s(6,3)} & A_{s(6,4)} & A_{s(6,5)} & A_{s(6,6)} & A_{s(6,7)} & A_{s(6,8)} & A_{s(6,9)} & A_{s(6,10)} \\ 0 & \hat{A}_{s(5,1)}^* & \hat{A}_{s(5,2)}^* & \hat{A}_{s(5,3)}^* & \hat{A}_{s(5,4)}^* & 0 & \hat{A}_{s(5,5)}^* & \hat{A}_{s(5,6)}^* & \hat{A}_{s(5,7)}^* & \hat{A}_{s(5,8)}^* \\ 0 & \hat{A}_{s(6,1)}^* & \hat{A}_{s(6,2)}^* & \hat{A}_{s(6,3)}^* & \hat{A}_{s(6,4)}^* & 0 & \hat{A}_{s(6,5)}^* & \hat{A}_{s(6,6)}^* & \hat{A}_{s(6,7)}^* & \hat{A}_{s(6,8)}^* \\ 0 & \hat{A}_{s(7,1)}^* & \hat{A}_{s(7,2)}^* & \hat{A}_{s(7,3)}^* & \hat{A}_{s(7,4)}^* & 0 & \hat{A}_{s(7,5)}^* & \hat{A}_{s(7,6)}^* & \hat{A}_{s(7,7)}^* & \hat{A}_{s(7,8)}^* \\ 0 & \hat{A}_{s(8,1)}^* & \hat{A}_{s(8,2)}^* & \hat{A}_{s(8,3)}^* & \hat{A}_{s(8,4)}^* & 0 & \hat{A}_{s(8,5)}^* & \hat{A}_{s(8,6)}^* & \hat{A}_{s(8,7)}^* & \hat{A}_{s(8,8)}^* \end{pmatrix}$$

Aplicando este desarrollo se obtiene la siguiente matriz:

$$\hat{\mathbf{A}}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.70 & 43.54 & 557.90 & 204.30 & 0 & 7.34 & 12.90 & 86.07 & 40.29 \\ 0 & -0.58 & -34.19 & -321.64 & -118.91 & 0 & -6.05 & -21.49 & -51.56 & -23.61 \\ 0 & -0.34 & -15.28 & -196.69 & -62.95 & 0 & -3.61 & -4.58 & -37 & -12.45 \\ 0 & 0.25 & 9.50 & 115.72 & 20.80 & 0 & 2.58 & 2.32 & 17.96 & -0.95 \end{pmatrix}$$

Tras calcular esta matriz, ya se podría integrar numéricamente las ecuaciones lineales controladas, para proceder a evaluar las prestaciones del controlador del sistema ante perturbaciones pequeñas. No sin antes mostrar los polos del subsistema resultante, para comprobar que ahora se tiene un sistema estable:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -26.35 \\ -0.10 \\ -0.72 \\ -4.83 + 1.91i \\ -4.83 - 1.91i \\ -5.69 \\ -4.58 \\ -5 \end{pmatrix}$$

## 6.2 Controlador Movimiento Frontal-Lateral

Teniendo en cuenta que este movimiento es naturalmente inestable e incontrolable, se procederá a realizar el diseño de un estabilizador que se mantenga estable en una trayectoria de referencia, aunque frente a pequeñas perturbaciones de las variables que rigen este movimiento, el sistema se desestabilice.

En primer lugar se abordará la dinámica sagital, de forma que se seleccionaran las siguientes matrices:

$$\mathbf{Q}_f = \begin{pmatrix} 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_f = 10$$

Resolviendo la ecuación de Riccati, Ecuación D.-5, se obtiene la siguiente matriz de ganancias:

$$\mathbf{K}_f = ( 0 \quad 31.62 \quad -5635.80 \quad -2358.50 \quad 0 \quad 159.16 \quad -1350.60 \quad -566.67 )$$

Aplicando ahora la Ecuación D.-7 para introducir el efecto del controlador en el sistema, se obtiene la matriz siguiente:

$$\hat{\mathbf{A}}_f^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.22 & -574.27 & -231.61 & 16.22 & -137.62 & -57.74 \\ -2.91 & 536.77 & 216.82 & -14.09 & 124.46 & 52.10 \\ 8.89 & -1584.60 & -639.21 & 44.75 & -379.73 & -159.33 \end{pmatrix}$$

A continuación, tras obtener la modificación de la dinámica que rige la planta del sistema reducido, debemos extender la matriz de estudio para contemplar las variables excluidas consideradas inicialmente incontrolables y el lazo de control interno que se acaba de calcular. Esto se traduce en que la planta se construya de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{A}}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{f(5,1)} & A_{f(5,2)} & A_{f(5,3)} & A_{f(5,4)} & A_{f(5,5)} & A_{f(5,6)} & A_{f(5,7)} & A_{f(5,8)} \\ 0 & \hat{A}_{f(4,1)}^* & \hat{A}_{f(4,2)}^* & \hat{A}_{f(4,3)}^* & 0 & \hat{A}_{f(4,4)}^* & \hat{A}_{f(4,5)}^* & \hat{A}_{f(4,6)}^* \\ 0 & \hat{A}_{f(5,1)}^* & \hat{A}_{f(5,2)}^* & \hat{A}_{f(5,3)}^* & 0 & \hat{A}_{f(5,4)}^* & \hat{A}_{f(5,5)}^* & \hat{A}_{f(5,6)}^* \\ 0 & \hat{A}_{f(6,1)}^* & \hat{A}_{f(6,2)}^* & \hat{A}_{f(6,3)}^* & 0 & \hat{A}_{f(6,4)}^* & \hat{A}_{f(6,5)}^* & \hat{A}_{f(6,6)}^* \\ 0 & \hat{A}_{f(7,1)}^* & \hat{A}_{f(7,2)}^* & \hat{A}_{f(7,3)}^* & 0 & \hat{A}_{f(7,4)}^* & \hat{A}_{f(7,5)}^* & \hat{A}_{f(7,6)}^* \end{pmatrix}$$

Aplicando este desarrollo se obtiene la siguiente matriz:

$$\hat{\mathbf{A}}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.22 & -574.27 & -231.61 & 0 & 16.22 & -137.62 & -57.74 \\ 0 & -2.91 & 536.77 & 216.82 & 0 & -14.09 & 124.46 & 52.10 \\ 0 & 8.89 & -1584.60 & -639.21 & 0 & 44.75 & -379.73 & -159.33 \end{pmatrix}$$

Tras calcular esta matriz, ya se podría integrar numéricamente las ecuaciones lineales controladas, para proceder a evaluar las prestaciones del controlador del sistema ante perturbaciones pequeñas.

Como ya se comentó con anterioridad, el objetivo en este movimiento no es el de que perdure la estabilidad en el tiempo, ya que es algo que no sería alcanzable y realista, pero el objetivo de este controlador no es más que mantener la estabilidad inicial de estas variables. Para ello, se calculan los polos de este subsistema, para poder reflejar que el punto de equilibrio es estable para ambos movimientos.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \begin{pmatrix} -4.90 + 0.44i \\ -4.90 - 0.44i \\ -4.46 \\ -4.20 \\ -0.09 + 0.11i \\ -0.09 - 0.11i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## 7 Resultados

---

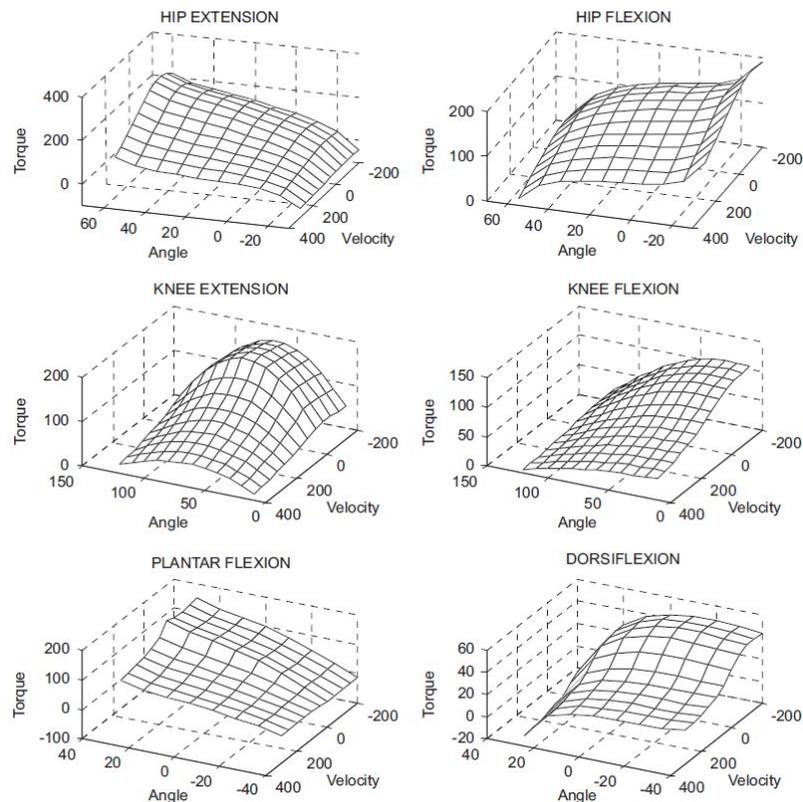
En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos del proyecto, en los cuales se mostrarán varios análisis que reflejan la evolución temporal de las variables generalizadas, así como de los multiplicadores de Lagrange y de los pares motores que se han modelado, con la idea de comprobar si el controlador cumple las expectativas del diseño. Para ello, se perturbará al sistema con señales del tipo escalón que reflejarán posibles casos reales, como son la irregularidad del terreno, ráfagas discretas de viento o simplemente distracciones del usuario que conllevan movimientos bruscos.

Antes de mostrar los resultados, cabe destacar que todas las perturbaciones que se han introducido tienen una magnitud que equivale a 5, en la unidad de medida que corresponde a la variable perturbada, es decir, en el caso de  $\theta_3$  será de  $5^\circ$ , sin embargo, si se tratase de  $\dot{\theta}_3$  será de  $5^\circ/s$ . Siendo algo a considerar que las perturbaciones se introducirán en las siguientes variables:  $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4$  y  $\dot{\theta}_5$ .

Para validarlos se hará uso del artículo [6], ya que realiza un estudio detallado sobre el par articular que es capaz de realizar un ser humano estándar, tanto en la cadera como en la rodilla y el tobillo, contemplando la influencia del ángulo y velocidad angular de dicha articulación, así como numerosos parámetros que en este proyecto no se van a modelar. Aunque en el presente estudio no se ha modelado la rodilla como articulación, se dejará ilustrado para poder comprender mejor el problema estudiado.

En concreto, en las gráficas extraídas de [6], las cuales se ilustran en la Figura 7.1, se han tomado como positivos los ángulos medidos desde la vertical y en sentido antihorario es decir, si se interpreta físicamente se considera que el ángulo articular aumenta conforme la articulación se flexiona, lo que es justo al contrario de como se ha considerado a lo largo del desarrollo matemático expresado anteriormente.

En esta sección se abordará primero el control ejercido sobre el plano sagital, de forma que se irán introduciendo perturbaciones en las variables generalizadas pertenecientes a este movimiento. Particularmente, esta sección se dividirá según lo que se analice, comenzando por la evolución de las fuerzas laterales que se han de ejercer para que se cumpla que no hay deslizamiento entre el suelo y la rueda del vehículo de movilidad personal, siguiendo con la evolución de las variables generalizadas que definen el comportamiento del sistema contenido en el plano sagital y finalizando con el esfuerzo de control que se ha tenido que ejercer para conseguirlo.



**Figura 7.1** Influencia del ángulo articular y la velocidad angular articular en el par articular máximo, tomando como positivos los movimientos que flexionan los músculos. Imagen extraída de [6].

## 7.1 Dinámica Sagital

### 7.1.1 Influencia sobre los multiplicadores de Lagrange

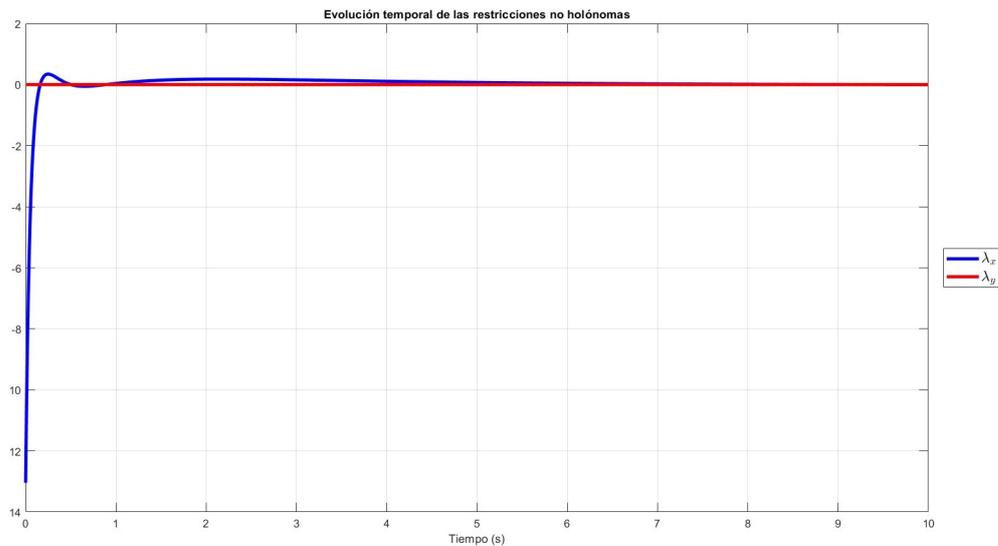
Primeramente, se van a detallar la evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange, lo cual tiene una interpretación física como las fuerzas de reacción laterales a la rueda del vehículo, siendo esto mostrado en las siguientes figuras.

Para mejorar la estabilidad de la integración mediante métodos numéricos, se recuerda que se ha hecho uso de un parámetro definido como  $\beta$ . Para no extender el desarrollo del proyecto, no se mostrará la influencia de este valor en las simulaciones, ya que la tendencia es la que se analiza en la referencia que se mencionó con anterioridad. Conceptualmente, a mayor valor de este parámetro, la estabilización de los multiplicadores de Lagrange es más rápida, es decir, el tiempo de estabilización es menor. Esto conlleva una mayor brusquedad en la tendencia temporal, conllevando generalmente un aumento en el tiempo de la simulación.

