

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Diseño y optimización de un cohete de sondeo

Autor: Daniel Martínez Pino
Director: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2014



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Diseño y optimización de un cohete de sondeo

Autor:

Daniel Martínez Pino

Director:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor Titular

Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

2014

Trabajo Fin de Grado: Diseño y optimización de un cohete de sondeo

Autor: Daniel Martínez Pino
Director: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

*La exploración espacial seguirá adelante, nos unamos o no,
y es una de las grandes aventuras de todos los tiempos.*

(John Fitzgerald Kennedy, 12 de septiembre de 1962)

Índice

1	Introducción	1
1.1	Requisitos del vehículo	2
1.2	Historia de la cohetaría	2
1.3	Antecedentes: la industria espacial en España	3
1.4	Conceptos iniciales	3
2	Estudio Aerodinámico. Cálculo de la resistencia	5
2.1	Régimen subsónico	5
2.1.1	Estudio de la región externa. Teoría de Cuerpos Esbeltos	5
	Estudio del fuselaje	10
2.1.2	Estudio de la capa límite	20
2.1.3	Análisis con Software Computacional	23
	Procedimiento	23
	Ojiva parabólica	27
	Ojiva cónica	29
	Ojiva esférica	31
	Ojiva cónica con punta esférica	33
2.1.4	Análisis de resultados y conclusiones	35
2.2	Régimen supersónico	39
	Análisis mediante la Teoría de Cuerpos esbeltos	45
	Análisis mediante Software Computacional	48
	Análisis de resultados y conclusiones	51
2.3	Cálculo del centro de presiones. Estudio de la estabilidad	53
2.4	Conclusiones. Diseño preliminar del cuerpo.	55
3	Estudio Propulsivo	57
3.1	Introducción a los propelentes sólidos	58
3.2	Fundamentos teóricos del análisis del motor	59
3.2.1	Definiciones fundamentales	59
3.2.2	Tobera. Teoría de Gases. Optimización	60
	Consideraciones sobre la tobera real	64
	Configuraciones geométricas básicas	64
3.3	Propelentes químicos	66
3.4	Propelentes químicos sólidos.	68
3.4.1	Conceptos básicos. Clasificación	68
3.4.2	Grano de propelente	71
3.4.3	Componentes principales de los propelentes sólidos	73
	Oxidantes inorgánicos	73
	Combustibles	73
	Aglutinantes	73
	Modificadores de la velocidad de combustión	73

	Plastificantes	73
	Agentes de curado	74
	Aglutinantes y plastificantes energéticos	74
	Oxidantes orgánicos o explosivos	74
	Aditivos	74
	3.4.4 Consideraciones de seguridad	74
3.5	Combustión de propelentes sólidos. Velocidad de quemado	76
3.6	Consideraciones de diseño. Sistemas del motor	79
	3.6.1 Proceso de ignición. Ignitores	79
	3.6.2 Alineantes, aislantes e inhibidores	80
	3.6.3 La carcasa. Materiales. Diseño y fabricación	80
	3.6.4 La tobera. Materiales y diseño	81
3.7	Elección del propelente	84
	3.7.1 Compuestos posibles	84
	Compuestos de nitrato potásico	84
	Compuestos de nitrato amónico	84
	Compuestos de perclorato amónico	85
	3.7.2 Análisis preliminar	85
	Compuestos de nitrato potásico	85
	Compuestos de nitrato amónico	88
	Compuestos de perclorato amónico	89
	Conclusiones	90
3.8	Prediseño del motor	91
	3.8.1 Prediseño de la cámara de combustión	91
	3.8.2 Prediseño de la tobera	97
3.9	Experimentación	103
4	Diseño estructural	105
	4.1 Cuestiones introductorias	105
	4.2 Cuerpo principal	105
	4.3 Cámara de combustión y tobera	109
	4.4 Superficies estabilizadoras	114
5	Desarrollo del vuelo	117
6	Conclusiones y líneas de desarrollo futuras	121
7	Anexos	125
	7.1 Anexo I: Planos del cohete	126
	7.2 Anexo II: Planos del banco de ensayo	131
	<i>Bibliografía</i>	137

1 Introducción

El presente Trabajo Fin de Grado nace de un gran interés personal hacia la Ingeniería Espacial y el desarrollo de vehículos lanzadores para pequeños dispositivos. Durante los últimos tres años, dentro de la asociación LEEM (Laboratorio para la Experimentación en el Espacio y Microgravedad) de la Universidad de Sevilla, se ha conformado un grupo dedicado al diseño y fabricación de cohetes de sondeo. Esta iniciativa surge como un proyecto divulgativo para dar a conocer esta rama de la Ingeniería y con la intención de servir de plataforma para la experimentación y prueba de sistemas electrónicos, bajo las condiciones que provee el vuelo de un cohete dentro de un amplio rango de altura y de condiciones de velocidad, temperatura y presión.

Durante los últimos años, la industria espacial ha experimentado una progresiva transformación hacia un modelo que depende, cada vez menos, de las agencias gubernamentales y con mayor participación de las empresas privadas. Este hecho, junto con el abaratamiento de sistemas electrónicos, ha hecho posible que el sector sea más abierto a iniciativas y empresas, siendo el mercado de los microsátélites y picosátélites un nicho de especial importancia. En estas condiciones, el desarrollo de sistemas de lanzamiento a bajas alturas y que resulten económicos frente a los altísimos presupuestos de las grandes compañías lanzadoras, cobra especial relevancia.

Por otra parte, el diseño de equipos de Aviónica requiere de plataformas de ensayo de bajo coste y que lleven los sistemas a situaciones extremas. Las aceleraciones y gradientes que se alcanzan en un cohete de sondeo hacen de éste un medio sencillo para este fin.

Con todo esto y asumiendo unas perspectivas realistas, se propone desarrollar un cohete de sondeo de combustible sólido con el objetivo de optimizar el diseño desde los puntos de vista aerodinámico y propulsivo, siendo capaz de llevar cargas de peso del orden de 5 Kg y que opere en el rango de alturas de la Troposfera. La idea fundamental es servir de partida para futuros diseños que doten a la Universidad de un medio de experimentación y estudio eficaz y asequible. Se decide otorgarle al proyecto el nombre de **ANDALUS SR-1**, debido a ser de origen andaluz (*ANDAL-*), más exactamente de la Universidad de Sevilla (*-US*), estar catalogado como cohete de sondeo (*SR: Sounding Rocket*) y ser el primero en producción.

Además del propio objetivo del diseño, la realización del presente proyecto pretende también realizar un análisis de los distintos métodos de estudio aerodinámico aplicados a cuerpos esbeltos, incluyendo la utilización de software computacional. Al mismo tiempo, se persigue también profundizar en la actuación de motores de combustible sólido y en la optimización de su operación.

Con estas premisas, se lleva a cabo un análisis de distintas geometrías posibles con distintas herramientas de análisis que serán comparadas, tanto en régimen subsónico como supersónico. Posteriormente, se desarrolla un estudio propulsivo, con un estudio teórico de los aspectos que atañen a un motor cohete de combustible sólido, estimando su operación y optimizando el diseño de acuerdo a los parámetros de la propia cámara de combustión. Se aprovecha, al mismo tiempo, para hacer un repaso del "*estado del arte*" de los motores cohete. Por último se lleva a cabo el diseño de acuerdo a las premisas aerodinámicas y propulsivas ya establecidas y se analizará el vuelo del vehículo para establecer sus prestaciones.

1.1 Requisitos del vehículo

Como primer paso, se establecen una serie de requisitos operacionales, de diseño y de fabricación, que se deberán cumplir en la medida de lo posible:

- El vehículo está diseñado para operar en la Troposfera (en el rango de 0-11 Km).
- Se debe asegurar en todo momento la estabilidad durante el vuelo.
- Se usarán combustibles sólidos por su facilidad de fabricación y manipulación, así como por su disponibilidad (compuestos basados en percloratos o nitratos).
- El cohete debe disponer de espacio para un sistema de recuperación basado en paracaídas y todo el hardware adicional.
- Debe diseñarse para albergar una carga de pago que supere un kilogramo de peso, sin contar la electrónica necesaria para el seguimiento y el análisis de la misión.

1.2 Historia de la cohetaría

Tras coronar el Monte Everest, al escalador británico George Mallory le preguntaron por el motivo de su arriesgada misión. Simplemente, respondió: *Lo hice porque estaba ahí.*

Si bien la ingeniería espacial y los cohetes, tal y como los conocemos hoy, forman parte de la Historia reciente de la Humanidad, el ser humano ha experimentado siempre gran asombro y curiosidad por el espacio. No se trata únicamente del espacio; en nuestra naturaleza existe una gran inquietud por ir hacia el horizonte, buscando qué hay *más allá*. El espíritu descubridor de las personas las ha llevado a nuevas y desconocidas geografías, cumpliendo así los grandes hitos del pasado. El espacio, *la última frontera*, es el último horizonte hacia el que viajar para descubrir y entender mejor lo que nos rodea.

Habiendo que esperar hasta el siglo XVII para conocer los fundamentos físicos del movimiento de los cohetes, ya en la Antigua Grecia, hace aproximadamente 2000 años, Herón de Alejandría construyó la primera máquina térmica, el eolípila o aerófilo. Su funcionamiento era bastante parecido al de un motor cohete, usando vapor de agua a presión para hacer girar una esfera.

Algo más parecido a los cohetes actuales eran los cohetes de pólvora chinos, usados tanto para fuegos artificiales como con fines bélicos. La experimentación llevó a los artificieros chinos a considerar diseños y estructuras similares a un cohete de hoy en día. El uso militar de estas cargas propulsadas por pólvora resultó decisiva en campañas militares como las de mongoles o árabes.

Ya en Europa, científicos de diversas nacionalidades estudiaron formas de mejorar las prestaciones de los inventos de sus predecesores chinos, principalmente con fines militares. Es en 1379 cuando el italiano Muratori empleó la palabra *rochetta* para describir las flechas propulsadas que se usaban entonces.

Las Leyes enunciadas por Newton en el siglo XVII hicieron posible comprender cómo funciona un cohete y su movimiento, lo cual permitió alcanzar nuevas metas. Famosos son los cohetes usados por las tropas inglesas durante los siglos XVIII y XIX en sus distintas contiendas, pero sin llegar a sustituir a los cañones y demás piezas de artillería.

Al mismo tiempo, soñadores de la época idearon vehículos con los que poder volar propulsados por motores cohete. Pese a la capacidad inventiva de científicos como Kibalchich, Ganswidnt o Paulet, todos los diseños se quedaron en conceptos teóricos y no se pusieron en práctica, a excepción de los ensayos experimentales del peruano Pedro Paulet.

Una vez comprendido el funcionamiento básico de estos vehículos con los Principios o Leyes de Newton, en el siglo XIX nació Konstantin Tsiolkovsky, conocido como el padre de la Astronáutica. Su papel en el estudio teórico de los motores cohete es fundamental, realizando los primeros trabajos sobre motores de propulsante líquido como alternativa más eficaz a la pólvora y otras soluciones sólidas. Desarrolló diseños de estaciones espaciales autosuficientes, otorgándole un rigor científico a ideas que, hasta entonces, habían pertenecido a la literatura de ciencia y ficción.

Iniciado el siglo XX comienza la era espacial, con los grandes progresos de ingenieros y científicos como Herman Oberth, Robert Goddard, Wernher Von Braun, Sergei Korolev y las grandes agencias espaciales. Cabe destacar, entre otros hitos, el cohete alemán V-2 (primer misil balístico), el lanzador americano Saturn V y los hechos acontecidos durante la carrera espacial, protagonizada principalmente por el lanzamiento

del Sputnik (1957), los primeros satélites de comunicaciones, los primeros vuelos tripulados (Yuri Gagarin y John Glenn) y, por último, el programa Apollo y la llegada del hombre a la Luna (1969). Al acabar la carrera espacial se inició una época de estrecha colaboración internacional, plasmada, sobre todo, en la actual Estación Espacial Internacional (ISS) y una progresiva apertura y comercialización del mercado espacial. Han sido cuantiosos los avances y descubrimientos que se han producido desde que Armstrong y Buzz Aldrin pisaran la Luna. El ser humano ha conseguido ampliar sus horizontes, consiguiendo incluso salir del sistema solar (Voyager 1) y explorando los planetas cercanos y el Sol con satélites y vehículos no tripulados. Asimismo, los satélites geocéntricos han mejorado las comunicaciones, la recopilación de datos terrestre, el conocimiento de nuestro planeta y el impacto medioambiental y social de fenómenos naturales y artificiales, etc.

Los avances tecnológicos y el abaratamiento de ciertos componentes abre, actualmente, nuevas perspectivas para las empresas privadas y las instituciones educativas. Al mismo tiempo, se buscan soluciones más baratas, fiables y con gran disponibilidad en lanzadores adaptados al nuevo mercado espacial. Si bien el desarme de los misiles intercontinentales (ICBM) posibilita su uso para estas misiones, también resulta interesante considerar posibles líneas de investigación y desarrollo.

1.3 Antecedentes: la industria espacial en España

Desde su creación en 1942, el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (**INTA**) ha vertebrado la investigación del sector espacial en nuestro país.

Concebido para promover el desarrollo industrial, ha sido uno de los grandes pilares del desarrollo aeronáutico. Durante los años sesenta llevó a cabo ciertos acuerdos con la NASA, dando lugar también a la creación de la Comisión Nacional de Investigación del Espacio. Desde el Centro de Experimentación de El Arenosillo, en Huelva, se diseñan, construyen y prueban cohetes de sondeo con fines científicos. Entre los mayores logros que se alcanzaron es de relevancia citar el INTA 255 (primer cohete de sondeo del INTA), el INTA 300 y el INTA 100. El programa finalizó en 1994, aunque el trabajo de investigación continúa vigente.

Durante los años setenta, el Instituto da un gran paso adelante con la construcción del primer satélite español (*INTASAT*) que, durante dos años, estuvo orbitando recopilando datos de la Ionosfera. Este hecho, además de su importancia y de los resultados científicos obtenidos, sirvió como predecesor a programas de satélites y minisatélites posteriores.

En colaboración con las agencias europeas, el INTA se ha ido afianzando desde entonces como núcleo de la evolución tecnológica dentro del sector.

Junto con el INTA, empresas privadas, como Deimos Imaging o GMV, y diversas instituciones académicas llevan a cabo importantes proyectos dentro de la industria espacial, si bien la facturación del sector se mantiene muy inferior al de la Aeronáutica. Dentro de la producción de cohetes, no existe ningún programa importante totalmente español, aunque sí se trabaja con empresas y consorcios internacionales, como EADS o la Agencia Espacial Europea, en ciertos vehículos.

Si bien un proyecto de construcción de un lanzador propio puede no resultar atractivo o rentable desde el punto de vista empresarial, el sector espacial presenta un nicho de mercado aún por copar.

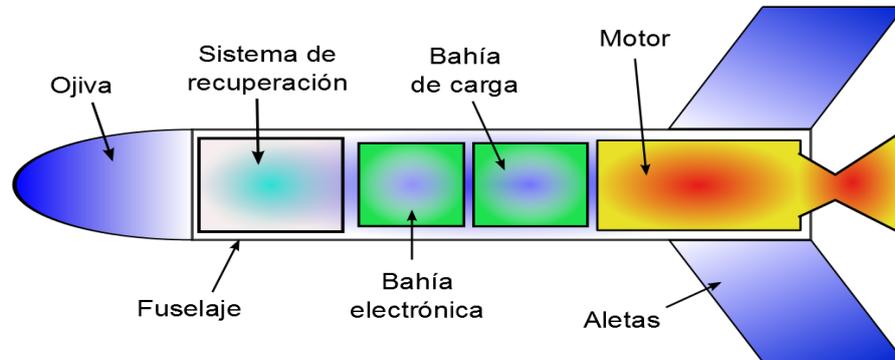
El papel español, aunque desconocido mediáticamente, se desarrolla dentro de los principales proyectos internacionales. En conjunto, son dieciocho compañías las que trabajan en el sector espacial, con una inversión del orden del 12% en I+D, superando a otras industrias. A fecha de hoy, la gran meta de las empresas espaciales españolas debe dirigirse hacia una gran empresa o consorcio que sea capaz de competir a nivel internacional y servir de contratista para las agencias espaciales. Es inusual encontrar una sonda o vehículo que despegue de la superficie terrestre que no cuente con algún equipo o sistema desarrollado por españoles.

1.4 Conceptos iniciales

Un cohete de sondeo es un vehículo tremendamente sencillo desde un punto de vista conceptual, pero su complejidad aumenta considerablemente a lo largo de su diseño y construcción. Las condiciones de temperatura y presión a las que se somete el vehículo condicionan su concepción y los materiales que pueden ser empleados. Este hecho se vuelve excepcionalmente crítico al tratar el motor cohete y la tobera de salida de gases, elementos que hay que analizar con especial atención para evitar accidentes como detonaciones o

explosiones y reducir el daño estructural durante el vuelo.

De forma resumida, un cohete de sondeo queda formado por un cuerpo principal fuselado, las aletas, la ojiva, el motor junto con la tobera y los distintos sistemas de a bordo, para seguimiento y recopilación de datos.



El cuerpo, de material compuesto o metálico, alberga todos los demás elementos del vehículo. Puede ser un cilindro o tener sección variable, según las necesidades. A su vez, puede ser una única pieza, estar formado por módulos o secciones y disponer o no de una estructura interna de cuernas y largueros.

Las aletas son piezas de espesor muy pequeño que dotan de estabilidad al cohete a través del desplazamiento del centro de presiones, el cual debe estar, en todo momento, por debajo del centro de gravedad. Con ellas se consigue atrasar el centro de presiones y garantizar el vuelo estable.

La ojiva es la punta del cohete. Su geometría y estructura tiene numerosas opciones y es el elemento que más afecta a la resistencia. Puede aprovecharse para cargar sistemas.

El motor y la tobera constituyen el sistema de propulsión. En el motor se produce la reacción del propelente (mezcla de agentes químicos que proporcionan la energía necesaria) y los gases se aceleran en la tobera para generar el empuje necesario.

Entre los sistemas que es necesario incorporar se distinguen aquellos que alberga la bahía electrónica (las partes internas se dividen en bahías) y otros como son el sistema de aislamiento, el sistema de eyección del paracaídas y el sistema propio de recuperación. Dentro de la bahía electrónica deben ir los equipos que permitan tener datos de la actuación de la misión (altímetro, acelerómetros, etc.), situar la posición del cohete (localizador GPS) y otros en función del propósito del vuelo. Además de la bahía de sistemas electrónicos, se introduce una bahía de carga para los posibles experimentos a transportar.

2 Estudio Aerodinámico. Cálculo de la resistencia

En Aerodinámica hay dos fuentes que contribuyen a la resistencia que presenta un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido. Existe la resistencia de fricción o viscosa, resultado de los esfuerzos viscosos sobre la superficie del cuerpo; y la resistencia de presión, fruto de la distribución de presiones alrededor del objeto. En vuelo supersónico (número de Mach $M_\infty > 1$), la resistencia de presión es más conocida como resistencia de onda y los esfuerzos viscosos son mucho menores. En vuelo subsónico, hay que considerar tanto la resistencia de fricción como la de presión. En el transónico se producen una serie de fenómenos de alta complejidad que son difíciles de analizar y que impiden tener constancia de la resistencia, salvo mediante medidas experimentales. Lo que sí se conoce es que la resistencia experimenta un aumento considerable. En el vuelo del cohete, el ángulo de ataque es nulo por lo que no se considera la componente de resistencia inducida por la sustentación.

Se analiza entonces la resistencia en los distintos regímenes de vuelo posibles, empezando por el subsónico con la aplicación de la Teoría de Cuerpos Esbeltos y la Teoría de Capa Límite y, posteriormente, el supersónico. Para ello se emplean tres métodos de estudio: la Teoría Potencial, la simulación mediante un código de dinámica fluida computacional (CFD) y resultados experimentales.

2.1 Régimen subsónico

Se distinguen dos regiones en el dominio fluido:

- El dominio exterior en el que los efectos viscosos son despreciables y el flujo es potencial.
- La capa límite, que es la zona en la que la velocidad pasa de ser nula en la superficie a tener el valor de la corriente exterior. Es la zona en la que hay que considerar los efectos de la viscosidad.

2.1.1 Estudio de la región externa. Teoría de Cuerpos Esbeltos

El cohete es un cuerpo con aletas al final, con dimensiones características tales que el espesor característico es mucho menor que la longitud. Respecto a las aletas, la cuerda de las mismas en la raíz es mucho mayor que sus espesores.

Los efectos viscosos están confinados a una capa límite de espesor $\delta_v \sim \frac{L}{\sqrt{Re_\infty}}$ y, como el número de Reynolds es tal que $Re_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty} \gg 1$, se pueden despreciar los efectos de viscosidad pues la región en la que influyen tiene un espesor característico despreciable frente a la longitud del cuerpo. De igual forma ocurre con los efectos de transmisión térmica, confinados a una capa límite térmica del orden de $\delta_t \sim \frac{\delta_v}{\sqrt{Pr}}$, donde Pr es el número de Prandtl del aire, que es de orden unidad.

Por tanto, a alto Re y bajo ángulo de ataque, el fluido se puede considerar ideal en todo el dominio salvo en la capa límite y la estela.

El interés reside en obtener los campos de velocidad, presión y densidad y, para ello, se usan las cinco ecuaciones de conservación: continuidad, cantidad de movimiento y entropía.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla \cdot (\vec{v}) = -\nabla(p) + \mu \nabla^2 \cdot (\vec{v}) + \rho g \quad (2.2)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \quad (2.3)$$

Se considera que el problema es estacionario o cuasiestacionario ($S_t = \frac{tR}{t_0} \ll 1$), por lo que se desprecian las derivadas temporales. De igual forma ocurre con los esfuerzos viscosos ($Re \gg 1$) y las fuerzas másicas ($Fr = \frac{U_\infty^2}{gL} \gg 1$).

El hecho de que se vuele a ángulo de ataque muy pequeño y que tanto el cuerpo como las aletas sean esbeltas, hace que el flujo no se perturbe en exceso, por lo que los campos de presión, velocidad y densidad se pueden considerar como una superposición de su valor en la corriente no perturbada más la perturbación inducida por el cuerpo:

$$\vec{v}(x,y,z) = \vec{U}_\infty + \vec{v}'(x,y,z), \text{ donde } v' \ll U_\infty \quad (2.4)$$

$$p(x,y,z) = p_\infty + p'(x,y,z), \text{ donde } p' \ll p_\infty \quad (2.5)$$

$$\rho(x,y,z) = \rho_\infty + \rho'(x,y,z), \text{ donde } \rho' \ll \rho_\infty \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

Dado el sistema de ecuaciones simplificado de acuerdo a las hipótesis anteriores:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\rho \vec{v} \nabla \cdot (\vec{v}) = -\nabla(p) \quad (2.9)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \quad (2.10)$$

Se procede, en este punto, a lo que se conoce como linealizar en las perturbaciones, que consiste en despreciar el producto de dos perturbaciones frente al de una perturbación por un valor no perturbado o el de dos valores en la corriente exterior:

$$[]' []' \ll [] []' \ll [] [] \quad (2.11)$$

De esta forma:

$$\rho \vec{v} = (\rho_\infty + \rho')(\vec{U}_\infty + \vec{v}') = \rho_\infty \vec{U}_\infty + \vec{U}_\infty \rho' + \rho_\infty \vec{v}' \quad (2.12)$$

La ecuación de continuidad desarrollada quedaría como sigue:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \nabla \cdot (\rho_\infty \vec{U}_\infty + \vec{U}_\infty \rho' + \rho_\infty \vec{v}') = \vec{U}_\infty \nabla \cdot (\rho') + \rho_\infty \nabla \cdot (\vec{v}') = 0 \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\vec{v}') = -\frac{1}{\rho_\infty} U_\infty \frac{\partial \rho'}{\partial x} \quad (2.14)$$

Y la de cantidad de movimiento:

$$\left. \begin{aligned} \rho \vec{v} \nabla \cdot (\vec{v}) &= -\nabla(p) \\ \vec{v} &= \vec{U}_\infty + \vec{v}' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{v}) = \nabla \cdot (\vec{v}') \Rightarrow \rho \vec{v} \nabla \cdot (\vec{v}') = -\nabla(p') \quad (2.15)$$

$$\left[\rho_\infty U_\infty \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x} = -\nabla(p') \right] \quad (2.16)$$

Tomando el rotacional de la ecuación se demuestra que la velocidad de perturbación deriva de una función

potencial:

$$\rho_{\infty} U_{\infty} \nabla \times \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \vec{v}') = 0 \quad (2.17)$$

Se define el potencial de velocidades de perturbación ϕ como aquel tal que $\vec{v}' = \nabla \cdot \phi$. En consecuencia, el problema se reduce a obtener el potencial ϕ , a partir del cual se resuelven el resto de parámetros.

De la ecuación de cantidad de movimiento se obtiene que:

$$p' = -\rho_{\infty} U_{\infty} u \quad \forall (x, y, z) \quad (2.18)$$

Y, por tanto, el coeficiente de presiones es: $C_p = \frac{p(x, y, z) - p_{\infty}}{1/2 \rho_{\infty} U_{\infty}^2} = \frac{p'}{1/2 \rho_{\infty} U_{\infty}^2}$

A partir de la ecuación de la entropía se puede obtener la densidad:

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}^{\gamma}} = (p_{\infty} + p')(\rho_{\infty} + \rho')^{-\gamma} = \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}^{\gamma}} \left(1 + \frac{p'}{p_{\infty}}\right) \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_{\infty}}\right)^{-\gamma} \simeq \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}^{\gamma}} \left(1 + \frac{p'}{p_{\infty}}\right) \left(1 - \gamma \frac{\rho'}{\rho_{\infty}}\right) \simeq \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}^{\gamma}} \left(1 + \frac{p'}{p_{\infty}} - \gamma \frac{\rho'}{\rho_{\infty}}\right) \quad (2.19)$$

$$(2.20)$$

Para el desarrollo anterior se ha usado que una función del tipo $f(\eta) = (1 + \eta)^{\alpha}$, siendo $\eta \ll 1$, se puede aproximar como $f(\eta) \simeq 1 + \alpha \eta$.

Se llega de esta forma a una relación entre la presión y la densidad:

$$p' = \gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} \rho' = a_{\infty}^2 \rho' \quad (2.21)$$

Siguiendo este procedimiento se obtiene la ecuación potencial de velocidades:

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.22)$$

$$(2.23)$$

Si $M_{\infty} < 1$, se trata de un problema de Aerodinámica Subsónica; siendo Supersónica si el número de Mach es superior a 1. Los efectos de compresibilidad debidos al número de Mach son despreciables si $M_{\infty} \ll 1$. Debido a la geometría del problema, es de interés transformar las ecuaciones de coordenadas cartesianas x, y, z a coordenadas cilíndricas x, r, θ :

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

Esta ecuación está sujeta a dos condiciones de contorno:

- Condición de impenetrabilidad: $(\vec{v}' + \vec{U}_{\infty}) \cdot \vec{n} = (\nabla \phi + \vec{U}_{\infty}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r}(x, R) = U_{\infty} \frac{\partial R(x)}{\partial x}$.
- Perturbaciones nulas lejos del cuerpo: $\phi(x, r \rightarrow \infty, \theta) = 0$.

Se considera que el flujo en torno al cuerpo es paralelo al eje, es decir, el cuerpo no sustenta y la corriente es axilsimétrica.

La solución al problema resulta de la superposición de un potencial externo ϕ_e y un interno ϕ_p . La hipótesis de vuelo a ángulo de ataque nulo permite despreciar la dependencia con θ , de forma que la ecuación del potencial queda tal y como se ve a continuación:

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (2.26)$$

Para la región externa, las condiciones de contorno son:

- $\frac{\partial \phi}{\partial r} = U_\infty \frac{\partial R(x)}{\partial x}$.
- $\phi(x, r \rightarrow \infty, \theta) = 0$.

La solución a la ecuación diferencial es un manantial de la forma:

$$\phi_e = \frac{A(x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + \beta^2 r^2}}, \text{ donde } \beta^2 = |1 - M_\infty^2| \text{ y } r^2 = y^2 + z^2 \quad (2.27)$$

Una superposición de manantiales también es solución al problema, por lo que el flujo en torno al cuerpo se modela como una superposición de manantiales de intensidad $f(x_0)dx_0$ situados a lo largo del eje:

$$\phi_e = -\frac{1}{4\pi} \int_0^l \frac{f(x_0)dx_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + \beta^2 r^2}} \quad (2.28)$$

Para que se cumpla la condición de contorno de impenetrabilidad, la intensidad de los manantiales debe ser: $f(x_0) = U_\infty \frac{\partial S}{\partial x}(x = x_0)$.

Desarrollando la integral:

$$\phi_e = -\frac{1}{4\pi} \int_0^l \frac{f(x_0)dx_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + \beta^2 r^2}} = -\frac{1}{4\pi} \left[f(x) \int_0^l \frac{dx_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + \beta^2 r^2}} - \int_0^l \frac{f(x) - f(x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + \beta^2 r^2}} \right] \quad (2.29)$$

$$(2.30)$$

La primera de las dos integrales se puede calcular por métodos numéricos, no así la segunda. Se tiene el siguiente resultado:

$$\int_0^l \frac{dx_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + \beta^2 r^2}} = -\int_0^l \frac{d\left(\frac{x-x_0}{\beta r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x-x_0}{\beta r}\right)^2 + 1}} = -\ln \left[\frac{x-x_0}{\beta r} + \sqrt{\left(\frac{x-x_0}{\beta r}\right)^2 + 1} \right]_0^l \quad (2.31)$$

Si se hace tender r a cero, se obtiene que:

$$\phi_e(x, r \rightarrow 0) = \frac{U_\infty S'(x)}{2\pi} \left[\ln(r) + \ln\left(\frac{\beta}{2\sqrt{x(l-x)}}\right) \right] + \frac{U_\infty}{4\pi} \int_0^l \frac{S'(x) - S'(x_0)}{x-x_0} dx_0 \quad (2.32)$$

Respecto al campo fluido cercano, las perturbaciones longitudinales son mucho menores que las transversales, con lo que el problema se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \phi_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_a}{\partial r} = 0 \quad (2.33)$$

Con las respectivas condiciones de contorno:

- $\frac{\partial \phi_a}{\partial r} = U_\infty \frac{\partial R}{\partial x}$
- $\phi_a(x, r \rightarrow \infty) = \phi_e(x, r \rightarrow 0)$

La solución a la ecuación diferencial es:

$$\phi_a = \frac{1}{2\pi} U_\infty S'(x) \ln(r) + g(x) \quad (2.34)$$

Donde $g(x)$ resulta del acoplamiento con el campo externo:

$$g(x) = \frac{U_\infty S'(x)}{2\pi} \ln\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{U_\infty}{4\pi} \int_0^x S''(x) \ln(x-x_0) dx_0 + \frac{U_\infty}{4\pi} \int_x^l S''(x) \ln(x_0-x) dx_0 \quad (2.35)$$

La resolución del problema presentado permite obtener la resistencia de presión que presenta el cuerpo al moverse por el fluido. Esta se define según sigue:

$$D_P = \int_{S_{lat}} -(p - p_\infty)n_x d\sigma + \int_{S_{base}} -(p - p_\infty)n_x d\sigma \quad (2.36)$$

El primer término de la resistencia es la debida al espesor y, el segundo, la resistencia de base. La resistencia de base es difícil de calcular de forma analítica pues la corriente se desprende tras el cuerpo para adaptarse a la forma del mismo, además de estar presente el hecho de ser la zona donde se expulsan los gases de la tobera. Suele recurrirse a la experimentación.

Respecto a la debida al espesor:

$$n_x = -\cos(\psi) \quad (2.37)$$

$$-d\sigma \cos(\psi) = \frac{\partial S}{\partial x} dx \quad (2.38)$$

Así, se llega a:

$$D = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \int_0^l C_P(x) S'(x) dx \quad (2.39)$$

Es necesario conocer el coeficiente de presiones a lo largo del cuerpo:

$$C_P = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = 1 - \frac{v^2}{U_\infty^2} = -\frac{2u}{U_\infty} - \frac{v_r^2}{U_\infty^2} \quad (2.40)$$

Las velocidades longitudinal u y radial v_r , derivan del potencial de velocidades.

Estudio del fuselaje

Se consideran, llegados a este punto, diversas geometrías de ojiva y cuerpo para una longitud dada. Para comenzar se estudia una ojiva parabólica para ver la influencia de su longitud y del radio del fuselaje.

Se decide tomar un cuerpo de dos metros de longitud incluyendo a la ojiva, la cual se define de la siguiente forma:

$$z(x,y) = \sqrt{R(x)^2 - y^2}, \text{ siendo } R(x) = \begin{cases} R(2 - \frac{x}{h})\frac{x}{h}, & x \leq h \\ R, & x > h \end{cases} \quad (2.41)$$

De cara a conocer cómo afecta la modificación del radio del fuselaje, se fija la longitud de la ojiva a medio metro, y se hace variar el radio entre 10 y 50 cm.

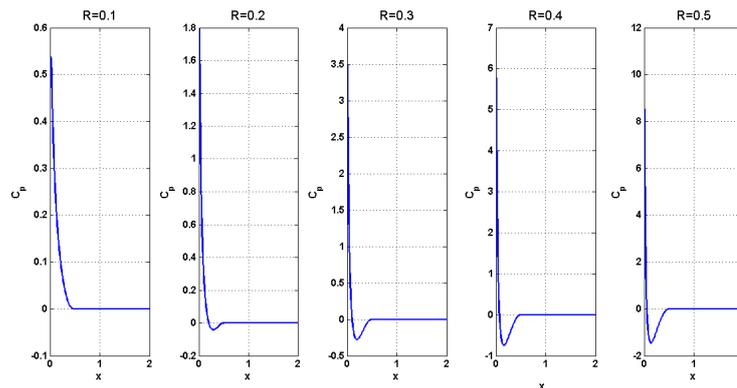


Figura 2.1 Coeficiente de presiones en función del radio del cuerpo.