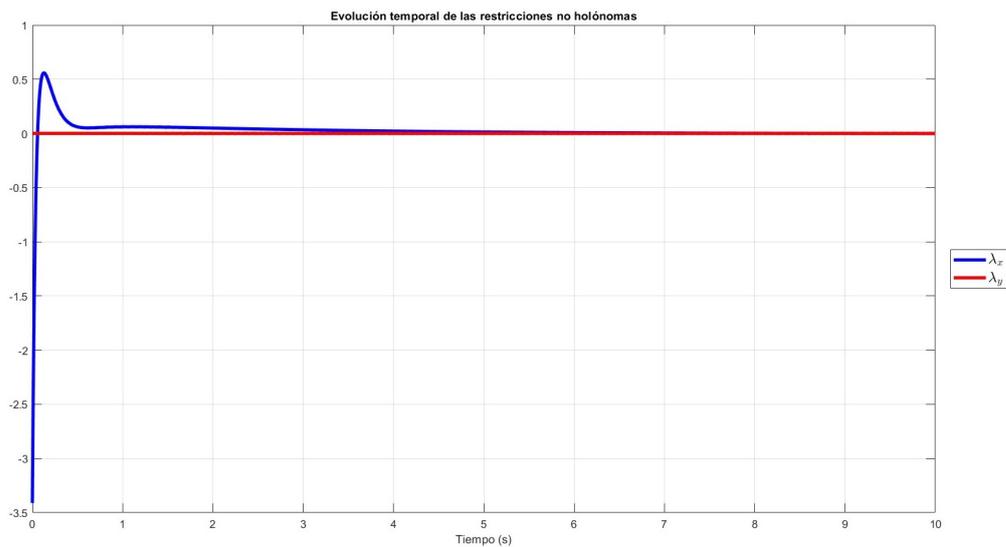
Dada esta influencia conceptual del parámetro anteriormente mencionado, se establece una solución de compromiso entre la solución obtenida y el tiempo de simulación, siendo la siguiente:

$$\beta = 100$$

Tras comparar la evolución si se introduce una perturbación en la posición angular del pie, recogido en la Figura 7.2, con la introducción de una perturbación en la velocidad angular de dicho cuerpo, ilustrado en la Figura 7.3, puede apreciarse como inicialmente el valor de los multiplicadores de Lagrange es bastante diferente, lo que tiene una interpretación física clara. La perturbación en la velocidad angular tendrá una consecuencia en la posición angular de dicho cuerpo, esto es un hecho, pero la magnitud de la perturbación que verá la posición angular será menor si se introduce de esta forma a si directamente se introduce en esta variable, como se mostrará más adelante. Esto conlleva que hay un menor desplazamiento respecto al punto de equilibrio y, por tanto, el esfuerzo de control es menor en este caso, por lo que tendrá como consecuencia que la fuerza normal que hay que ejercer para que se cumpla la condición de no deslizamiento es menor, por lo que los valores de los multiplicadores también serán menores.

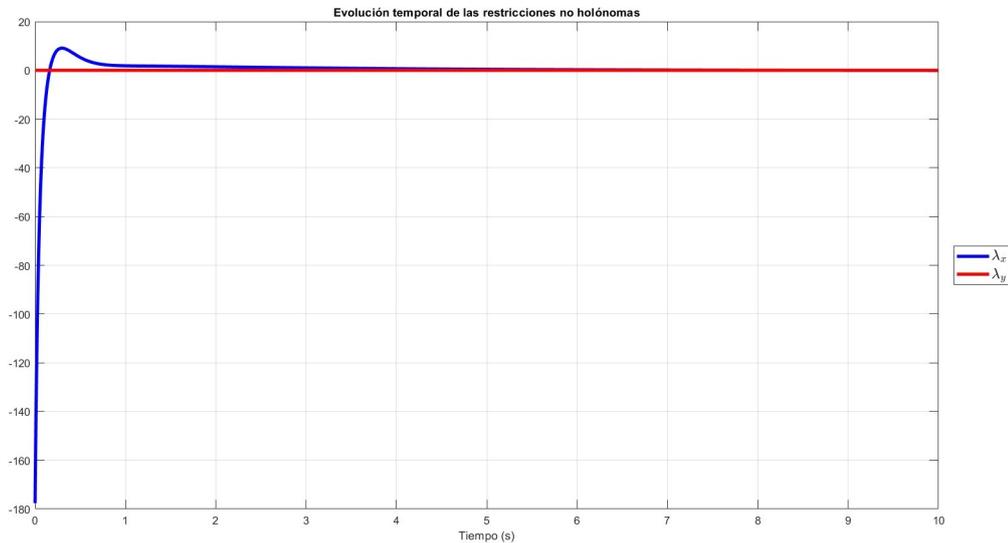


**Figura 7.2** Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en  $\theta_3$ .

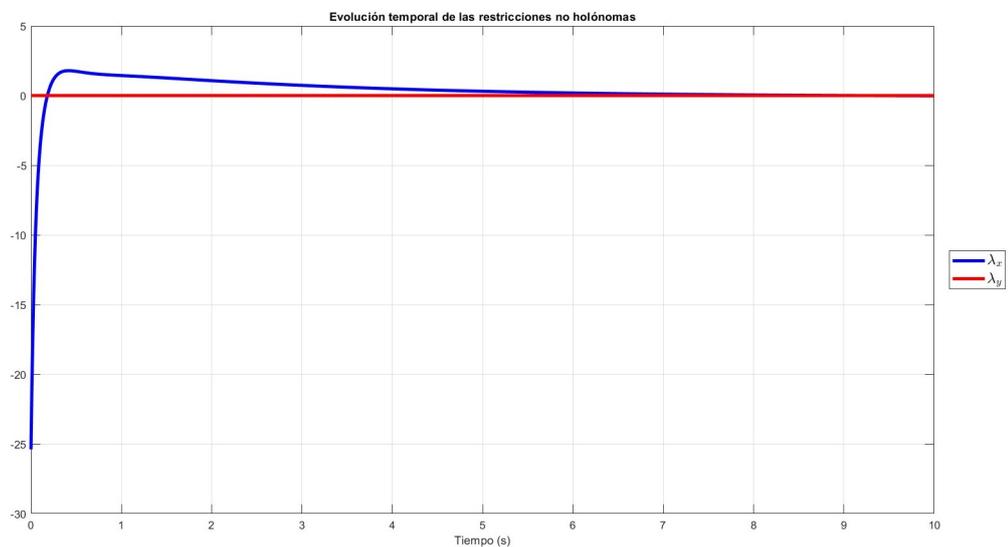


**Figura 7.3** Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_3$ .

La influencia paramétrica que se ha mencionado antes, entre la perturbación introducida por las variables angulares comparadas a cuando son introducidas por la derivada de las mismas, puede apreciarse en el resto de cuerpos, siendo la diferencia entre la Figura 7.4 y la Figura 7.5 la mayor de las obtenidas, debido a la influencia que tiene la posición de este cuerpo en el movimiento del sistema respecto al punto de equilibrio seleccionado.

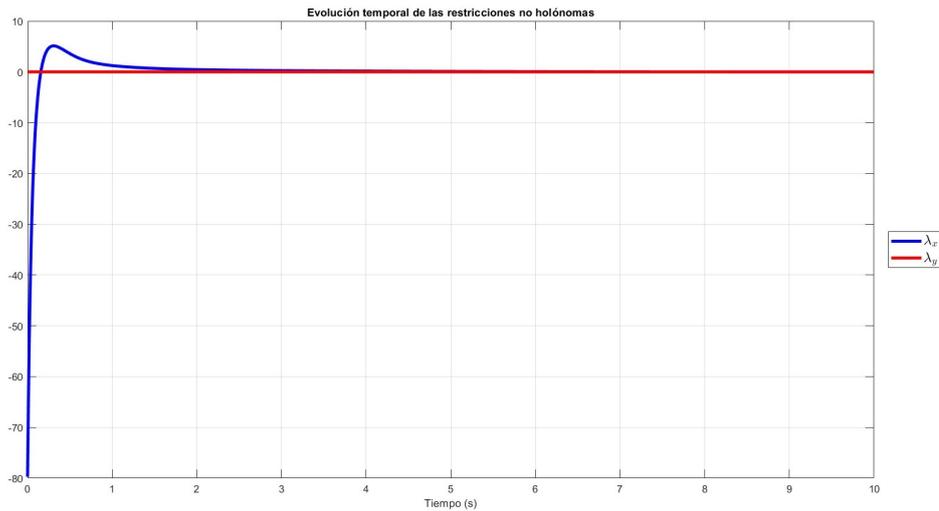


**Figura 7.4** Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en  $\theta_4$ .

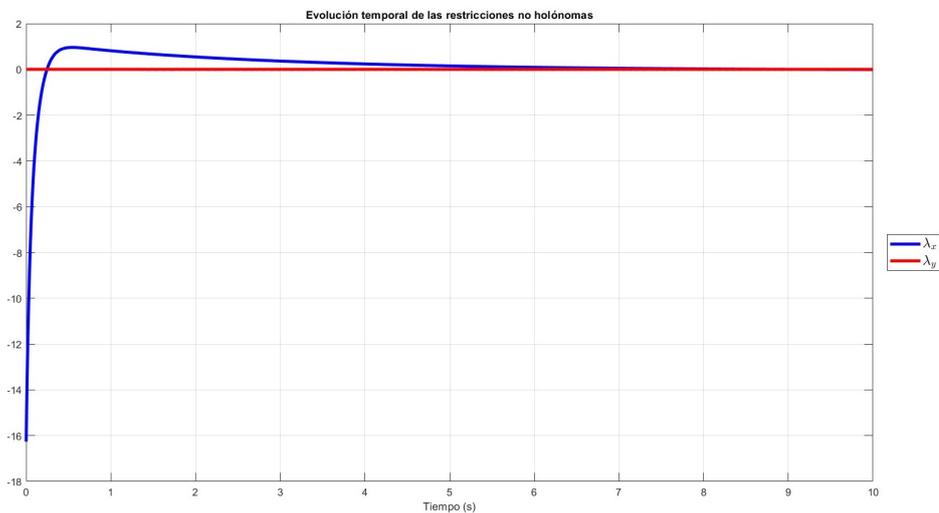


**Figura 7.5** Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_4$ .

De igual forma, se puede apreciar este fenómeno en la Figura 7.6 y la Figura 7.7. Además de la interpretación física de lo obtenido en el punto inicial de la simulación, se debe señalar que la tendencia de estos valores es siempre la misma en todos los casos, que no es más que volver al punto de equilibrio, el valor nulo, lo que implica que no es necesario que se aplique ninguna fuerza lateral para que se cumpla la restricción no holónoma de no deslizamiento.



**Figura 7.6** Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en  $\theta_5$ .



**Figura 7.7** Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_5$ .

### 7.1.2 Influencia sobre las variables generalizadas

Para comenzar a estudiar el impacto que tienen las perturbaciones que se han mencionado inicialmente en la introducción del capítulo, se realizará de forma análoga al apartado anterior, recorriendo el sistema multicuerpo de abajo a arriba.

Observando la Figura 7.8 y la Figura 7.9, se deduce de nuevo que tiene sentido físico que la perturbación en la velocidad implique una menor desestabilización del modelo. También se aprecia que se amortigua la perturbación provocando cambios despreciables en el resto de magnitudes del sistema respecto a su valor nominal, conllevando que el tiempo de estabilización sea en torno a 3-4 segundos.

Entendiendo físicamente lo que ocurre, es algo que era de esperar, dado que si hubiese irregularidades en el terreno, provocaría cambios de este orden de magnitud en la posición del pie, considerando que el pedal del monociclo gira de forma solidaria a dicho cuerpo. Realmente la posición del resto del cuerpo prácticamente no se inmuta de que existe esta perturbación tan leve.

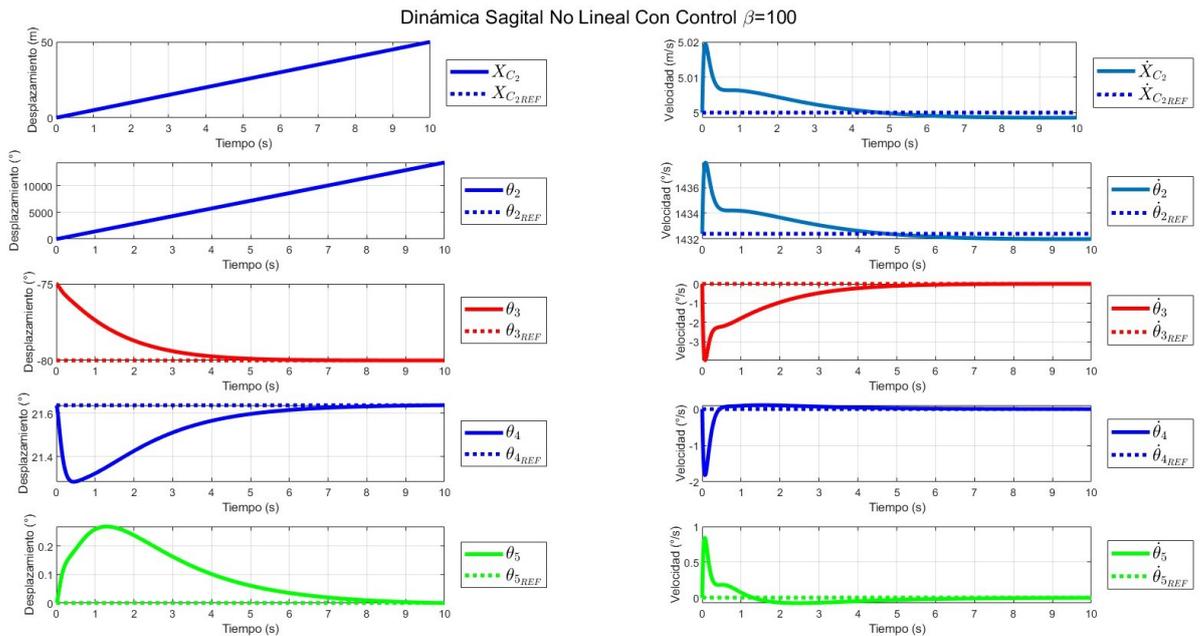


Figura 7.8 Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en  $\theta_3$ .

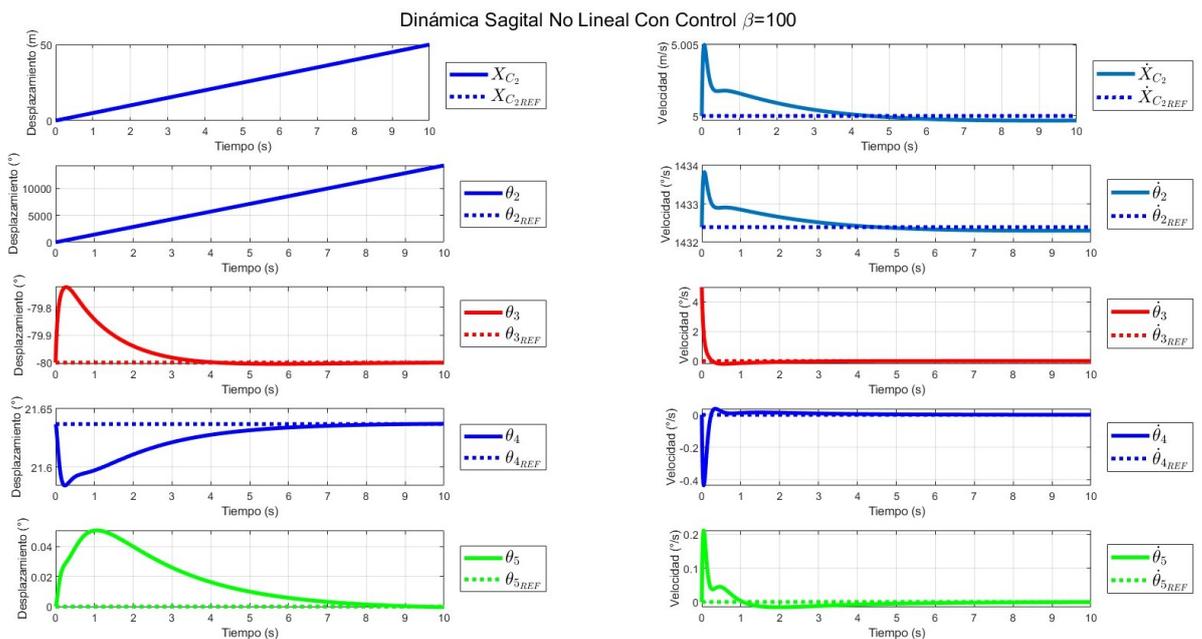


Figura 7.9 Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_3$ .

Modelando ahora perturbaciones en el corazón del sistema, es donde cobra importancia los parámetros de diseño del controlador. Viendo la Figura 7.10 y la Figura 7.11, se aprecia que el tiempo de estabilización del sistema completo es mucho mayor que en el caso mostrado previamente, pero en realidad, en cuestión de décimas de segundo se consigue minimizar enormemente la desviación entre el valor de la posición angular de las piernas y su valor nominal en el equilibrio. Esto conlleva que las velocidades angulares superiores a lo que recogen la Figura 7.8 y la Figura 7.9.

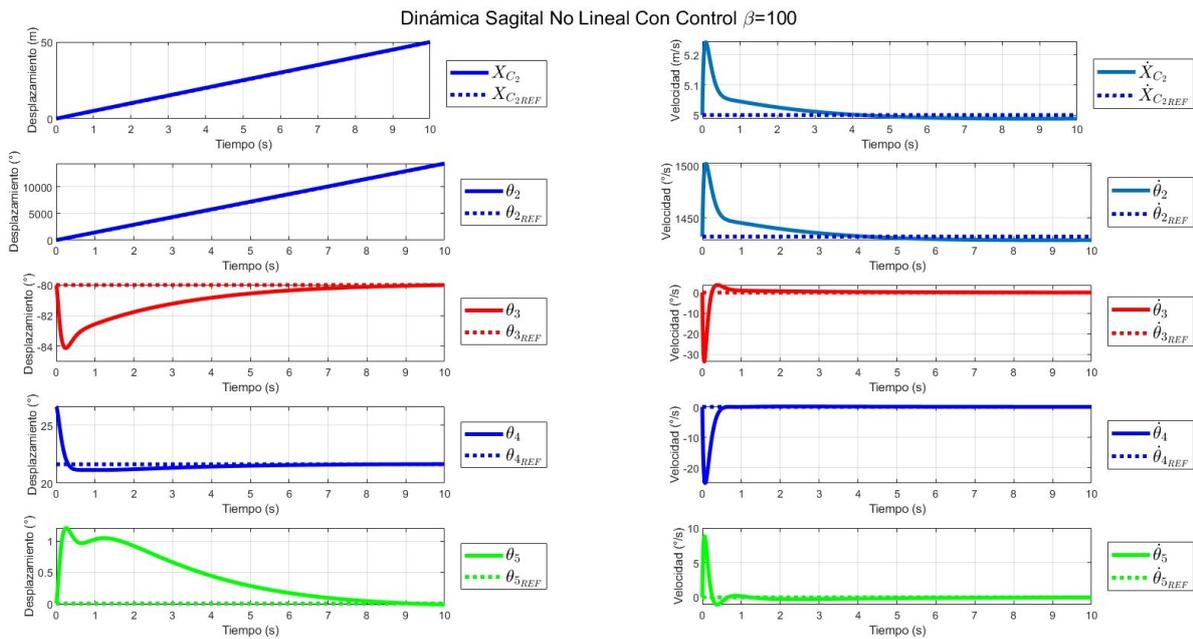


Figura 7.10 Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en  $\theta_4$ .

Comentando más aspectos de la Figura 7.10, es remarcable que la perturbación provoque casi la misma desviación en la posición angular del pie, siendo esta variable mucho más lenta en su estabilización por la menor importancia que se le ha dado a esta variable dentro de la matriz de ganancias.

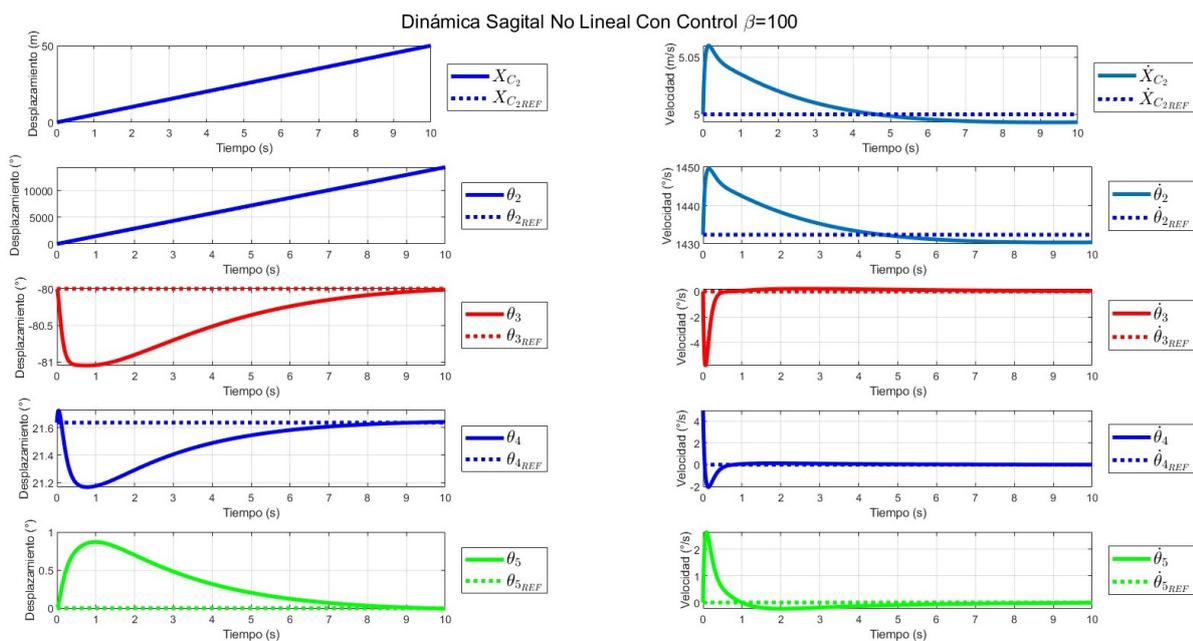


Figura 7.11 Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_4$ .

En este caso, en la Figura 7.12 y la Figura 7.13, se intenta modelar una desestabilización más común en usuarios que son aprendices, ya que al no controlar muy bien la posición corporal, puede que para intentar aumentar la velocidad, por ejemplo, tiendan a inclinar hacia adelante el torso, en lugar del centro de masas completo del sistema, posicionado aproximadamente en la cadera.

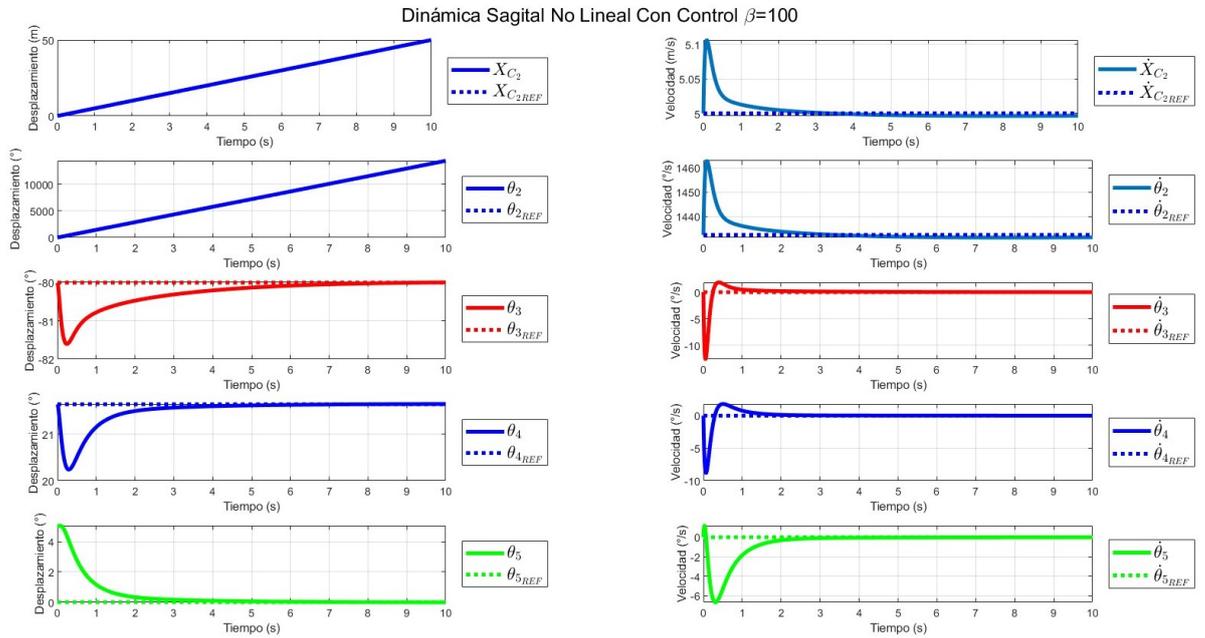


Figura 7.12 Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en  $\theta_5$ .

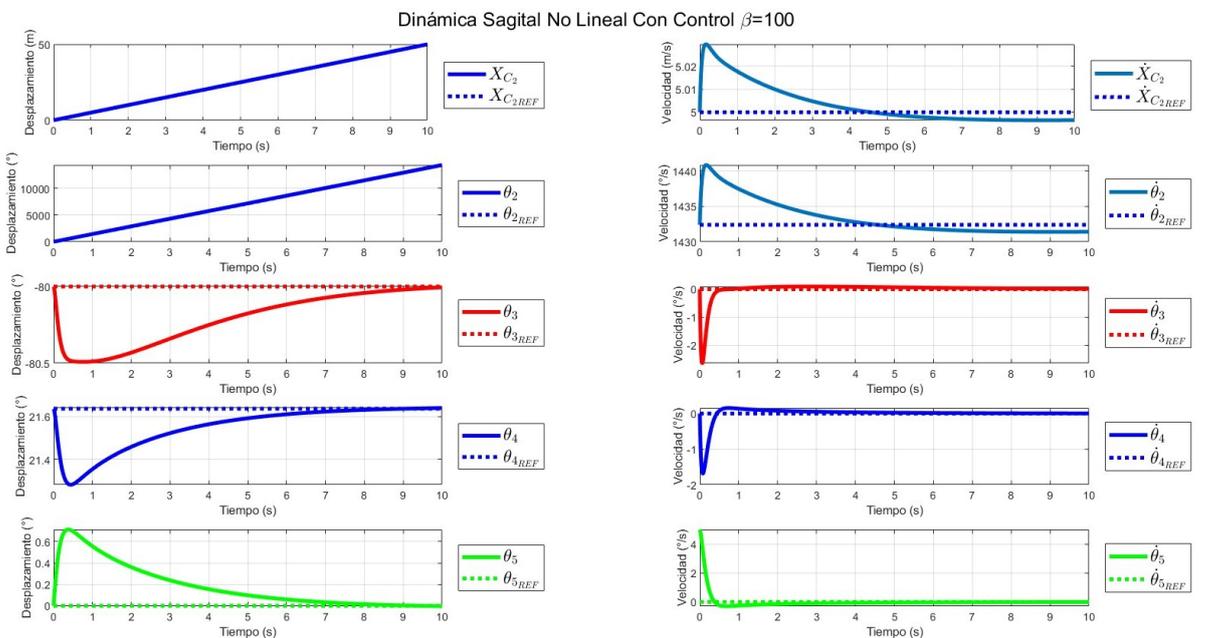


Figura 7.13 Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_5$ .

Esto conlleva que se tenga que tener una reacción rápida para atenuar la perturbación corporal en los casos en los que se perturba la magnitud de las posiciones angulares de las piernas y el torso, a no ser que la desviación sea leve en estas variables, ya que en esos casos es más importante conseguir que el movimiento del propio vehículo esté inalterado, para seguir la trayectoria de referencia.

### 7.1.3 Esfuerzo de control

Para analizar el esfuerzo de control, se mostrará la evolución temporal de los pares motores que se han considerado en el vector de fuerzas generalizadas, así como de la potencia instantánea asociada al control.