Tal y como era de esperar, a mayor radio (o, lo que es lo mismo, a menor esbeltez), el gradiente adverso al que se somete la corriente es mayor y es de esperar que se desprenda. Una indicación de esto se encuentra en el coeficiente de resistencia (calculado como $C_D = D / (\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S)$, el cual presenta valores negativos, lo cual sería ideal pero no es lo que ocurre realmente. Al contrario, la corriente se desprende y, a mayor radio, esto ocurre antes, incrementando la resistencia. La Teoría Potencial presenta, por tanto, un fallo en estos resultados.

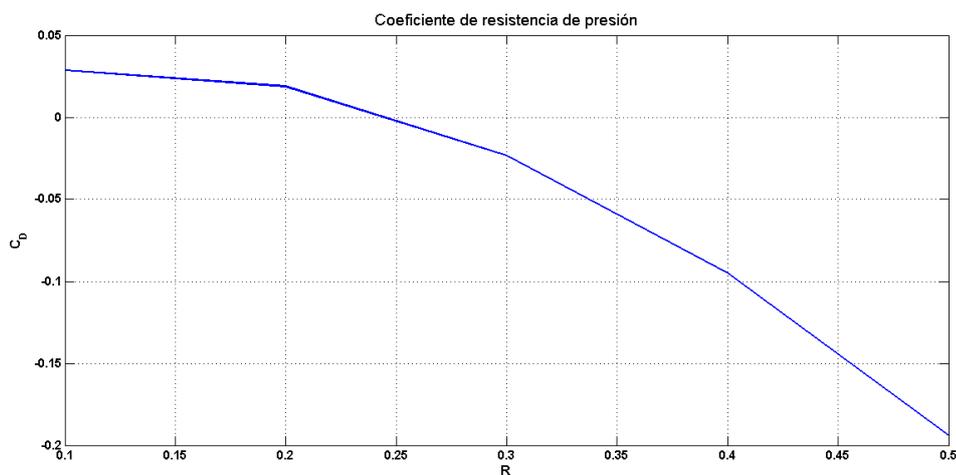


Figura 2.2 Coeficiente de resistencia en función del radio del cuerpo.

Por otra parte, si se mantiene constante el radio del cuerpo y lo que se modifica es la longitud de la ojiva, se comprueba que a mayor longitud, más suave es la evolución del coeficiente de presiones, pudiendo conseguirse incluso que la capa límite no se desprenda. Con ello, la resistencia se hace menor. Para longitudes muy cortas, el gradiente adverso es muy fuerte al principio del vehículo y la corriente se desprende, por lo que los datos proporcionados de resistencia no son útiles.

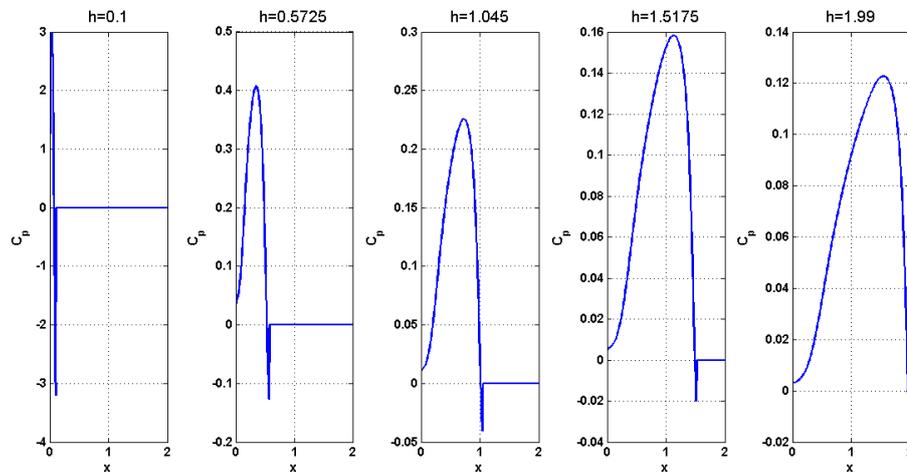


Figura 2.3 Coeficiente de presiones en función de la longitud de la ojiva.

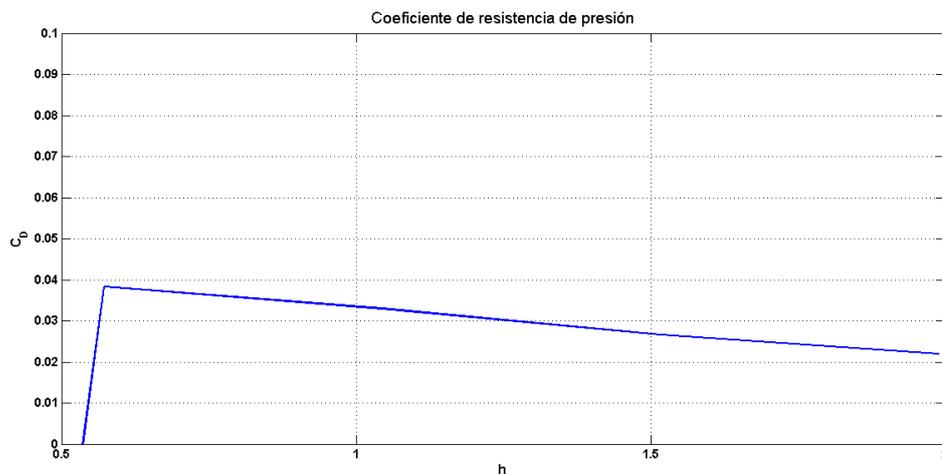


Figura 2.4 Coeficiente de resistencia en función de la longitud de la ojiva.

Los resultados expresados hacen ver que cuanto más esbelto es el cuerpo y más suave es la distribución de áreas, menor es el gradiente al que se somete la corriente y, por tanto, también es menor la resistencia. Se puede ver que hay desprendimiento porque la resistencia al crecer el radio debe tener una tendencia ascendente. Sin embargo, en las gráficas existe un punto en el que la resistencia comienza a disminuir. Se prueban distintas geometrías para comprobar sus propiedades y poder elegir la más idónea.

- **Ojiva parabólica**

Como primer caso se ha considerado una ojiva cuyo radio evoluciona parabólicamente, esto es, de la forma: $R(x) = a\left(\left(\frac{x}{h}\right)^2 - \frac{x}{h}\right) + R\frac{x}{h}$, donde a es un número real.

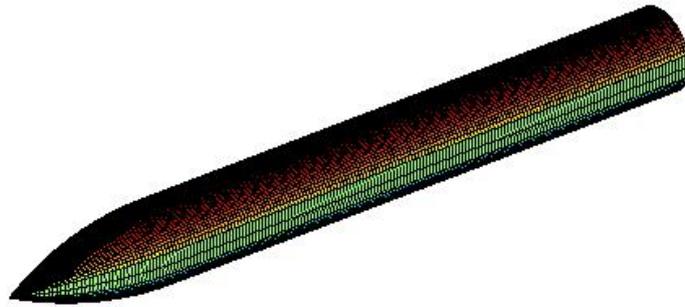


Figura 2.5 Geometría del cohete con ojiva parabólica.

Considerando varios radios y longitudes, e ignorando los resultados negativos fruto del desprendimiento de la corriente, se tienen los siguientes valores del coeficiente de resistencia para $a = R$:

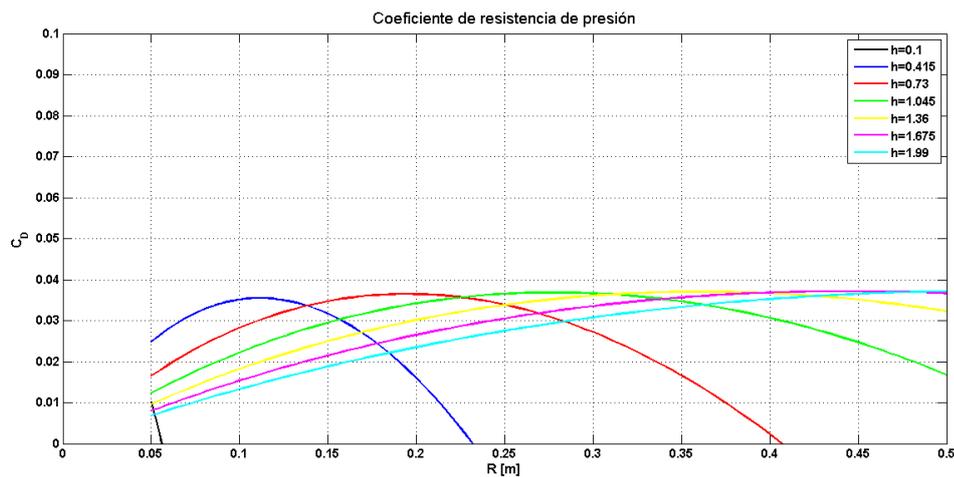


Figura 2.6 Coeficiente de resistencia para ojiva parabólica en función del radio (eje x) y longitud de ojiva.

Lo ideal sería tener una ojiva lo más larga posible, pero se opone a la necesidad de otros sistemas que deben ir alojados en el cuerpo.

En un prediseño inicial se considera que la longitud total del cohete se encuentra en torno a los dos

metros. Resulta una buena aproximación, de acuerdo con los resultados anteriores, escoger una ojiva de unos 40 centímetros de longitud. Menor longitud provocaría que la resistencia se disparase y mayor limitaría excesivamente el espacio disponible. Existe también una dependencia con el parámetro a (considerado, hasta el momento, igual a menos el radio del cuerpo). Si se analizan el coeficiente de presiones y el coeficiente de resistencia en función de a , se observa que, a mayor es en valor absoluto, el gradiente inicial es superior, pero la distribución posterior es más suave. Se comprueba, de esta forma, que la distribución de áreas más suave se consigue con $a = -R$.

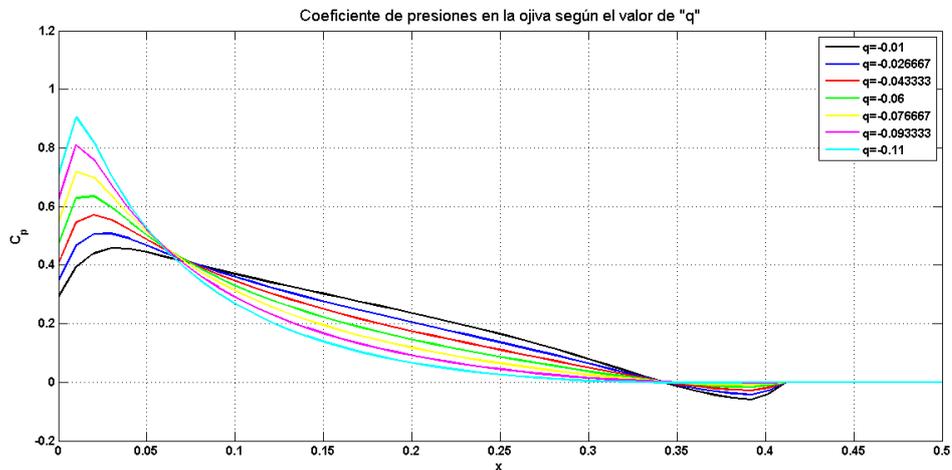


Figura 2.7 Coeficiente de presiones según el parámetro q .

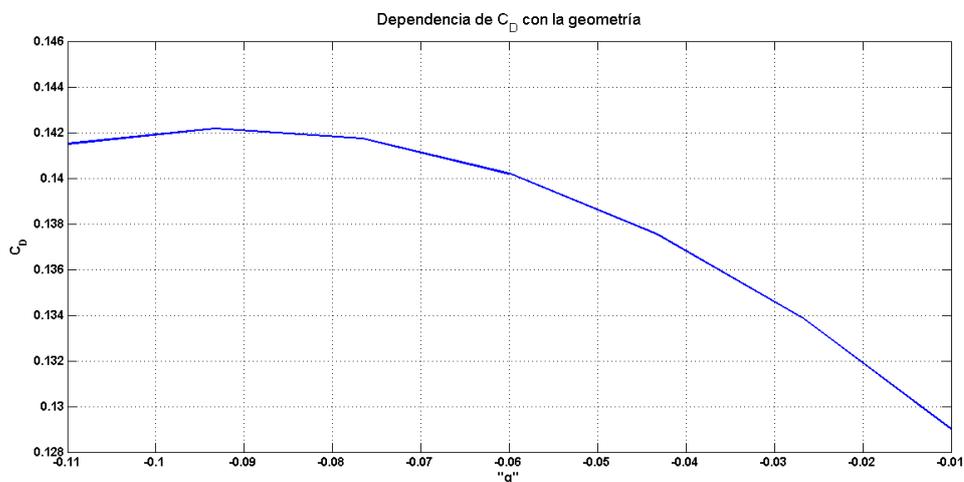


Figura 2.8 Coeficiente de resistencia en función del parámetro q .

Si bien se ve en la imagen que se llega a valores de C_D menores que para la geometría considerada como óptima en un principio, la evolución de la distribución de áreas anterior era más suave, lo cual favorece el retraso del desprendimiento de la capa límite. De hecho, en la gráfica que representa el coeficiente de presiones, se observa que el gradiente es menor.

- **Ojiva cónica**

La geometría propuesta ahora es un cono, es decir, el radio de la ojiva tiene una evolución lineal, acabando en punta en el origen.

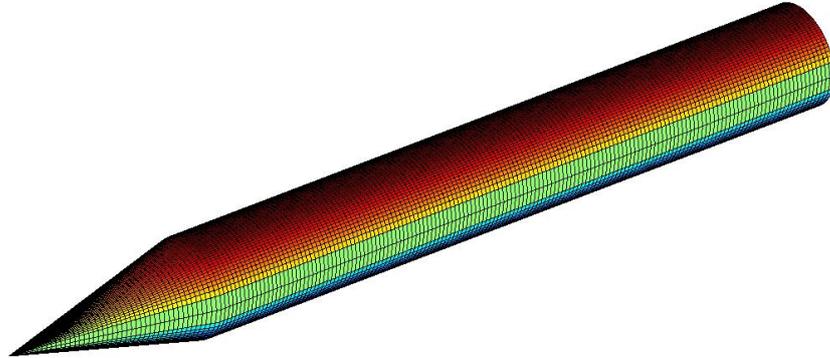


Figura 2.9 Geometría del cohete con ojiva cónica.

Se vuelve a tomar una longitud de 2 metros y, para igual velocidad de vuelo, se analizan la dependencia de los resultados con la longitud de la ojiva y el radio del fuselaje.

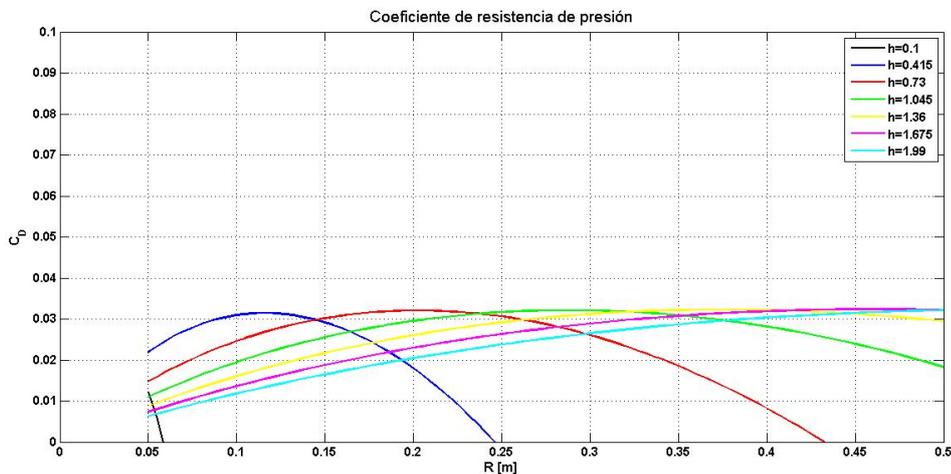


Figura 2.10 Coeficiente de resistencia para ojiva cónica según el radio (eje x) y longitud de ojiva.

Para el mismo radio y longitud de ojiva se tiene un coeficiente de resistencia del orden de un 90% del que se tenía con la ojiva parabólica. Por contra, la transición hacia el cuerpo es más brusca. Se considera oportuno tomar como radio el mismo que anteriormente y aumentar la longitud de la ojiva hasta los 45 cm, con el fin de suavizar algo más la distribución de áreas y, en consecuencia, el coeficiente de presiones.

Con esta geometría se tiene que el coeficiente de presiones a lo largo del cuerpo es el de la figura inferior y un coeficiente de resistencia de 0.1246. El gradiente al que se somete la corriente en la región de transición con el cuerpo es superior debido a la brusquedad de esta esquina.

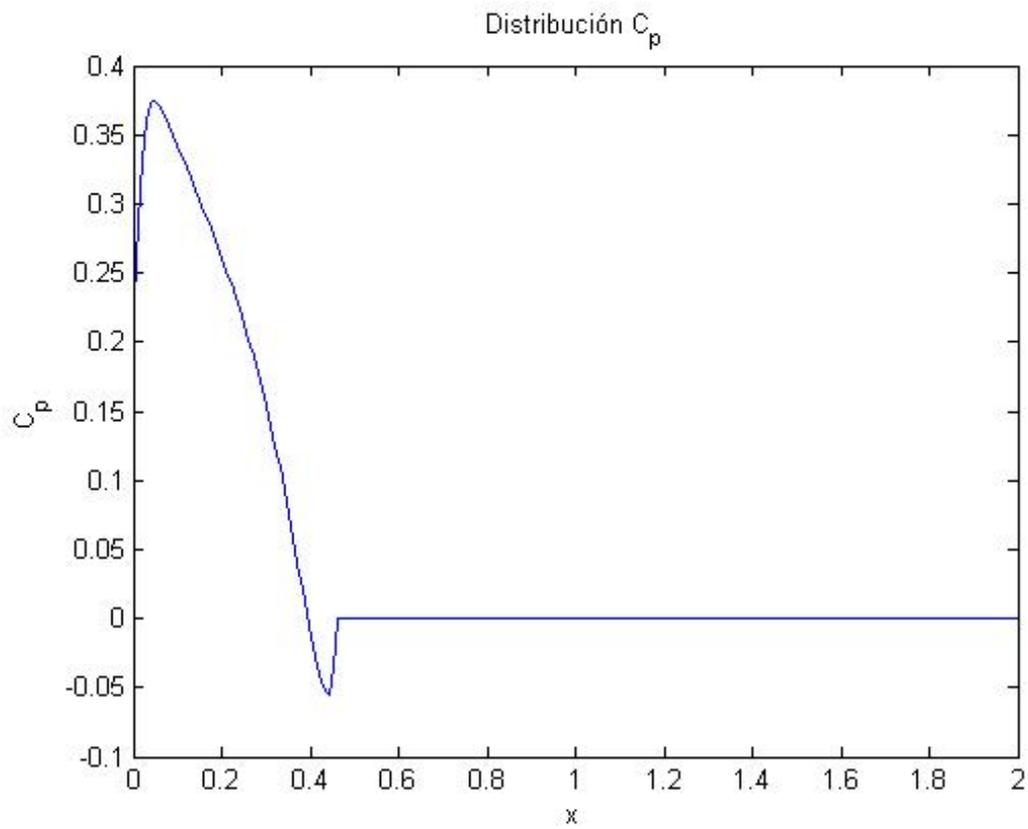


Figura 2.11 Coeficiente de presiones a lo largo del cuerpo con ojiva cónica.

- **Ojiva hiperbólica**

Se analiza ahora una geometría que evoluciona de forma inversa a la parabólica, de manera que se puede describir la distribución radial como $R(x) = R - R \left(2 - \frac{h-x}{h} \right) \frac{h-x}{h}$.

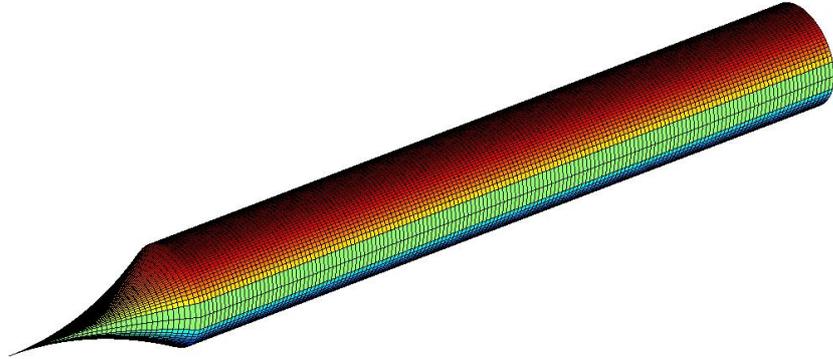


Figura 2.12 Geometría del cohete con ojiva hiperbólica.

Así, se obtienen los siguientes coeficientes de resistencia para distintos valores de R y h :

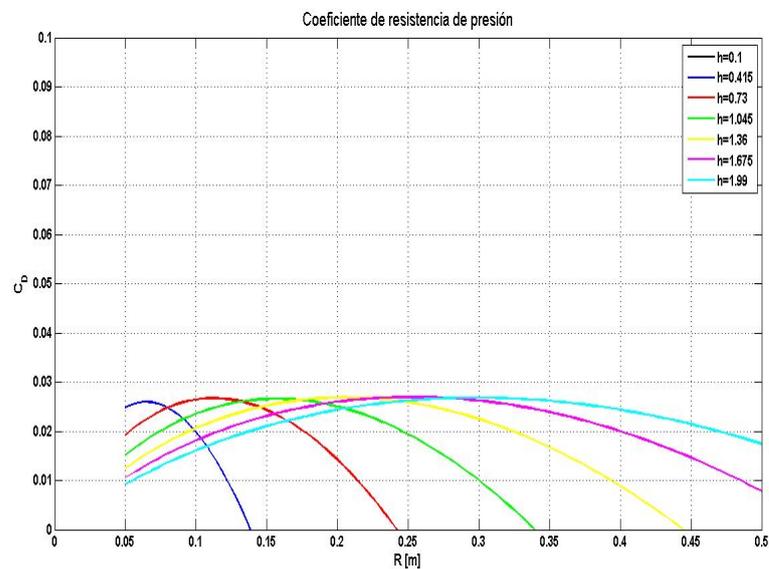


Figura 2.13 Coeficiente de resistencia en función del radio del cuerpo (eje x) y longitud de ojiva.

Los resultados para este caso son aún más engañosos que para los dos anteriores. Es por ello necesario analizar qué pasa con la distribución de presiones para una geometría con los mismos parámetros que se decidieron para las ojivas parabólica y cónica:

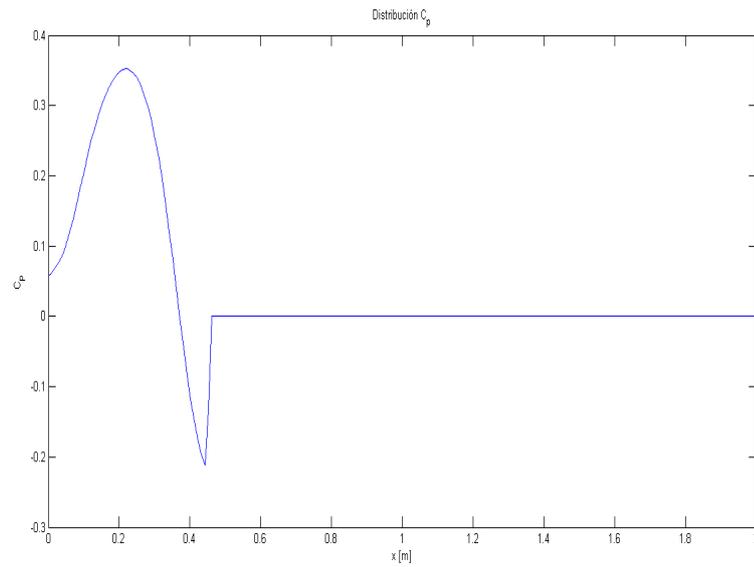


Figura 2.14 Coeficiente de presiones a lo largo del cuerpo.

Se tiene un gradiente adverso muy superior a los valores anteriores. El más que seguro desprendimiento de la corriente hace que los valores de coeficiente de resistencia no puedan ser tomados en cuenta. Además, este tipo de ojiva impide un aprovechamiento de su volumen interno para poder albergar otros sistemas o para poder adelantar el centro de gravedad incluyendo masa.

- **Ojiva esférica**

Las ojivas de tipo esférica han sido ampliamente usadas en aplicaciones militares por resultar prácticas a la hora de albergar equipos como sistemas de radar o de comunicaciones. El aprovechamiento volumétrico que se consigue supera con creces a los casos anteriores para un mismo radio.

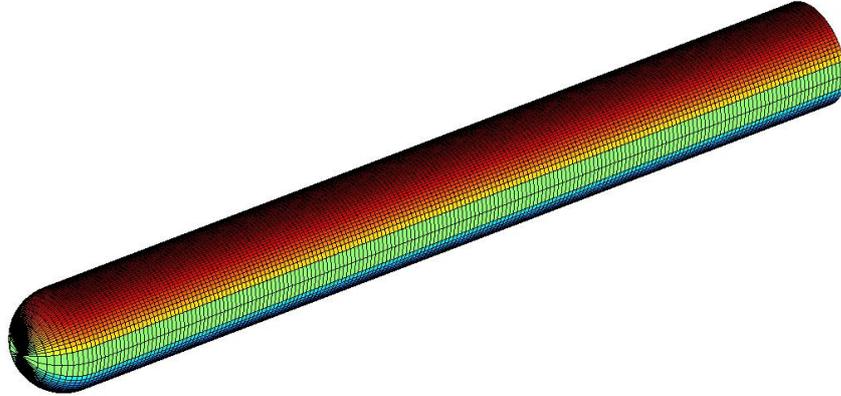


Figura 2.15 Geometría del cuerpo con ojiva esférica.

Sin embargo, si se analiza el coeficiente de presiones a lo largo del eje, se observa que el gradiente adverso que experimenta la corriente es bastante considerable.

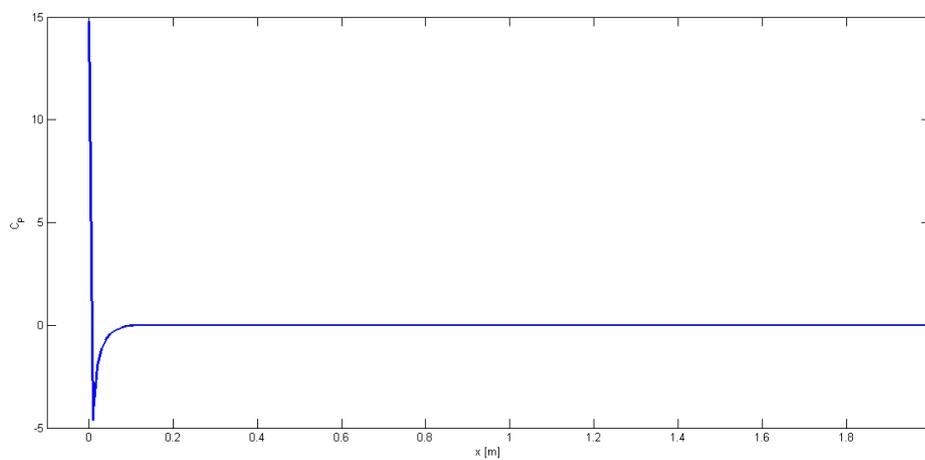


Figura 2.16 Coeficiente de presiones a lo largo del cuerpo.

Dado que en el caso presente el aprovechamiento de la ojiva no es un parámetro crítico, se decide rechazar esta geometría y apostar por una que ofrezca una menor resistencia a la corriente.

- **Ojiva cónica con punta esférica**

Según un artículo publicado por la NACA en 1951, llevado a cabo por Alvin Seiff y Carl A. Sandahl, el uso de puntas esféricas en ojivas cónicas o de otra geometría contribuye a reducir la resistencia a cualquier número de Mach. De acuerdo con esto, se decide realizar un análisis de este efecto.

Insertando esa punta esférica en la misma ojiva cónica que se escogía anteriormente, se obtienen reducciones del coeficiente de resistencia, si bien ahora la corriente está sometida a dos gradientes adversos de intensidad apreciable: el que ya existía y el debido a la semiesfera.

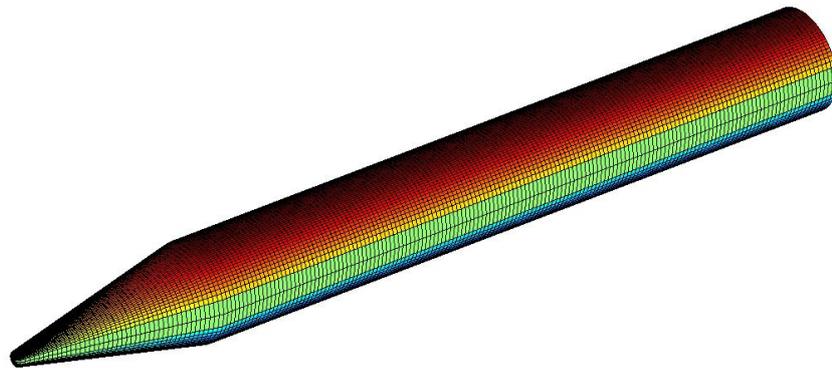


Figura 2.17 Geometría del cohete con ojiva cónica y morro esférico.

Por otra parte, el coeficiente de presiones es el siguiente:

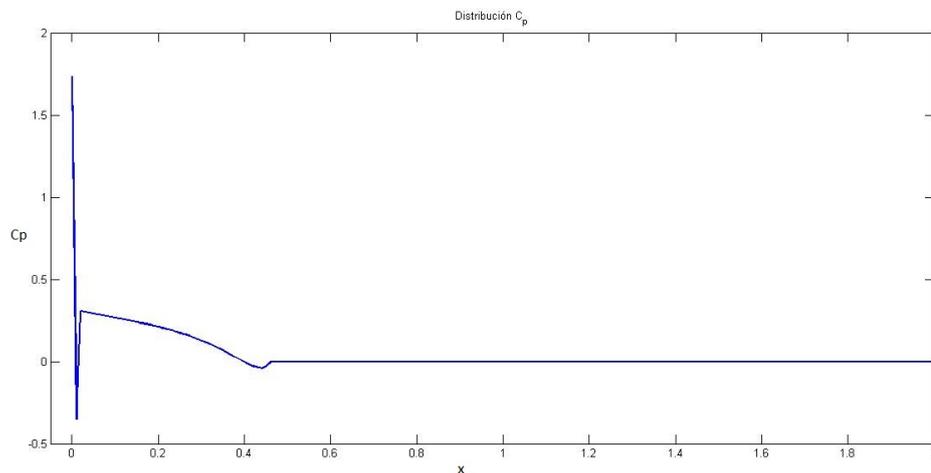


Figura 2.18 Coeficiente de presiones a lo largo del cuerpo.

De igual forma que ocurre con la ojiva cónica, es preciso suavizar la unión con el cuerpo para reducir el gradiente adverso. Esto sí es considerado en el análisis computacional con software de CFD (*Fluent*).

2.1.2 Estudio de la capa límite

Al considerar un flujo como ideal se desprecian los efectos viscosos y de conducción de calor, obteniéndose datos distintos a los reales. Se define la capa límite como la región próxima a la superficie donde la velocidad va desde 0 (en la superficie) a la velocidad de la corriente externa, debido a los efectos viscosos. Se verifica así la condición de no deslizamiento, de adherencia, hecho que se debe a la presencia de la viscosidad.

La capa límite posee un espesor característico mucho menor que la longitud característica del cuerpo. Para el caso de una placa plana, no existe un gradiente de presiones, pero sí en superficies con curvatura. Para el análisis de la capa límite, se emplean las ecuaciones de Navier-Stokes aplicadas a este dominio. El carácter axilsimétrico del problema (en la región de las aletas la corriente ya está desprendida), permite usar ecuaciones axilsimétricas.

La capa límite evoluciona de forma que su espesor crece hasta un punto de velocidad máxima, donde las partículas más cercanas al cuerpo se frenan y, en adelante, comienzan a invertir su sentido. Se genera una recirculación que provoca torbellinos que dan lugar a la estela, zona en la que la turbulencia hace que la presión sea prácticamente uniforme y casi idéntica a la del punto de desprendimiento.

Como la distribución de presiones no es simétrica, existe resistencia por presión (Prandtl, 1908), lo cual no ocurriría en el caso ideal ($\mu = 0$), resultado que se conoce como Paradoja D'Álambert.

Considerando un flujo estacionario y suponiendo despreciables las fuerzas másicas (Numero de Froude $Fr \gg 1$), las ecuaciones de Navier-Stokes permiten obtener los campos de velocidad, presión y densidad. Para la obtención de las ecuaciones se aplican balances de masa, cantidad de movimiento y energía.

Fuera de la capa límite, el flujo es potencial y se puede conocer la velocidad y la presión justo donde acaba la capa límite ($u_e(x), p_e(x)$) a través de la Teoría de Cuerpos Esbeltos.

Para seguir con el análisis, se toma un sistema de coordenadas ortogonal y curvilíneo. Como se cumple que $\delta_L/L \ll 1$, la velocidad vertical, v_y , es mucho menor que la tangente, v_x , por lo que el movimiento es prácticamente tangente al objeto y el sistema de coordenadas actúa como cartesianas. La capa límite no "ve" la curvatura del cuerpo.