El cálculo de esta variable instantánea parte de la Ecuación 4.17, de forma que si se multiplica ambos miembros de la ecuación por la derivada del vector traspuesto de variables generalizadas se obtiene que:

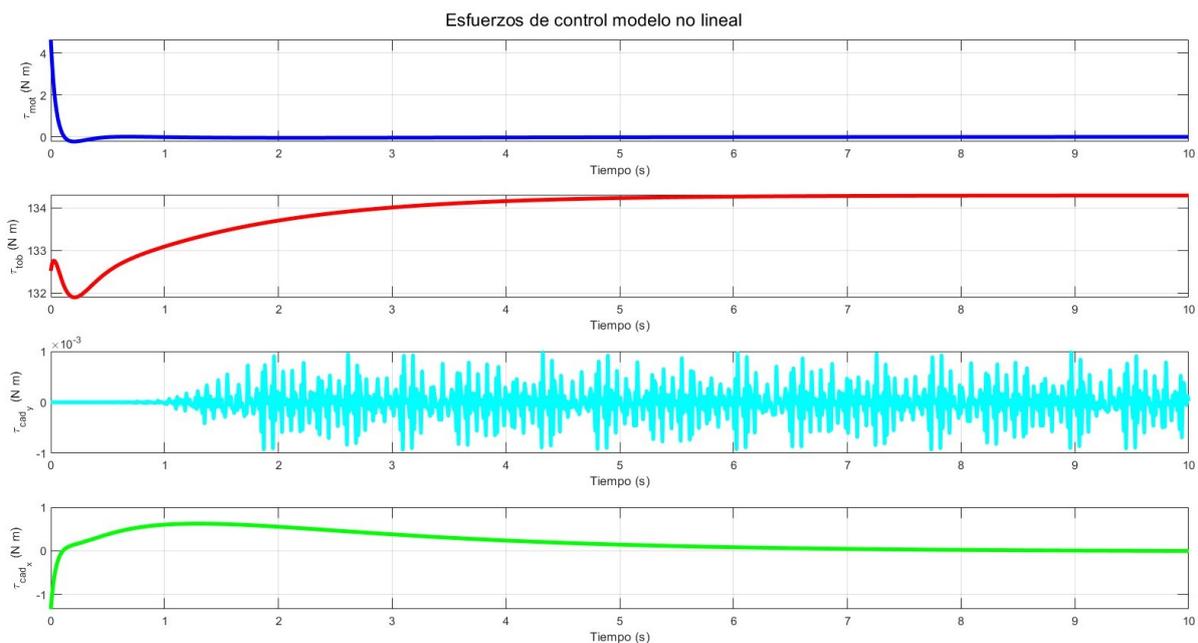
$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{S}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Z}(\mathbf{q}) \mathbf{u} \quad (7.-1)$$

De forma que el término de la potencia instantánea será definido como:

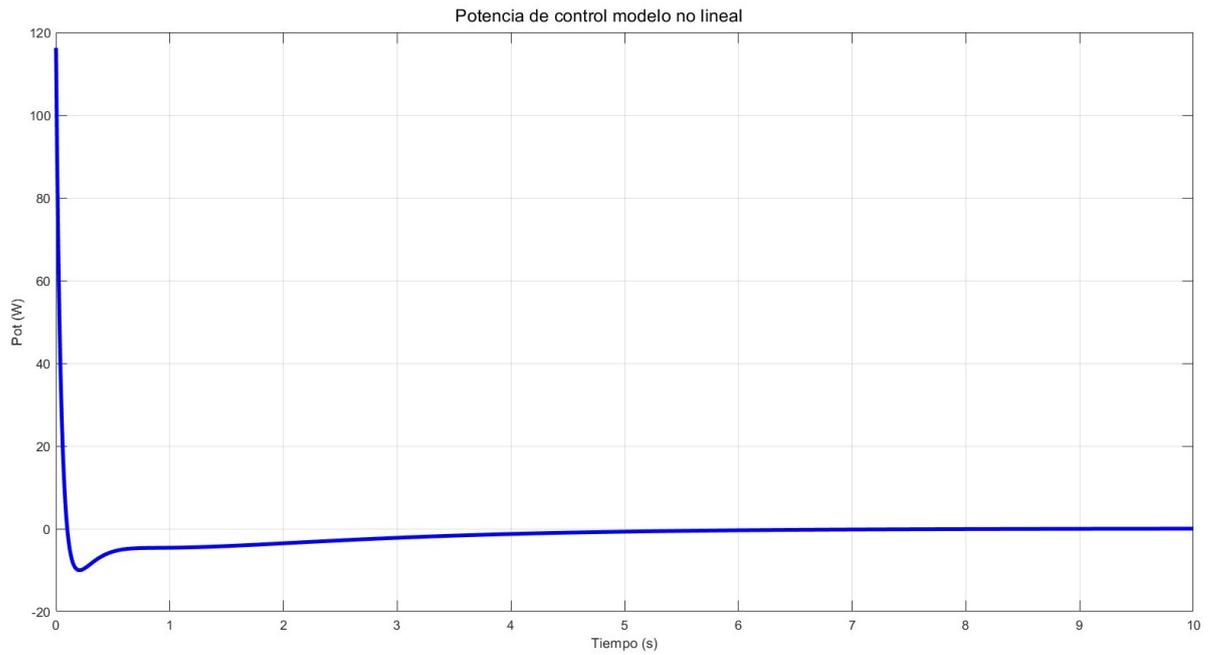
$$Pot_{inst}(t) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Z}(\mathbf{q}) \mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{S}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (7.-1)$$

En las gráficas que se muestran a continuación, se muestra el comportamiento del control lateral ejercido en la cadera como un patrón común, su orden de magnitud es despreciable y puede considerarse nulo. No obstante, si ese control fuera realmente nulo, el sistema se desestabilizaría frente a cualquier perturbación, como se verá en la siguiente sección.

Como era previsible, en la Figura 7.14 y en la Figura 7.15 se muestra como para corregir la perturbación en la posición angular del pie se requiere un incremento de esfuerzo de control pequeño, tomando como referencia el valor nominal de este.

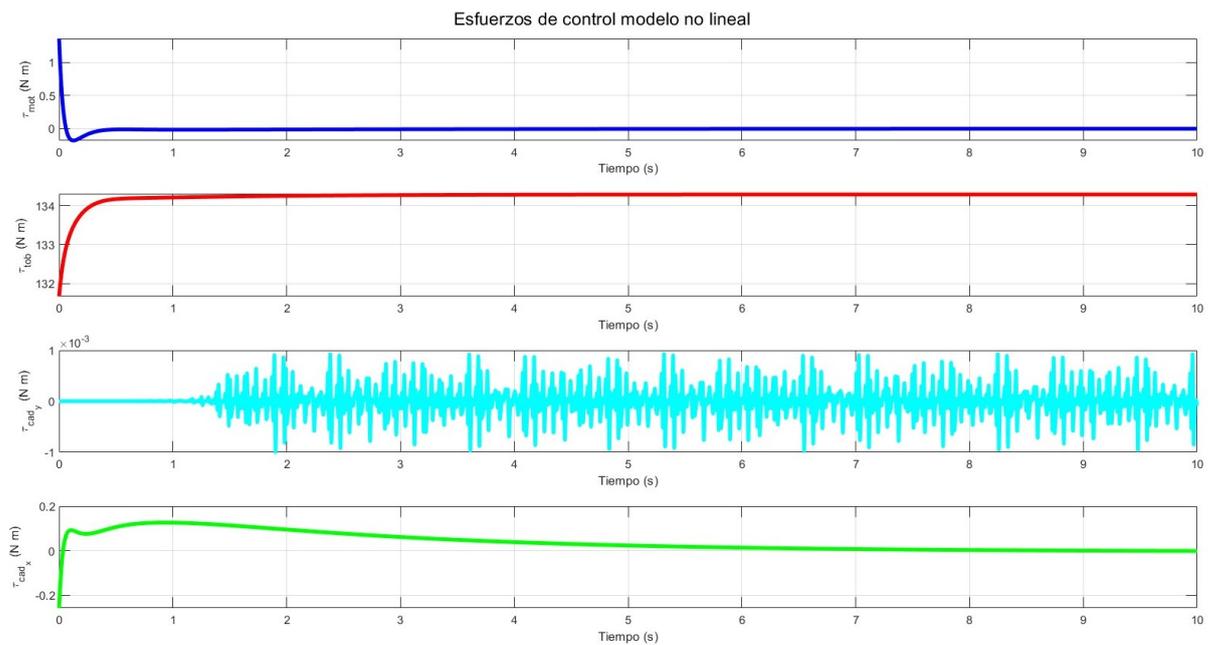


**Figura 7.14** Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en  $\theta_3$ .

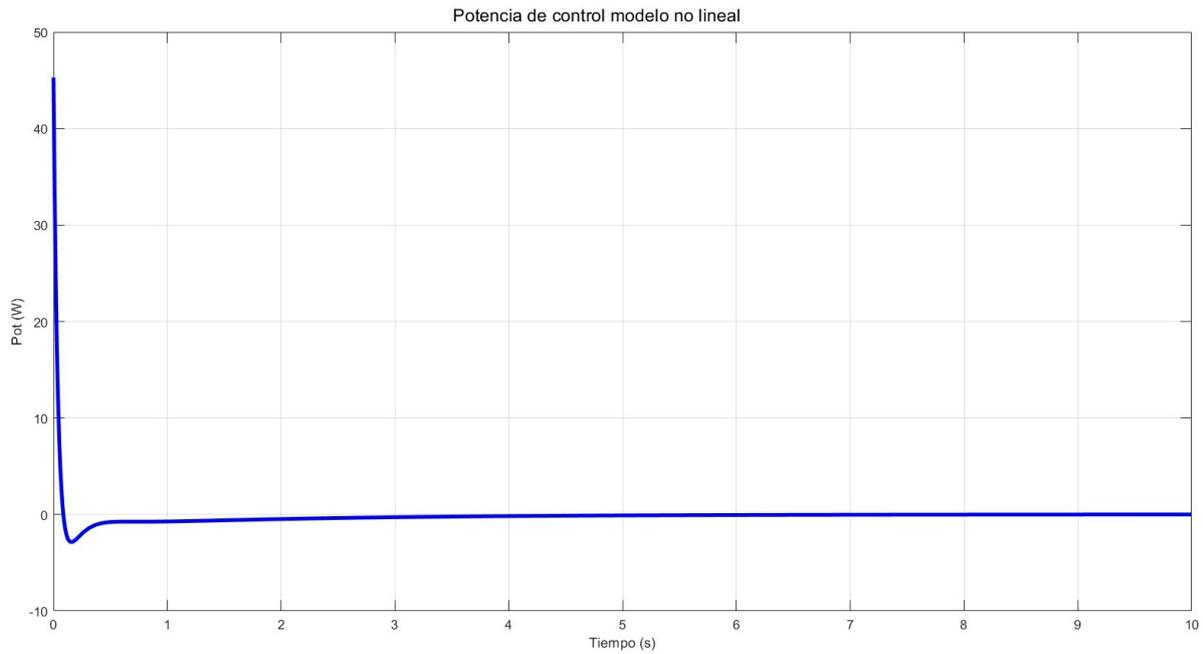


**Figura 7.15** Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en  $\theta_3$ .

Analizando la Figura 7.16 y la Figura 7.17 se demuestra que para corregir la perturbación en la velocidad angular del pie se requiere un incremento de esfuerzo de control aun menor que el que se acaba de mostrar.

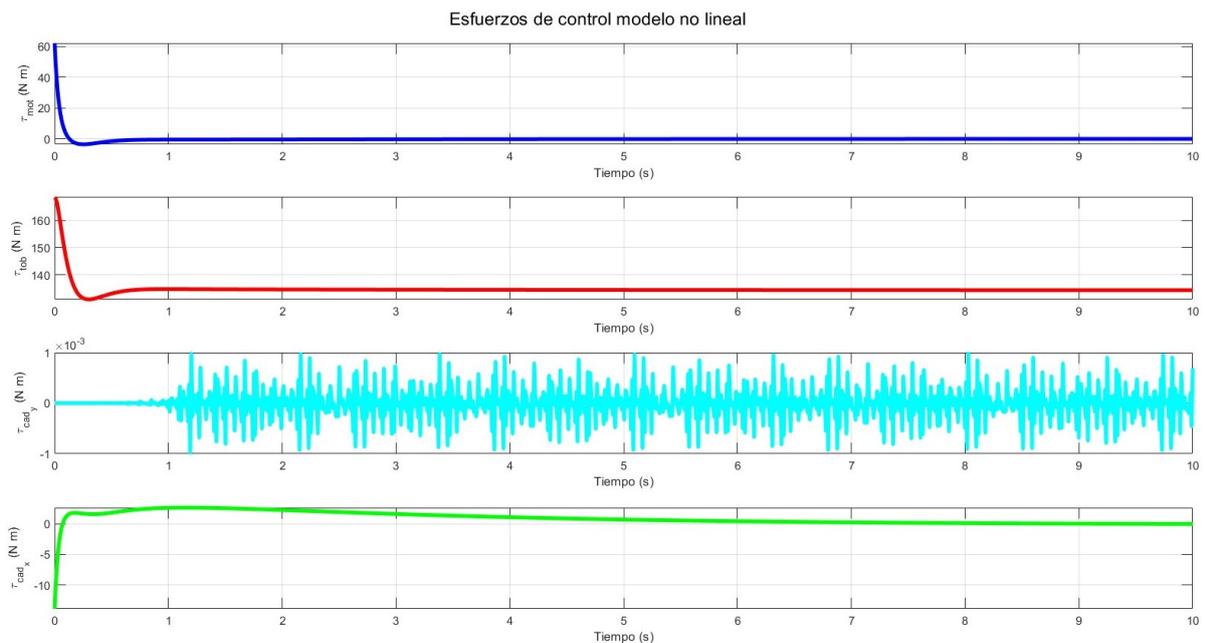


**Figura 7.16** Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_3$ .

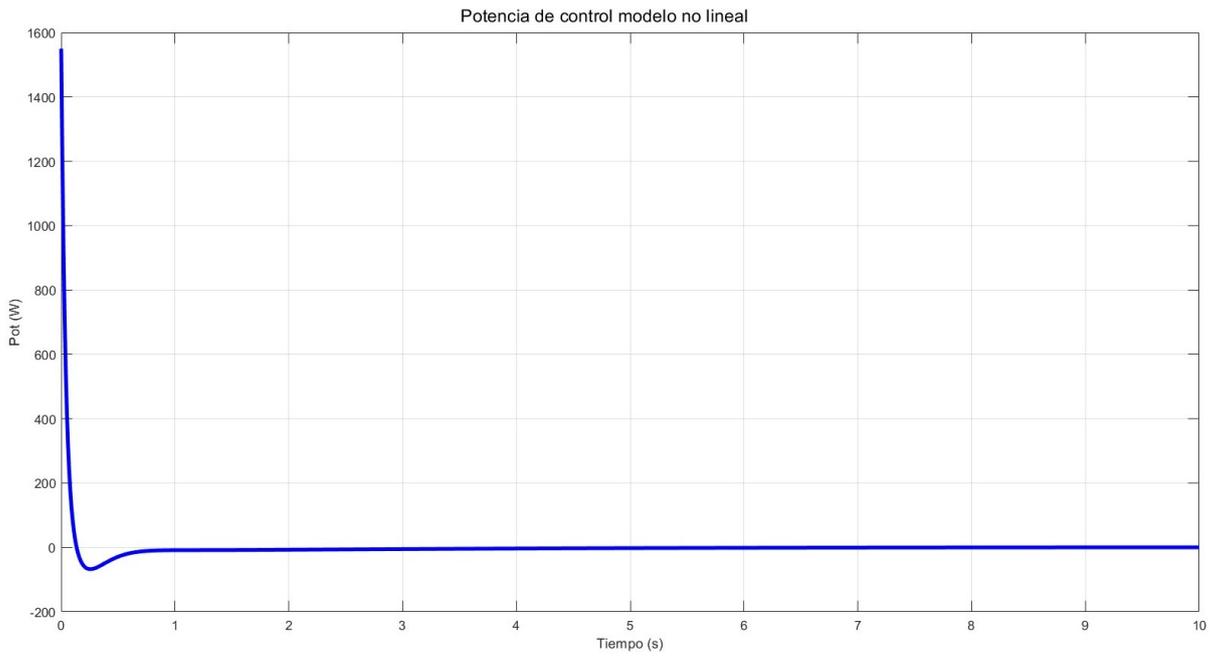


**Figura 7.17** Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_3$ .

Sin embargo, a la vista de la Figura 7.18 y la Figura 7.19 se puede apreciar que el par articular necesario para corregir la postura corporal está dentro de lo analizado en la Figura 7.1, por lo que parece razonable. Respecto al par motor del vehículo, puede apreciarse como parece alcanzable.

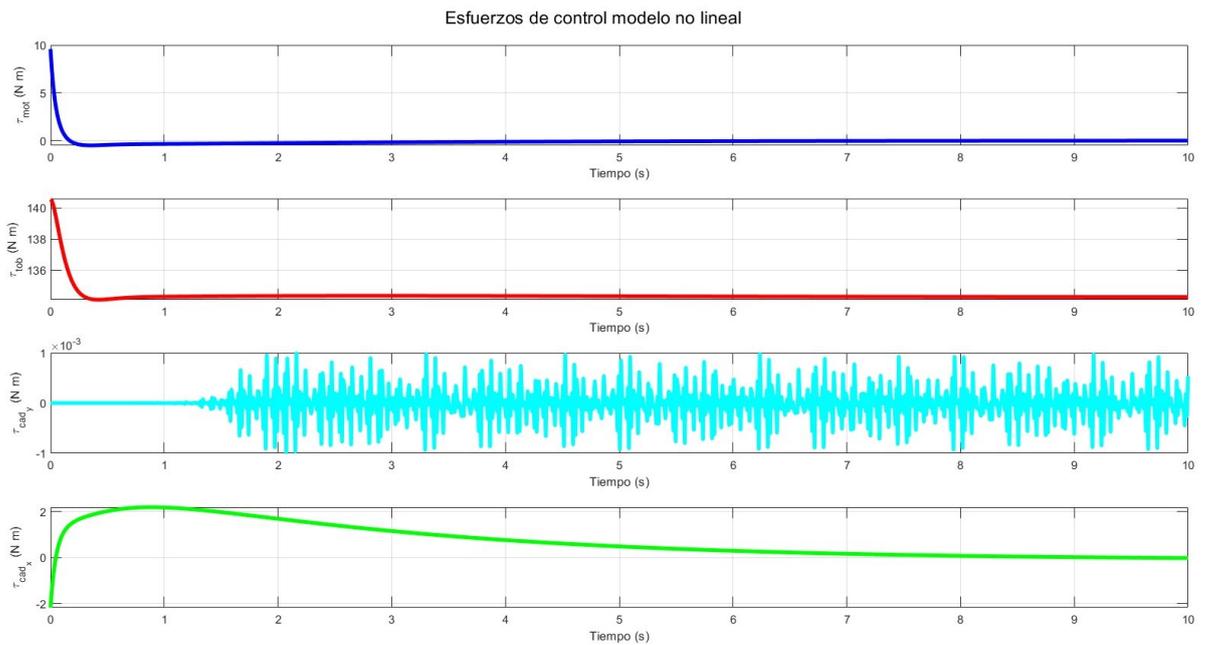


**Figura 7.18** Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en  $\theta_4$ .

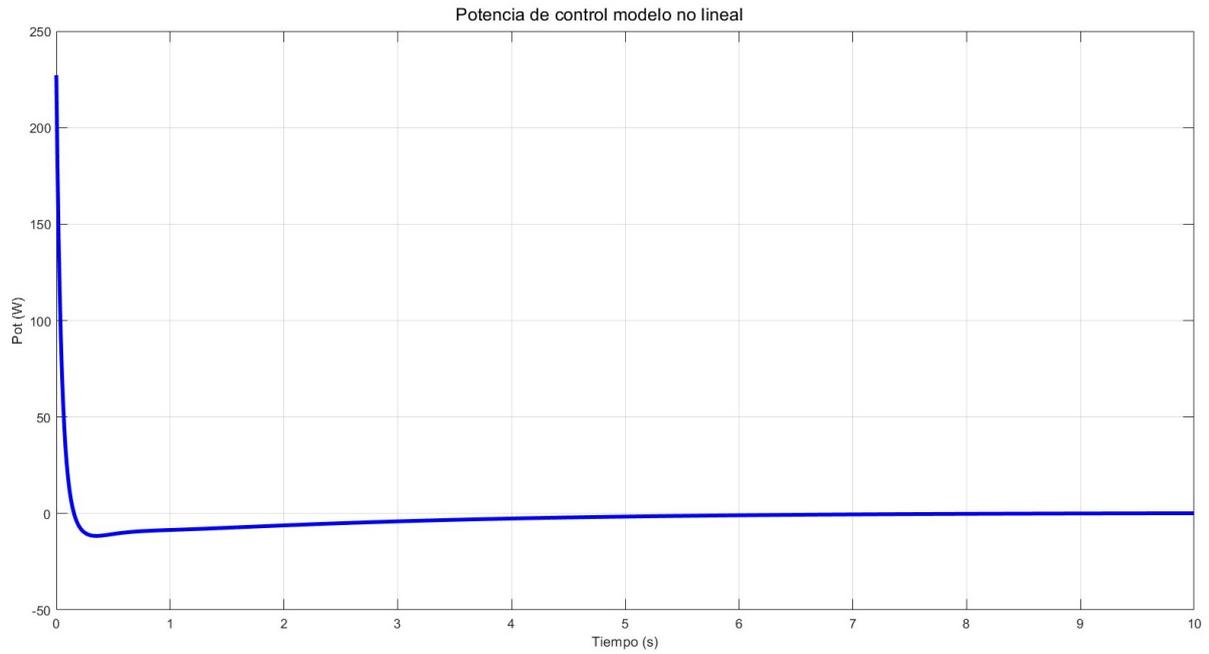


**Figura 7.19** Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en  $\theta_4$ .

Al variar la velocidad angular de las piernas, se requiere un esfuerzo de control menor que si se variase la posición, algo razonable, siendo un una tendencia muy similar, como se aprecia en la Figura 7.20 y la Figura 7.21.

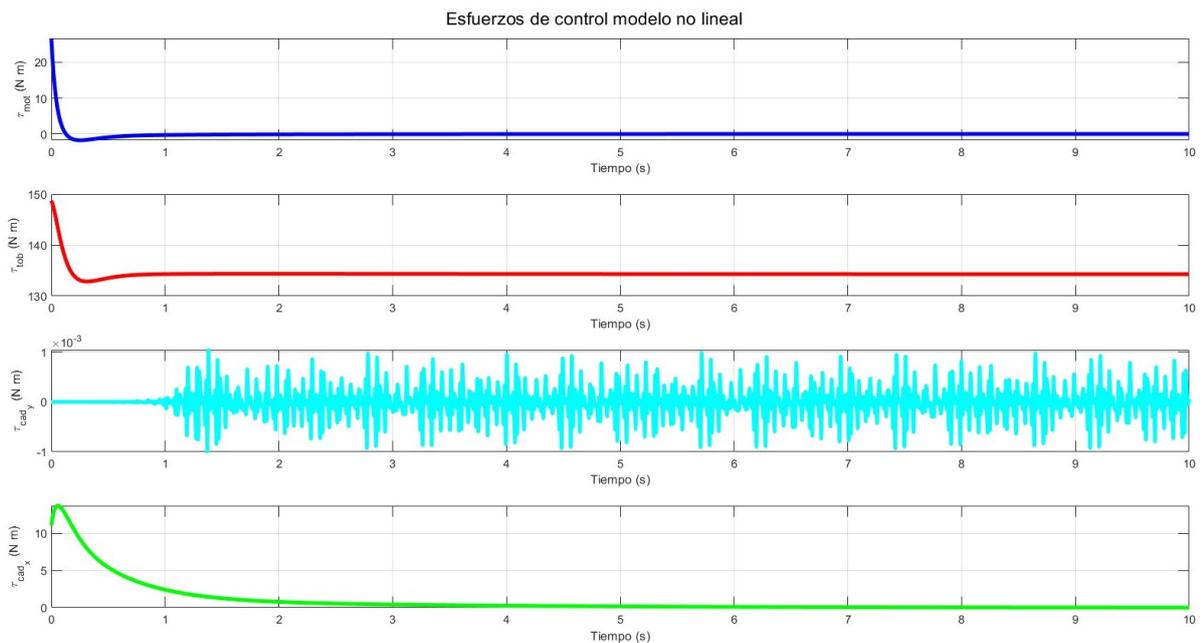


**Figura 7.20** Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_4$ .

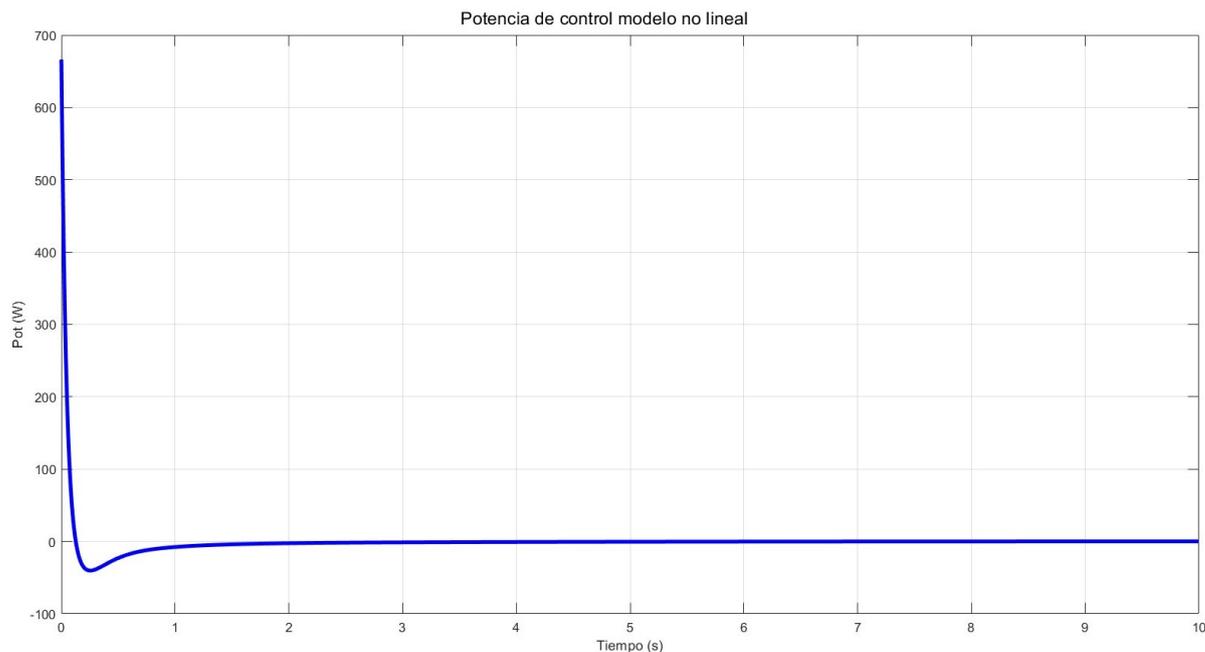


**Figura 7.21** Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_4$ .

Centrándonos en el torso del usuario, al perturbar la posición angular se requiere un esfuerzo menor que si fuesen las piernas pero también es considerable, como se refleja en la Figura 7.22 y la Figura 7.23.