A diferencia de la placa plana, existe un gradiente de presiones según x y esta condición de contorno la proporciona la Teoría Potencial.

De esta forma, siguiendo el procedimiento analítico que se puede encontrar en Schlichting, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales junto con sus condiciones de contorno:

$$\text{Ec. de continuidad: } \frac{\partial(\rho R(x)v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho R(x)v_y)}{\partial y} = 0 \quad (2.42)$$

$$\text{Ec. de cantidad de movimiento: } \rho v_x \frac{v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p_e}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (2.43)$$

$$\text{Ec. de la energía: } \rho v_x \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial p_e}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (2.44)$$

$$\text{Ec. gases perfectos: } p = \rho RT \quad (2.45)$$

$$\text{Relación } h - T: \quad h = C_p T \quad (2.46)$$

$$\text{Condiciones de contorno: } \begin{cases} \text{En } x = 0 \rightarrow v_x(0,y) = u_e(0) \\ \text{En } y = 0 \rightarrow v_x(x,0) = v_y(x,0) = 0 \quad T(x,0) = T_w(x) \\ \text{En } y = \infty \rightarrow v_x(x,y \rightarrow \infty) = u_e(x) \quad T(x,y \rightarrow \infty) = T_e(x) \end{cases} \quad (2.47)$$

Para la resolución se usa el Método de Líneas, el cual consiste en tomar N líneas paralelas a la superficie separadas una distancia "h". Esto permite calcular los perfiles de velocidad y densidad en cada estación x

para $y = y_1, \dots, y_j, \dots, y_N$. La última línea (y_N) se toma de tal forma que la velocidad sea del orden del 95 % de la velocidad de la corriente externa.

De la ecuación de cantidad de movimiento haciendo las simplificaciones oportunas, es posible obtener el espesor característico de la capa límite:

$$\delta(x_0) \sim \sqrt{v \frac{x_0}{U_\infty}} \Rightarrow \delta_L \sim \sqrt{v \frac{L}{U_\infty}} \sim L Re_L^{-1/2} \quad (2.48)$$

Para placa plana, Blasius (1908) encontró una solución de semejanza para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, la cual no es válida ahora.

Si se aplica el Método de Líneas al problema se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} \right)_{x,y_j} + \left(\frac{\partial(Rv_y)}{\partial y} \right)_{x,y_j} = 0 \quad (2.49)$$

$$\rho_{x,y_j} v_{x,y_j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_{x,y_j} + \rho_{x,y_j} v_{y,x,y_j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{x,y_j} = - \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} \right)_{x,y_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{x,y_j} \quad (2.50)$$

$$\rho_{x,y_j} v_{x,y_j} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x,y_j} + \rho_{x,y_j} v_{y,x,y_j} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_{x,y_j} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right)_{x,y_j} + v_{x,y_j} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} \right)_{x,y_j} + \left(\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right)_{x,y_j} \quad (2.51)$$

$$\rho_{x,y_j} = \frac{p_e(x)}{RT_{x,y_j}} \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{x,y_j} = - \frac{p_e(x)}{RT_{x,y_j}^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x,y_j} \quad (2.52)$$

Se discretiza el dominio en un número suficiente de líneas paralelas al eje x separadas una pequeña distancia constante. Se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya integración proporciona los perfiles de velocidad.

Las derivadas se aproximan mediante diferencias divididas centradas:

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)_{x,y_j} \simeq \frac{f_{j+1}(x) - f_{j-1}(x)}{2h}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \right)_{x,y_j} \simeq \frac{f_{j+1}(x) - 2f_j(x) + f_{j-1}(x)}{h^2}$$

De la ecuación de continuidad es posible despejar el producto $(\rho v_y)_{x,y_j}$, resultando una integral que se resuelve mediante la regla de los trapecios:

$$(\rho v_y)_{x,y_j} = \int_0^{y_j} \frac{\partial v_x(x)}{\partial x} \partial y = \begin{cases} 0.5h \left(\frac{\partial v_x(x)}{\partial x} \right) & , \quad si \ j = 1 \\ 0.5h \left(\frac{\partial v_x(x)}{\partial x} \right) + \sum_{k=1}^{j-1} h \frac{\partial v_x(x)}{\partial x} & , \quad si \ j > 1 \end{cases}$$

Para análisis iniciales que permitan obtener de forma rápida resultados con los que se pueda trabajar, se decide hacer la simplificación de considerar que el flujo en la capa límite es incompresible. A su vez, se procede a realizar el siguiente cambio de variables:

$$x = L * \bar{x}$$

$$y = \sqrt{\mu L / U_\infty} \bar{y}$$

$$v_x = U_\infty u$$

$$v_x^e = U_\infty u_e(x)$$

Así, el sistema de ecuaciones se reescribe, quedando la ecuación de cantidad de movimiento tal como sigue:

$$u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} \int_0^{\bar{y}} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} d\bar{y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.53)$$

Si se aplica a esta ecuación el procedimiento del Método de Líneas visto anteriormente para el caso compresible, se tienen los perfiles de velocidad a lo largo de la superficie del vehículo, teniendo como condición de contorno los valores obtenidos de la Teoría Potencial.

Una vez elegida la geometría del cuerpo y la ojiva, se procederá a analizar la capa límite en el entorno del cuerpo.

2.1.3 Análisis con Software Computacional

Para contrastar los resultados obtenidos, se decide emplear el módulo de cálculo fluido FLUENT del programa ANSYS.

Para cualquiera de las geometrías anteriores se procede de igual manera, tal y como se describe a continuación.

Procedimiento

- El primer paso es definir la geometría del problema. Para empezar se va a analizar el cuerpo sin las aletas posteriores, por lo que se trata de un problema axilsimétrico. Debido a esto, se desarrolla un problema en 2D, haciendo falta definir únicamente la mitad de la sección longitudinal del fuselaje del cohete.

Se realiza una representación de dicha sección, esto es, un cuerpo de 2 m de longitud con la ojiva de 0.4 o 0.45 según el caso. Para visualizar los pasos, se utiliza el caso de la ojiva parabólica.

A continuación, se define el dominio fluido. Para asegurar que los límites del mismo quedan suficientemente lejos, se fijan a 10 veces la longitud del cuerpo aguas arriba y 20 veces aguas abajo, así como a 10 veces la longitud del cuerpo en dirección radial.

Mediante una transformación booleana, se tiene el dominio exterior sustrayendo el sólido del fuselaje. La región aguas arriba del cuerpo se divide en distintas zonas para que el mallado sea más preciso.

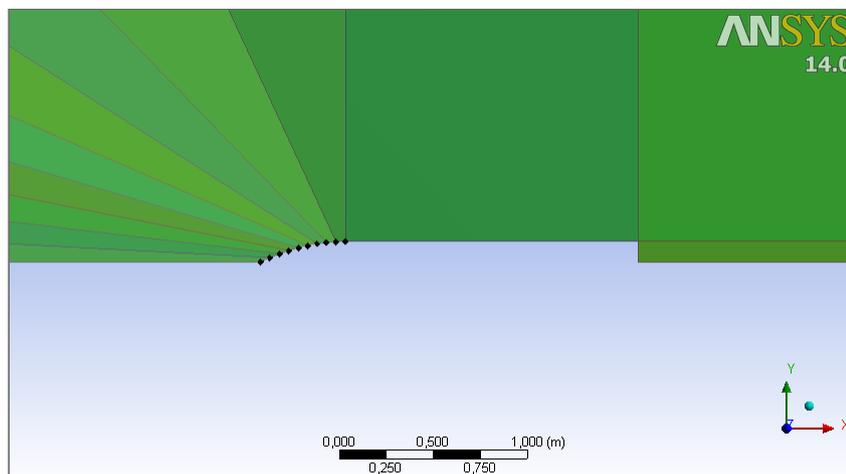


Figura 2.19 Definición de la geometría del cuerpo.

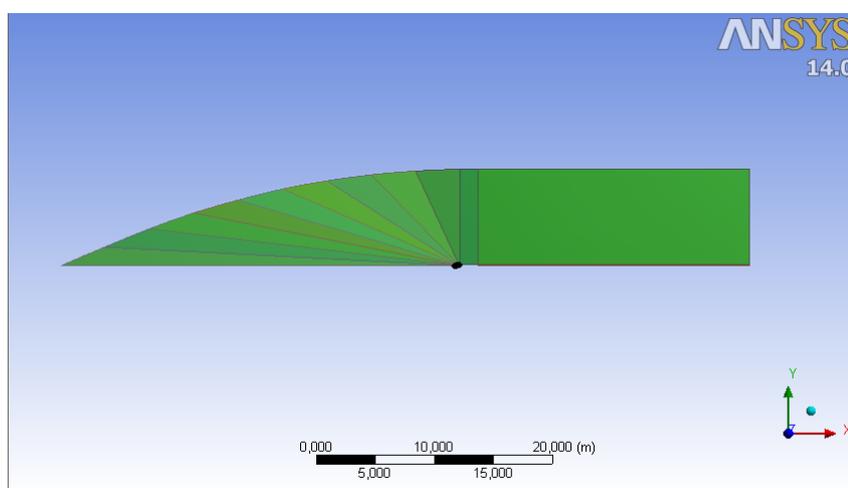


Figura 2.20 Geometría definida para la resolución.

- Una vez se tiene definida la geometría, se puede proceder al mallado del dominio fluido. Para ello se definen elementos cuadriláteros, refinando mejor la malla en el entorno del cuerpo y, especialmente, en el vértice de la ojiva y en la base. Se busca una malla con una calidad ortogonal alta (lo más cercana posible a 1) y un valor de oblicuidad (*skewness*, en inglés) lo menor posible.

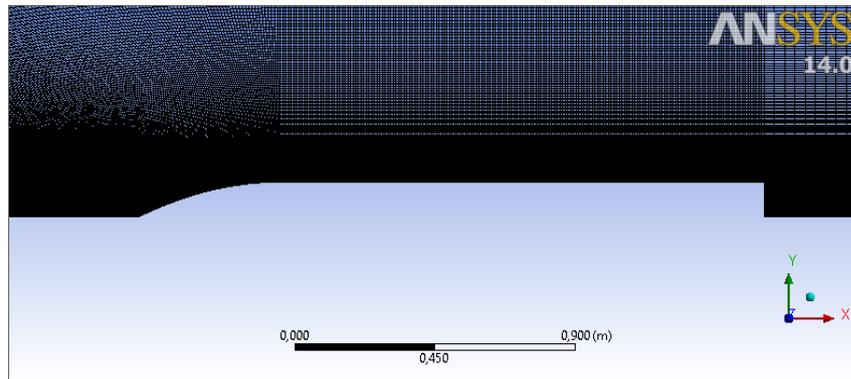


Figura 2.21 Detalle del mallado en el entorno del cuerpo.

Es necesario nombrar las distintas líneas que conforman la superficie de forma adecuada para que FLUENT sea capaz de conocer cuál es el eje de revolución, cuál el cuerpo y las zonas lejanas.

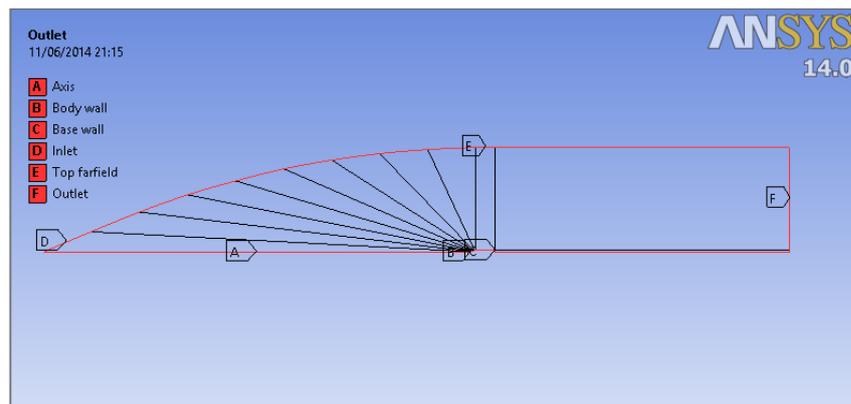


Figura 2.22 Definición del contorno.

- Con la geometría y el mallado configurados, es momento de fijar las condiciones del problema de cara a la resolución, ya por parte del módulo FLUENT. En la configuración del programa se fija la precisión doble, es decir, que cada número se representa mediante 64 bits en vez de 32 bits, lo cual conlleva una mejor solución. Mediante el comando "check" se comprueba que el mallado y la geometría están adecuadamente desarrollados y que no es necesaria ninguna corrección.

De acuerdo con la ayuda de FLUENT, hay dos opciones para resolver los problemas: basado en presión y basado en densidad. La primera no considera la compresibilidad del fluido y se emplea para bajas velocidades. Como se desea trabajar en un amplio rango de velocidades y poder considerar los efectos de compresibilidad, se escoge la resolución basada en densidad. Además, se fija que el problema es axilimétrico y estacionario.

En el modelo empleado, para comenzar, se utiliza el correspondiente a flujo turbulento de $K - \epsilon$, activando a la vez la ecuación de la energía, que es necesaria al haber seleccionado la solución basada en densidad. Se usan también el modelo laminar y el modelo turbulento de tensiones de Reynolds para comparar la solución obtenida.

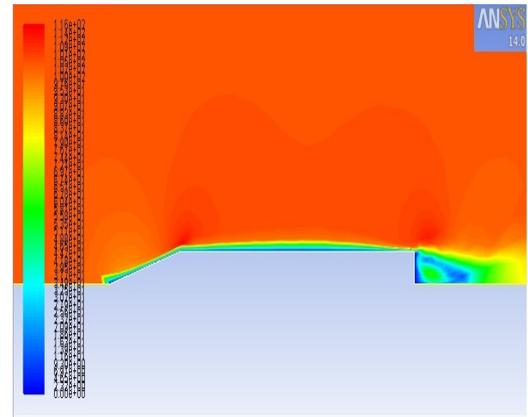
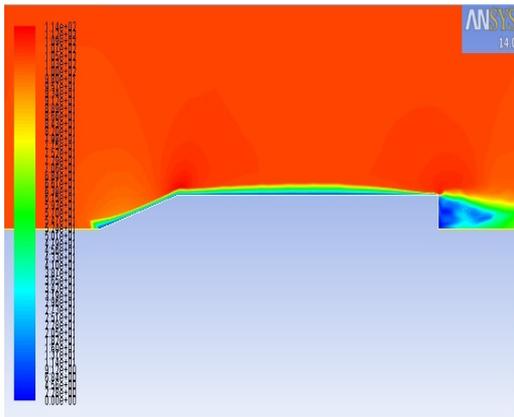
Como material se escoge el aire, estableciendo la densidad correspondiente a un gas ideal.

Respecto a las condiciones de contorno, al eje se le asigna una condición de eje (*axis*, en el programa) y al cuerpo de pared (*wall*). Respecto al resto de líneas se toma la condición de "presión de campo

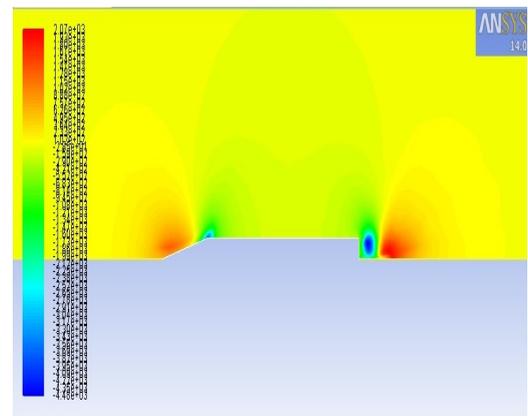
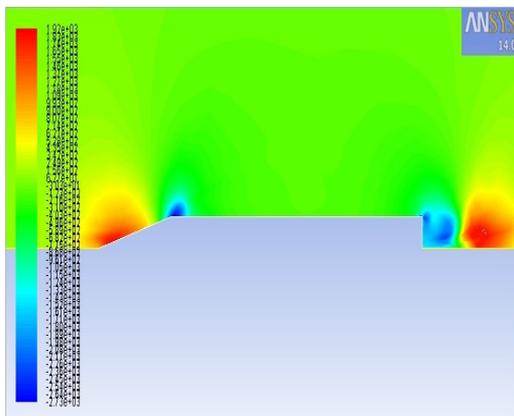
lejano" (*pressure-far-field*), la cual permite fijar la presión y el número de Mach de la corriente no perturbada.

Tras todo esto y fijar las variables que se desean que se representen, se inicializa el problema y se procede a la resolución.

- Se comparan dos soluciones del mismo problema, con el mismo mallado pero considerando, en primer lugar, que el flujo es incompresible y, posteriormente, compresible. Considerando que el flujo es compresible, el coeficiente de resistencia debido a la presión es del orden de 0,188 para $M_\infty \simeq 0,3$. En el otro caso, se obtienen valores en torno a 0,173966. Se comprueba, de esta forma que, para velocidades bajas, los resultados mediante ambos métodos son aproximadamente iguales. Comparando los campos de velocidad para los dos casos se puede observar que la solución es prácticamente idéntica, existiendo mayores diferencias en la base del cuerpo:



En cuanto a la distribución del coeficiente de presiones se tienen los siguientes resultados. Se vuelve a ver que la mayor diferencia está presente en la base, aunque también en la transición de la ojiva al fuselaje.



De estos datos se puede hacer la siguiente observación: el fluido al llegar al morro de la ojiva se comprime, la presión aumenta y se decelera. A lo largo de la ojiva, la presión cae y el flujo se acelera. La presión alcanza un mínimo en la zona de unión con el fuselaje y vuelve a crecer levemente hasta mantenerse constante hasta prácticamente el final del fuselaje, donde la corriente se ve obligada a deflectarse para adaptarse a la geometría. Si se observa bien la velocidad a lo largo de la sección cilíndrica, se ve cómo la zona en la que es nula o de valores muy pequeños se ensancha levemente, lo cual se corresponde con el aumento del espesor de la capa límite.

Como se dijo anteriormente, se utiliza en adelante el modelo basado en la densidad debido a que representa los efectos de compresibilidad que aparecen especialmente al aumentar la velocidad. Por último, si se representa la vorticidad, es posible ver cómo se hace especialmente intensa en la región de la base, zona en la que la corriente se deflecta para ocupar el volumen.

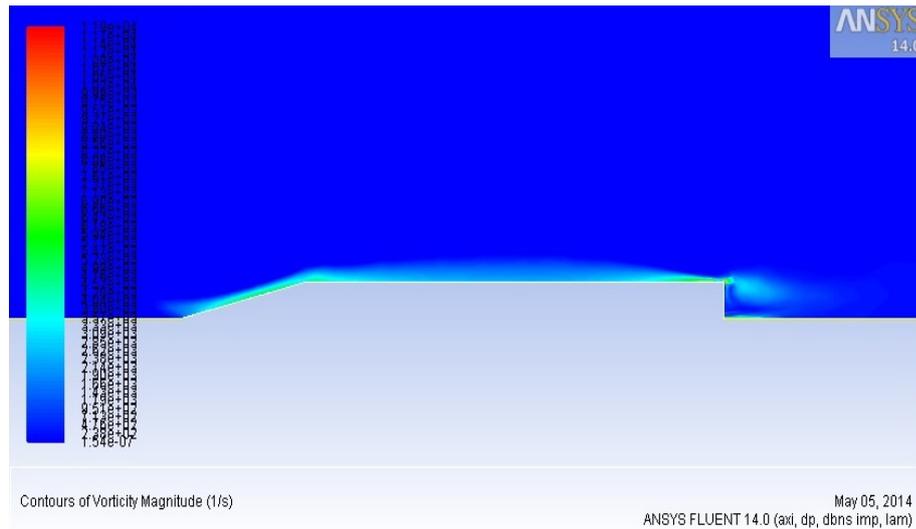


Figura 2.23 Distribución de la vorticidad alrededor del cuerpo.

Se observa que la vorticidad es prácticamente nula en casi todo el dominio fluido salvo cerca de la superficie del cuerpo y la base, regiones en las que la viscosidad es importante. Esto explica por qué la Teoría Potencial proporciona buenos resultados al considerar que la viscosidad es nula, ya que el espesor de la región es muy pequeño en comparación con las dimensiones características del cuerpo. Para el estudio de la presión de base aquí se asume un modelo laminar, pero sería necesario adoptar un modelo de flujo turbulento.

Ojiva parabólica

Si se aplica el procedimiento anterior al caso de la ojiva con evolución parabólica, se obtienen los resultados correspondientes. Por ejemplo, la distribución de velocidades queda como sigue:

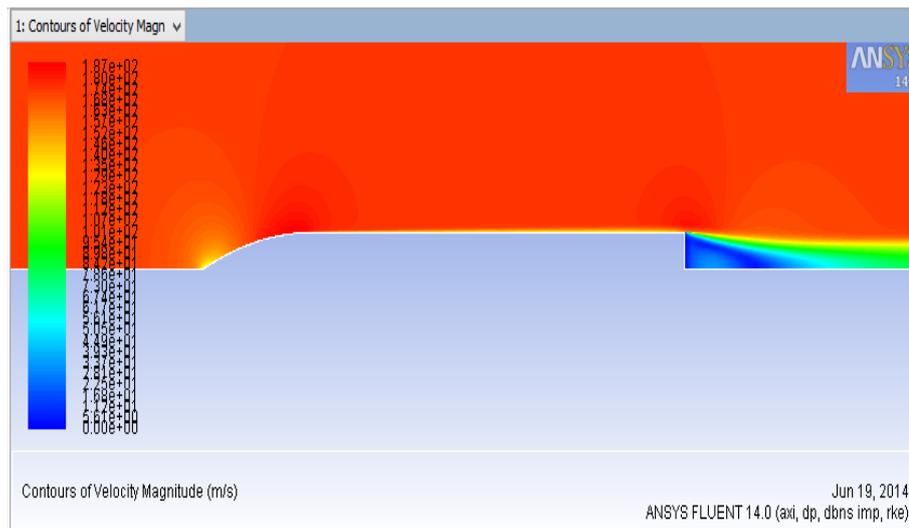


Figura 2.24 Campo de velocidades.

Respecto a la distribuciones de presiones, se tiene lo siguiente:

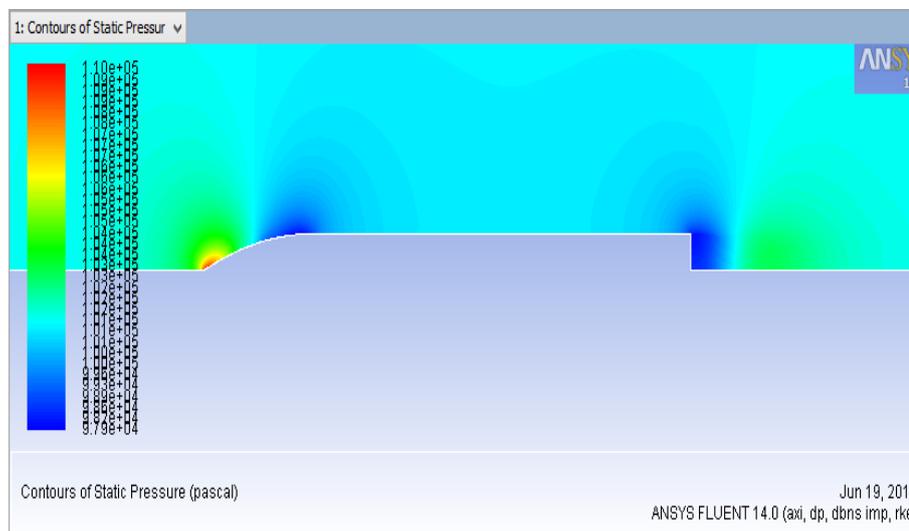


Figura 2.25 Campo de presiones.

Para obtener esta solución se ha considerado que la corriente externa está caracterizada por $p_\infty = 101325 \text{ Pa}$ y $M_\infty = 0.5$.

Para el valor del número de Mach anterior, se tiene la siguiente comparación entre los dos métodos estudiados hasta ahora. En la imagen se observa que el coeficiente de presiones se mantiene prácticamente en todo momento por debajo del valor estimado por la teoría potencial. La resistencia que se obtiene con FLUENT es significativamente menor a la que predice la Teoría de Cuerpos Esbeltos. Los resultados y el análisis correspondiente se muestran posteriormente.

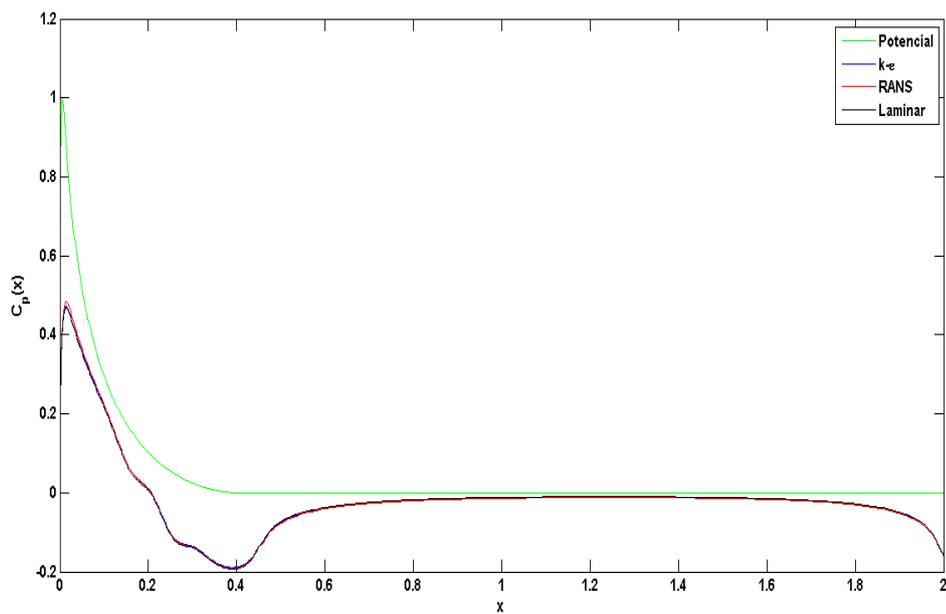


Figura 2.26 Comparación entre solución potencial (verde) y CFD: k-ε (azul), RANS (rojo) y laminar (negro)

Ojiva cónica

Para este caso, se tiene la siguiente distribución de velocidad:

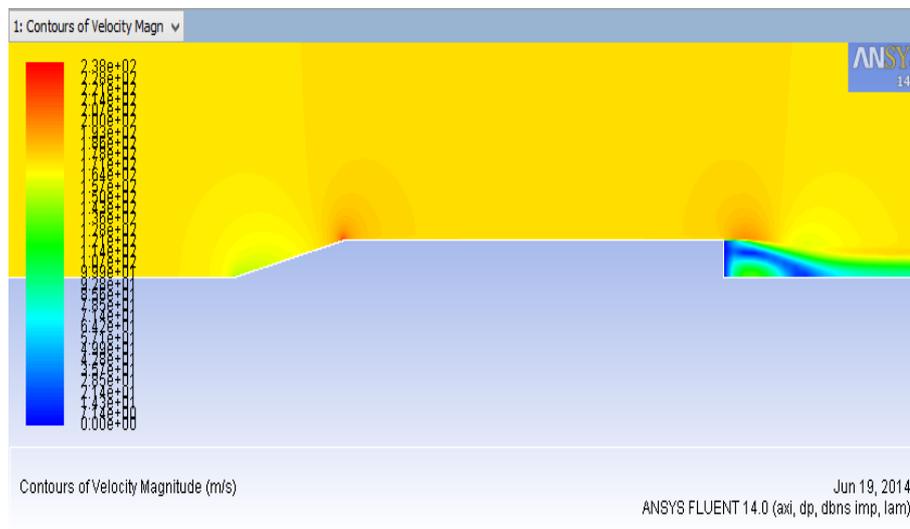


Figura 2.27 Campo de velocidades.

Respecto a la distribuciones de presiones, se tiene lo siguiente:

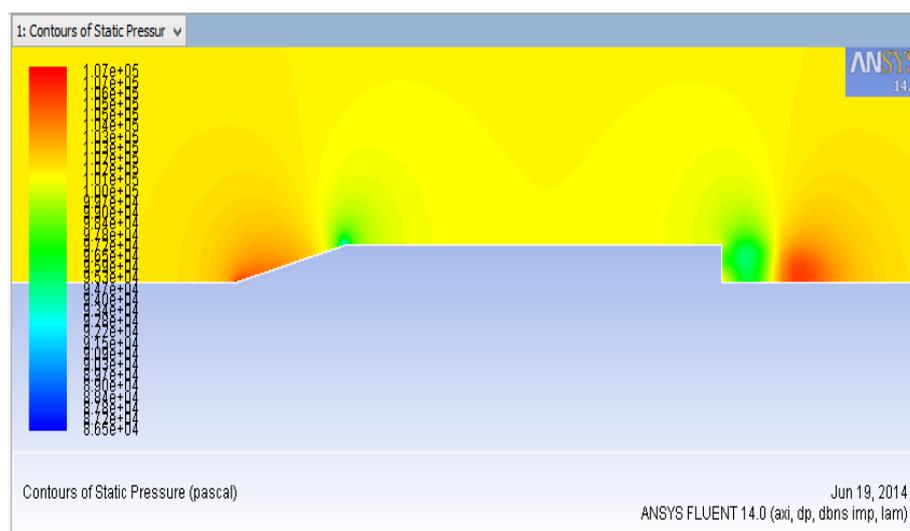


Figura 2.28 Campo de presiones.

Se puede ver en las figuras que el gradiente al que se somete la corriente en este caso en la unión de la ojiva y el cuerpo es superior. Además, la capa límite es más ancha, lo que hace intuir que la corriente se debe desprender antes y la perturbación del morro es mayor sobre la corriente externa.

Se comprueba que una evolución más suave de la distribución de áreas y un enlace menos brusco con la sección cilíndrica del cuerpo resulta beneficioso.

De nuevo, se puede comparar con la solución potencial:

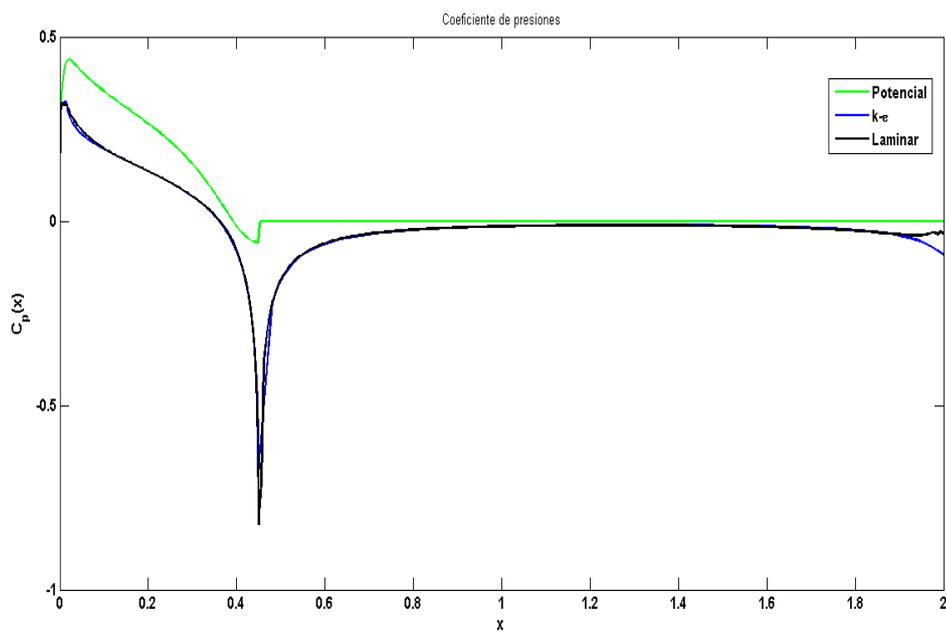


Figura 2.29 Comparación entre solución potencial (verde) y CFD: $k-\epsilon$ (azul) y laminar (negro) .

Ojiva esférica

De nuevo siguiendo el mismo procedimiento se llega los siguientes resultados, para la velocidad, el campo de presiones y el coeficiente de presiones a lo largo del cuerpo.

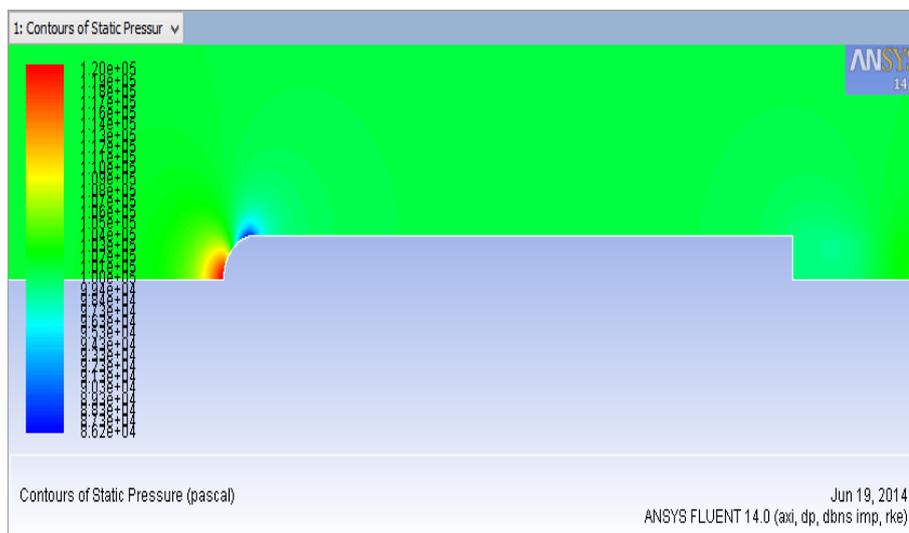


Figura 2.30 Campo de velocidades.