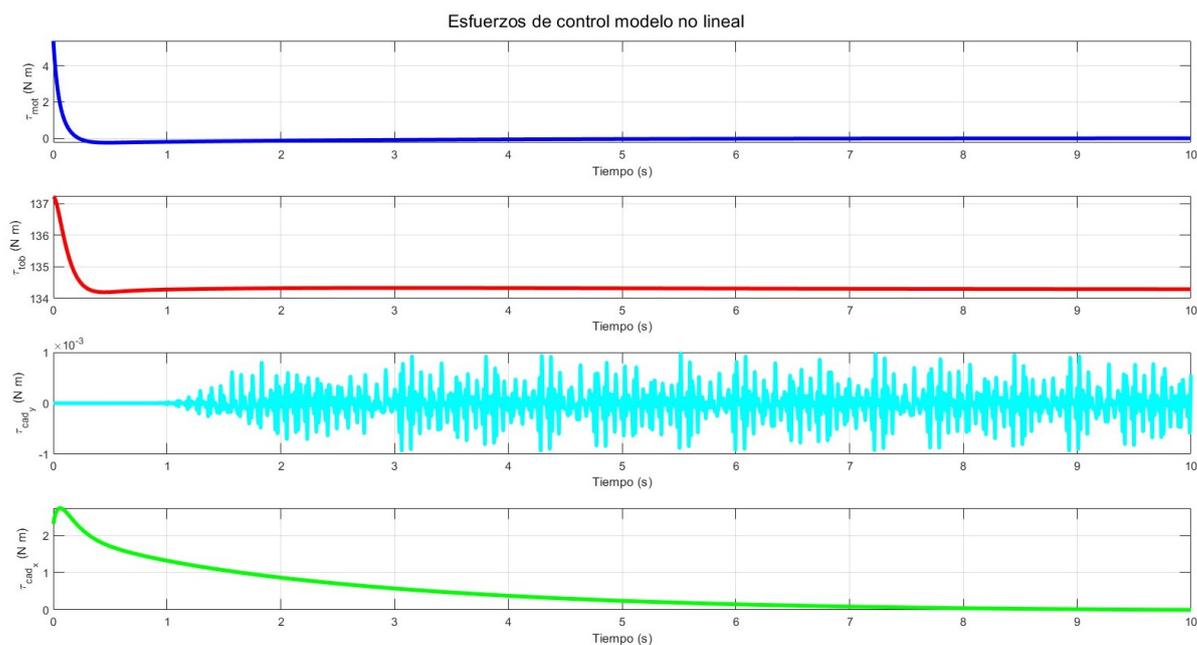


**Figura 7.22** Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en  $\theta_5$ .



**Figura 7.23** Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en  $\theta_5$ .

Al igual que ocurre con el resto de variables en las que se ha introducido una perturbación, al introducirse en la derivada de la variable, en este caso el torso, el esfuerzo de control necesario para estabilizar el movimiento es menor, como se ilustra en la Figura 7.24 y la Figura 7.25.



**Figura 7.24** Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_5$ .

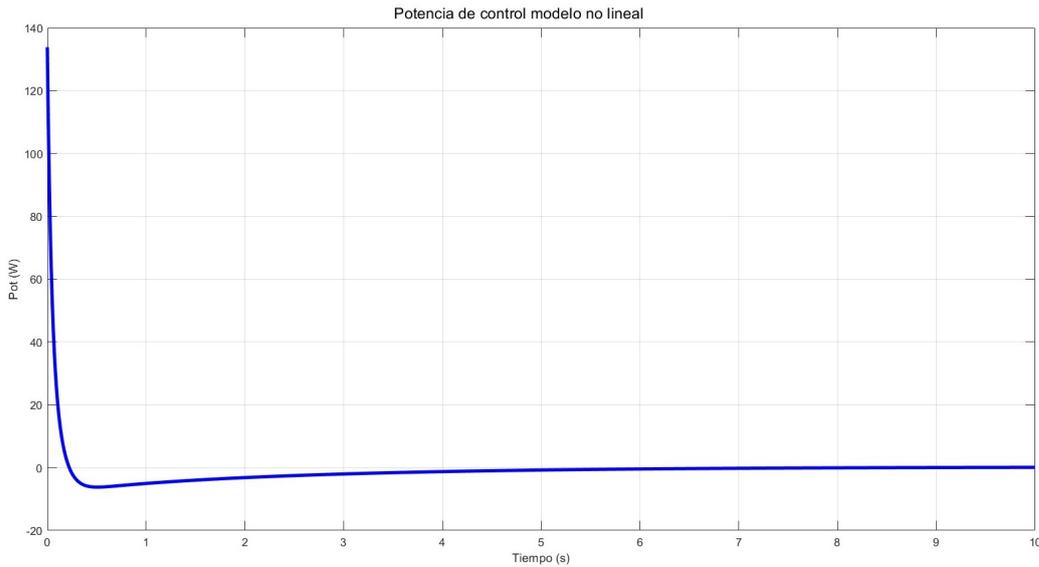


Figura 7.25 Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en  $\dot{\theta}_5$ .

## 7.2 Dinámica Frontal-Lateral

Antes de alterar las condiciones de equilibrio del movimiento frontal-lateral, se van a comentar varias gráficas que mejorarán la comprensión del sistema estudiado. En la primera de ellas, la Figura 7.26, se visualiza un ejemplo de la salida obtenida del modelo matemático no lineal ante cualquier perturbación en la dinámica sagital, en el que todas las variables son prácticamente nulas a lo largo de la evolución temporal.

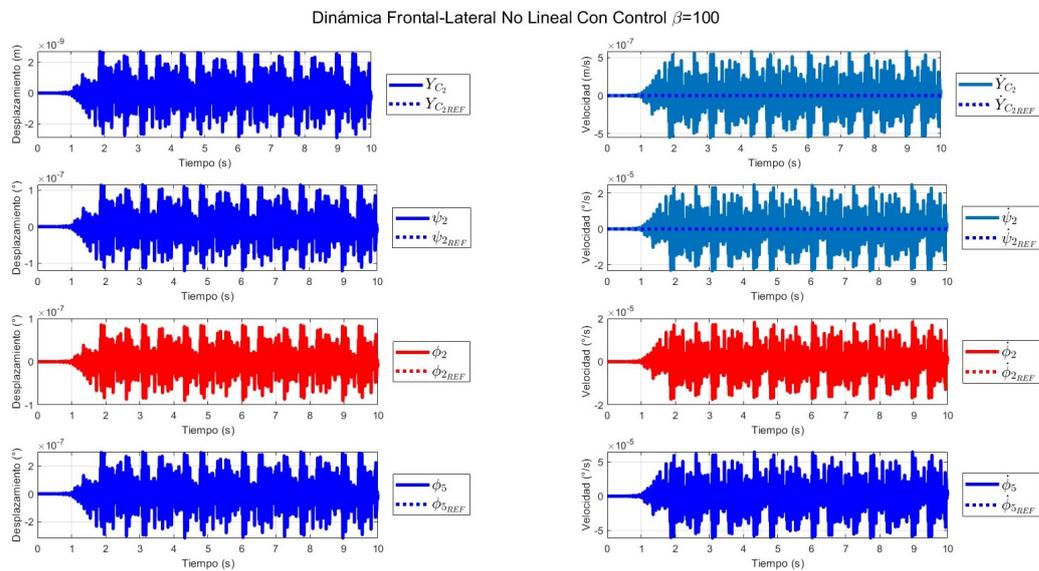
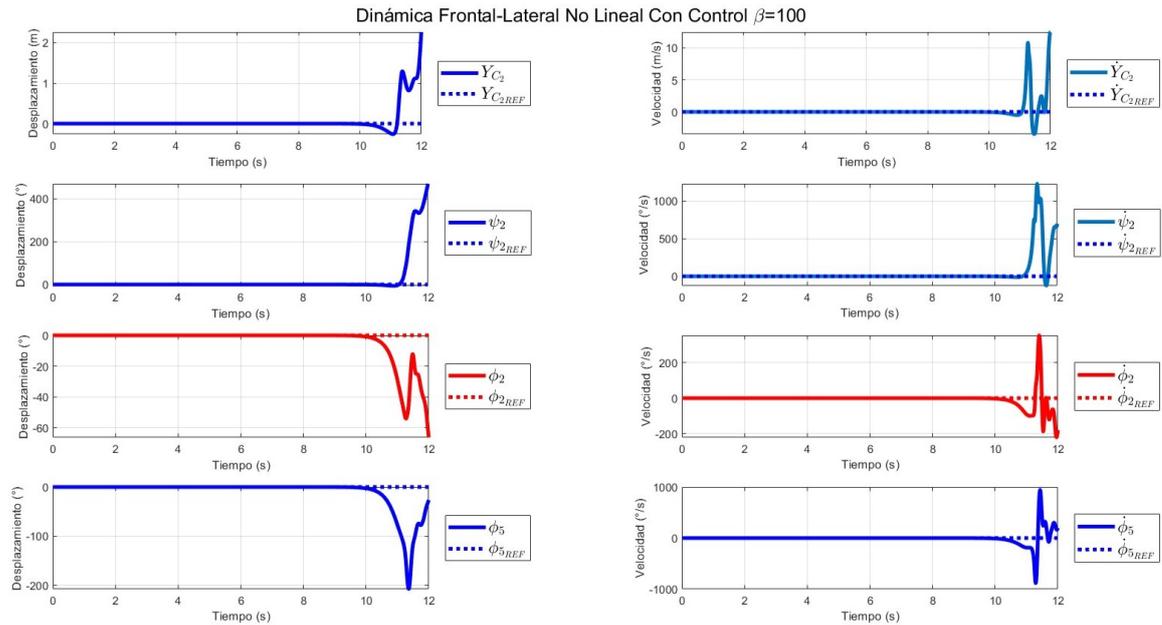


Figura 7.26 Evolución temporal de las variables generalizadas frontal-laterales frente a una perturbación en  $\theta_3$  si  $\tau_{cad,y}$  no fuese nulo.

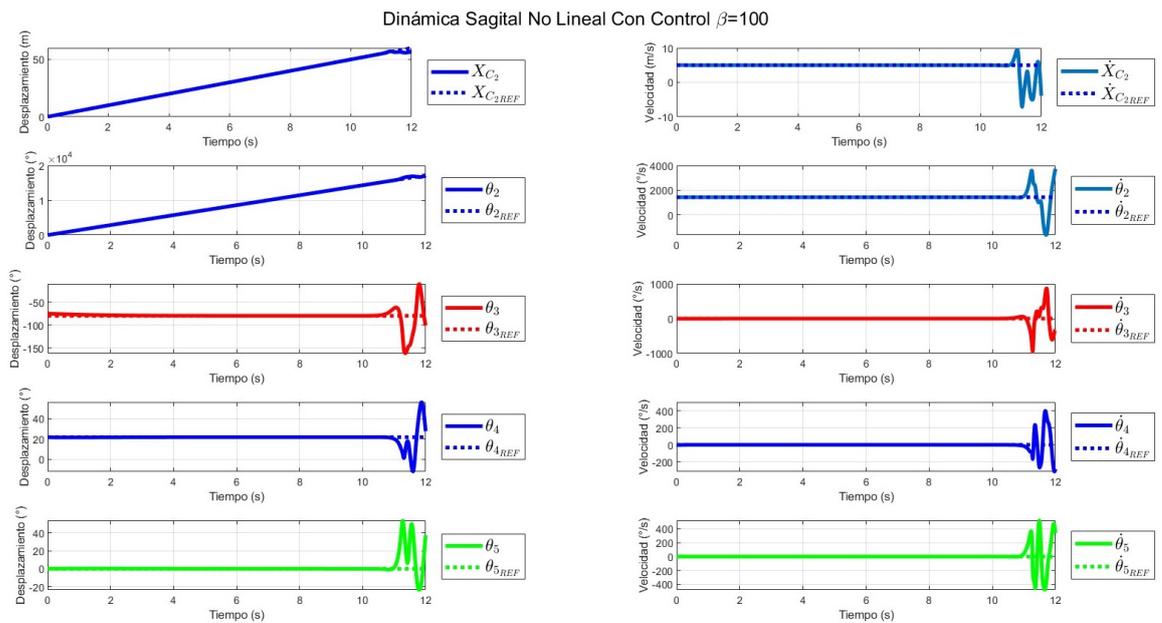
Al ver este resultado puede parecer que no hace falta la acción del controlador, es decir, que se obtendría el mismo resultado si la matriz de ganancias definida en la Ecuación 6.2, pero realmente no es así, ya que el sistema es inherentemente inestable. Una prueba de ello es lo que se muestra en

la Figura 7.27.



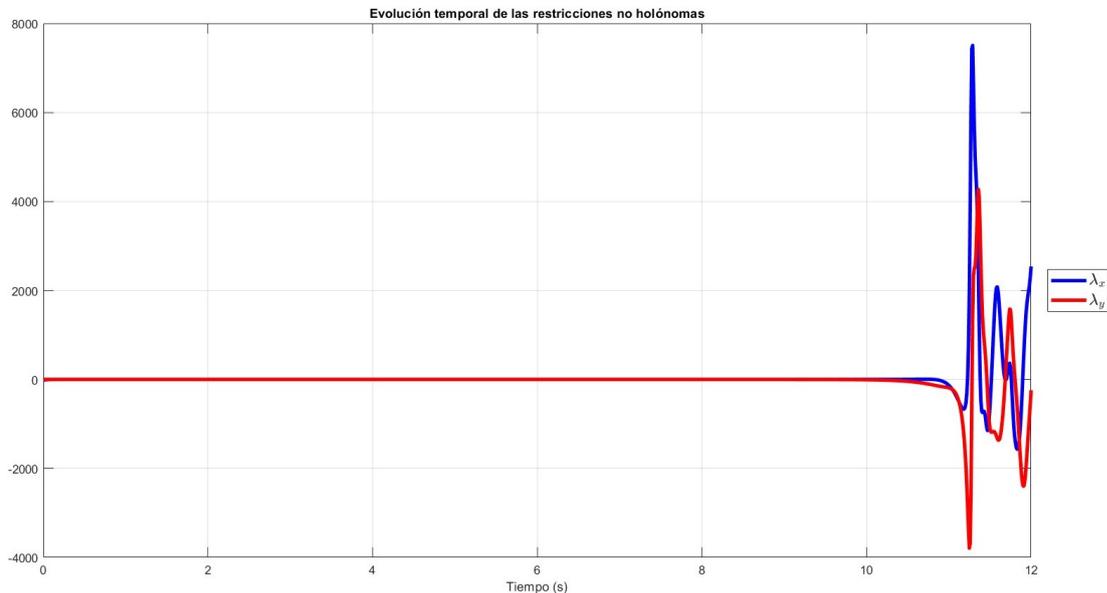
**Figura 7.27** Evolución temporal de las variables generalizadas frontal-laterales frente a una perturbación en  $\theta_3$  si  $\tau_{cad_y}$  fuese nulo.

Es verdad que las variables que describen la dinámica frontal-lateral permanecen estables un tiempo considerable, como ocurre en otros sistemas dinámicos como al empujar hacia adelante una bicicleta sin conductor, pero llega un momento en el que la solución diverge y se desestabiliza. De hecho, en la Figura 7.28 se muestra que en la evolución de las variables contenidas en el plano sagital del vehículo ocurre lo mismo, a pesar de seguir introduciéndose en estas variables el efecto del controlador sagital que se ha calculado anteriormente.