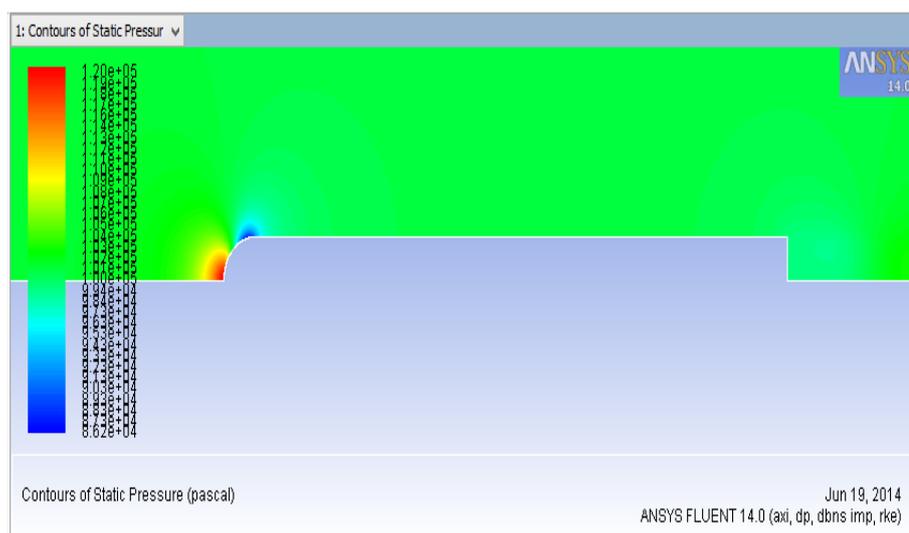


Figura 2.31 Campo de presiones.

Si se vuelve a realizar la comparación con los resultados potenciales, se vuelve a comprobar la diferencia existente.

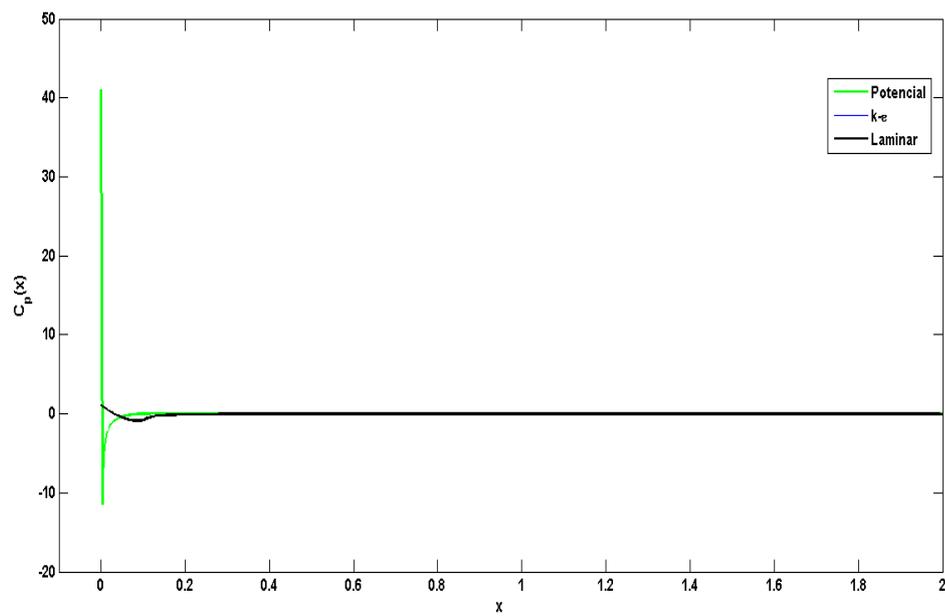


Figura 2.32 Comparación entre solución potencial (verde) y CFD: $k-\epsilon$ (azul) y laminar (negro) .

Ojiva cónica con punta esférica

Por último, se modifica la ojiva cónica con la introducción de una punta esférica de radio el 15% del radio del fuselaje y con una transición suave con el cuerpo, lo cual se comprueba que mejora el gradiente al que se somete al fluido.

Con esta geometría y con los valores de la corriente lejos del cuerpo que se usaron antes, se vuelve a realizar la simulación y se tienen las distribuciones que se observan en las siguientes imágenes:

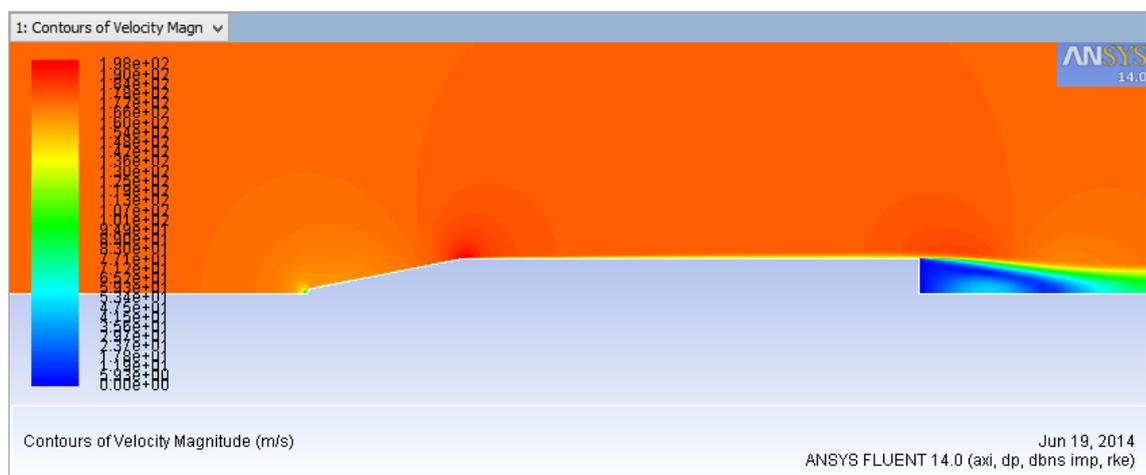


Figura 2.33 Campo de velocidades.

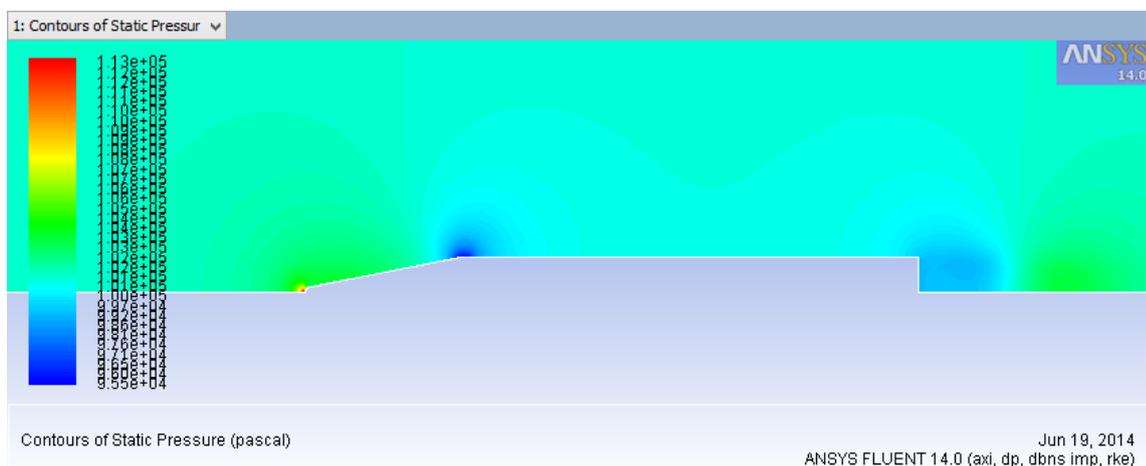


Figura 2.34 Campo de presiones.

Tal y como se realiza en todos los casos, se representan la solución potencial y la obtenida con el software de CFD.

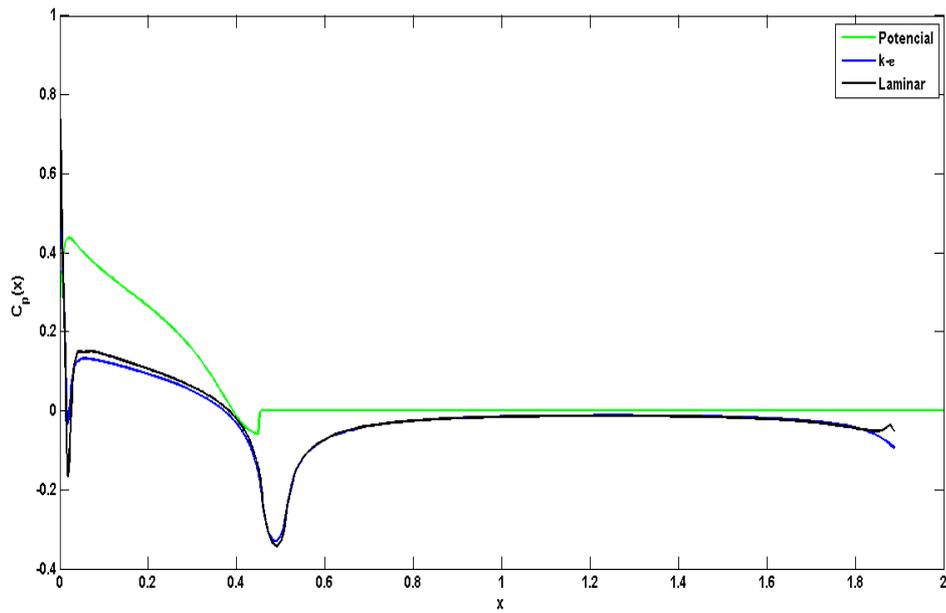


Figura 2.35 Comparación entre solución potencial (verde) y CFD: k- ϵ (azul) y laminar (negro) .

2.1.4 Análisis de resultados y conclusiones

El análisis realizado hasta ahora permite, en primer lugar, analizar la validez de cada uno de los cálculos. El empleo del software computacional desvela las carencias de la Teoría Potencial. En todos los casos, la resistencia de presión queda subestimada con la Teoría de Cuerpos Esbeltos. Si se toman como valores de referencia los que proporciona FLUENT con los modelos turbulentos, los resultados son significativamente menores aún añadiendo la contribución del efecto de la viscosidad, la cual no contabiliza la solución potencial.

Otro fallo detectado en el caso potencial reside en el problema que aparece con la ojiva esférica. Dado que la pendiente de la distribución de áreas cruzadas tiende a infinito en el origen, los resultados no pueden ser tomados en cuenta. De hecho, cuanto más se afinan los cálculos al origen, la resistencia de presión se hace más negativa hasta tender a $-\infty$.

Un resultado inmediato que se obtiene tanto de los valores de la Teoría Potencial como de FLUENT es el efecto de la unión entre ojiva y cuerpo. Cuanto más brusca es la transición, mayor es el gradiente de presiones adverso que debe superar la corriente. Es por ello por lo que conviene tener un enlace suave, como el que se tiene con la ojiva parabólica. De hecho, con el objetivo de comprobar este efecto, en el caso de la ojiva cónica con punta esférica se ha suavizado esta zona para los cálculos de FLUENT. Esto conlleva una ojiva algo más larga pero que presenta una menor resistencia.

Es necesario comentar la dificultad de realizar simulaciones con modelos turbulentos. Esto se debe no solo a la estimación de parámetros, sino a que el mallado debe ser muy fino en la cercanía de la superficie, requiriendo una capacidad de procesamiento considerable.

A su vez, el análisis se ha realizado para un único valor del número de Mach, no se tiene una evolución dentro del rango subsónico. El coste computacional de dicho proceso ha llevado a tomar un valor medio y, una vez se tenga escogido el diseño preliminar, realizar un estudio más exhaustivo.

En la siguiente tabla se muestran los resultados que se han obtenido hasta ahora. Los valores integrales se refieren al cálculo de la resistencia aplicando la fórmula de la Teoría Potencial con la distribución de $C_p(x)$ de FLUENT. Los datos de FLUENT son los proporcionados por el propio programa.

	Teoría Potencial	FLUENT			INTEGRANDO		
		$k - \epsilon$	RANS	Laminar	$k - \epsilon$	RANS	Laminar
Parabólica	99.3421	12.3657	12.17352	13.315491	11.0756	10.8572	7.9679
Esférica	$-\rightarrow \infty$	18.1581		16.03756	12.2429		13.0959
Cónica	86.2673	8.075		8.32743	7.95		$\simeq 0$
Cónica+esfera	86.2673	10.29		12.826653	16.2213		24.4148

Los resultados que se obtienen mediante integración se ajustan relativamente a los proporcionados por FLUENT, fallando en el caso de la ojiva cónica y la cónica con punta esférica. Esto se puede deber a un fallo en la interpolación para calcular la derivada del área cruzada. Se decide tomar los valores dados por el propio software al considerar que la integración que realiza es más precisa al obtenerla a partir de los elementos de la malla. Aquellos datos que aparecen en blanco se debe a que corresponden a análisis no realizados por su alto coste computacional. Es necesario mejorar el mallado y disponer de más tiempo para llevar a cabo dichas simulaciones.

Si únicamente se considera la resistencia de presión, es difícil decidir qué ojiva es la óptima, además de desconocer, como se comentó antes, la evolución con el número de Mach. En un principio, se rechaza el diseño esférico, por su peor comportamiento. Entre las otras tres ojivas, se decide escoger la cónica con morro esférico y la parabólica. Esta elección se debe a que, entre la cónica y la cónica con punta esférica, los resultados experimentales consultados en la bibliografía estiman un mejor comportamiento de la segunda. Además, se decide usar la variante que incorpora un suavizado de la unión entre ojiva y cuerpo. Se mantiene la ojiva parabólica como opción hasta conocer más información sobre la evolución con el número de Mach.

Referente a la resistencia de fricción viscosa, los datos que proporciona FLUENT son los que siguen:

	$k - \varepsilon$	RANS	Laminar
Parabólica	58.5337	56.684614	6.5662259
Esférica	62.56846		4.5591859
Cónica	54.640771		6.27782
Cónica y punta esférica	52.5499		4.807

Es interesante también comprobar la evolución del coeficiente de resistencia C_D en función del número de Mach. Para ello, se usa el código de MATLAB que resuelve el problema según la Teoría de Cuerpos Esbeltos. El resultado obtenido permite establecer que, según esta aproximación, el coeficiente de resistencia de la ojiva cónica con punta esférica se mantiene siempre por debajo de los valores de la ojiva parabólica. Como era de esperar, la resistencia tiende a infinito cuando $M_\infty \rightarrow 1$, dado que es ahí donde presenta una singularidad la Teoría.

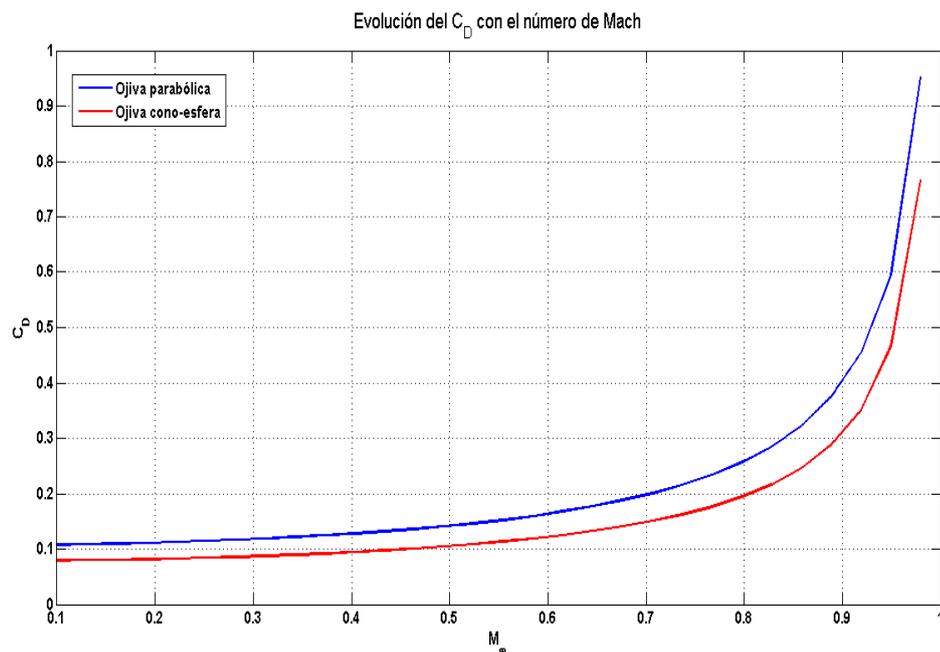


Figura 2.36 Evolución de C_D respecto al número de Mach.

Es necesario precisar de nuevo que la Teoría tiene un fallo en el origen de la ojiva esférica. Dada la dependencia con la derivada de la superficie, el hecho de que ésta tienda a infinito supone un problema en la implementación. Para poder validar estos resultados, se llevan a cabo nuevas simulaciones con FLUENT de las geometrías propuestas para distintos valores de M_∞ y, efectivamente, se tienen valores menores en todo momento. En la tabla inferior se pueden ver los valores de la resistencia (en Newtons) que establece el programa para tres valores distintos de M_∞ .

M_∞	0.2	0.5	0.8
Ojiva parabólica	1.84017	12.3657	35.488551
Ojiva cónica con punta esférica	0.6335	10.29	32.57

Resulta de interés, al mismo tiempo, disponer de una comparación entre el coeficiente de resistencia para cada ojiva, se procede a interpolar a partir de los datos de los que se disponen. Esto permite tener una estimación muy aproximada de la evolución de cada C_D con respecto al número de Mach.

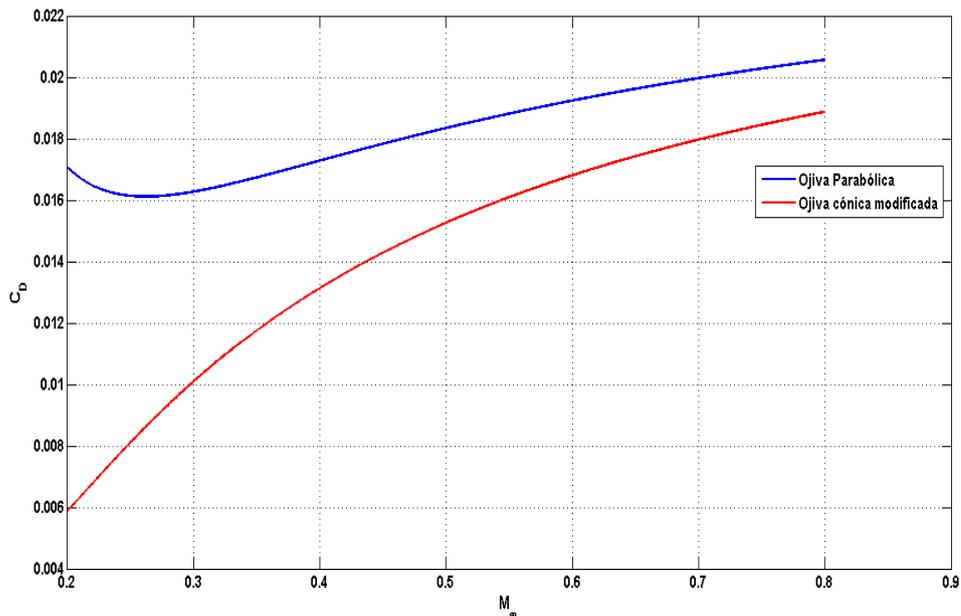


Figura 2.37 Comparación de la evolución del C_D según FLUENT.

Para poder contrastar y validar los resultados presentados, se comparan con los obtenidos en un proyecto fin de carrera anterior a este ([18]) en el que se construyó un cohete y se introdujo en el túnel de viento del laboratorio de Mecánica de Fluidos de la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla. Representando las curvas del coeficiente de presiones pueden analizar las diferencias entre los resultados teóricos, computacionales y experimentales.

Se vuelve a comprobar que la Teoría Potencial sobreestima el coeficiente de presiones, además de no poder estimar el desprendimiento de la capa límite. Por otra parte, se han probado los tres modelos de resolución de FLUENT comentados antes y se comprueba que se ajustan mejor a los valores obtenidos en el ensayo en el túnel de viento. El modelo laminar mide peor la región cercana a la base del vehículo, además de que el resultado a esperar sería un descenso en el coeficiente de presiones debido al desprendimiento para cubrir la región de la base, algo que sí miden los otros dos modelos. Respecto a los modelos de turbulencia probados, el $k - \varepsilon$ da valores superiores a los reales en la punta de la ojiva y menores en el final. Al contrario, el otro subestima lo que ocurre en el morro del cohete y sobreestima la zona de la base. Se toman, por tanto, los valores de los dos como los valores de referencia a considerar en todas las simulaciones.

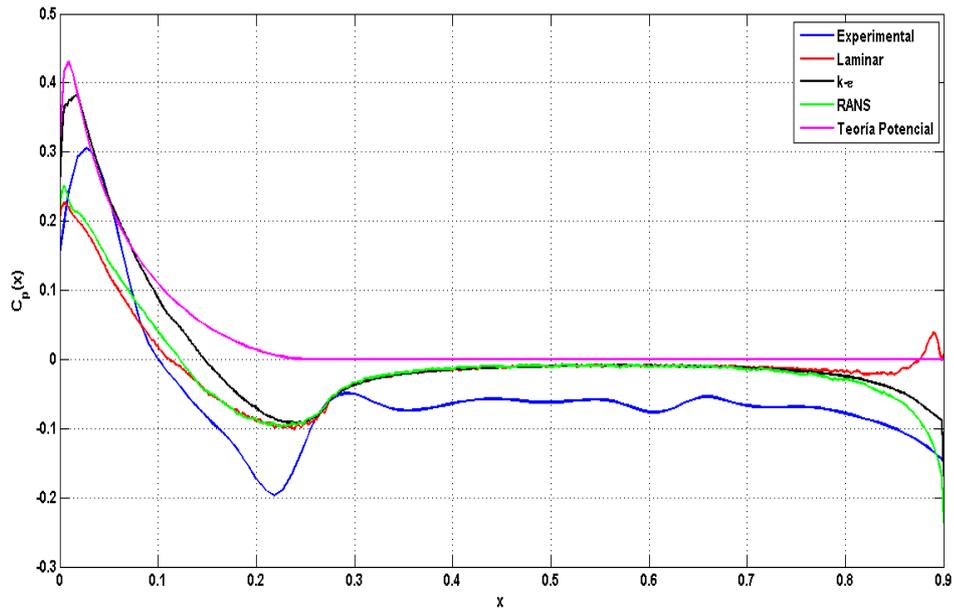


Figura 2.38 Comparación resultados experimentales, teóricos y computacionales.

Se aplican las mismas ecuaciones a esta geometría para poder obtener la resistencia y poder establecer una conclusión sobre los valores calculados en los demás casos. De esta forma, se tiene que la resistencia estimada mediante la Teoría de Cuerpos Esbeltos es la mayor de todas. Sin embargo, la velocidad de la corriente incidente es, en el ensayo, muy pequeña (10 m/s) como para poder extrapolar los resultados a un rango del número de Mach mayor, dado que el rango de valores que se obtiene de resistencia es muy pequeño.

De cara a posteriores estudios, sería necesario probar más modelos, mejorar la malla y elegir de forma más exacta los parámetros que definen las ecuaciones. Con ello es de esperar que se obtuvieran resultados de mayor precisión frente a los obtenidos mediante ensayos. Además sería interesante incluir en el modelo computacional el efecto de las paredes en el túnel de viento, de cara a saber cómo afecta a los valores que se toman a través de los tubos de pitot.

2.2 Régimen supersónico

Se desarrolla ahora la Teoría de cuerpos esbeltos, tal y como se mostró en régimen subsónico pero para números de Mach superiores a la unidad. De nuevo se tiene un cuerpo esbelto, volando a ángulo de ataque muy pequeño, pero ahora $M_\infty > 1$. Siguiendo el mismo procedimiento que antes se llega a la ecuación del potencial de velocidades:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.54)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de perturbación deriva del potencial ϕ . Se introduce una nueva variable, igual que en el caso anterior, que se define como $\beta^2 = M_\infty^2 - 1$.

En régimen supersónico resulta de interés resolver el problema simétrico pues aparece una componente de resistencia (resistencia de onda) que en vuelo subsónico no existe y cuya importancia es considerable.

La solución a la ecuación diferencial anterior es con manantiales supersónicos de la forma:

$$\phi(x, y, z) = \frac{A(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 - \beta^2[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]}} \quad (2.55)$$

Una superposición de manantiales también es solución del problema. Además, interesa tener los manantiales sobre el eje del cuerpo, esto es, haciendo $y_0 = 0$ y $z_0 = 0$. Por último, se realiza una transformación a coordenadas cilíndricas $[x, r, \theta]$. De esta forma, el potencial queda como la suma de todos los manantiales situados sobre el eje x :

$$\phi = \sum \frac{A(x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 - \beta^2 r^2}}$$

De forma integral, la función potencial será la integral desde $x = 0$ hasta el último manantal cuya onda de choque asociada pueda afectar al punto, es decir, que entra en la región conocida como cono de Mach anterior asociado al punto. Esto es, se integra hasta L o hasta $(x - \beta r)$, dependiendo de cual es la magnitud menor.

$$\phi = \int_0^{\min(L, x - \beta r)} dx_0 \frac{f(x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 - \beta^2 r^2}} \quad (2.56)$$

El campo de velocidades será, por tanto:

$$\vec{v}' = u \vec{e}_x + v_r \vec{e}_r = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r \quad (2.57)$$

Imponiendo un balance de masa en un diferencial de longitud dx , se llega a que: $v_r(x, r = R(x)) = (U_\infty + u(x, r = R(x))) R'(x)$. Como $u \ll U_\infty$, se llega a que $v_r(x, R(x)) = U_\infty R'(x)$.

Desarrollando la integral del potencial de velocidades:

$$\begin{aligned} \phi(x, r) &= \int_0^{\min(L, x - \beta r)} dx_0 \frac{f(x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 - \beta^2 r^2}} = \\ &= \int_0^{\min(L, x - \beta r)} dx_0 \frac{f(x_0) - f(x)}{\sqrt{(x - x_0)^2 - \beta^2 r^2}} - \int_0^{\min(L, x - \beta r)} dx_0 \frac{f(x)}{\sqrt{(x - x_0)^2 - \beta^2 r^2}} \end{aligned} \quad (2.58)$$

La segunda integral se puede desarrollar de forma que resulta como sigue:

$$\begin{aligned} \int_0^{\min(L, x - \beta r)} dx_0 \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 - \beta^2 r^2}} &= \int_0^{\min(L, x - \beta r)} \frac{d\left(\frac{x_0 - x}{\beta r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x - x_0}{\beta r}\right)^2 - 1}} = \\ &= \left[\eta = \frac{x_0 - x}{\beta r} \right] = \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = \ln \left| \eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \right| \end{aligned} \quad (2.59)$$

De esta forma, y haciendo $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\phi(x, r \rightarrow 0) &= \int_0^{x-\beta r} \frac{f(x_0) - f(x)}{|x - x_0|} + f(x) \ln \left| \eta + \sqrt{\eta^2 - 1} \right| = \\ &= \int_0^{x-\beta r} \frac{f(x_0) - f(x)}{|x - x_0|} + f(x) \ln \left(\frac{2x}{\beta r} \right)\end{aligned}\quad (2.60)$$

Esto permite imponer la condición de impenetrabilidad y, así, obtener la expresión de la intensidad del manantial $f(x)$:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = f(x) \left(-\frac{1}{r} \right)_{r=R(x)} = U_\infty R'(x) \Rightarrow f(x) = -U_\infty R(x) R'(x)$$

Se puede poner en función del área transversal:

$$S(x) = \pi R(x)^2 \Rightarrow S'(x) = 2\pi R(x) R'(x) \Rightarrow f(x) = -\frac{U_\infty}{2\pi} S'(x)$$

Así,

$$\begin{aligned}\phi(x, r) &= \frac{U_\infty}{2\pi} \int_0^x dx_0 \frac{S'(x) - S'(x_0)}{x - x_0} + \frac{U_\infty}{2\pi} S'(x) \ln \left(\frac{\beta r}{2x} \right) = \\ &= -\frac{U_\infty}{2\pi} \int_0^x dx_0 S''(x_0) \ln \left(\frac{x - x_0}{x} \right) + \frac{U_\infty}{2\pi} S'(x) \ln \left(\frac{\beta r}{2x} \right)\end{aligned}\quad (2.61)$$

Teniendo morro estilizado, se cumple que $R(0) = 0$ y $S'(0) = 0$.

Con todo esto, las velocidades de perturbación se obtienen derivando:

$$u = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{r=R(x)} = \frac{U_\infty}{2\pi} S''(x) \ln \left(\frac{\beta R(x)}{2x} \right) - \frac{U_\infty}{2\pi} \frac{S'(x)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x dx_0 S''(x_0) \ln \left(\frac{x - x_0}{x} \right)\quad (2.62)$$

Llamando $F(x)$ a la integral y desarrollándola por partes:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x dx_0 S''(x_0) \ln \left(\frac{x - x_0}{x} \right) = \int_0^x dx_0 S''(x_0) \ln(x - x_0) - S'(x) \ln(x) = \\ &= I(x) - S'(x) \ln(x) \Rightarrow F'(x) = I'(x) - S''(x) \ln(x) - \frac{S'(x)}{x}\end{aligned}$$

Respecto a la velocidad radial, esta ya se definió con la condición de impenetrabilidad:

$$v_r = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{r=R(x)} = U_\infty R'(x)\quad (2.63)$$

La resistencia de onda que presenta un cuerpo tiene una componente debida al espesor (D_w) y otra debida a la presión en la base o resistencia de volumen (D_B):

$$D = \int_\Sigma -pn_x d\sigma = \int_{S_{lat}} -(p - p_\infty) n_x d\sigma + \int_{S_{base}} -(p_B - p_\infty) n_x d\sigma\quad (2.64)$$

Haciendo un análisis geométrico bastante sencillo se deduce que $n_x = -\cos(\psi)$, siendo $-d\sigma \cos(\psi) = \frac{\partial S}{\partial x} dx$. De esta forma, la resistencia de onda debida al espesor puede expresarse en función de la distribución de áreas y el coeficiente de presiones:

$$D_w = \int_{S_{lat}} -(p - p_\infty) n_x d\sigma = \int_0^L (p - p_\infty) S'(x) dx = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \int_0^L c_p(x) S'(x) dx\quad (2.65)$$

El coeficiente de presiones viene definido por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} C_p(x) &= -\frac{S''(x)}{\pi} \ln\left(\frac{\beta R(x)}{2x}\right) + \frac{1}{\pi} F'(x) - R'(x)^2 = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{S'^2}{2} \ln\left(\frac{\beta R(x)}{2}\right)\right)' + \frac{1}{\pi} S'I' \end{aligned} \quad (2.66)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} D_w &= \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^L dx \left(\frac{S'^2}{2} \ln\left(\frac{\beta R(x)}{2}\right)\right)' + \frac{1}{\pi} \int_0^L dx S'I' \right] = \\ &= \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \left[-\frac{1}{\pi} \frac{S'(L)^2}{2} \ln\left(\frac{\beta R(x)}{2}\right) + \frac{1}{\pi} S'(L)I'(L) - \frac{1}{\pi} \int_0^L dx S''(x)I(x) \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

Se ha tenido en cuenta que $S'(0) = 0$ y que $S'I' = (S'I)' - S''I$.

De esta forma se llega a la fórmula de Von-Karman-Moore:

$$\begin{aligned} D_w &= -\frac{1}{4\pi} \rho_\infty U_\infty^2 \int_0^L dx S''(x) \int_0^L dx_0 S''(x_0) \ln|x - x_0| = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \rho_\infty U_\infty^2 \int_0^L dx_0 S'(x_0) \int_0^L dx \frac{S''(x)}{x - x_0} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Haciendo un cambio de variables, se puede expresar la derivada de la distribución de áreas en series de Fourier:

$$\text{Si } s = \frac{L}{2}(1 + \cos(\omega)) \rightarrow S'(x) = \sum A_n \text{sen}(n\omega), \text{ donde } A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi S'(x) \text{sen}(n\omega) d\omega$$

Así, se llega a definir la resistencia de onda en función de los coeficientes de la serie de Fourier:

$$S''(x)dx = \frac{dS'}{d\omega} \frac{d\omega}{dx} dx = \frac{dS'}{d\omega} d\omega = d\omega \sum n A_n \cos(n\omega) \Rightarrow D_w = \frac{\pi}{8} \rho_\infty U_\infty^2 \sum n A_n^2 \quad (2.69)$$

Resulta lógico, por tanto, que cuantos menos coeficientes definan $S'(x)$, menor será la resistencia. Bajo este fundamento se definen dos cuerpos de mínima resistencia, que son la ojiva de Von-Karman y el cuerpo de Sears-Hack.

- El primer caso define la superficie para valores dados de longitud y superficie de base:

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x S'(x) dx = \int_\pi^\omega \left(-\frac{L}{2} \text{sen}(\omega)\right) \sum A_n \text{sen}(n\omega) d\omega \\ S(\omega) &= \frac{L}{4} \left[A_1 \left(\pi - \omega + \frac{\text{sen}(2\omega)}{2}\right) \right] + \sum_2^\infty A_n \left[\frac{\text{sen}((n+1)\omega)}{n+1} - \frac{\text{sen}((n-1)\omega)}{n-1} \right] \\ S(L) &= \frac{L}{4} A_1 \pi \Rightarrow A_1 = \frac{4S(L)}{L\pi}, A_{n>1} = 0 \\ S(\omega) &= \frac{L}{4} \left[A_1 \left(\pi - \omega + \frac{\text{sen}(2\omega)}{2}\right) \right] \Rightarrow D_w = \frac{2}{\pi} \rho_\infty U_\infty^2 \frac{S(L)^2}{L^2} \end{aligned} \quad (2.70)$$

- El cuerpo de Sears-Hack se define por tener una superficie de base nula, fijándose como datos el volumen y la longitud. El volumen, mediante integración es $V = \frac{L^2}{8} \left(A_1 - \frac{A_2}{2}\right)$. Como $S(L) = 0$, entonces $A_{n \neq 2} = 0$ y $A_2 = -\frac{16V}{\pi L^2}$.

Estos resultados son válidos para cuerpos de revolución. De no ser así, es necesario aplicar el teorema de cantidad de movimiento al volumen de control apropiado para obtener la resistencia.

Se toma un volumen formado por tres superficies: una superficie S_1 , una superficie lateral S_{lat} y el plano de Trefftz S_3 , situado lo suficientemente alejado del objeto, es decir, $l_3 \gg l$.

Aplicando los teoremas de conservación de masa y cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} & -\rho_{infly} U_{\infty} S_1 + \int_{S_{lat}} \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} d\sigma + \int_{S_3} \rho \left(U_{infly} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\sigma = 0 \\ -\rho_{infly} U_{\infty}^2 S_1 + \int_{S_{lat}} \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(U_{infly} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\sigma + \int_{S_3} \rho \left(U_{\infty} + \frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^2 d\sigma &= - \int_{S_3} (p - p_{\infty}) d\sigma - D \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones:

$$D = -\rho_{\infty} \int_{S_{lat}} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial r} d\sigma - \int_{S_3} (p - p_{\infty}) d\sigma - \rho_{\infty} U_{\infty} \int_{S_3} \frac{\partial \psi}{\partial x} d\sigma \quad (2.71)$$

El primer término es el flujo de cantidad de movimiento axial a través del contorno, es decir, la resistencia de onda. El segundo elemento es la perturbación del torbellino del ala, la resistencia inducida. El último es mucho menor que los otros dos y se cancela. En conclusión, la resistencia de onda es:

$$D_w = -\rho_{\infty} \int_{S_{lat}} \phi_x \phi_r d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \int_0^L dx S''(x) \int_0^L dx_0 S''(x_0) \ln|x - x_0| \quad (2.72)$$

La regla de Oswatitsch-Keune explica que, lejos del cuerpo esbelto, el potencial de velocidades es el mismo que el debido a su cuerpo de revolución equivalente, es decir, aquel que tiene la misma distribución de áreas que el original. Como el radio característico es mucho menor que la longitud, lejos del cuerpo no se ven los detalles geométricos y el potencial de velocidades es:

$$\phi(x, r \gg R_c) = \int_0^{\min(L, x - \beta r)} dx_0 \frac{f(x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 - \beta^2 r^2}} \quad \text{siendo } f(x) = -\frac{U_{\infty}}{2\pi} S'(x)$$

Si el plano de Trefftz está lo suficientemente lejos, la resistencia queda definida por la expresión de Von-Karman-Moore, sea o no de revolución.

Hayes propuso que, para cada punto $P(x, r, \theta)$ de una banda de espesor $d\theta$ en S_2 , el potencial debido al cuerpo no es esbelto es el mismo que el debido a un cuerpo de una distribución de áreas equivalente $S_H(x, \theta)$ y longitud $l(\theta)$, cuyo potencial de velocidades es ϕ^{θ} .

Usando la definición de Von-Karman-Moore para el cuerpo esbelto equivalente:

$$D_w = -\rho_{\infty} \int_{S_{lat}} \phi_x^{\theta} \phi_r^{\theta} d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{l(\theta)} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 dx S_H''(x, \theta) \int_0^{l(\theta)} dx_0 S_H''(x_0, \theta) \ln|x - x_0|$$

El Teorema de Hayes se basa en que el potencial π^{θ} integrado en la banda $d\theta$ es igual a la integral del potencial verdadero $\phi(x, R, \theta)$. De esta forma, se consigue calcular la resistencia de onda del cuerpo original a través del equivalente. La idea es calcular los cuerpos equivalentes para cada θ entre 0 y 2π , obtener la resistencia de onda y promediar el resultado:

$$D_w = -\frac{1}{8\pi} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \int_0^{l(\theta)} dx S_H''(x, \theta) \int_0^{l(\theta)} dx_0 S_H''(x_0, \theta) \ln|x - x_0|$$

Si se considera un cuerpo como una distribución de fuentes supersónicas que origina un potencial ϕ en un punto dado $P(x, y, z)$, Hayes sostiene que una fuente $f(x, y, z)$ situada en un punto (x_1, y_1, z_1) provoca en el punto el mismo efecto que otra situada a la misma distancia hiperbólica.

La distancia hiperbólica se define como el lugar geométrico de los puntos que forman un hiperboloide:

$$(x - x_0)^2 - \beta^2 \left[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] = K^2 \quad (2.73)$$

En una zona de dimensiones pequeñas respecto a la distancia a P, el hiperboloide se puede aproximar por su plano tangente. Esto ocurre en los puntos de la superficie:

$$G \equiv (x - x_0) - \beta \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (K/\beta)^2} = 0$$

Sus cosenos directores son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial x_0} = -1 \\ \frac{\partial G}{\partial y_0} = \frac{\beta(y-y_0)}{\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(K/\beta)^2}} \simeq \frac{\beta y}{R} \\ \frac{\partial G}{\partial z_0} = \frac{\beta(z-z_0)}{\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(K/\beta)^2}} \simeq \frac{\beta z}{R}, \text{ donde } R = \sqrt{y^2+z^2} \end{array} \right. \quad (2.74)$$

Se ha considerado para realizar las simplificaciones que $y_0 \ll y$, $z_0 \ll z$ y que $K/\beta \ll y, z$.

Se determinan así la familia de planos de los cosenos directores, denominados Planos de Mach o de Hayes y que son tangentes a los conos de Mach:

$$(-1)x_1 + \beta \cos(\theta)y_1 + \beta \sin(\theta)z_1 = cte \quad (2.75)$$

O, equivalentemente,

$$x - x_i = \beta(y \cos(\theta) + z \sin(\theta)) \quad (2.76)$$

La distribución de áreas del cuerpo equivalente son las proyecciones sobre el plano YZ de la intersección de los planos de Hayes con el cuerpo original.

Levy y Yoshikawa, en un memorandum de la NASA en 1959, desarrollaron un método numérico para el cálculo de la resistencia de onda, basándose en la Teoría Potencial Linealizada y la Teoría de Cuerpos Esbeltos. Todo el método se fundamenta en el concepto ya expuesto por Hayes sobre la posibilidad de calcular la resistencia a partir de cuerpos equivalentes y promediándola:

$$D(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(\beta, \theta) d\theta \quad (2.77)$$

$$\text{siendo } D(\beta, \theta) = -\frac{q}{2\pi} \int_{-l}^l \int_{-l}^l \left[S''(x_1, \beta, \theta) - \frac{\beta}{2q} L'(x_1, \beta, \theta) \right] \left[S''(x_2, \beta, \theta) - \frac{\beta}{2q} L'(x_2, \beta, \theta) \right] \ln|x_1 - x_2| dx_1 dx_2 \quad (2.78)$$

Donde $S(x, \beta, \theta)$ es la proyección frontal del área resultante de la intersección del plano tangente al cono de Mach y $L(x, \beta, \theta)$ la proyección frontal de la sustentación.

Se sigue, de esta forma, un procedimiento idéntico al explicado hasta ahora, considerando sustentación nula y teniendo en cuenta el efecto de la base del cuerpo:

$$D = -\frac{q}{2\pi} \int \int S''(x_1) S''(x_2) \ln|x_1 - x_2| dx_1 dx_2 + q \left[\frac{S'(L)^2}{2\pi} \ln\left(\frac{2}{\beta R(L)}\right) + \frac{S'(L)}{\pi} \int S''(x_2) \ln|l - x_2| dx_2 \right] \quad (2.79)$$

Se aproxima la derivada segunda discretizando el cuerpo de manera que $S''(x) \approx S''(x_i) \forall \varepsilon [x_i, x_{i+1}]$. En el artículo se desarrolla el método numérico para cuerpos simples de revolución con diversas geometrías y configuraciones de múltiples componentes, calculando la interferencia entre ellas. Se termina el artículo adimensionalizando todos los cálculos para simplificar análisis.

No se trata del único ensayo que estudia la resistencia de onda. Anteriormente, en 1951, la NACA recopiló tres artículos relacionados con ello. En estos trabajos se estudiaba el efecto de la forma del morro, la presión de base y el flujo sobre cuerpos inclinados.

El primero de ellos presenta la Teorías de Taylor, Maccoll y la linealizada, como métodos de estudios conocidos en el momento, pero que no son buenas herramientas de diseño, empleándose mejor la Teoría de 2º orden Van Dyke y la teoría de ondas de expansión de Eggers y Savin. Con ellas se puede aplicar el análisis a un rango mayor y se obtienen resultados más precisos. La importancia del diseño del morro surge de la competencia de intereses entre Aerodinámica y los sistemas de control, ya que, mientras la misma busca reducir resistencia (el morro supone del 10-80% de la resistencia total), el control busca disponer de un mayor volumen para instrumentación. Tener una punta esférica penaliza en exceso por provocar el desprendimiento de la corriente, pero tampoco una punta cónica es deseable. Se concluye del estudio que la mejor opción

es insertar una punta esférica en el extremo del cono, observándose experimentalmente una reducción a cualquier número de Mach. Además de reducirse la resistencia, el efecto de transmisión térmica es menor. El radio de la esfera depende del número de Mach siendo menor al subir este. Otras opciones propuestas incluyen usar una punta cónica separada de la esférica, un cono ranurado o un elemento cónico formado por elementos triangulares. Otro parámetro que afecta considerablemente es la rugosidad de la superficie.

El ensayo sobre la presión de base muestra que no existe ninguna teoría satisfactoria que permite calcular dicho valor. Consiste en un problema compleja dependiente de multitud de variables y cada uno de ellos afecta de tres maneras: modificando el flujo exterior, cambiando el espesor de la capa límite y variando la velocidad y la presión dentro de la capa límite. Esto hace que el problema sea prácticamente intratable de forma teórica. La variable más importante es la forma del cuerpo. Se obtiene que se puede estimar la resistencia de base de perfiles y cuerpos de revolución con precisión razonable, usando correlaciones experimentales y métodos de cálculo. Para minimizar la resistencia de base se usan cuerpos de morro no puntiagudo y cola finita. Asimismo, la inyección de fluido en la base también reduce dicha componente de la resistencia. El método numérico que emplean se basa en calcular la presión y la velocidad de perturbación en la zona posterior del cuerpo y usar correlaciones experimentales para tener la presión de base. Es una forma análoga a los ajustes que se usan en los túneles de viento por el efecto de las paredes.

El último de los artículos recoge un análisis de vuelo de cuerpos de revolución a ángulos de ataque no nulos, repasando los métodos existentes y sus aplicaciones. No se tiene en cuenta para el presente trabajo, pues el cohete desarrollará un vuelo a $\alpha = 0^\circ$.

También Robert T. Jones estudia la Teoría de la resistencia que presenta el conjunto cuerpo y ala a velocidades supersónicas. Usando como referencia la teoría de Whitcomb y Hayes, usa la distribución de manantiales y sumideros supersónicos para realizar los cálculos. Además, usa los coeficientes de la serie de Fourier para definir la derivada de la superficie y la resistencia. El método es prácticamente igual al analizado anteriormente y, además, queda contrastado con datos experimentales. El método usado fija el límite de aplicación por los efectos del transónico en $M \sim 1.08$ y desarrolla la idea de minimizar la resistencia de las configuraciones del fuselaje y alas, haciendo que la distribución de área equivalente sea la del cuerpo de Sears-Hack.

Anteriormente a estos estudios, Whitcomb llevó a cabo un estudio del aumento de la resistencia cerca del transónico, lo cual ocurre principalmente por las ondas de choque. El autor analiza distintos casos mediante experimentación y análisis teóricos basados en la Teoría Linealizada y las reglas de similaridad transónicas. Se emplea de nuevo el concepto de cuerpo de revolución equivalente y se obtiene que, en primer orden, el resultado teórico del cuerpo equivalente coincide con el experimental. La precisión del método disminuye al aumentar el espesor, el alargamiento o el estrechamiento, con mayor influencia a medida que crece el número de Mach. Distribuciones de áreas que evolucionan de forma más suave disminuyen el aumento de la resistencia, siendo también menor con alas en flecha. Se concluye que el aumento de la resistencia es comparable al del cuerpo equivalente, que la resistencia depende de la distribución de áreas normales a la corriente y que se reduce con indentaciones en el fuselaje.

El desarrollo computacional del método anterior permite obtener, por tanto, la resistencia de onda del cohete.

De esta forma, se puede aplicar este procedimiento mediante MATLAB y, posteriormente, FLUENT a las geometrías definidas previamente. Se estudian únicamente aquellas configuraciones de ojivas que se consideraron como opciones posibles.

Análisis mediante la Teoría de Cuerpos esbeltos

La implementación de un código que resuelva las ecuaciones desarrolladas anteriormente permite calcular de forma numérica la resistencia de onda de un cuerpo ante una corriente supersónica incidente.

Se van a analizar las dos ojivas consideradas en el diseño preliminar: la parabólica y la cónica con punta esférica; y se hace desde dos puntos de vista, el comportamiento ante un número de Mach de vuelo dado ($M_\infty = 1.5$) y la evolución del coeficiente de resistencia con el Mach de vuelo. El primer cálculo sirve para establecer una comparación entre los resultados obtenidos mediante el código de la aplicación de la Teoría de Cuerpos Esbeltos con los que proporciona FLUENT y, el segundo, para poder conocer la evolución frente a M_∞ .

Ante cualquier geometría se observa que, si bien la resistencia aumenta considerablemente con M_∞ , el coeficiente de resistencia se mantiene prácticamente constante. Para verificar esto, se ha probado en un rango de Mach amplio, que va desde $M_\infty = 1.01$ hasta $M_\infty = 10$, aunque abarque valores innecesarios de cara al vuelo del vehículo.

Al estudiar la ojiva parabólica se tiene que el coeficiente de resistencia se mantiene en torno a 0.1 para todo el rango estudiado. La representación gráfica es frente a $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$

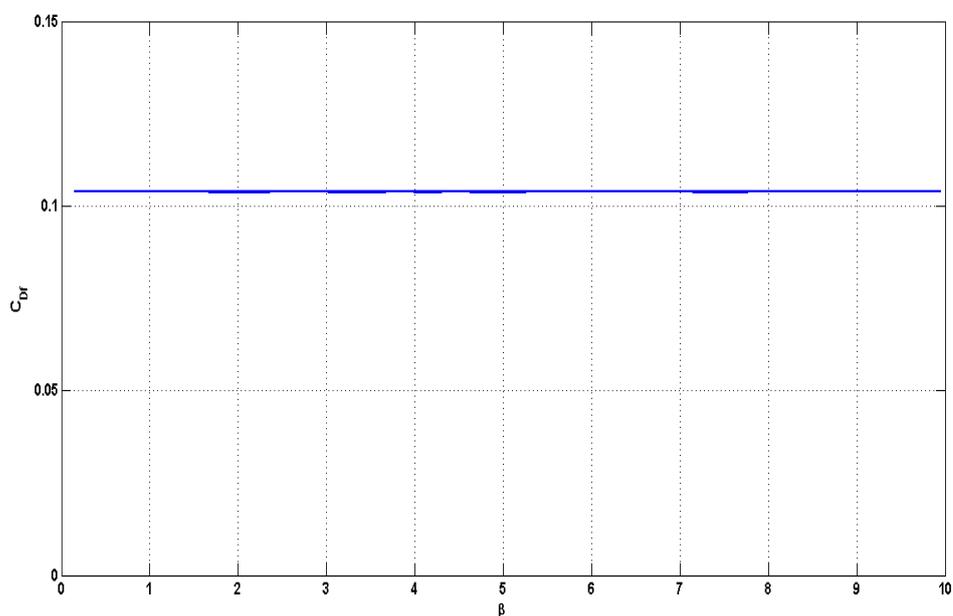


Figura 2.39 Evolución del C_D frente a β para la ojiva parabólica.

Tal y como se comentaba antes, se mantiene constante, mientras que la resistencia (mostrada en la imagen inferior) aumenta:

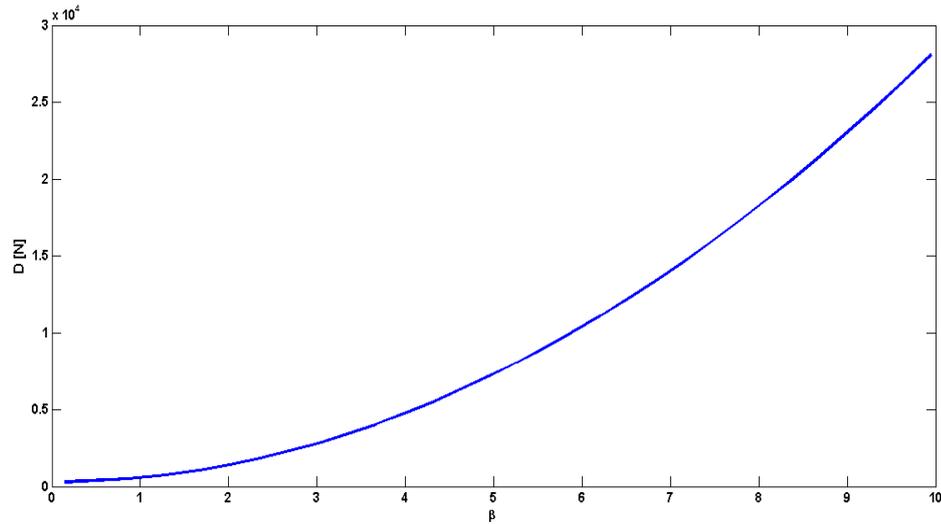


Figura 2.40 Evolución de la resistencia frente a β para la ojiva parabólica.

Por otro lado, al efectuar el análisis de la ojiva cónica con morro esférico se comprueba que las ecuaciones no están correctamente adaptadas a este caso. Es decir, el hecho de que la pendiente del área transversal $S'(x)$ no se anule en el origen provoca un fallo importante en la teoría. Al tratarse de una esfera, la pendiente tiende a infinito en el origen, haciendo que las ecuaciones den un resultado no aceptable, dando valores de resistencia unas cinco veces superiores al de la ojiva parabólica para el mismo Mach de vuelo. En el caso de la ojiva parabólica, este error era mitigado por el pequeño valor de la derivada de $S(x)$.

Para poder realizar un análisis con la Teoría de Cuerpos Esbeltos, se decide estudiar la geometría cónica y, posteriormente, de acuerdo a los resultados, poder desarrollar las conclusiones correspondientes.

De esta forma, tomando como referencia la ojiva cónica, se tiene un coeficiente de resistencia, también constante frente a β , y de un valor muy similar al de la ojiva parabólica.

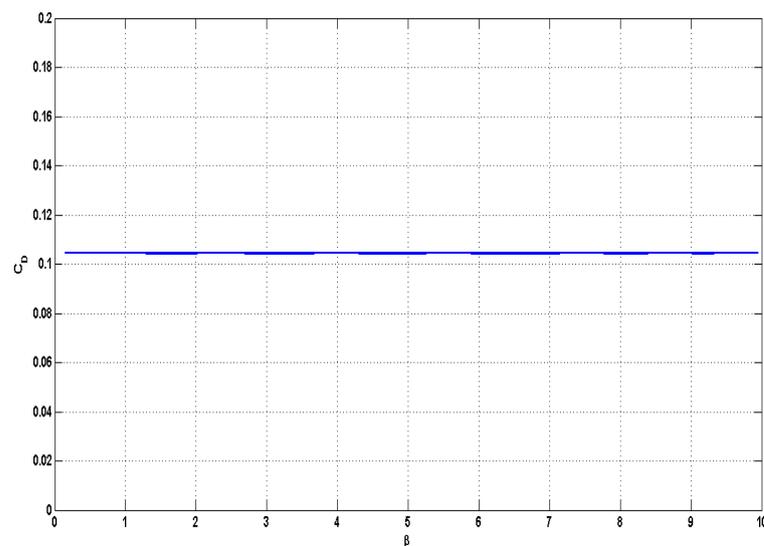


Figura 2.41 Evolución del C_D frente a β para la ojiva cónica.

Y, a su vez, la resistencia es creciente en todo momento.

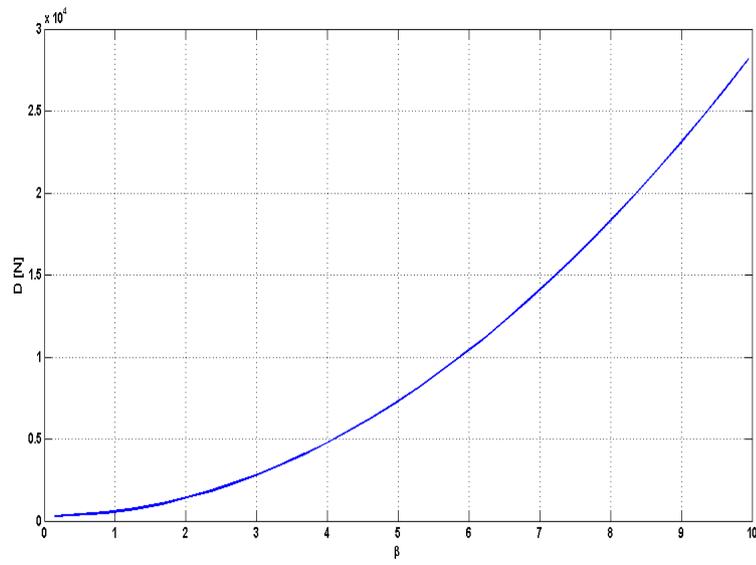


Figura 2.42 Evolución de la resistencia frente a β para la ojiva cónica.

Análisis mediante Software Computacional

Para el análisis de los dos fuselajes citados con anterioridad se emplean las mismas geometrías y mallas que en el régimen subsónico. Se sigue realizando un cálculo con el modelo de turbulencia $k - \epsilon$, que demostró ser válido para $M_\infty < 1$, peor en vez de emplear el modelo RANS y laminar, se aboga por el modelo sin viscosidad, considerando que, para valores del número de Reynolds tan elevados, el efecto de la viscosidad puede despreciarse.

Además de realizar las simulaciones con las ojivas parabólica y cónica con punta esférica, se hace una tercera con la cónica para ver las diferencias entre incluir o no el morro curvo.

En primer lugar, se analiza la ojiva parabólica. Si se observa el campo de presiones en el entorno del objeto, se pueden distinguir las ondas de choque y expansión que hacen que la corriente se adapte a la geometría del vehículo. En la punta de la ojiva se pueden ver las ondas de choque (y el correspondiente aumento de presión), seguidas de dos trenes de ondas de expansión: el primero en la unión con el cuerpo principal, para volver a reorientar el flujo, y, el segundo, al final del objeto, de forma que la corriente se deflecta para ocupar la base.

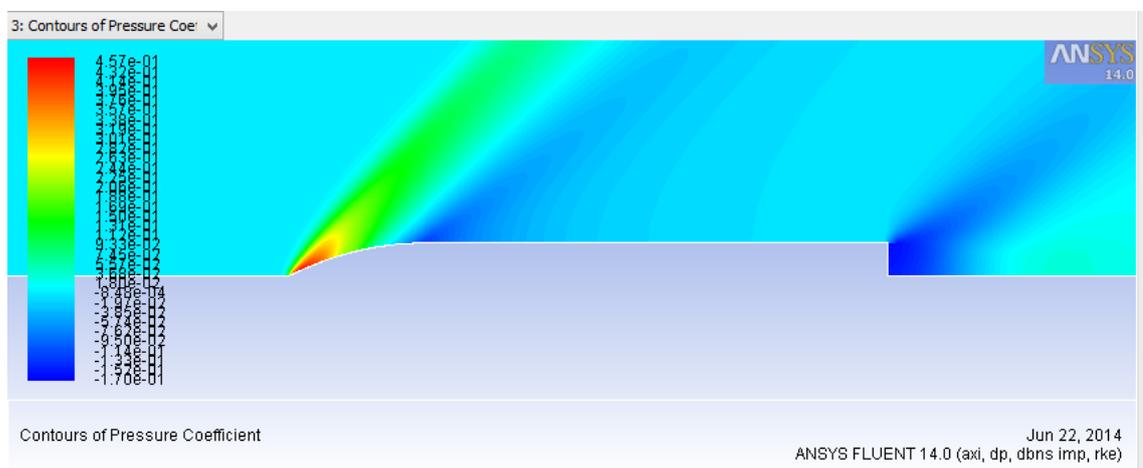


Figura 2.43 Campo de presiones en torno al cohete.

También se pueden extraer estas conclusiones a partir de la representación del coeficiente de presiones a lo largo del cuerpo.

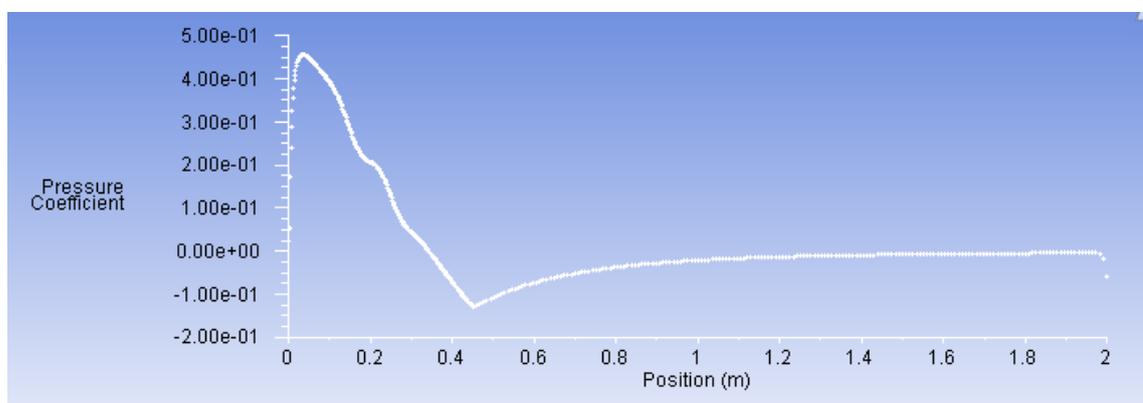


Figura 2.44 Evolución del coeficiente de presiones para ojiva parabólica.

En la imagen superior se puede ver el aumento brusco en el origen del cuerpo, consecuencia de las ondas de choque. En la zona de unión entre la ojiva y el cuerpo, el coeficiente de presiones presenta un mínimo, recuperándose durante la zona recta, en la que se mantiene constante. Finalmente, experimenta un descenso en la zona final fruto de las ondas de expansión que hacen que la corriente se deflecte hacia la base.

En cuanto a las geometrías cónica con morro esférico y sin el, se obtienen las siguientes distribuciones de coeficiente de presiones:

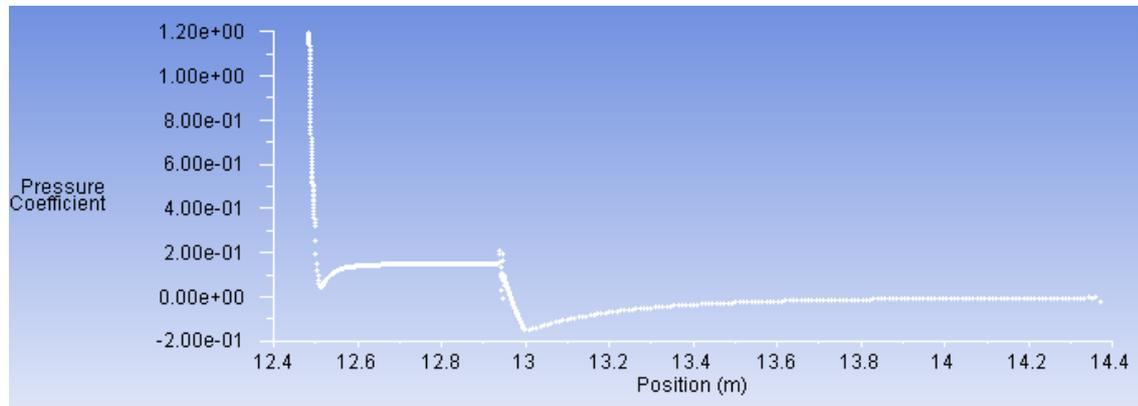


Figura 2.45 Evolución del coeficiente de presiones para ojiva cónica con morro esférico.

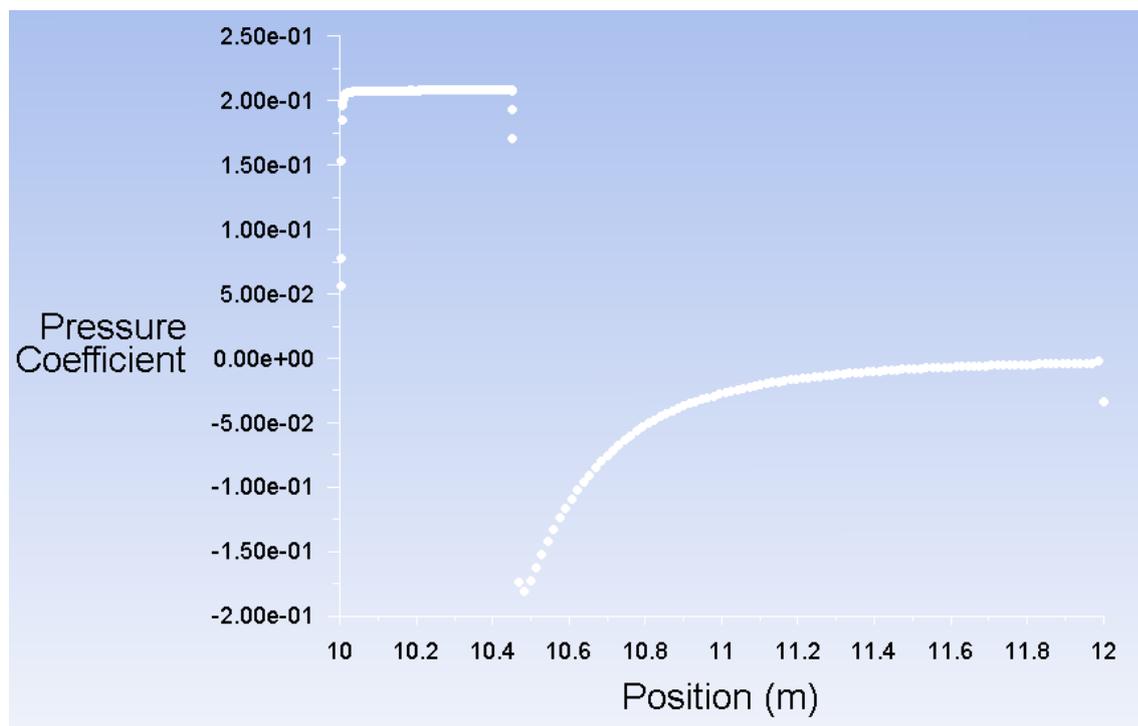


Figura 2.46 Evolución del coeficiente de presiones para ojiva cónica.

Comparando los dos resultados se puede concluir lo siguiente: si bien con la ojiva con punta esférica se tiene un aumento muy brusco en el morro y que es mayor al experimentado en el otro caso, se trata de algo muy puntual y el coeficiente de presiones se mantiene en un valor constante algo menor al de la otra ojiva.

Además, la expansión que experimenta el flujo en la transición con el cuerpo principal es menos acusada gracias a la unión tangencial que se incluye en la geometría.

Aunque a priori se puede pensar que la resistencia que muestra un cuerpo con punta roma es mayor que la del mismo cuerpo con morro puntiagudo, se mejoran los resultados con la punta esférica. Una posible explicación a este hecho es que las ondas de choque que se dan en la zona de la punta debidas a la esfera son tales que el número de Mach a lo largo del cuerpo es menor y, con ello, la resistencia de onda. De hecho, si se representa el número de Mach para las dos geometrías de acuerdo a los resultados proporcionados por FLUENT, se observa que se mantienen en todo momento por debajo. Además, el flujo sobre el cuerpo es supersónico sólo en ciertas regiones, mientras que con la ojiva cónica es totalmente supersónico.

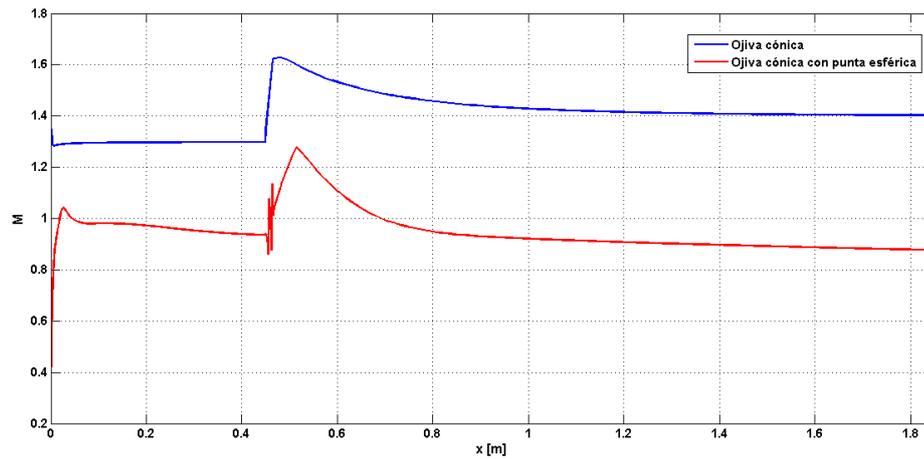


Figura 2.47 Evolución del coeficiente de presiones para ojiva cónica.