**Figura 7.28** Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en  $\theta_3$  si  $\tau_{cad_y}$  fuese nulo.

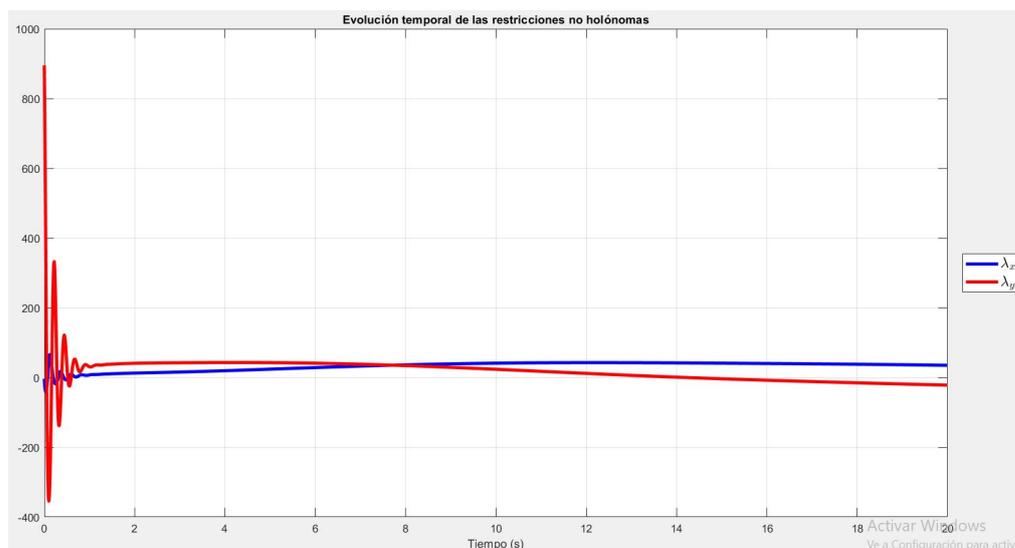
Esto a priori puede parecer que es una incongruencia, ya que se mencionó que el sistema estaba desacoplado, pero lo que realmente estaba desacoplado era el modelo matemático del sistema linealizado. Esto es fruto de la inestabilidad natural del sistema, que tiene como consecuencia la siguiente evolución de las fuerzas laterales de reacción que deben existir para mantener la restricción de no deslizamiento en la rueda del vehículo.



**Figura 7.29** Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en  $\theta_3$  si  $\tau_{cad_y}$  fuese nulo.

Además de esto, a pesar de que se sospecha que la robustez del controlador frontal-lateral es muy baja, se introducirá una leve perturbación en el ángulo de inclinación del monociclo, para ver el comportamiento del sistema.

Se comenzará mostrando la evolución de los multiplicadores de Lagrange, recogido en la Figura 7.30, lo que muestra que hay una gran inestabilidad en el movimiento.



**Figura 7.30** Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en  $\phi_2$ .

En la Figura 7.31 se puede apreciar como va divergiendo la solución de la guiñada, que era la variable que se intuía que era incontrolable, ya que va creciendo la desviación respecto al punto de equilibrio conforme se avanza en el tiempo. La consecuencia de esto sería que había equilibrio lateral, pero no se puede controlar la guiñada del vehículo, por lo que no se podría controlar la trayectoria descrita por el monociclo.

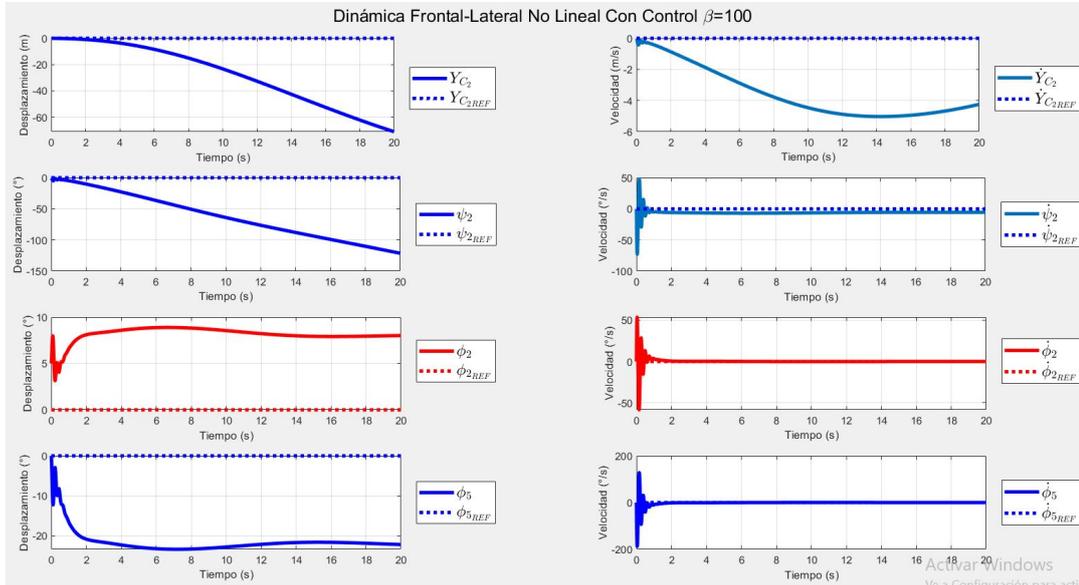


Figura 7.31 Evolución temporal de las variables generalizadas frontal-laterales frente a una perturbación en  $\phi_2$ .

Viendo el sistema conjuntamente, se aprecia como existe un equilibrio del movimiento contenido en el plano sagital, pero es diferente al punto de equilibrio inicial, por ello, al retrasar el centro de masas del sistema completo el vehículo tiende a desplazarse en el sentido contrario al que empezó, como se refleja en la Figura 7.32.

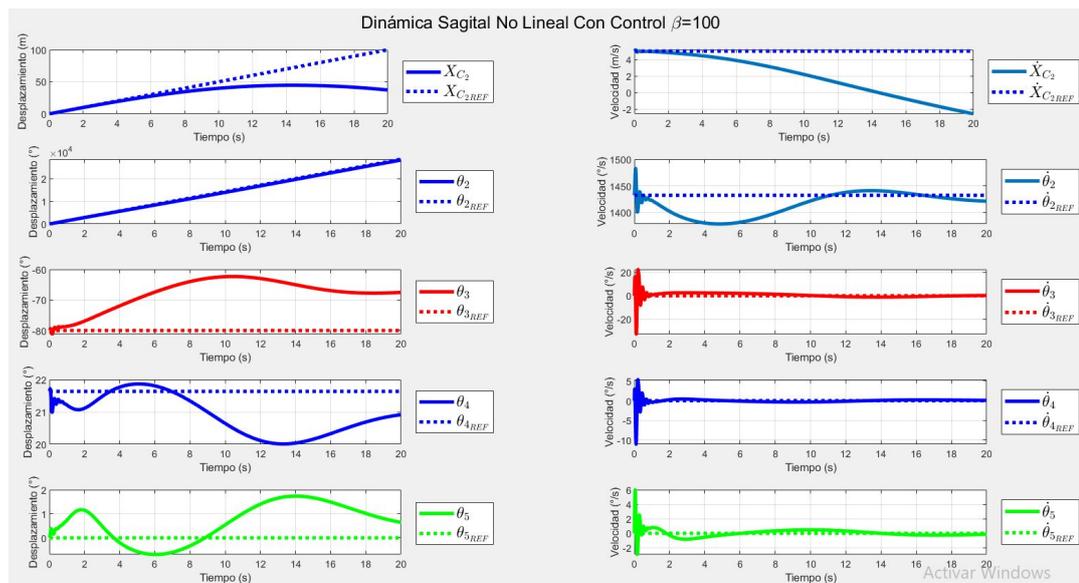
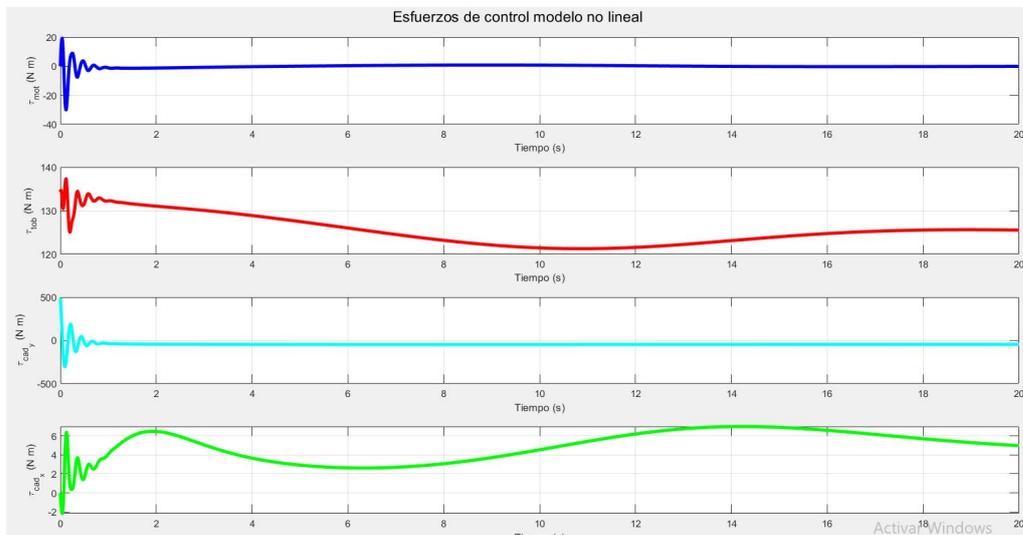


Figura 7.32 Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en  $\phi_2$ .

Además, analizando las actuaciones del sistema, recogidas en la Figura 7.33, puede apreciarse también que la gran fluctuación en sus valores, los cuales están cercanos al límite de los pares articulares mostrados en la Figura 7.1.



**Figura 7.33** Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en  $\phi_2$ .



## 8 Conclusiones

---

A modo de conclusión se enumerarán algunas de las ideas que se han analizado a lo largo de este proyecto.

El método de linealización es capaz de reproducir fielmente el comportamiento naturalmente no lineal del sistema, siempre que las variables incrementales no se desvíen mucho de los valores nominales, lo que reduce enormemente el tiempo computacional de las simulaciones iterativas que requiere el diseño del controlador que se ha mostrado.

Se ha conseguido estabilizar el movimiento del sistema inherentemente inestable, resultando en actuaciones asumibles en la vida real. Pese a presentar un modelo simplificado geoméricamente, se emula de una forma razonable el comportamiento del usuario, teniendo en cuenta que estamos asumiendo muchas consideraciones que reducen la complejidad del desarrollo matemático.

Analizando el movimiento sagital, se ha demostrado que el objetivo del diseño del controlador sagital es acertado al priorizar la posición angular de las piernas, favoreciendo la posición adelantada del centro de masas del sistema.

Analizando el comportamiento frontal-lateral, aunque se haya conseguido estabilizar el movimiento, no se consigue controlarlo realmente. Para ello, se debería modelar un par articular que permitiera controlar la guiñada del monociclo y, por tanto, la trayectoria del monociclo.

Como líneas futuras, sería interesante no restringir el movimiento de guiñada del torso, así como introducir un par articular que permitiera la regulación angular del sistema en dicha dirección. Esto no solo permitiría la controlabilidad del sistema, si no que podrían probarse diferentes trayectorias de referencia, equilibrios dinámicos u otros aspectos más llamativos y complejos como son la aceleración o desaceleración del movimiento.

También se considera interesante modelar un cuerpo más en el sistema, el cual permitiera modelar las rodillas, para poder analizar la mejora de la estabilidad al bajar la altura del centro de masas del sistema y que sea un movimiento más realista.

Por último, se destaca que existen numerosas técnicas de control no lineal, que son más apropiados para sistemas naturalmente inestables como este, lo que aumentaría la complejidad matemática pero podría conseguir mejores prestaciones y, por tanto, mejoras sustanciales a la hora de diseñar un sistema de aumento de estabilidad. Por ejemplo, se podría utilizar la técnica de Lyapunov, tal y como se muestra en el artículo [9], ya que se obtuvieron buenos resultados en el caso de estudio simplificado.



# Apéndice A

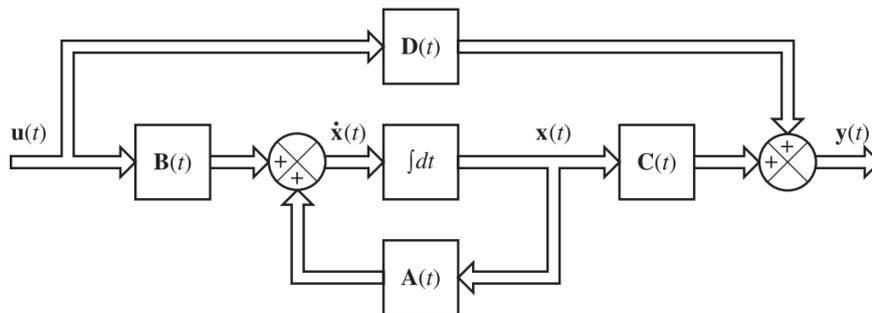
## Teoría de estados

---

En la representación de modelos multivariables es crucial la agrupación de variables en vectores, según sea su naturaleza. Esta clasificación conlleva la diferenciación de tres categorías principales: variables de entrada ( $\mathbf{U}$ ), variables de salida ( $\mathbf{Y}$ ) y variables de estado ( $\mathbf{X}$ ). Estas últimas son el resultado de las salidas de los integradores, ya que estos tienen el papel de registrar el cambio sufrido a lo largo de la evolución temporal del sistema, es decir, son vitales para caracterizar al completo el funcionamiento dinámico del sistema [19]. A partir de esta organización, se pueden obtener las ecuaciones matriciales que rigen el comportamiento del sistema, las cuales son:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{C.-1}$$

La primera de ellas, alude a la caracterización del estado, sin embargo, la segunda va orientada en analizar la salida del sistema. Para facilitar el entendimiento de este modelo matemático se muestra la Figura A.1, la cual se extrae de [19]:



**Figura A.1** Diagrama de bloques simbólico de un sistema lineal dependiente del tiempo. Imagen extraída del libro: *Ingeniería de control moderna* [19].