Análisis de resultados y conclusiones

Los estudios realizados a las distintas ojivas propuestas y mediante los dos métodos analizados. En la tabla que se adjunta a continuación se pueden contemplar los distintos valores de resistencia y coeficiente de resistencia para $M_\infty = 1.5$ según cada instrumento de análisis.

	Ojiva parabólica			Ojiva cónica con punta esférica			Ojiva cónica	
	Teoría	$k - \epsilon$	$\mu = 0$	Teoría	$k - \epsilon$	$\mu = 0$	Teoría	$\mu = 0$
$D [N]$	631.6544	1183.1221	1177.97	9564.9	892.61	879.034	633.58	1259.0358
C_D	0.1042	0.1950	0.1941	1.57	0.1471	0.1449	0.1045	0.2075
$C_{D_{base}}$	0.1702	0.1587	0.2088	0.1702	0.1377	0.1370	0.1702	0.1399

Al contrario a lo que ocurría en el régimen subsónico, ahora los resultados proporcionados por la Teoría Potencial se encuentran por debajo de los que devuelve el software computacional. De hecho, esta observación está validada por el artículo mencionado anteriormente y publicado por la NACA ([24]), en el que se justifica mediante experimentación que los datos de resistencia para una ojiva en régimen subsónico se subestiman mediante la Teoría Potencial.

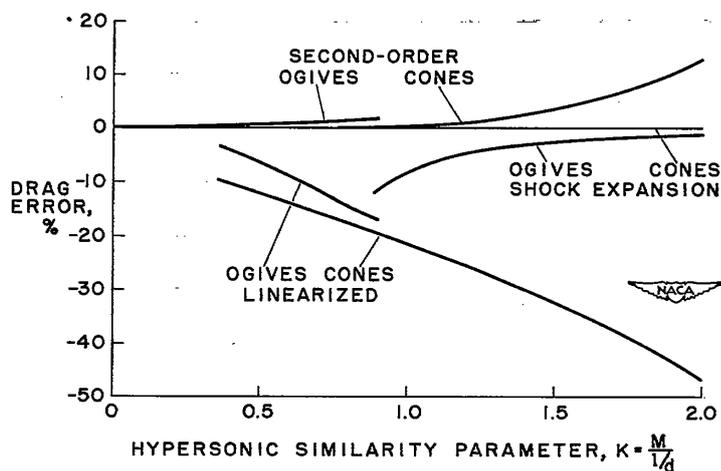


Figura 2.48 Diferencias de distintos métodos frente a los ensayos.

Las diferencias entre los métodos usados en el presente trabajo superan con creces las que se muestran en la imagen, en la cual se representan los errores cometidos en función del Mach de vuelo, las características geométricas de la ojiva y el método de resolución empleado. Los resultados potenciales son del orden del 50-55% de los que proporciona FLUENT. El parámetro de similitud hipersónica es, en este caso, en torno a 0.75, lo que explicaría unos errores de alrededor del 20%. Sería necesario, por tanto, comprobar experimentalmente estas diferencias para poder validar los resultados, lo cual conlleva un problema añadido al tratarse de ensayos supersónicos.

Respecto a la resistencia de base, si bien esta no es de aplicación pues la presión en esta zona queda determinada por los gases de salida del motor, ésta es constante según la teoría debido a que se calcula a partir de curvas experimentales que no consideran el efecto de la geometría. Sin embargo, los valores que proporciona FLUENT con el modelo de turbulencia se parecen bastante a los que se tienen teóricamente. No se consideran los resultados dados por el modelo no viscoso pues resulta más preciso considerar que existe viscosidad.

Como se comentó con anterioridad, la aplicación de la Teoría de Cuerpos Esbeltos a la geometría cónica con punta esférica no da una solución admisible por los motivos ya explicados. El coeficiente de resistencia para la ojiva cónica es del mismo orden que para la parabólica. Sin embargo, comparando los coeficientes

que proporciona el programa de CFD, la ventaja de usar una punta esférica y suavizar la unión con el cuerpo mejora significativamente el comportamiento frente a la corriente incidente. Exactamente, el C_D de la ojiva cónica con punta esférica es un 70 % del de la cónica.

En principio, de acuerdo a los resultados obtenidos para $M_\infty = 1.5$, sería mejor considerar el uso de la ojiva cónica con punta esférica, dada la reducción del 25 % respecto a la parabólica según los valores del coeficiente de resistencia de los modelos $k - \varepsilon$ y con viscosidad nula de FLUENT. El descenso de la resistencia del cono a la misma geometría pero con la otra tipología de punta, como se ha precisado, es de un 30 %. Desde un punto de vista conservador, se fija la diferencia en un 25 % para aproximar los resultados teóricos de uno a partir del otro.

Como se ha comprobado que el C_D permanece constante ante M_∞ y se espera no volar a valores de Mach tales que deje de ser válido este resultado, se toma un coeficiente de resistencia para todo el régimen supersónico. Dado que queda constatado que los resultados teóricos son menores a los reales y los dos modelos de CFD predicen, aproximadamente, la misma solución, se toma una media entre los modelos.

	Parabólica	Cónica con punta esférica
C_D	0.19455	0.1460

Cabe decir, a su vez, que el resultado de obtener C_D constante para un amplio rango de números de Mach de vuelo está experimentalmente probado, tal y como se puede ver en la imagen inferior del artículo de Robert T. Jones ([13]). En el artículo citado, se estudian distintos cuerpos esbeltos con alas y se comprueba que, si bien el coeficiente de resistencia sube en torno a $M=1$, posteriormente se establece constante.

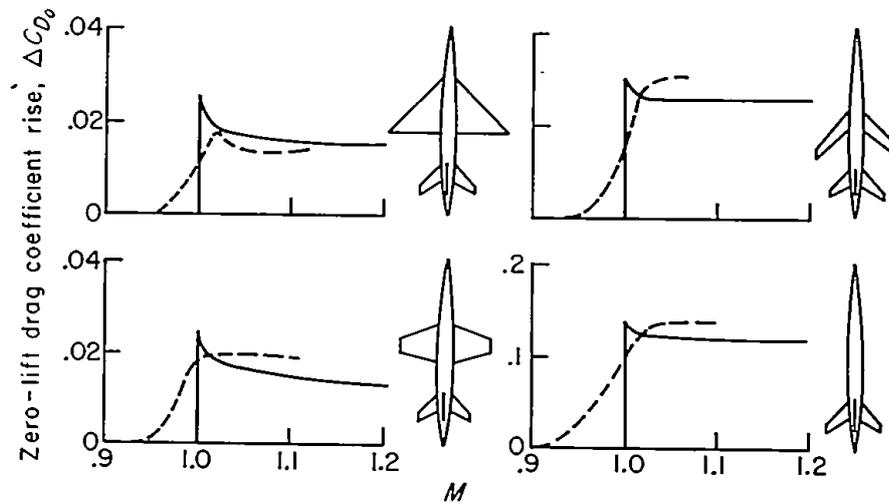


Figura 2.49 Diferencias entre resultados experimentales y teóricos.

2.3 Cálculo del centro de presiones. Estudio de la estabilidad

Uno de los requisitos fundamentales del diseño de un vehículo tal y como es el cohete es asegurar su estabilidad durante toda la misión de vuelo.

El centro de presiones de un cuerpo sumergido en un fluido es el punto respecto al cual el sumatorio de fuerzas de presión provocan momento nulo. La expresión analítica que permite obtener su situación es tal que:

$$C_p = \frac{\int x p(x) dx}{\int p(x) dx} \quad (2.80)$$

La determinación es complicada por la distribución de presiones que se tiene, por lo que requiere el conocimiento exacto de las presiones en torno al objeto.

La integral anterior puede obtenerse mediante métodos numéricos usando la regla de los trapecios o con programas informáticos, como FLUENT.

La importancia del centro de presiones reside en que se debe encontrar en todo momento por detrás del centro de gravedad para cumplir con la estabilidad, esto es, para poder recuperarse ante perturbaciones que hagan que el eje se desvíe respecto a la dirección vertical.

La implementación de la definición del centro de presiones permite calcular dicho punto para las geometrías consideradas. En un primer análisis para $M_\infty = 0.5$, se pueden obtener los centros de presiones respecto del morro para los campos de presiones calculados según los distintos métodos.

	Potencial	$k - \varepsilon$	RANS	Laminar
Ojiva parabólica	0.0790 m	1.9518 m	1.8942 m	1.8693 m
Ojiva cónica con punta esférica	0.1364 m	1.7508 m		1.8759 m

Se puede observar que la estimación del centro de presiones por parte de la Teoría de Cuerpos Esbeltos se diferencia significativamente del que proporciona el software CFD. Este hecho era de esperar dado que las distribuciones de los coeficientes de presiones de ambas soluciones son distintos, siendo más realista el $C_p(x)$ devuelto por FLUENT. Se considera, por tanto, que el centro de presiones estará más cerca de los valores computacionales.

Para verificar esto, se procede a realizar los mismos cálculos pero con el cuerpo analizado por Andrés Pajares ([18]).

	Teoría Potencial	$k - \varepsilon$	RANS	Laminar	Experimental
Centro de presiones [m]	0.0568	0.9537	1.0634	0.8783	0.6758

Respecto a los valores experimentales, se vuelve a ver que los resultados teóricos se alejan significativamente de los reales, como también hay diferencias entre las distribuciones del coeficiente de presiones. Los datos proporcionados por el software computacional se encuentran más alejados que los del ensayo, pero la precisión es mayor que mediante la Teoría de Cuerpos Esbeltos, lo cual también se explica con la mayor similitud en el $C_p(x)$.

Mediante los cálculos de FLUENT, el centro de presiones se encuentra sobreestimado en un 30.87%, 43.06% o 22.5% según se use un modelo de turbulencia $k - \varepsilon$, RANS o laminar, respectivamente.

El centro de presiones, al igual que el coeficiente de presiones, cambia según la velocidad de la corriente incidente. Evaluar este cambio resulta crucial de cara a garantizar la estabilidad en el vuelo. Exactamente, interesa para valores de M_∞ muy pequeños, correspondientes al inicio de la misión. Para $M_\infty = 0.2$ (menor valor para el que se ha realizado una simulación, FLUENT sitúa el centro de presiones del cuerpo con ojiva parabólica a 1.9364 m del moro y, en el caso de la ojiva cónica con punta esférica, a 1.8037 m. De acuerdo a las diferencias que se muestran respecto a los datos del ensayo, se le aplica una corrección del 40% (valor

conservador dentro de las tres diferencias que se aprecian), con lo que el centro de presiones estaría a 1.1619 y 1.08222 metros respecto de la punta, respectivamente. Son con estos valores con los que se va a diseñar las aletas.

Esta condición debe verificarse al comenzar el vuelo, que es el momento en el que el centro de gravedad está más atrasado debido a la masa de combustible. A medida que el combustible se agota, el cohete, por tanto, se vuelve más estable.

Es aquí donde intervienen las aletas, las cuales dotan de estabilidad al vehículo, contribuyendo muy poco a la resistencia por su pequeño espesor. Con ellas se consigue retrasar el centro de presiones lo que sea suficiente. Se dispone de una gran variedad de aletas con distintas geometrías, entre las cuales se probarán las trapezoidales, pues permiten retrasar el centro de presiones (por la flecha) a la vez que tienen un área mayor que otras como las triangulares.

2.4 Conclusiones. Diseño preliminar del cuerpo.

Se ha realizado hasta ahora un análisis aerodinámico del cuerpo del cohete, compuesto por la ojiva y el fuselaje. La elección de la ojiva es crucial para optimizar la misión presentando una menor resistencia a la corriente.

Por ello se han evaluado distintas geometrías mediante métodos teóricos y computacionales, pudiéndose ver las carencias y ventajas de cada uno de ellos y su validez al contrastar los resultados con los procedentes de ensayos en un túnel de viento.

Del estudio en régimen subsónico se pudo comprobar el efecto de la longitud de la ojiva y el radio del fuselaje:

- Un aumento del radio provoca una mayor resistencia.
- Una ojiva más larga mejora el comportamiento en el vuelo, siendo la resistencia menor.

Dadas estas conclusiones y los valores de resistencias para cada diseño de ojiva, se llegó a un compromiso entre alargar la ojiva y no reducir significativamente el volumen interno del cuerpo. Con ello se pudieron rechazar todas las geometrías menos dos: la parabólica y la cónica con punta esférica. La elección de esta última se fundamenta en una serie de artículos que aparecen en la bibliografía y que justifican experimentalmente el efecto de tener una punta roma.

A continuación se procedió a ver cuál era el comportamiento en régimen supersónico, pudiendo estimar las resistencias con los distintos procedimientos y decidir qué ojiva emplear para el vehículo. Al mismo tiempo, se pudo justificar por qué es conveniente el uso de punta roma para vuelo supersónico.

Debido a que en los dos regímenes de vuelo la resistencia de la ojiva cónica con punta esférica es mejor, se decide apostar por esta. La diferencia se hace más importante para $M_\infty > 1$ y, ante la posibilidad de que se produzca vuelo a velocidades supersónicas, se apuesta con más motivo por esta ojiva.

En todo momento quedan patentes los grandes fallos de los métodos teóricos de cuerpos esbeltos que, si bien permiten tener una idea para comparar diseños (salvo ciertos casos como con la ojiva esférica), los valores proporcionados se distancian enormemente de los que se obtienen con un software de CFD, cuyos resultados quedan mejor validados al compararlos con los ensayos.

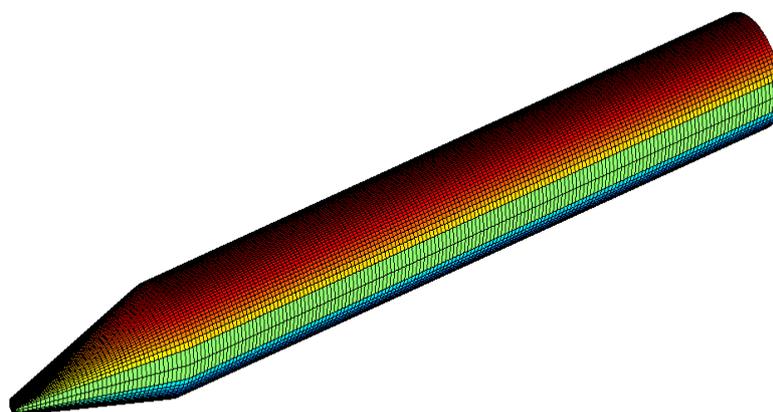


Figura 2.50 Diseño preliminar.

Por último, como se comentó antes, se lleva a cabo un análisis de la capa límite para el diseño escogido, bajo la suposición de capa límite laminar e incompresible. A través de la implementación del Método de Líneas, se obtienen los resultados que se observan en la imagen mostrada a continuación. En ella se observa claramente cómo la capa límite aumenta su espesor a medida que se avanza en el cuerpo. Tal y como era de esperar, el desprendimiento se produce debido al gradiente adverso que se mostraba en el coeficiente de presiones, en el entorno de la unión entre ojiva y fuselaje. Además ya se veía cómo tanto en las simulaciones como en los datos experimentales, el C_p permanece constante a partir de esa zona.

Para las primeras curvas se observa que el flujo permanece adherido, pero ya para $x = 0.394$ (curva en cian) la corriente parece haberse desprendido, algo que resulta más que evidente si se analiza el perfil en la siguiente estación que se muestra.

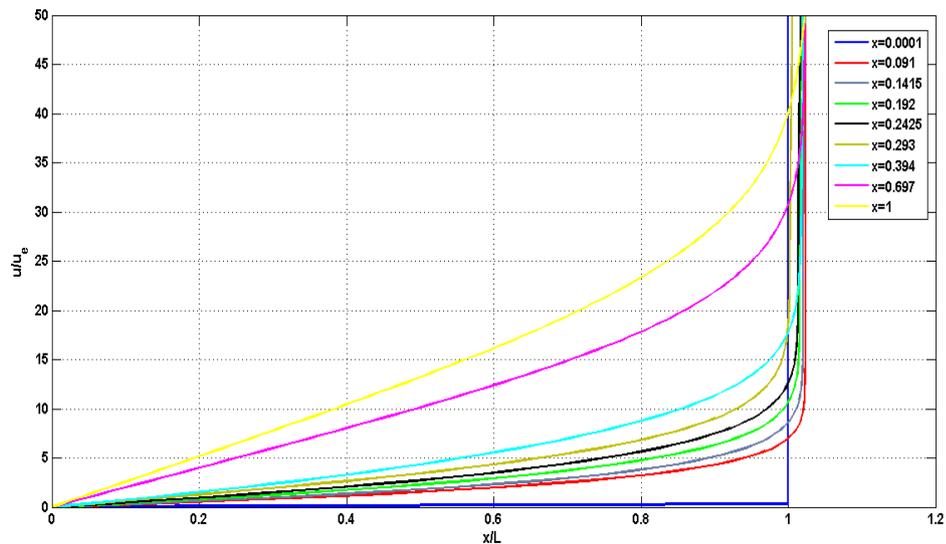


Figura 2.51 Perfiles de velocidades en la capa límite para varios valores de x/L .

3 Estudio Propulsivo

Una vez se tiene definida la geometría del vehículo, es necesario diseñar el sistema de propulsión que permita cumplir con la misión deseada.

Un motor cohete es un motor de combustión interna que no toma del exterior los gases que debe acelerar para generar el empuje, sino que tiene todo lo necesario en su interior. Se trata de sistemas autónomos, que no dependen del medio que les rodea.

En función de cómo se genera el empuje, se distinguen distintas tipologías de propulsión por motor cohete:

- Motores cohete químicos. Aprovechan la reacción química de distintos compuestos de forma que se generan gases a alta temperatura que son acelerados en una tobera. A la mezcla de compuestos químicos se la conoce como propelente y este tipo de motores se clasifican según el estado físico del mismo:
 - Propelente líquido. El vehículo consta de unos tanques desde los que se alimenta a la cámara de combustión. Cuenta con las ventajas de poder controlar el empuje y apagar el proceso. Sin embargo, el sistema de alimentación es complejo, así como el de control. El mantenimiento de estos motores es difícil.
 - Propelente sólido. Se usa un grano (forma que adquiere la mezcla) cuya combustión proporciona el empuje. Al contrario que anteriormente, no hace falta un sistema de alimentación, ni tampoco elementos como válvulas o controladores. Además, el almacenamiento es más sencillo y el coste suele ser menor. Como desventajas, es difícil controlar el empuje y no se pueden apagar tras iniciar la combustión.
 - Propelente gaseoso. Se usan gases almacenados a presión cuya combustión proporciona la energía que se requiere. El proceso de combustión se puede regular, pero el almacenamiento es difícil y se requiere un sistema de refrigeración.
 - Propelente híbrido. Consisten en una combinación de líquido y sólido.
- Motores cohete nucleares. Utilizan la energía procedente de la descomposición radiactiva de un material tipo plutonio en un reactor. Son motores que, al contrario que los anteriores, tienen una larga duración. Además, no dependen de fuentes externas y se les puede conectar sistemas como el de generación eléctrica. Cuenta con las desventajas de dar bajos niveles de empuje y conllevar problemas medioambientales, políticos y de disponibilidad.
- Motores cohete eléctricos. Se trata de sistemas de propulsión que aceleran las partículas mediante un campo eléctrico. Duran más tiempo, pero el empuje es menor y hace falta un generador eléctrico.
- Motores cohete alternativos. En la actualidad hay nuevas líneas de investigación como es la propulsión por plasma.

Los motores cohete pueden tener distintas finalidades. En este caso se va a emplear como sistema propulsivo de un vehículo atmosférico, pero también se puede usar en propulsión espacial o de misiles.

De entre todos los existentes, se decide escoger un motor de cohete de propelente químico sólido. Se rechaza la propulsión nuclear por razones obvias de cuestiones de seguridad, financieras, políticas y medioambientales, así como por no cumplir con los requerimientos de empuje. Es un sistema más indicado para vehículos ya en el exterior de la atmósfera para maniobras orbitales y cuando no sea suficiente con otros sistemas. Respecto a la propulsión eléctrica, los bajos niveles de empuje, igual que en el caso anterior, hace que se rechace, además de resultar un sistema en un estado más experimental, igual que pasa con los motores alternativos. Dentro de los motores cohete químicos, los de propelente sólido destacan por su mayor simplicidad, la disponibilidad, el coste y el empuje que pueden llegar a proporcionar.

Para el proceso de diseño, es preciso evaluar una serie de requerimientos como es la propia misión de vuelo, la forma de unión a otros elementos y sistemas, los riesgos, el método de fabricación y el coste. De acuerdo con esto, se evalúa y se escoge el combustible en primer lugar, para pasar a un diseño conceptual posteriormente. Con la utilización de un soporte analítico y experimental se analiza el prediseño y se decide si se procede, ante lo cual se comienza a desarrollar los planos y estudios que se exijan. Así es como se llega, finalmente, a un diseño preliminar.

3.1 Introducción a los propelentes sólidos

Tal y como se comentó anteriormente, un motor cohete de propelente sólido lleva almacenado en la cámara de combustión el grano de propelente, esto es, una pieza constituida por los compuestos químicos cuya combustión proporciona la energía necesaria para que, al acelerarse los gases en la tobera, se genere el empuje. Típicamente, el motor está formado por:

- Grano de propelente.
- Ignitor.
- Carcasa.
- Cavidad interna.
- Aislante.
- Tobera.
- Alineante (en inglés, "liner").
- Estructuras de unión y soporte

3.2 Fundamentos teóricos del análisis del motor

3.2.1 Definiciones fundamentales

- Impulso. En Mecánica Clásica, se define como la variación del momento. Lo que interesa ahora son dos magnitudes que caracterizan la actuación de un motor.

La primera es el Impulso total, definido como la integral del empuje (E) en el período de operación:

$$I_t = \int_0^t E dt \quad (3.1)$$

El otro parámetro es el Impulso Específico, que es el Impulso Total dividido por unidad de peso de propelente. Se mide en segundos [s]:

$$I_s = \frac{\int_0^t E dt}{g \int_0^t \dot{m} dt} \quad (3.2)$$

- Velocidad efectiva de salida: es la velocidad equivalente de salida de la tobera:

$$c = I_s g = \frac{F}{\dot{m}} \quad (3.3)$$

- Relación másica: medida de la cantidad de propelente gastado durante la misión respecto al peso inicial. Oscila típicamente entre un 10% y un 60%:

$$MR = \frac{m_f}{m_0} \quad (3.4)$$

Relacionada con esta característica está la fracción de propelente, que indica qué porcentaje de propelente útil (que se gasta) lleva un vehículo respecto al peso total inicial:

$$\xi = \frac{m_P}{m_0} = \frac{m_0 - m_f}{m_0} \quad (3.5)$$

- Relaciones Impulso-Peso y Empuje-Peso: son medidas de la eficiencia y de la aceleración que proporciona el motor:

$$\frac{I_t}{W_0} = \frac{I_s}{m_f/m_P + 1} \quad (3.6)$$

- Empuje. Es la fuerza propulsiva, la reacción que experimenta el vehículo ante la salida de masa a alta velocidad. Es la resultante de las fuerzas de presión y fricción que se ejerce sobre las paredes del motor. Si se llama Σ_i a la superficie interna y τ' al tensor de esfuerzos viscosos, el empuje es:

$$\vec{E} = - \int_{\Sigma_i} (p - p_0) \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_i} \tau' \vec{n} d\sigma = -E \vec{e}_x \quad (3.7)$$

$$\Rightarrow E = \int_{\Sigma_i} (p - p_0) n_x d\sigma - \int_{\Sigma_i} \tau' n_x d\sigma \quad (3.8)$$

Para obtener el empuje se aplican las ecuaciones de continuidad de masa y cantidad de movimiento al dominio interno del motor. Se postulan las hipótesis de que el sistema de referencia está ligado al motor; el movimiento es cuasiestacionario ($St \ll 1$); las fuerzas másicas son despreciables ($Fr \gg 1$); los efectos viscosos y de conducción de calor están restringidos a la capa límite; atmósfera en calma; no hay aporte externo de calor o trabajo; distribución uniforme en el área de salida; y que el aire es un gas caloríficamente perfecto.

$$Ec. \text{ conservación de masa : } \int_{\Sigma_i} \rho \vec{v} \vec{n} d\sigma = 0 \Rightarrow \dot{m} = \rho v A = \rho_s v_s A_s \quad (3.9)$$

$$Ec. \text{ cantidad de movimiento : } \int_{\Sigma_i} \rho \vec{v} (\vec{v} \vec{n}) d\sigma = - \int_{\Sigma} p \vec{n}' d\sigma + \int_{\Sigma} \vec{\tau}' \vec{n}' d\sigma$$

$$\rightarrow \dot{m} v_s = -p_s A_s + \int_{\Sigma_i} -p n'_x d\sigma + \int_{\Sigma_i} (\tau' \vec{n}')_x d\sigma$$

$$\dot{m} v_s = -(p_s - p_0) A_s + \int_{\Sigma_i} (p - p_0) n_x d\sigma - \int_{\Sigma_i} (\tau' \vec{n}')_x d\sigma \quad (3.10)$$

Donde se ha considerado que \vec{n} es la normal interior y \vec{n}' es la normal exterior, cumpliéndose que $\vec{n} = -\vec{n}'$.

Combinando las ecuaciones se llega a que el empuje queda definido por la siguiente expresión:

$$E = \dot{m} v_s + (p_s - p_0) A_s \quad (3.11)$$

- Velocidad de salida. Existen dos medidas de la velocidad a la salida distintas a la real pero que permiten evaluar mejor otros parámetros:
 - Velocidad efectiva: $c = v_s + (p_s - p_0) A_s / \dot{m}$.
 - Velocidad característica: $c = p_{int} A_g / \dot{m}$, donde A_g es el área de garganta.
- Potencia. Hay diferentes formas de evaluar la potencia de un motor cohete, según lo que se desee analizar:
 - Potencia del flujo: $P_{jet} = \frac{1}{2} \dot{m} v^2 = \frac{1}{2} \dot{W} g I_s^2 = \frac{1}{2} F g I_s = \frac{1}{2} F v_s$
 - Potencia específica: $P_{sp} = P_{jet} / m_0$
 - Potencia química: $P_{quim} = \dot{m} Q_R J$, donde Q_R es el calor de reacción y J un factor de corrección.
 - Potencia disponible: $P_{disp} = \eta_{comb} P_{quim}$
 - Potencia transmitida al vehículo: $P_{veh} = E u$
- Medidas de eficiencia. De nuevo, al igual que ocurre con la potencia, hay distintas manera de medir la eficiencia del motor:
 - Eficiencia de combustión. Es la eficiencia para generar energía: $\eta_{comb} = \frac{Q_{real}}{Q_{ideal}}$
 - Eficiencia interna, definida como la efectividad en la transformación de energía interna en cinética: $\eta_{int} = (1/2 \dot{m} v^2) / (\eta_{comb} P_{quim})$
 - Eficiencia propulsiva, que es cuánta energía cinética es útil para propulsar: $\eta_p = \frac{2u/c}{1+(u/c)^2}$

3.2.2 Tobera. Teoría de Gases. Optimización

Se analiza a continuación cómo evoluciona el gas al circular por la tobera situada tras la cámara de combustión, de cara a conocer el empuje (conociendo la velocidad y presión de salida) y poder optimizar la geometría. Para comenzar, se plantean las siguientes hipótesis:

- Propelente homogéneo.
- Medio gaseoso.
- No hay transferencia de calor. Esta hipótesis es aceptable, pues las pérdidas suponen menos de un 1 %.
- Flujo estacionario y constante, lo cual es cierto si el propelente es homogéneo y uniforme.
- Velocidad, presión, temperatura y densidad constantes en cada sección.
- Equilibrio químico entre los gases.

- Capa límite de espesor despreciable. Realmente hay una zona cerca de la pared donde la turbulencia está inhibida y que origina el esfuerzo de pared τ_p .
- Movimiento turbulento.

Se define además un parámetro geométrico importante en el análisis que hay que hacer, que es el radio hidráulico: $r_h(s) = A(s)/\text{perímetro}(s)$

Los esfuerzos de fricción que aparecen se evalúan en función del factor de fricción, el cual viene dado por el Ábaco de Moody. Dicho factor (λ) es función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa (ϵ). A alto Re , la dependencia es únicamente con la rugosidad. Existen dos relaciones que permiten obtener λ :

$$\text{Ec. de Colebrook - White : } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{K/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \quad (3.12)$$

$$\text{Ec. de Barr : } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{K/D}{3.7} + \frac{5.1286}{Re^{0.89}}\right) \quad (3.13)$$

El procedimiento a seguir a continuación consiste en aplicar balances de masa, cantidad de movimiento y energía para poder conocer la evolución del gas a través de la tobera. De esta forma, tomando una sección diferencial, se tienen los siguientes resultados:

- Balance de masa:

$$\rho v A \Big|_{s+ds} = \rho v A \Big|_s + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v A) \Big|_s ds \quad (3.14)$$

- Balance de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial A}{\partial s} ds + \rho v^2 A \Big|_s + p A \Big|_s = p A \Big|_{s+ds} + \tau_p(s) \text{perim}(s) ds + \rho v^2 A \Big|_{s+ds} \quad (3.15)$$

Dividiendo por ds y desarrollando los términos en $(s + ds)$ por series de Taylor, se concluye que:

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\tau_p(s)}{r_h(s)} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\lambda \rho v^2}{8r_h(s)} \quad (3.16)$$

Si el conducto es circular, entonces $r_h(s) = 2D_{eq}(s)$ y, si $Re \gg Re_{cr}$, $\lambda = \lambda(\epsilon) = cte$.

- Balance energético:

$$G\left(e + \frac{v^2}{2}\right)_s + G\left(\frac{p}{\rho}\right)_s = (\dot{Q}_c + \dot{Q}_p) ds = G\left(e + \frac{v^2}{2}\right)_{s+ds} + G\left(\frac{p}{\rho}\right)_{s+ds} \quad (3.17)$$

Introduciendo la entalpía de remanso ($h_0 = h + \frac{v^2}{2} = C_p T(s) + \frac{v^2}{2}$) y desarrollando los términos en $(s + ds)$ por Taylor, se obtiene que:

$$\frac{\partial h_0}{\partial s} ds = \frac{\dot{Q}(s)}{G} ds \quad (3.18)$$

Donde se ha tenido en cuenta que \dot{Q} es el calor total intercambiado, que incluye el calor liberado por unidad de tiempo y por unidad de longitud, \dot{Q}_c ; y el calor recibido por unidad de tiempo y por unidad de longitud, \dot{Q}_p .

En resumen, el problema consiste en el siguiente sistema de ecuaciones (considerando conducto circular):

$$G = \rho(s)v(s)A(s) \quad (3.19)$$

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \lambda \frac{\rho v^2}{2D} \quad (3.20)$$

$$c_p T(s) + \frac{v(s)^2}{2} = h_0(0) + Q(s) \quad (3.21)$$

Con los balances de masa y energía se pueden despejar las magnitudes termodinámicas y la velocidad como función del número de Mach y los datos ($h_0(0), Q(s)$ y $A(s)$). Con esto se llega a una ecuación diferencial

que permite obtener el gasto y el número de Mach a lo largo del conducto.

- Para el caso de la temperatura, se puede despejar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h_0(s) = c_p T_0(s) = c_p T(s) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s)^2 \right) &= h_0(0) + Q(s) \\ \Rightarrow T(s) &= \frac{h_0(0) + Q(s)}{c_p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s)^2 \right)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

- Respecto a la presión:

$$\begin{aligned} G &= \rho v A \rightarrow G^2 = \rho^2 v^2 A^2 \\ M = \frac{v}{a} \rightarrow v^2 &= M^2 a^2 = M^2 (\gamma R_g T) = M^2 \left(\gamma \frac{p}{\rho} \right) \\ p(s) &= \left(\frac{R_g}{c_p \gamma} \right)^{1/2} \frac{G (h_0(0) + Q(s))^{1/2}}{M(s) A(s) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s)^2 \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

- Y, por último, la densidad se define a partir de la ecuación de gases perfectos:

$$\rho(s) = \frac{p(s)}{R_g T(s)} = \left(\frac{c_p}{R_g \gamma} \right)^{1/2} \frac{G \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s)^2 \right)^{1/2}}{\left(h_0(0) + Q(s) \right)^{1/2} M(s) A(s)} \quad (3.24)$$

Y, así, introduciendo estas expresiones en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, se llega a una ecuación diferencial que define el número de Mach $M(s)$:

$$\frac{dM(s)^2}{ds} = \frac{2 + (\gamma-1)M(s)^2}{1 - M(s)^2} \left(-\frac{1}{A(s)} \frac{dA(s)}{ds} + \frac{\gamma \lambda M(s)^2}{2D(s)} + \frac{1 + \gamma M(s)^2}{2(h_0(0) + Q(s))} \frac{dQ}{ds} \right) \quad (3.25)$$

La derivada de $M(s)^2$ es función del área, de la fricción y del intercambio de calor. La variación depende del signo de $(1 - M(s)^2)$, es decir, de si el flujo es supersónico o subsónico. En régimen supersónico, si $A(s)$ aumenta, entonces crecen $M(s)$, $v(s)$ y disminuyen ρ , p y T , ocurriendo lo contrario en subsónico.

Para simplificar el problema se procede a adimensionalizar variables:

$$\left. \begin{aligned} s &= xL \\ A &= \hat{A} \hat{A}_g \\ D &= \hat{D} \hat{D}_g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dM^2}{dx} = \frac{2 + (\gamma-1)M^2}{1 - M^2} \left(-\frac{1}{\hat{A}} \frac{d\hat{A}}{dx} + \frac{\gamma}{2} f \frac{M^2}{\hat{D}} + \frac{1 + \gamma M^2}{2(h_0(0) + Q(s))} \frac{dQ}{dx} \right) \quad (3.26)$$

Donde se ha llamado $f = \frac{\lambda L}{D_g}$.

El régimen de funcionamiento de la tobera depende del valor de $p_L/p_0(0)$, donde $p_0(0) = p(0) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(0)^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$.

Conocida la evolución del número de Mach y la distribución de áreas, se puede obtener la presión a lo largo de la tobera:

$$\frac{p(s)}{p_0} = \frac{M_0}{M(s)} \frac{A_0}{A(s)} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(0)^2 \right)^{1/2 - \gamma/(\gamma-1)}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s)^2 \right)^{1/2}} \left(Q(s) + h_0(0) \right) \quad (3.27)$$

Los cambios en el número de Mach y la presión ante una onda de choque normal vienen dados por las relaciones de Rankine-Hugoniot:

$$M_2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma} \quad (3.28)$$

$$p_2/p_1 = \frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{\gamma - 1} \quad (3.29)$$

En caso de que se produzca una onda de choque, la integración que permite obtener $M(s)$ ha de hacerse por partes, poniendo como condiciones iniciales tras la onda los valores dados por las expresiones anteriores. En cuanto al efecto de la fricción, ésta afecta, sobre todo, al rendimiento por las pérdidas energéticas que provoca. Hace que la presión y, por tanto, la densidad bajen. El fluido se enrarece, la velocidad crece para que el gasto sea constante.

La geometría de la tobera y, en especial, la relación entre el área a la salida y el área de garganta, condicionan el valor de empuje que se obtiene. Para cada relación de presiones $p_{ext}/p_0(0)$ hay una relación de áreas que maximiza la fuerza propulsiva. De la ecuación de cantidad de movimiento se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} G \frac{\partial v}{\partial s} &= -A \frac{\partial(p - p_{ext})}{\partial s} = -\frac{\partial(A(p - p_{ext}))}{\partial s} + (p - p_{ext}) \frac{\partial A}{\partial s} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} [Gv(s) + (p(s) - p_{ext})A(s)] = (p - p_{ext}) \frac{\partial A}{\partial s} \\ \text{Integrando entre } 0 \text{ y } L: \quad E &= \int_{A_0}^{A_L} (p(A) - p_L) dA + cte \end{aligned}$$

Derivando la expresión anterior se tiene que $\frac{dE}{dA_L} = p(A_L) - p_{ext}$, con lo que el empuje será máximo si $p(A_L) = p_{ext}$, es decir, si la tobera está adaptada. Hasta llegar al punto de adaptación, la presión dentro de la tobera es siempre mayor que la exterior, lo cual proporciona un empuje extra por las fuerzas sobre las paredes, hasta que se llega al punto óptimo. Si se sigue aumentando el área, el punto en el que la presión es igual a la exterior se localiza en el interior de la tobera y, a partir de ahí, las fuerzas de presión sobre las paredes contribuyen de forma negativa.

Conociendo el número de Mach en la garganta, se puede conocer el punto de presión p_g/p_L que da una salida adaptada.

$$\text{Si} \begin{cases} p_{ext}/p_0(0) < p_{L1}/p_0(0) \rightarrow \text{tobera subexpandida} \\ p_{ext}/p_0(0) = p_{L1}/p_0(0) \rightarrow \text{tobera adaptada} \\ p_{ext}/p_0(0) > p_{L1}/p_0(0) \rightarrow \text{onda de choque oblicua a la salida} \\ p_{ext}/p_0(0) = p_{ans}/p_0(0) \rightarrow \text{onda de choque normal a la salida} \\ p_{L2}/p_0(0) \geq p_{ext}/p_0(0) \geq p_{ans}/p_0(0) \rightarrow \text{onda de choque interior} \\ p_{ext}/p_0(0) > p_{L2}/p_0(0) \rightarrow \text{tobera desbloqueada} \end{cases}$$

Para todos los casos anteriores excepto el último, el gasto es el gasto crítico y la tobera está bloqueada, es decir, el número de Mach en la garganta es $M_g = 1$. Si la tobera está desbloqueada, el gasto es menor que el crítico.

Para una tobera que está bloqueada, en la zona convergente el flujo es subsónico y, a partir de la garganta, puede desarrollarse de forma supersónico o subsónico.

El empuje se puede adimensionalizar, de manera que quedaría:

$$\hat{E} = \left(\gamma R_g (T_{0ext} + \frac{Q(L)}{C_p}) \right)^{1/2} \frac{1}{a_{ext} M_{ext}} \frac{M(L)}{\left(\frac{1}{M(L)^2} + \frac{\gamma-1}{2} \right)^{1/2}} - 1 \quad (3.30)$$

Se puede trabajar también con dos parámetros adimensionales como son el coeficiente de empuje y el impulso específico:

$$c_E = \frac{E}{A_g p_{int}} = \frac{v_s^2 A_s}{p_{int} A_g v_s} + (p_s - p_{ext}) \frac{A_s}{A_g p_{int}} \quad (3.31)$$

$$I_s = I_{s_{opt}} + \frac{c^* \epsilon}{g_0} \left(\frac{p_s}{p_{int}} - \frac{p_{ext}}{p_{int}} \right) \quad (3.32)$$

Hay que considerar el efecto de la geometría de la cámara. Si $A_{cam} > 4A_g$, entonces se puede despreciar la velocidad en el interior. Si no se cumple, no se puede despreciar, los gases se expanden en la cámara y la presión cae pues parte de la energía la consume el gas para acelerarse. La aceleración es adiabática, no isentrópica.

Consideraciones sobre la tobera real

Para conocer el verdadero proceso de expansión que ocurre en la tobera, habría que tener en cuenta una serie de aspectos que antes fueron simplificados.

Para empezar, las variables no son homogéneas en cada sección y hace falta obtener un valor medio con el que trabajar.

El flujo no es estacionario pues la combustión tampoco lo es, sino que presenta oscilaciones que son difíciles de cuantificar. Además, existen procesos transitorios, aunque su peso en la actuación es menor. Se supuso que existe un equilibrio químico, que las sustancias son gaseosas y homogéneas. Sin embargo, existen partículas sólidas, lo cual disminuye la eficiencia en torno al 5%, además de la posible erosión sobre las paredes, con la consecuente modificación de la rugosidad. A la vez, las partículas sólidas captan energía de los gases para acelerarse. En los propelentes se usan partículas metálicas porque, aunque se producen estas pérdidas, el empuje aumenta. Los gases son heterogéneos y se producen reacciones entre ellos.

Se consideraba también que la capa límite tenía un efecto menor, pero para un estudio más detallado ha de tenerse en cuenta.

Para cuantificar todos estos efectos que la Teoría de gases no llega a valorar, existen una serie de parámetros semiempíricos que permiten estimar cuán eficiente es el sistema propulsivo:

- Eficiencia de conversión de energía. Es, a igual sección de salida y presión de salida, el cociente entre la energía cinética por unidad másica real e ideal:

$$e = \frac{v_2)_r^2}{v_2)_i^2} = \frac{v_x)_r^2}{v_{int})_i^2 + c_p(T_{int} - T_s)} \quad (3.33)$$

- Factor de corrección de la velocidad: $\xi_v = \sqrt{e} \sim 0.85 \div 0.99$.
- Factor de corrección de la descarga. La descarga real es mayor porque el peso molecular crece en la tobera (la densidad aumenta), por el calor transferido a las paredes (si la temperatura baja, la densidad y el gasto aumentan). Las propiedades de los gases cambian y, a su vez, la combustión es incompleta.

$$\xi_d = \frac{\dot{m}_r}{\dot{m}_i} = \dot{m}_r \frac{c}{E_{ideal}} > 1 \quad (3.34)$$

Configuraciones geométricas básicas

Se está considerando una tobera convergente-divergente, lo que supone que hay que analizar cada parte por separado.

La sección convergente no afecta excesivamente a la actuación, el fluido experimenta un gradiente favorable y se adhiere a las paredes. Hay que intentar que la fricción sea mínima y, para ello, usar una superficie suave y pulida, con lo que también se reducen las pérdidas térmicas.

La tobera debe optimizarse para obtener el impulso específico mayor conservando la longitud, de manera que no se penalice al conjunto del cohete.

Típicamente, se encuentran toberas cónicas y en forma de campana. En el primer caso, hay que tener en cuenta que el empuje real debe ser corregido por un factor $\lambda = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha))$, siendo α el ángulo de salida del cono. Las toberas de campana, además de ser las más comunes, tienen un ángulo de divergencia a la salida menor, son más eficientes, la expansión es rápida y dan una alta presión relativa. El gas se expande sin

apenas perder energía. El diseño óptimo contempla la existencia de una sección hasta la cual la variación de áreas crece a un nivel y, a partir del cual, disminuye su velocidad de crecimiento, buscando una pérdida mínima por divergencia. Se consigue, así, toberas igual o más eficientes que las cónicas de igual longitud. Las pérdidas crecen al disminuir la longitud y el radio.

Para motores de propulsante sólido, el ángulo de la tangente en el punto de inflexión es característicamente del orden de $\theta_i \simeq 20^\circ \div 26^\circ$. Una parábola es una buena aproximación para el contorno según el Método de Optimización de Toberas de Rao.

3.3 Propelentes químicos

Se desarrolla a continuación una serie de conceptos y fundamentos teóricos básicos para el estudio del propelente.

Para poder obtener las propiedades de operación del motor se necesita conocer la masa molecular del propelente, la temperatura de combustión y la variación de entalpía en la reacción. Conociendo temperatura, composición y presión se tienen el resto de propiedades y se pueden evaluar las caras que soportan los materiales y los efectos medioambientales.

Los motores cohete químicos se basan en una reacción de combustión que da lugar a una serie de gases que son expandidos en la tobera. Para el análisis de la combustión se considera que se produce a presión constante, que pueden hallarse distintos estados materiales (habrá que considerar la energía de transición) y hay que tener en cuenta las proporciones e impurezas de los compuestos. Se supone que existe equilibrio químico y que se verifica la Ley de Dalton, esto es, que la presión total de la mezcla es la suma de las presiones parciales, estando todos los gases a igual temperatura. Se cumple, asimismo, la Ecuación de los Gases Perfectos: $p = \rho RT$.

Existen varios conceptos químicos que es necesario definir para su posterior aplicación en los análisis:

- **Concentración molar:** es la relación de los moles de un componente respecto a los totales. Los moles totales es la suma de los moles de cada compuesto y la concentración molar es, en consecuencia, $m = n_i / \sum(n_i)$. Hay otras muchas formas de medir la concentración: en porcentaje másico, en porcentaje volumétrico, molaridad (cociente entre moles y volumen), molalidad (cociente entre moles y masa), etc. Otra magnitud importante es la masa molecular media, definida como $M = \sum(n_i M_i) / \sum(n_i)$. Se trata de propiedades importantes pues no se suele trabajar en condiciones estequiométricas sino de combustible enriquecido, de forma que las moléculas más ligeras no reaccionan y el impulso específico aumenta. Conociendo la composición se pueden estimar las propiedades termodinámicas del conjunto, esto es $c_p]_{mezcla} = \sum(n_i C_{p_i}) / \sum(n_i)$ y $\gamma]_{mezcla} = c_p]_{mezcla} / (c_p]_{mezcla} - R)$.
- **Equilibrio químico:** situación en la que se produce una cierta cantidad de productos a la misma velocidad que se producirían reactivos en la reacción inversa. No hay cambios de concentración, se mantienen las proporciones relativas.
- **Calores de formación y de reacción:** es la energía liberada o absorbida en el proceso de formación de 1 mol de un compuesto químico y de los productos, respectivamente, en condiciones estándar. El calor de reacción se calcula a partir de los calores de formación de los reactivos y los productos: $\Delta_r H^\circ = \sum n_i \Delta_f H_i^\circ]_{prod} - \sum n_i \Delta_f H_i^\circ]_{react}$.
- **Energía libre de Gibbs:** es una medida del potencial termodinámico del material, directamente relacionado con la energía interna, la presión, el volumen molar, la entalpía, la temperatura y la entropía. Mide la tendencia a reaccionar química o físicamente, siendo posible la reacción si la energía libre de los reactivos es mayor que la de los productos. La variación de la energía libre es la diferencia entre la de los productos y los reactivos. En el caso de combustibles sólidos, hay que considerar también los cambios de fase.
En el equilibrio químico, la energía libre es másica y la variación de energía libre es $\Delta G^\circ = -RT \ln(K)$, siendo K la constante de equilibrio. La constante de equilibrio se define como la relación entre presiones parciales y fracciones molares, esto es, si n_i es el coeficiente estequiométrico de cada componente:

$$K = \frac{\sum P_i^n]_{prod}}{\sum P_i^n]_{react}} P_0^{-\sum n_{prod} + \sum n_{react}} = \frac{\sum P_i^n]_{prod}}{\sum P_i^n]_{react}} \left(\frac{p}{P_0}\right)^{\sum n_{prod} - \sum n_{react}} \quad (3.35)$$

Llegados a este punto, conociendo la composición de los reactivos se puede conocer la temperatura de combustión y la composición de los productos. Todo pasa por aplicar un balance de energía y de masa a la situación de equilibrio, la cual se debe determinar.

El procedimiento es calcular el número de moles de reactivos y productos que hacen que la energía libre de reacción presente un mínimo. Se puede ver mejor con un ejemplo: Se una ecuación del tipo: $aA + bB \rightarrow cC + dD$, siendo las mayúsculas los compuestos y las minúsculas sus coeficientes estequiométricos. En el equilibrio químico habrá $n_a = \lambda a$, $n_b = \lambda b$, $n_c = (1 - \lambda)c$ y $n_d = (1 - \lambda)d$, con λ un parámetro que

habra que calcular de forma que $dG_r/d\lambda = 0$. Otra forma es aplicar la ecuación de equilibrio $\Delta G = 0$ y de conservación de masa $\sum a_{ij}n_j \Big]_{prod} = \sum a_{ij}n_j \Big]_{react}$ y obtener las composiciones en el equilibrio.

Una vez se tiene la situación de equilibrio, se utiliza el balance de energía para calcular la temperatura de combustión:

$$\Delta_r H^\circ = H_T^\circ - H_0^\circ = \sum n_j \int_{T_{ref}}^{T_{comb}} c_p dT = \sum n_j \Delta h_j \Big]_{T_{ref}}^T \quad (3.36)$$

La realización de medidas experimentales permiten estimar la eficacia de la combustión como la variación de entalpía real dividida por la calculada.

Una vez que se conoce lo que ocurre en la cámara de combustión hay que estudiar el paso a través del tobera, análisis que ya se ha considerado con la Teoría de Gases. Básicamente, se transforma la energía térmica en energía cinética: los gases se expanden y aceleran. Anteriormente, se asumía que las partículas sólidas y líquidas no tienen volumen y que se mueven a la misma velocidad y con la misma temperatura. Si se considera que no hay reacciones o cambios de fase, se subestima la actuación de un 1 a un 4%. Si se toma la hipótesis de que las reacciones y cambios de fase ocurren pero habiendo equilibrio químico instantáneo (conocido como equilibrio cambiante), se sobreestima la actuación del orden de 1-4%. Por último, se puede pensar que hay reacciones pero que no son instantáneas. Se pueden estimar las velocidades de las reacciones, que suelen ser función de la temperatura, la desviación frente al equilibrio y los compuestos. No se suele usar esta opción por la falta de datos. Se suelen usar métodos unidimensionales o bidimensionales. Experimentalmente se sabe que si las partículas son mayores de $0,1 \mu m$, hay pérdidas térmicas y cinéticas. El problema en estos análisis reside en que no se suelen conocer parámetros como el tamaño, la forma o las temperaturas de condensación y solidificación.

3.4 Propelentes químicos sólidos.

En el presente apartado se lleva a cabo un estudio de los propelentes sólidos, sus características, componentes, principales tipos y riesgos que conllevan.

3.4.1 Conceptos básicos. Clasificación

Tal y como se explicaba anteriormente, los propelentes sólidos son uno de los tipos empleados por motores cohete químicos, cargado en la misma cámara de combustión. El propelente forma una estructura llamada grano y se enciende con un ignitor, accionado generalmente de forma eléctrica. El grano presenta una cavidad o perforación, de una determinada geometría, que es por donde circulan los gases a la tobera. Todo se encuentra dentro de una carcasa (metálica o plástica) que constituye la propia cámara de combustión. Existe un aislante que protege a la estructura de las altas temperaturas y un alineante que fija el grano a la cámara. Por último, se encuentra la tobera y la estructura de soporte que une todo el motor al cohete.

Existen una serie de conceptos importantes para distinguir el grano y su actuación. En primer lugar, la configuración del grano viene dada por su forma o geometría pudiendo ser cilíndrica, esférica o cualquier otra. La forma y composición determinan si la combustión es neutral (empuje, presión y área de quemado constantes), progresiva (crecientes) o regresiva (decrecientes).

De la actuación se obtiene un tiempo de combustión, que se define como el intervalo desde que se llega al 10% de la presión máxima hasta el final de la combustión. Se pueden emplear componentes y materiales como inhibidores para evitar la combustión de zonas del propelente.

Para estimar la actuación hay que conocer el espesor de red (espesor mínimo de grano de propelente de la superficie inicial de quemado), la fracción de red (cociente entre el espesor de red y el radio externo) y la fracción volumétrica de carga (cociente entre el volumen de la cámara). También se deben conocer los límites de presión que anulan la combustión.

Una primera clasificación puede basarse en la aplicación del motor, pudiendo ser para lanzadores, misiles o generadores de gas. Los primeros requieren gases a alta temperatura para dar empuje, mientras que, en los segundos, se tienen gases a menor temperatura y lo que se persigue es generar potencia.

Según el proceso de fabricación se distinguen tres clases:

- Propelente moldeado ("Cast propellant"): los ingredientes se mezclan mecánicamente, se moldea el grano y se cura. Es el proceso más común.
- Propelente extrusionado. Tras mezclar los ingredientes, se hacen pasar por un molde a alta presión.
- Solvatación. Se disuelve el aglutinante en una matriz sólida, cuyo volumen es expandido.

El grado de peligrosidad o margen de seguridad distingue entre materiales denotables y no detonables. También se pueden clasificar según la densidad de humo que se genera, quedando divididos en: humeantes, de humo reducido y de humo mínimo. La presencia de partículas metálicas, como aluminio, incrementa el humo generado. Otro aspecto es el efecto ambiental, según los gases generados sean tóxicos o no.

El propelente suele estar formado por un oxidante, el combustible y el aglutinante, además de otros aditivos que se le puedan añadir para modificar las propiedades y, por tanto, se puedan clasificar los propelentes por su ingrediente principal.

Finalmente, existe una clasificación principal que distingue:

- Propelentes de base doble. Se caracterizan por constituir un grano homogéneo, normalmente de nitrocelulosa, un ingrediente que absorbe nitroglicerina líquida y otros aditivos menores. Los ingredientes principales son explosivos y combinan combustible y oxidante. Suelen usarse en misiles tácticos y diseños antiguos. Se pueden mejorar con la adición de nitraminas y aglutinantes elastómeros, o con perclorato amónico o aluminio. Se caracterizan por apenas formar humo.

- Propelente compuesto. Constituyen granos heterogéneos con cristales de oxidantes y un combustible en polvo, todo compactado y unido por un aglutinante plástico. Se mezclan las partículas sólidas y el líquido y se endurece entrecruzando o curando el aglutinante con un agente curativo y en un horno. Se caracterizan por una densidad y un impulso específico mayores, además de un gran abanico de velocidades de combustión. Un tipo de combustible compuesto es el CMDB, o propelente compuesto modificado de base doble, que incluye propelente de base doble con perclorato amónico, aluminio o algún aglutinante; o, al contrario, un propelente compuesto al que se le añaden nitraminas. Son los más usados y se clasifican en varios grupos:
 - Convencionales. Usan entre un 60 y 72% de perclorato amónico, hasta un 22% de polvo de aluminio y un 8-16% de aglutinante.
 - Propelentes con nitramina energética, con lo que se tiene una densidad mayor y una mejor actuación.
 - Propelentes con plastificantes energéticos, como nitroglicerina.
 - Propelentes de alta energía. Se sustituye el aglutinante orgánico y el plastificante por materiales energéticos (como explosivos). Son mayormente experimentales.
 - Propelentes de baja energía. Se usa nitrato amónico como oxidante. Empleados en generadores de gas.

En general, al propelente se le exigen una serie de características. No todas son alcanzables y se debe encontrar un equilibrio óptimo entre ellas. Entre otras, se busca cumplir con:

- Alto impulso específico o, lo que es lo mismo, alta temperatura y/o baja masa molecular.
- Velocidad de combustión predecible, reproducible y ajustable.
- Exponentes de presión y temperatura bajos.
- Buenas propiedades físicas y buena respuesta al paso del tiempo y a condiciones ambientales.
- Alta densidad.
- Bajos riesgos en fabricación, almacenamiento y actuación. Insensibilidad a perturbaciones y no propenso a combustión inestable.
- Gases no tóxicos.

En la siguiente tabla se muestran propelentes sólidos típicos junto con sus ventajas y desventajas. Esta información y posteriores análisis permitirá decidir qué propelente y qué composición emplear:

TIPO	VENTAJAS	DESVENTAJAS
Base doble (extruído)	Coste modesto. No tóxico, sin humo. Buena velocidad de quemado y buen control. Proceso conocido y simple. Buenas propiedades mecánicas. Buenos coeficientes de presión y temperatura	Requiere soporte estructural. Baja actuación y densidad. Peligroso. Problemas de almacenamiento. Diámetro limitado por la prensa disponible.
Base doble (moldeado)	Rango ancho de velocidades de combustión. No tóxico, sin humo. Seguro de manejar. Proceso conocido. Coste modesto. Buenas propiedades mecánicas y coeficiente de temperatura bajo.	La gravedad puede dañarlo. Peligroso de fabricar. Baja actuación y densidad. Más caro que el extruído.
Propelente compuesto con base doble o CMDDB y algo de AP o Al	Mejor actuación. Buenas propiedades mecánicas. Alta densidad. Menos problemas de estabilidad. Coste intermedio. Buena experiencia.	Algo de humo. Instalaciones complejas. Alta temperatura de salida. Fabricación peligrosa. Coeficiente de temperatura alto.
Propelente compuesto de AP, Al y PBAN o PU y aglutinante CTPB	Fiabile. Alta densidad. larga experiencia. Coste modesto. Buen envejecimiento. Tiempo de curado alto. Buen control de quemado, propiedades físicas y actuación.	Rango medio de temperatura ambiental. Alta viscosidad. Temperatura de llama alta. Tóxico, produce humo. Algunos aditivos son cancerígenos. Problemas de humedad.
Propelente compuesto de AP, Al y HTPB (el más usado)	Mejor actuación. Rango más ancho de temperatura ambiental. Buen control de la velocidad de combustión. Coste medio. Estable al almacenarlo. Buena experiencia y propiedades físicas	Instalaciones complejas. Problemas de humedad. Temperatura de llama elevada. Tóxico y produce humo.
Propelente compuesto de AP, Al, PB añadiendo HMX o RDX	Actuación superior. Buen control de la velocidad de combustión. Alta densidad. Sensible a la temperatura. Puede tener buenas propiedades mecánicas.	Caro. Instalaciones complejas. Fabricación peligrosa. Temperatura de llama alta. Tóxico. Sensible a impactos.
Propelente compuesto con aglutinante energético y plastificante del tipo NG, AP, HMX	Mejor actuación. Alta densidad. Combustión estable. Rango estrecho de velocidades de combustión.	Caro. Experiencia limitada. Sensible a impactos. Alto coeficiente de presiones.
Base doble modificado con HMX	Mejor actuación. Alta densidad. Combustión estable. Rango estrecho de velocidades de combustión.	Experiencia limitada. Muy caro. Sensible a impactos
Propelente de AN modificado con HMX o RDX	Actuación aceptable. Sin humo. No es tóxico	Poca experiencia. Puede ser peligroso. Hay que estabilizar el AN para que el grano no crezca. Baja velocidad de quemado. Sensible a la humedad
Propelente de AN y polímero	Salida limpia, no tóxica. Combustión estable. Coste modesto. Bajo coeficiente de presión.	Baja actuación y densidad. Hay que estabilizar el AN. Sensible a humedad. Baja velocidad de combustión.

3.4.2 Grano de propelente

Tal y como se ha explicado, el grano es la forma que adquiere la masa del propelente dentro del motor. El material y la geometría determinan la actuación del mismo. Una vez encendido, no se puede parar la combustión y arderá en todas las superficies expuestas formando gases calientes que salen por una tobera. La mayoría de las cámaras tienen un único grano.

Hay dos métodos para sostener el grano en la carcasa:

- Cartucho cargado o grano liberado. Carcasa y grano se fabrican por separado y se ensamblan. Se reemplazan mejor y es más barato.
- Grano unido. La carcasa se usa como molde y el propelente se deposita directamente en ella. Proporciona una mejor actuación, menor masa inerte y sufre más tensiones

El grano en sí debe cumplir una serie de condiciones:

- Requisitos de misión, prefijados antes de diseño y que determinan el impulso total, el empuje respecto al tiempo, la masa del motor, límites térmicos, etc.
- La geometría del grano debe ajustarse a los requerimientos, ser compacta y usar el volumen de forma eficiente.
- Ser de la composición óptima según la actuación, propiedades mecánicas, características de fabricación, etc.
- Ser estructuralmente íntegro, para asegurar que no se produce el fallo.
- Estabilidad asegurada.
- Fabricación y procesamiento simples y de bajo coste

Se buscan granos que no sean frágiles, cuya carga volumétrica sea alta y que resulten económicos. Se suelen usar configuraciones típicas ya estudiadas (estrella, multiperforado, hueso de perro, rueda de tren, dendritas...) y hacer pequeñas modificaciones.

Combinando configuraciones radiales y longitudinales se llega al comportamiento de combustión deseado. Así surgen algunos ya extendidos como el "conocyl" (sección cilíndrica con final cónico) o la esférica. Las configuraciones se pueden clasificar según su fracción de red (b_f), su relación L/D y su fracción de carga volumétrica.

Un caso, por ejemplo, son los "end-burner" o quemador final, que arden como una mecha, los cuales tienen la mayor fracción volumétrica, el menor volumen de cavidad y un área de combustión relativamente baja. En motores grandes, se tiene un empuje progresivo. El área de quemado evoluciona hacia una forma cónica, provocando un aumento en la presión y el empuje. Otro, el "tubo interno", es fácil de fabricar y se puede tener una combustión neutral y con acabados del orden $L/D \simeq w$. Añadiendo formas cónicas u otras configuraciones, se trabaja con valores de $2 \leq L/D \leq 4$. La configuración en estrella es ideal para fracciones de red de 0,3 a 0,4, tienen una combustión progresiva por encima de 0,4 y puede ser neutra añadiendo orificios. La "rueda de tren" es mejor estructuralmente y tiene una fracción de red $\sim 0,2$, con lo que se tiene mucho empuje en poco tiempo de combustión. La forma en dendritas se usa con la menor fracción de red cuando hace falta un área de combustión grande (mucho empuje en poco tiempo), pero las tensiones pueden ser altas.

Para cohetes lanzados desde el aire y algunos desde tierra, el empuje regresivo es bueno pues se tiene una alta aceleración inicial y el posterior descenso limita las aceleraciones sufridas por el vehículo y la carga de pago. Se tiene mayor empuje en la fase de impulso y menor durante la fase sustentadora.

En propelentes únicos con dos niveles de empuje, hay que determinar qué fracciones se usan en cada parte. Se pueden usar varios granos con ignitores independientes y el desfase entre cada sección debe regularse con un mecanismo de separación que tiene que prevenir que los gases calientes del primer grano inicien el segundo.

Hay que estudiar la existencia de residuos o briznas tras la combustión y hay que sustituir los volúmenes ocupados por los mismos por aislantes de baja densidad y, de esta forma, reducir la penalización en peso.

Durante la combustión y la operación, el grano y los demás elementos soportan tensiones por cargas estáticas y dinámicas, además de durante el transporte y almacenamiento. El diseño debe evitar el fallo del conjunto.

Estructuralmente, un motor cohete es una membrana de revolución casi llena de un material viscoelástico. El propelente tiene unas propiedades mecánicas difíciles de conocer de forma teórica y el daño se va acumulando. Pueden presentarse dos fallos típicos:

- Grietas superficiales, que abren nuevas superficies de combustión, creciendo la presión y el empuje, pudiendo modificarse la trayectoria o provocar el fallo total.
- Rotura de la unión con la carcasa. Los gases calientes llegarían al aislante o a la misma carcasa.
- Otros, como fallo por temperatura ambiental, porosidad, burbujas de aire, deformaciones del grano o ignición involuntaria.

Para poder llevar a cabo el estudio estructural del grano hay que conocer las propiedades mecánicas que determinan su comportamiento. Los materiales son del tipo goma y casi incompresibles, con módulos de compresibilidad $> 1400 \text{ MPa}$. Las cargas de compresión son pequeñas, mientras que es fácil que existan daños por cargas tangenciales. El daño se produce por la separación entre los componentes, provocando pequeños poros que actúan como concentradores de tensiones.

El problema del análisis estructural reside en que el grano es un material viscoelástico no-lineal. El mejor método es la realización de numerosos experimentos con ensayos simples, asumiendo hipótesis simplificativas y aplicando correcciones empíricas.

Durante el diseño hay que asegurar la correcta unión entre los ingredientes del grano y con el resto de elementos del motor.

Es necesario establecer qué cargas se experimentan para analizar la estructura y las distintas fuentes que las causan: enfriamiento durante la fabricación, cargas térmicas, manipulación y vibraciones, cargas en la ignición, fricción del gas interno, fuerzas centrífugas, etc. Las cargas y tiempos de aplicación dependen de la misión y del diseño y uso del motor. La carga de ignición, pese a ser de las más altas, no tienen por qué resultar críticas. Las ambientales son pequeñas pero pueden hacer que otras se vuelvan fatales. Además, hay que conocer las propiedades de cada material y el criterio de fallo que se aplica. Se trata de un proceso iterativo, cambiando el material y la geometría para cumplir requisitos.

Lo ideal sería realizar un análisis viscoelástico no-lineal, lo cual es complejo y requiere datos difíciles de obtener. Se puede emplear un modelo elástico, mucho más simple, y aproximar los resultados con correcciones empíricas.

En motores en los que la carcasa es el molde, hay que reducir las tensiones en las uniones entre grano y carcasa, especialmente si se van a exponer a un amplio rango de temperaturas. Hay dos fuentes de carga: los debidos a las propiedades físicas del material y las que ocurren en las uniones a otros elementos.

Cuando el grano es cilíndrico, las tensiones máximas suelen ocurrir en las superficies internas, en las discontinuidades y en los concentradores de tensiones, como entallas y cavidades. Una forma de reducir tensiones es usar un alineante viscoso pero no adhesivo en las zonas posterior y anterior, permitiendo un cierto grado de deformaciones.

Empíricamente se sabe que:

- Para controlar las tensiones máximas hay que prestar más atención al grosor del aislante que a los acabados.
- Las tensiones crecen con la fracción de red y la relación L/D .
- Las tensiones radiales son mucho mayores que las tangenciales.

Otro aspecto a tener en cuenta es el efecto del paso del tiempo, que hace que el material degenere sus propiedades por el daño acumulado, lo que conlleva mayores tensiones. Se estima el límite de envejecimiento como el tiempo que ha de pasar hasta que el motor no sea capaz de actuar correctamente o de forma segura. Antes de llegar a ese punto, hay que desactivar el motor y retirar el combustible.

Como conclusión, hay numerosos métodos para encarar el estudio experimental y, en términos generales, el propelente es débil a tensiones normales y tangenciales, semielástico y se debilita al crecer la temperatura. No hay forma, a priori, de determinar qué cargas son las críticas.

3.4.3 Componentes principales de los propelentes sólidos

Cada componente del propelente cumple una serie de propiedades y funciones. A continuación se describen las principales, así como los compuestos más comunes. Ha de tenerse en cuenta que cualquier cambio en las propiedades y las posibles impurezas afectan mucho a la actuación del motor, así como los defectos de fabricación.

Oxidantes inorgánicos

Se usan compuestos como perclorato amónico (NH_4ClO_4), perclorato potásico ($KClO_4$), perclorato sódico ($NaClO_4$), nitrato amónico (NH_4NO_3) o nitrato potásico (KNO_3). El perclorato amónico es el más usado por sus buenas propiedades, compatibilidad con otros materiales, buena actuación, disponibilidad, calidad y uniformidad. Los nitratos fueron ampliamente usados con anterioridad.

Los percloratos presentan un potencial oxidante alto, con lo que el impulso específico es elevado, y son ligeramente solubles en agua, lo cual es una ventaja. Sin embargo, requieren grandes medidas de seguridad, por la emisión de HCl y otros compuestos tóxicos y corrosivos. Se suministran en forma de pequeños cristales, cuyo tamaño hay que controlar pues, si son menores de $40\mu m$ de diámetro, se consideran peligrosos y es mejor comprar de mayor tamaño y reducirlo.