En caso de que fuera necesario linealizar este sistema de ecuaciones, se debería aplicar conceptualmente el método de expansión en series de Taylor, aplicándolo a las ecuaciones obtenidas en la sección 4, en torno a una cierta condición de equilibrio (definida por  $\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{Y}}$ ) [19]. Es importante destacar que esta linealización limitaría la validez del modelo a zonas muy próximas del punto de operación definido como equilibrio. Esto conllevaría la definición de variables de desviación o incrementales (denotadas con la letra en minúscula), lo que se refleja en la Ecuación C.-2:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}},\tag{C.-2}$$

Un paso previo a esta linealización, se tiene que definir la condición de operación, hallándose tras imponer el equilibrio traslacional y rotacional. Esto se traduce en que tanto la fuerza como el momento resultantes en el modelo equivalente sean nulos, expresándose como indica la Ecuación C.-3, teniendo la consecuencia de que se anulen las derivadas de las variables de control. Esta consideración tiene una interpretación física lógica, ya a que el piloto no sería capaz de mantener el control si el sistema se aleja rápidamente de su condición de operación ante una perturbación [27].

$$\sum_{j=1}^{N^{\circ} \text{ Fuerzas}} \mathbf{F}_{apli_j} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{N^{\circ} \text{ Momentos}} \mathbf{M}_{apli_k} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{X}} = 0 \quad (\text{C.-3})$$

El cálculo de las matrices Jacobianas que relacionan los vectores de estas variables incrementales se muestran en la Ecuación C.-4, satisfaciéndose las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema expresadas en la Sección 4.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{U}=\bar{\mathbf{U}}} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial U_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial U_p} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{U}=\bar{\mathbf{U}}} \quad (\text{C.-4})$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_q}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial G_q}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{U}=\bar{\mathbf{U}}} \quad , \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial U_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_q}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial G_q}{\partial U_p} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{U}=\bar{\mathbf{U}}}$$

Finalmente, es posible hallar la función de transferencia que permite calcular la respuesta del sistema ante una determinada entrada, definiéndose en una relación entre una entrada concreta y una salida concreta, con el fin de analizar la influencia paramétrica. Normalmente, esta función se lleva al dominio de Laplace, de forma que los polos serán los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$ , o lo que es lo mismo, las raíces del polinomio característico [27].

$$G(s) = \frac{\mathbf{y}(s)}{\mathbf{u}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (\text{C.-5})$$

## Apéndice B

# Controlador Óptimo Lineal Cuadrático

---

En esta sección se abordará la metodología de control de la que se hará uso para estabilizar el movimiento que es objeto de este estudio, es decir, el diseño de un controlador lineal cuadrático lineal, también conocido como LQR.

Dada una representación en el espacio de los estados como la que se presenta en la Sección A, en concreto la que se ilustra en la Ecuación C.-1, será necesario encontrar una ley de control óptimo,  $\mathbf{u}(t)$ , que minimice la siguiente función de coste:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt \quad (\text{D.-1})$$

En primer lugar, se realizará la suposición esencial de que el sistema que se desea analizar es controlable, por lo que el rango de la matriz de controlabilidad debe ser igual a la dimensión del vector de estado, ya que no se podría resolver de esta forma si no fuese así. Dicha matriz,  $\mathbf{M}_c$ , se calcula como se muestra en la Ecuación D.-2, donde  $n$  es la dimensión del vector de estado.

$$\mathbf{M}_c = (\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \quad (\text{D.-2})$$

Se entiende que el sistema sería controlable únicamente si el rango de la matriz de controlabilidad es igual a  $n$ , es decir, para calcular el número de variables incontrolables del sistema se debe aplicar:

$$\gamma = n - \text{rang}(\mathbf{M}_c) \quad (\text{D.-3})$$

Por otro lado, es necesario asumir que la matriz  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son matrices simétricas y serán semidefinidas como positivas, consiguiendo de esta manera que todos los valores propios del sistema sean no negativos. El valor de estas matrices de ponderación es crucial para ponderar la importancia de que las variables de estado realicen un buen seguimiento de los valores nominales, en el caso de la matriz  $\mathbf{Q}$ , y del esfuerzo de control que se puede conseguir, por parte de la matriz  $\mathbf{R}$ .

La ley de control seguirá una estructura como la que se muestra en la Ecuación D.-4, donde la matriz de ganancias  $\mathbf{K}$  se obtiene a partir de la solución a la ecuación algebraica de Riccati.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (\text{D.-4})$$

El procedimiento mediante el cual se realiza la obtención de dicha matriz parte de resolver la ecuación de Riccati, lo cual se hará una vez se conozca la matriz  $\mathbf{P}$  que satisfaga la siguiente expresión:

$$\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0 \quad (\text{D.-5})$$

Tras hallar la matriz  $\mathbf{P}$ , se procede a calcular la matriz  $\mathbf{K}$  siguiendo la siguiente relación:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (\text{D.-6})$$

Sustituyendo ahora la ley de control que rige el comportamiento de este tipo de controladores, mostrado en la Ecuación D.-4, en el sistema de ecuaciones que dicta la teoría de estados, mostrado en el sistema de ecuaciones C.-1, se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A}(t) - \mathbf{K}\mathbf{B}(t)) \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{A}}(t) \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= (\mathbf{C}(t) - \mathbf{K}\mathbf{D}(t)) \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{C}}(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{D.-7})$$

# Índice de Figuras

---

1.1	Ilustración del monociclo eléctrico comercial <i>Inmotion V8</i> (extraído de [1])	1
1.2	Uso de un VMP. Extraído de [2]	2
1.3	Representación gráfica del modelado de un monociclo autónomo extraído del artículo [11]	3
2.1	Sólido rígido indeformable, obteniendo un módulo del vector $\mathbf{d}$ constante e invariante en el tiempo. Imagen tomada de <i>Física General</i> [12]	5
2.2	Representación gráfica a mano alzada del modelado del sistema multicuerpo	8
3.1	Representación gráfica del modelado del sistema completo	10
3.2	Representación geométrica del monociclo eléctrico	11
3.3	Representación gráfica del modelado del sistema: Cuerpos 2 y 3	14
3.4	Representación gráfica del modelado del sistema: Cuerpos 2, 3 y 4	16
3.5	Representación gráfica del modelado del sistema: Cuerpos 2, 3, 4 y 5	18
7.1	Influencia del ángulo articular y la velocidad angular articular en el par articular máximo, tomando como positivos los movimientos que flexionan los músculos. Imagen extraída de [6]	36
7.2	Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en $\theta_3$	37
7.3	Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en $\dot{\theta}_3$	37
7.4	Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en $\theta_4$	38
7.5	Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en $\dot{\theta}_4$	38
7.6	Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en $\theta_5$	39
7.7	Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en $\dot{\theta}_5$	39
7.8	Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en $\theta_3$	40
7.9	Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en $\dot{\theta}_3$	40
7.10	Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en $\theta_4$	41
7.11	Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en $\dot{\theta}_4$	41
7.12	Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en $\theta_5$	42
7.13	Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en $\dot{\theta}_5$	42
7.14	Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en $\theta_3$	43
7.15	Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en $\theta_3$	44
7.16	Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en $\dot{\theta}_3$	44
7.17	Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en $\dot{\theta}_3$	45
7.18	Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en $\theta_4$	45
7.19	Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en $\theta_4$	46
7.20	Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en $\dot{\theta}_4$	46
7.21	Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en $\dot{\theta}_4$	47
7.22	Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en $\theta_5$	47

7.23	Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en $\theta_5$	48
7.24	Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en $\dot{\theta}_5$	48
7.25	Evolución temporal de la potencia instantánea frente a una perturbación en $\dot{\theta}_5$	49
7.26	Evolución temporal de las variables generalizadas frontal-laterales frente a una perturbación en $\theta_3$ si $\tau_{cad_y}$ no fuese nulo	49
7.27	Evolución temporal de las variables generalizadas frontal-laterales frente a una perturbación en $\theta_3$ si $\tau_{cad_y}$ fuese nulo	50
7.28	Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en $\theta_3$ si $\tau_{cad_y}$ fuese nulo	50
7.29	Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en $\theta_3$ si $\tau_{cad_y}$ fuese nulo	51
7.30	Evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange frente a una perturbación en $\phi_2$	51
7.31	Evolución temporal de las variables generalizadas frontal-laterales frente a una perturbación en $\phi_2$	52
7.32	Evolución temporal de las variables generalizadas sagitales frente a una perturbación en $\phi_2$	52
7.33	Evolución temporal de los actuaciones frente a una perturbación en $\phi_2$	53
A.1	Diagrama de bloques simbólico de un sistema lineal dependiente del tiempo. Imagen extraída del libro: <i>Ingeniería de control moderna</i> [19]	57

# Bibliografía

---

- [1] <https://inmotion-store.com/es/producto/inmotion-v8/>.
- [2] [https://www.freepik.es/fotos-premium/adulto-joven-moderno-hombre-negocios-independiente-estudiante-hombre-conduciendo-transporte-electrico-ecologico-futurista-scooter-monociclo-electrico-ecologico-equilibrando-rueda-electrica-telefono-inteligente-planeta-ecologico\\_7935748.htm](https://www.freepik.es/fotos-premium/adulto-joven-moderno-hombre-negocios-independiente-estudiante-hombre-conduciendo-transporte-electrico-ecologico-futurista-scooter-monociclo-electrico-ecologico-equilibrando-rueda-electrica-telefono-inteligente-planeta-ecologico_7935748.htm), [Última visita: 2021-06-26].
- [3] <https://grabcad.com/library/inmotion-v8-1>.
- [4] <https://www.3dcontentcentral.es/Download-Model.aspx?catalogid=171&id=258845>.
- [5] AG Agúndez, D García-Vallejo, and E Freire, *Linear stability analysis of nonholonomic multibody systems*, International Journal of Mechanical Sciences **198** (2021), 106392.
- [6] Dennis E Anderson, Michael L Madigan, and Maury A Nussbaum, *Maximum voluntary joint torque as a function of joint angle and angular velocity: model development and application to the lower limb*, Journal of biomechanics **40** (2007), no. 14, 3105–3113.
- [7] J. Baumgarte, *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **1** (1972), no. 1, 1–16.
- [8] Ferdinand Pierre Beer, E Russell Johnston, Elliot R Eisenberg, and Robert G Sarubbi, *Mecánica vectorial para ingenieros*, no. 968-422-565-2. 04-A1 LU. CG-12., McGraw-Hill, 1967.
- [9] Máté Benjámín Vizi, Gábor Orosz, Dénes Takács, and Gábor Stépán, *Steering control of an autonomous unicycle*, arXiv e-prints (2023), arXiv–2307.
- [10] Alexander Bogdanov, *Optimal control of a double inverted pendulum on a cart*, Oregon Health and Science University, Tech. Rep. CSE-04-006, OGI School of Science and Engineering, Beaverton, OR (2004).
- [11] Xincheng Cao, Dang Cong Bui, Dénes Takács, and Gábor Orosz, *Autonomous unicycle: modeling, dynamics, and control*, Multibody System Dynamics **61** (2024), no. 1, 43–76.
- [12] Santiago Burbano De Ercilla, Enrique Burbano García, and Carlos Gracia Muñoz, *Física general*, Editorial Tébar, 2006.
- [13] Unai Escribano Aranbarri, *Robots de estructura flexible: Análisis, modelado y diseño de controladores*, (2019).

- [14] Oscar Danilo Montoya Giraldo, Juan Guillermo Valenzuela Hernández, and Didier Giraldo Buitrago, *Control global del péndulo rotacional invertido empleando modelos de energía*, *Scientia et Technica* **1** (2012), no. 52, 16–25.
- [15] ———, *Balaceo y estabilización del péndulo invertido empleando redes neuronales artificiales y un regulador lineal óptimo con criterio cuadrático (lqr)*, *Scientia et Technica* **18** (2013), no. 1, 32–41.
- [16] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko, *Classical mechanics*, 2001.
- [17] Christian Mares Angulo, *Desarrollo del control de equilibrio y cinemática de un robot auto-balanceado*, (2019).
- [18] Jerry B Marion, *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*, Reverté, 2014.
- [19] Katsujiko Ogata, *Ingeniería de control moderna quinta edición*, 2010.
- [20] Ramón Silva Ortigoza, Edgar Roberto Ramos-Silvestre, VM Hernández Guzmán, JC Rivera-Díaz, and HM Maldonado del Toro, *Modelado y simulación de un robot rígido de dos grados de libertad*, *Latin-American Journal of Physics Education* **5** (2011), no. 1, 41.
- [21] Juan Jose Padilla-Mora, *Diseño e implementación de un controlador no-lineal para un brazo robótico con articulaciones flexibles y enlaces rígidos*, *Revista Tecnología en Marcha* (2020), ág–160.
- [22] GERMÁN VELANDIA PELÁEZ, *Modelamiento, diseño y simulación de un sistema de control para un sistema de péndulo doble invertido.*, *Revista Clepsidra* **3** (2007), no. 4, 113–123.
- [23] N. Rac and M. Neagoe, *Rigid vs. flexible links dynamic analysis of a 3dof parallel robot*, 2009 3rd IEEE International Conference on Digital Ecosystems and Technologies (2009), 534–539.
- [24] Leonardo-Alonso Martínez Rivera, Omar López-Ortega, and Omar-Arturo Domínguez Ramírez, *Análisis de estabilidad de controladores borrosos tipo mamdani mediante el cálculo del exponente de lyapunov*, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* **12** (2015), no. 4, 446–456.
- [25] Ahmed A Shabana, *Dynamics of multibody systems*, (2005).
- [26] Mark W Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar, *Robot modeling and control*, John Wiley & Sons, 2020.
- [27] Brian L Stevens, Frank L Lewis, and Eric N Johnson, *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*, John Wiley & Sons, 2015.
- [28] Jesús Vázquez Valeo and Jaime Domínguez Abascal, *Teoría de máquinas y mecanismos*, 1 ed., Editorial Universidad de Sevilla-Secretariado de Publicaciones, 2020 (Spanish).
- [29] Sandeep Kumar Yadav, Sachin Sharma, and Narinder Singh, *Optimal control of double inverted pendulum using lqr controller*, *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering* **2** (2012), no. 2.