Los nitratos dan una actuación menor, pero son más baratos, no producen humo y apenas son tóxicos. Se usan en cohetes de bajo requerimiento y en generadores de gas. El nitrato amónico cambia de fase con la temperatura, modificando el volumen. Cargas térmicas cíclicas en torno al punto de cambio de fase provocan pequeños huecos, el crecimiento del grano y el cambio de propiedades. Se usan estabilizadores como óxido de Níquel o nitrato potásico para que la temperatura suba y no haya recristalización. El propelente resultante se conoce como nitrato amónico de fase estabilizada (PSAN). Cuenta con la desventaja de degradarse con la humedad.

Combustibles

El más común es el polvo de aluminio: partículas esféricas ($5 - 60\mu m$) que se usan en una gran variedad de compuestos, constituyendo del 14-20% del peso total. Al arder puede resultar tóxico, pues en la combustión se oxida y se convierte en óxido de aluminio. Aumenta el calor de combustión, la densidad, la temperatura y, por tanto, el impulso. En estado líquido puede formar residuos fundidos que afectan adversamente a la fracción másica del vehículo.

El boro es más ligero y tiene un punto de fusión alto, por lo que es difícil hacerlo arder con eficiencia en cámaras de cierta longitud. Sin embargo, se puede oxidar con cierta eficiencia si las partículas son muy pequeñas. Se usa en motores que emplean el oxígeno del aire.

El berilio tiene una combustión más alcanzable y mejor el impulso específico del orden de 15s, pero es muy tóxico.

Otra opción son el hidruro de aluminio (AlH_3) y el hidruro de berilio (BeH_2), que no se usan actualmente, pero que son muy interesantes por el calor liberado, aumentando el impulso específico del orden de 15-30s. Por contra, son difíciles de producir y se deterioran fácilmente.

Aglutinantes

Constituyen el pegamento o matriz estructural que mantiene unidos al resto de componentes. Suelen ser polímeros o monómeros como poliéster, poliéteres o polibutadienos. Tras mezclarse con los ingredientes sólidos, moldearlos y curarlos, forman un material de tipo goma que constituye el grano. Hace unos 40 años que se usan compuestos como el PVC o el poliuretano. A la vez, actúan como combustibles y se oxidan en la combustión. Afectan a la fiabilidad, a las propiedades mecánicas, al proceso de producción, al almacenamiento, al coste y al envejecimiento. El más usado actualmente es el HTPB pues permite fracciones mayores de AP o Al y tiene buenas propiedades.

Modificadores de la velocidad de combustión

Son catalizadores y modificadores que ayudan a frenar o acelerar la combustión para cumplir unos requisitos de empuje. Algunos, como el fluoruro de litio, reducen la velocidad y otros, como el óxido de hierro, la aceleran. Los catalizadores inorgánicos no contribuyen a la energía de combustión, pero consumen energía al calentarse y modificar el mecanismo.

Plastificantes

Son ingredientes líquidos de baja viscosidad que aumentan la deformabilidad para facilitar la fabricación y actúan, a la vez, como combustibles.

Agentes de curado

Hacen que los pre-polímeros que actúan como aglutinantes formen cadenas de gran peso molecular y las enlazan. Una muy pequeña cantidad afecta al grano, solidificándolo y endureciéndolo. Se usan en propelentes compuestos.

Aglutinantes y plastificantes energéticos

Sustituyen a los materiales orgánicos convencionales. Contienen agentes oxidantes y añaden energía, aumentando modestamente la actuación, a la vez que actúan como aglutinantes y plastificantes. Pueden reaccionar por sí mismos, sin oxidante ajeno. Un ejemplo es el polímero ácido glicídilo (GAP), usado en casos experimentales.

Oxidantes orgánicos o explosivos

Son compuestos orgánicos explosivos con radicales $-NO_2$ en sus estructuras. Se usan en propelentes sin humo y de alta energía. Pueden ser sólidos cristalinos como las nitraminas (HMX o RDX), fibra sólida (NC) o plastificantes líquidos energéticos (NG). Pueden reaccionar por sí mismos al iniciarlos o explotar bajo ciertas condiciones. Los compuestos HMX o RDX son materiales en proporciones estequiométricas y la adición de aditivos solo baja la temperatura de cámara el impulso específico, por lo que hay que añadir, al mismo tiempo, otro oxidante. Los dos son sólidos cristalinos que se venden en estado líquido. El HMX es más denso, con una tasa de detonación mayor y un punto de fusión más alto. Se puede añadir a un propelente para mejorar su actuación hasta en un 60%.

La nitroglicerina (NG) es un plastificante excelente, extraído de compuestos líquidos o de la nitrocelulosa. Es sensible a impactos, vibraciones o fricción.

La nitrocelulosa (NC) se usa en propelentes compuestos por la nitración ácida de fibras de celulosa naturales. Es cristalina, de estructura fibrosa y con una composición de nitrógeno del 8-14%. Es difícil de producir por lo que se suele mezclar con nitroglicerina u otro plastificante.

Aditivos

Son ingredientes con diferentes propósitos, como acelerar o frenar el curado, mejorar las propiedades físicas, limitar las migraciones (movimientos a nivel molecular), reducir el deterioro químico, etc.

3.4.4 Consideraciones de seguridad

El tratamiento, almacenamiento y posterior utilización de los propelentes sólidos conlleva una serie de riesgos que hay que considerar para garantizar la seguridad:

- Ignición imprevista. El grano puede comenzar la combustión en un momento no deseado por cargas inductivas, descargas electrostáticas, fuego, impactos o vibraciones, ocasionando incendios, ignición de motores adyacentes, explosiones, movimiento errático o gases tóxicos. Para evitar estas situaciones, se suele usar un sistema "seguro y armando" ("safe and arm" en Inglés), para evitar la activación del ignitor. Además, el propelente, alineante y aislante deben ser lo suficientemente conductores para no arder ante cargas electrostáticas.
- Envejecimiento. El paso del tiempo hace que el motor se degrade y, por tanto, que deje de ser seguro. El efecto del tiempo se puede medir con ensayos, siempre que se conozcan bien las cargas. La vida (tiempo hasta que deja de ser seguro) depende del propelente, las cargas, el diseño y otros factores. Aumenta con la mejora de las propiedades físicas, añadiendo ingredientes que se degraden menos o disminuyendo las cargas.
- Sobrepresión y fallos de la carcasa. Si se superan los límites de presión, la carcasa puede fallar y explotar liberando gases a alta presión y lanzando piezas. Se puede deber a distintas causas:
 - Grano poroso, envejecido o con muchas grietas.
 - Cambios químicos en el propelente que reducen sus propiedades físicas.
 - Motor mal fabricado.
 - Motor dañado.
 - Obstrucción en la tobera.

– Absorción de humedad.

- Deflagración y detonación Cuando se produce sobrepresión, el propelente puede entrar en deflagración (o combustión incontrolada) o detonación (explosión violenta). En una detonación se libera toda la energía química en muy poco tiempo y se convierte el motor en una bomba. Se puede evitar o minimizar con el diseño, la fabricación y la manipulación. El mismo material puede arder o explotar según la composición química, la intensidad de ignición, el grado de confinamiento, las propiedades físicas y las propiedades geométrica del motor. Un propelente que opera bien puede explotar si presenta poros ya que los gases calientes penetran en ellos y la presión crece localmente. La geometría y la rigidez de la carcasa también influyen.

Para comprobar bajo qué circunstancias ocurren estas situaciones se deben ensayar los granos bajo unas pruebas fijadas por la normativa de cada institución, como bien pueden ser los Ministerios de Defensas. Se debe asegurar que el motor y el propelente son insensibles a una variedad de estímulos energéticos para impedir una ignición accidental o, en el peor de los casos, una detonación. Existen una serie de ensayos que se deben realizar para demostrar la resistencia, incluyendo la exposición a un incendio cercano, calentamiento gradual, impactos de bala, detonaciones cercanas, etc.

Se debe analizar las amenazas logísticas y operacionales para priorizar pruebas y conocer qué amenazas se van a experimentar. Los ensayos son destructivos y hay que tomar medidas de seguridad en el entorno. El problema es que motores que son más insensibles dan una actuación peor.

Otro asunto a tratar es la toxicidad de los gases emitidos, ya que hay ingredientes y materiales que pueden contener toxinas respiratorias y dermatológicas, pudiendo ser incluso cancerígenos. Hay que manipular con cuidado los materiales y la mezcla (guantes, mascarillas, ventilación, etc.). El grano acabado no suele ser tóxico, pero no así los gases de salida, que pueden contener berilio, cloro, ácido clorhídrico, ácido fluorhídrico... Cuando se emplea perclorato amónico como oxidante, los gases de salida contienen ~ 14 % de ácido clorhídrico. Las instalaciones requieren precauciones especiales y, a veces, procesos de descontaminación.

El mejor medio para controlar riesgos y prevenir accidentes pasa por una adecuada formación del personal, diseñar los sistemas para ser seguros y disponer reglas de seguridad durante todo el proceso. Una medida importante de seguridad durante la operación es la posibilidad de poder extinguir la combustión bajo determinadas condiciones. Hay tres mecanismos típicos para ello:

- Despresurización rápida, modificando la tobera o abriendo zonas de salida con dispositivos explosivos situados de forma simétrica. La explosión no puede iniciar la combustión o detonación del combustible no quemado.
- Uso de líquidos inhibidores.
- Disminución de presión de cámara por debajo del límite de deflagración.

3.5 Combustión de propelentes sólidos. Velocidad de quemado

Se denomina Balística Interna al estudio de las características de la combustión con el fin de poder conocer cómo se produce la combustión y los resultados de la misma.

Durante la combustión se producen complejas reacciones en distintos estados y con mezclas heterogéneas, sin conocerse cómo funcionan estos mecanismos y con modelos analíticos que no dan resultados fiables. La experimentación muestra que ocurren complejos fenómenos de combustión tridimensional a nivel microestructural, con productos intermedios, procesos no lineales... Se observan cuatro regiones de combustión con distintos estados. Cada componente del grano responde de manera distinta. Por ejemplo, la presencia de aluminio favorece el impulso específico y la estabilidad de la combustión, pero se sabe que tienden a aglutinarse.

En propelentes de base doble, la llama parece tener una estructura homogénea y unidimensional. Cuando el calor derrite, descompone y evapora las superficies, los gases parecen estar premezclados. Se observa una región de la llama que es brillante, donde ocurren la mayoría de reacciones y una zona más oscura, que emite radiación en el espectro infrarrojo y que decrece al aumentar la presión de cámara. El tamaño de la llama también decrece con la presión. En la zona adyacente al propelente hay combustión y liberación de calor, habiendo bajo ella una zona que se supone muy fina llena de burbujas de líquido, donde la temperatura sube lo suficiente como para vaporizar las moléculas y romper los enlaces. Por debajo se encuentra el propelente sólido, que se calienta por conducción.

Respecto a los propelentes compuestos, la llama es muy distintas, estando la región brillante unida a la superficie de combustión, sin zona oscura. Se generan gases ricos en oxidante, que se difunden en gases ricos en combustible. Algunas partículas sólidas se separan de la superficie y reaccionan en el gas, que contiene partículas líquidas y sólidas de óxidos metálicos, que irradian intensamente. El propelente y la superficie no son homogéneos y la llama no es ni estacionaria ni axilimétrica, tiene una geometría compleja.

Por último, en los propelentes de base doble modificados, el proceso se asemeja a los compuestos si el aditivo es aluminio o perclorato. Si la modificación es con nitraminas, hay una zona oscura y otra ligeramente luminosa de deflagración sobre la superficie.

La velocidad de combustión se define como la velocidad a la que disminuye el volumen de grano de propelente. Depende de la presión, la temperatura inicial y del gas, la velocidad del gas, el movimiento del vehículo, la composición y otras variables. Puede aumentarse añadiendo un catalizador, disminuyendo el tamaño de partícula, aumentando el oxidante, subiendo el calor de combustión del aglutinante o introduciendo alambres o cables.

Experimentalmente, la tasa de quemado se puede estudiar con quemadores de filamento, modelos a escala o motores de tamaño real. Al desarrollar nuevos combustibles, hay que probarlos bajo diferentes condiciones ambientales, lo cual conlleva mediciones físicas, químicas y de fabricación, provocando que el proceso sea largo, caro y peligroso.

De forma analítica, la velocidad de combustión se puede estimar como $\dot{m} = A_b r \rho_b$, donde A_b es el área de quemado del grano, r es la tasa de quemado y ρ_b es la densidad inicial del propelente.

La velocidad de quemado r depende de la presión, la temperatura, la erosión y otras magnitudes. La dependencia con la presión viene definida como $r = a p_{cam}^n$, donde a es una constante empírica conocida como coeficiente de temperatura y n es el exponente de velocidad de quemado o índice de combustión. Es un modelo que sirve para propelentes compuestos o de base doble. El cambio de la temperatura no modifica la energía liberada pero sí la velocidad a la que se libera. Para la mayoría de los granos, $n \sim 0.2 \div 0.6$ y, a medida que se aproxima a 1, la velocidad de quemado y la presión se vuelven muy sensibles la una a la otra y pueden alcanzar valores instantáneos peligrosos. Al contrario, si n decrece, la combustión puede ser inestable y apagarse. Hay propelentes que mantienen una velocidad de quemado casi constante en un rango de presiones (propelentes "plateau").

La temperatura afecta tanto a la presión como a la velocidad de combustión. Se define así la sensibilidad de la velocidad de quemado a la temperatura (σ_p) y la sensibilidad de la presión a la temperatura (π_k), ambos dependientes del propelente y del mecanismo de combustión. Típicamente, σ_p varía entre 0,001 y 0,009 por grado Kelvi y, π_k , en el rango $0,067 \div 0,278 \% / ^\circ C$. El primer parámetro puede calcularse con quemadores de arena y, el segundo, con modelos a escala. Estableciendo π_k , el efecto de la temperatura del grano sobre la

presión es $\Delta p \simeq \pi_k p_{comb} \Delta T$. Un modelo analítico que permite estimar los parámetros es el siguiente:

$$\sigma_p = \left(\frac{\partial \ln(r)}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial T} \right)_p \quad (3.37)$$

$$\pi_k = \left(\frac{\delta \ln(p)}{\delta T} \right)_k = \frac{1}{p_{cam}} \left(\frac{\delta p}{\delta T} \right)_k \quad (3.38)$$

El parámetro k , que aparece en la definición de la sensibilidad de la presión, es una función geométrica que relaciona el área de quemado y el área de garganta. Si los parámetros π_k , n y σ_p son constantes, se puede establecer que $\pi_k = \frac{1}{1-n} \sigma_p$ y $\sigma_p = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$.

El hecho de que la superficie del grano experimente erosión aumenta la velocidad de quemado, afectando seriamente a la actuación del motor y ocurriendo, sobre todo, en las perforaciones que se dirigen a la tobera. Es lo que se conoce como combustión erosiva. Es más importante cuando la sección es pequeña respecto al área de garganta. La velocidad de combustión sube y aumenta el flujo másico, la presión y el empuje. El efecto es aún mayor si hay turbulencia o discontinuidades geométricas. Un aspecto a tener en cuenta es la erosión en la zona posterior, la cual somete al aislante a gases calientes durante más tiempo, razón por la que es necesario reforzarlo. Existe un modelo matemático desarrollado por Lenoir y Robillard (1956) que relaciona la velocidad de combustión con el gasto másico (G), la dimensión característica de la cavidad ($D \simeq 4A_p/S$), la densidad del propelente (ρ) y dos coeficientes empíricos (α y β).

De esta forma, la velocidad de combustión es la suma de la provocada por la presión y la ocasionada por la erosión:

$$r = r_0 + r_e = ap^n + \alpha G^{0.8} D^{0.2} e^{-\beta r \rho / G} \quad (3.39)$$

El coeficiente α , se define de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{0.0288 c_p \mu^{0.2} Pr^{-2/3} (T_{cam} - T_s)}{\rho_b c_s (T_s - T_0)} \quad (3.40)$$

Donde c_p es el calor específico medio de los gases; μ es la viscosidad; $Pr = \mu c_p / k$ es el número de Prandtl; T_s es la temperatura superficial de grano; T_0 es la temperatura ambiente inicial; y c_s es la capacidad calorífica del propelente.

Existen otros factores que afectan a la velocidad de quemado. Por ejemplo, mayores giros o aceleraciones disminuyen el tiempo de combustión y aumentan el empuje. Otro caso es la introducción de alambres o piezas metálicas que sirven para aumentar la velocidad de quemado, en función del número de cables, la sección de los mismos, la distribución y el material. Por otro lado, los gases calientes emiten radiaciones a las superficies, aumentando su temperatura y, en consecuencia, la velocidad de combustión.

Por último, ha de tenerse en cuenta que la combustión puede volverse inestable u oscilar, afectando a la transferencia de calor, la velocidad y la presión. cuando se produce, la presión oscila hasta más de un 30%. En consecuencia, el calor transferido a las superficies aumenta; la presión, la velocidad de quemado y el empuje suben; y el tiempo de combustión disminuye. Los cambios en el empuje modifican los parámetros de vuelo, pudiendo ocasionar daños, sobrecalentamientos o roturas. Por ello, debe evitarse y analizarse cuidadosamente. Ocurren de forma aleatoria, pero suelen ser repetibles en motores idénticos.

Respecto a las oscilaciones acústicas, pueden ocurrir longitudinal y radialmente, con una frecuencia que depende de la geometría de la cavidad, la composición del propelente y la llama interna. Suelen desaparecer pues la cavidad cambia con el tiempo. Los modos de resonancia son ondas acústicas viajando paralelas al eje entre la tapa posterior y la sección convergente. La determinación de las frecuencias no es simple. Existe un caso especial, que es el modo de Helmholtz, que ocurre a bajas frecuencias y a presión constante, debido al movimiento del gas entrando y saliendo de la tobera. Ocurre a veces en la ignición y desaparece cuando la presión o el volumen interno aumentan.

Existe un modo axial de baja frecuencia y dos modos tangenciales. No se conoce cómo se inician los modos pero sí que está relacionado con la energía de combustión y la superficie. Las vibraciones se pueden disminuir con la viscosidad, la amortiguación de partículas y gotas, la energía perdida a través de la tobera y la energía absorbida por el propelente.

Otro caso son las inestabilidades asociadas a la combustión de huecos en el grano, que son las inestabilidades por torbellinos. El gas a alta temperatura que entra en un orificio se vuelve en una dirección hacia la tobera y el flujo adyacente restringe su movimiento, haciendo que la presión crezca aguas arriba. La interacción de las dos corrientes (la que viene del hueco y la que viene de aguas abajo en la cavidad), provoca turbulencias que hacen que el flujo sea inestable.

Si bien existen complejos algoritmos para el estudio de las vibraciones, se suele recurrir a métodos experimentales por cuestiones de tiempo, simplicidad y costes.

Finalmente, aplicando el principio de conservación de la masa, se puede llegar a una serie de relaciones básicas de actuación. El propelente quemado por unidad de tiempo debe ser igual al cambio de masa de gas en la cámara más la masa que sale por la tobera:

$$\dot{m} = A_b r \rho_b = \frac{d}{dt} (\rho_{cam} V_{cam}) + A_g p_{cam} \sqrt{\frac{\gamma}{RT_{cam}}} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (3.41)$$

El área A_b cambia con el tiempo y depende de la geometría del grano. Para cálculos preliminares se puede asumir que A_g es constante (la erosión no la modifica) y, considerando que hay menos gas en la cámara que el que sale por la tobera, el término temporal se puede despreciar. Así, se tiene que:

$$\frac{A_b}{A_g} = \frac{p_{cam} \sqrt{\gamma [2/(\gamma+1)]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}}{\rho_b r \sqrt{RT_{cam}}} = K \quad (3.42)$$

En primera aproximación $p_{cam} \sim \left(\frac{A_b}{A_g} \right)^{1/(1-n)} = K^{1/(1-n)}$. K es un parámetro que adquiere especial importancia en estas relaciones. Se prefiere un valor de n pequeño para minimizar pequeñas variaciones en la geometría del grano.

$$K = \frac{A_b}{A_g} = \frac{p_{cam}^{1-n}}{a \rho_b c^*} \Rightarrow p_{cam} = \left(K a \rho_b c^* \right)^{1/(1-n)} \quad (3.43)$$

Si $A_b > 4A_g$, el factor de corrección de la presión se puede despreciar y se acepta la teoría ideal. Sin compuestos metálicos, el propelente se quema con un factor de corrección de la velocidad del orden de 97-98 %, frente al 90-96 % de propelentes con aluminio. Las partículas metálicas no contribuyen a la expansión, sino que captan energía para acelerarse, a pesar de lo cual, aumenta la temperatura, la velocidad de salida y el impulso específico.

El diseño eficiente del motor pasa por un valor alto de la fracción de masa de propelente, pues está directamente relacionada con la relación másica del motor y, por tanto, con la actuación. Para motores pequeños, la fracción de propelente oscila en torno a 0.3 ÷ 0.75

Otros parámetros usados para valorar la calidad del diseño son:

- I_T/W_G (con W_G , el peso inicial a nivel del mar). Toma valores típicos entre 100 y 240 s y aproxima el impulso específico. A menor peso de hardware respecto al propelente, mejor es el diseño.
- E/W_G . Estima la aceleración del cohete en vacío.
- Límites de temperatura sin riesgo de daño para el grano

3.6 Consideraciones de diseño. Sistemas del motor

Además del grano, es preciso describir otros elementos que componen el sistema propulsivo y analizar cómo se procede a su diseño. Se trata de los ignitores, alineantes, aislantes, inhibidores y la carcasa.

3.6.1 Proceso de ignición. Ignitores

El ignitor es el componente encargado de iniciar la reacción de combustión del grano de propelente. Se le exige que libere rápidamente mucho calor para llenar la cavidad de gases calientes y que se haga de forma estable, rápida y bajo un amplio rango de presiones. El ignitor debe ser seguro y fácil de producir, manejar y transportar, presentar un buen envejecimiento, no absorber humedad y tener un bajo coste.

Algunos, además de generar calor, liberan partículas sólidas que irradian la superficie del grano.

En un principio se empleaba la pólvora, pero es difícil duplicar sus propiedades. Se suelen usar propelentes de base doble o el mismo del grano. Una configuración típica es la combinación de Boro (20-35%), nitrato potásico (65-80%) y aglutinante (1-5%), que suele ser epoxy, grafito, aceite vegetal... Otra opción es mezclar magnesio con Teflón.

El proceso de ignición es un suceso complejo que comienza con la recepción de una señal y que incluye generación de calor, transferencia térmica del ignitor a la superficie del grano, extender la llama por toda la superficie, llenar la cavidad con gas y aumentar la presión de la cámara.

Se distinguen tres fases:

- Retraso de la ignición. Tiempo entre que se recibe la señal y se produce la primera combustión.
- Expansión de la llama. Período desde la primera combustión hasta que toda la superficie se ha encendido.
- Llenado de la cámara. Intervalo hasta que se llena de gas la cámara y se alcanza un equilibrio de presión y flujo.

La ignición resulta con éxito una vez se inicia la superficie del grano y arde, de forma que el motor continuará aumentando la presión propia y la de operación. El proceso crítico parece ser una reacción de gases sobre la superficie, cuando los vapores del propelente interactúan entre ellos y los del ignitor. Si el ignitor no es lo suficientemente potente, la llama se apaga.

El hecho de que se establezca una presión de cámara satisfactoria depende de varias variables, como son las características del ignitor, el propelente usado, la velocidad de expansión de la cámara, la dinámica de llenado de la cavidad, etc.

La cantidad de energía necesaria condiciona el diseño. La capacidad de ignición de un propelente está influenciada por la composición, la temperatura inicial, la presión, el modo de transferencia de calor, la rugosidad del grano, la composición del gas de ignición, la velocidad del gas y otros factores.

Con respecto al diseño, existen cuatro posibles localizaciones para la instalación del sistema de ignición:

- Posterior interno.
- Posterior externo.
- Anterior interno.
- Anterior externo.

En los dos primeros casos, hay un poco de movimiento de gas, particularmente cerca de la salida y la ignición se produce por la temperatura, la presión y la transferencia de calor. En los dos últimos, el gas fluye sobre la superficie ayudando a la ignición y no hay penalización de peso.

Generalmente, los ignitores se clasifican en dos tipos: pirotécnicos y pirógenos.

Los primeros usan explosivos sólidos o compuestos químicos energéticos (pequeñas bolas de combustible que proporcionan gran superficie de combustión y poco tiempo de quemado). Se usan distintas configuraciones, siendo la más usual la conocida como "cesta de bolas" ("pellet-basket"), con una carga constituida por Boro, perclorato potásico y aglutinante. El ignitor funciona por etapas:

- Se recibe una señal eléctrica y se libera la energía de una pequeña fracción de combustible de pólvora con el iniciador.
- La carga de amplificación se inicia por liberación del calor del iniciador.

- Se incendia la carga principal.

En cuanto a los ignitores pirógenos, estos son básicamente motores cohete usados para encender otro, en vez de para dar empuje. Se emplean toberas y configuraciones de grano de motores cohete. La transferencia de calor se produce por convección. El iniciador y la carga de amplificación son como los de los pirotécnicos. Un caso común es colocarlo en el exterior con la tobera apuntando hacia la cavidad del motor.

Para evitar la ignición no deseada, se usan dispositivos de "guarda y armado" (un interruptor eléctrico que mantiene el circuito abierto) o un diseño de salvaguardas. La ignición no deseada puede producirse por electricidad estática, radiación electromagnética, corrientes inducidas, calor, vibraciones o impactos.

Existen cuatro iniciadores típicos en los ignitores:

- De diafragma. La energía de ignición pasa en forma de onda de choque por el diafragma, activando la carga.
- Cabezal con puente eléctrico. Cierra un circuito con dos cables de alta resistencia introducidos en la carga.
- Puente explosivo. Emplea un puente pequeño de material de baja resistencia que explota al aplicar alto voltaje.
- Láser transportado por fibra óptica.

3.6.2 Alineantes, aislantes e inhibidores

Son las tres capas de interfase entre el grano y la carcasa. No pueden contener materiales oxidantes, de forma que si arden, no sea por sí mismos. Tienen que ser químicamente compatibles, con una buena fuerza de adhesión, una temperatura de daño alta, poca densidad, etc. Hay materiales típicos como el neoprino, gomas sintéticas o el propio aglutinante del propelente.

El alineante debe ser un material elástico, suave y muy deformable, permitiendo el movimiento relativo entre grano y carcasa debido a la expansión térmica. Si la carcasa es de fibra, el alineante debe sellar los posibles poros. Hay que precalentar el motor para su aplicación.

El aislante interno protege de las cargas térmicas y, a la vez, funciona como alineante. Debe cumplir:

- Resistencia a erosión, especialmente en los extremos del motor. Se usan elastómeros como el neopreno, pero también se consiguen buenos resultados con una lámina de carbón.
- Resistencia térmica y baja conductividad, lo que se consigue impregnando el aislante con óxido de silicón, grafito, Kevlar o cerámicos.
- Gran deformabilidad y resistencia a altas temperaturas.
- Regresión mínima de la superficie. Existe un modelo analítico que estima el espesor (d) en función del tiempo de exposición (t_e), la tasa de erosión (r_e) y un factor de seguridad ($f \sim 1.2 \div 2$): $d = t_e r_e f$.

Se deben analizar las cargas y la temperatura experimentadas para verificar los materiales y las geometrías de diseño.

Los inhibidores se fabrican con el mismo material que el aislante y se aplican sobre las superficies que no deberían arder.

Se debe prevenir la migración de partículas entre el grano y el resto de componentes por su efecto sobre las propiedades físicas, lo cual se consigue con propelentes sin plastificantes, con una barrera para la migración, con un aislante o con aislantes o aglutinantes del mismo tipo de plastificante que el del propelente.

Las tres capas se aplica como pintura, con spray, con pegamento u otros métodos.

Se puede emplear también un aislante externo para reducir la transmisión de calor a otros elementos o sistemas, debiendo soportar la oxidación debida al calentamiento aerodinámico. Se usan materiales refractarios. Combinándolos con los aislantes internos, se regulan las fluctuaciones térmicas del grano.

3.6.3 La carcasa. Materiales. Diseño y fabricación

La carcasa es el elemento que contiene el grano de propelente y sirve como depósito a alta presión. El diseño depende de los requisitos del motor y del vehículo, además del ensamblaje y la fabricación. Se deben

considerar las distintas cargas soportadas y sus fuentes, además de las condiciones ambientales. Las cargas típicas se deben a la temperatura, la corrosión, el empuje o la presión interna.

Se usan tres clases de materiales: materiales de alta resistencia (acero, aluminio o titanio), plásticos reforzados y una combinación de los anteriores (una carcasa metálica con fibras de refuerzo).

El cociente resistencia/densidad es superior en los materiales compuestos, es decir, hace falta menos masa para soportar la misma carga. Además, proporcionan una actuación mayor, al igual que los materiales reforzados. La forma de la carcasa depende del grano y de las limitaciones de diámetro y longitud. Se usan configuraciones desde cilíndrica hasta esférica o semiesférica, siendo el caso esférico es el de menor masa para mismo volumen. Hay que considerar, también, el resto de elementos del cohete que usan el motor como soporte. El espesor mínimo es mayor que el calculado por un análisis simple de tensiones ($\sigma = pR/d$). Para una carcasa cilíndrica con acabados esféricos, el cilindro debe tener un espesor del orden del doble que en las tapas. Las tensiones combinadas no deben exceder las tensiones admitidas por el material. Por otra parte, la presión provoca un alargamiento de la cámara en las direcciones radial y longitudinal y se debe considerar esto en el diseño:

$$\Delta L = \frac{pLD}{4Ed}(1 - 2\nu) \quad (3.44)$$

$$\Delta D = \frac{pD^2}{4Ed}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \quad (3.45)$$

Se debe analizar el diseño mediante un modelo de elementos finitos aplicado a la carcasa y el grano, con las distintas cargas y superponiendo los resultados.

Las carcasas metálicas cuentan con las ventajas de ser materiales dúctiles, con deformación antes de la rotura, soportan alta temperatura, necesitan menos aislamiento, no se deterioran significativamente, se adaptan a cargas concentradas y ocupan menos volumen. Los materiales más usados son aleaciones de aluminio, titanio o níquel, que son de alta resistencia.

La forma de la carcasa, especialmente el parámetro L/D , influye en las tensiones que se soportan y en la cantidad de material necesario para albergar cierta cantidad de combustible. Para motores largos, la carcasa y el grano se fabrican por secciones, estando unidos con ensamblajes mecánicos, como anillos múltiples. Motores más pequeños se fabrican por extrusión o forja.

Respecto a las carcasas de plástico, usan filamento de fibras siguiendo unos patrones precisos y unidas entre sí con un material plástico (resina normalmente). Su ventaja principal es el bajo peso, pero la mayoría se ablandan por lo que necesitan refuerzos para aguantar las cargas. La expansión térmica es mayor que con los metales y, la conductividad térmica, menor, teniendo un mayor gradiente de temperatura. Materiales típicos son el Kevlar o los compuestos de carbono o vidrio. Una carcasa de fibra de carbono tiene una masa del orden del 50% de las de fibra de vidrio y un 67% de las de Kevlar.

Las fibras por separado son muy resistentes, pero se debilitan debido a la unión por el compuesto plástico que impide que deslicen unas sobre otras. Los filamentos no se orientan siempre según la dirección de máxima tensión, por lo que la resistencia se reduce aún más. Además, la resina establece unos límites térmicos de operación y, aunque hay algunas con un rango superior, la adhesión a la fibra no es tan fuerte. Los factores de seguridad fijan el fallo en torno a 1,4 y 1,6 veces la tensión máxima de operación.

Para la fabricación se usa un molde que incluye los anillos de fijación y se extienden las bandas en la dirección correcta. El curado se hace en un horno y bajo presión para tener una alta densidad y el menor número de poros. Un método consiste en usar una preforma de arena y un aglutinante soluble. Tras curar la carcasa, se retira la arena con agua y se sellan los poros con el alineante.

En algunos diseños se coloca el aislante sobre la preforma y se cura junto a la carcasa. En otros, se usa el grano como preforma, aplicando el alineante al grano y, después, el aislante y las fibras. El curado se hace a temperaturas relativamente bajas.

Las tensiones aceptables se determinan con ensayos de tensión de bandas y ensayos de ruptura en modelos a escala del mismo filamento. Se suelen reducir los valores aceptables para considerar las imperfecciones y la deflagración. Los filamentos deben estar orientados en la dirección de la tensión principal y depende su número de la magnitud de las tensiones. Deben considerarse las zonas de contacto y soporte con otros elementos.

3.6.4 La tobera. Materiales y diseño

La tobera es el elemento donde los gases calientes se expanden y aceleran. Debe ser capaz de soportar la erosión y las cargas térmicas.

Existen cinco clases fundamentales de toberas:

- Tobera fija. Es la más simple, usada en armas tácticas y para maniobras espaciales. No dan control sobre el vector de empuje y no son sumergidas.
- Tobera móvil. Permite control de empuje y se usa en propulsión estratégica y en sistemas lanzadores. Es sumergida y tiene uniones flexibles.
- Tobera sumergida. Una parte significativa de la tobera está dentro de la cámara de combustión, lo cual reduce la longitud del motor.
- Tobera extensible. Normalmente consiste en un cono extensible. Se usa en misiles estratégicos y en las últimas etapas de los lanzadores. Tiene un área de garganta fija y se le añade una extensión con la que se mejora el impulso específico. Se usan dispositivos electromecánicos o de turbina para añadir esta parte.
- Tobera de tubo de llama. Usado en misiles con restricciones de diámetro para permitir una actuación especial. Permite que el centro de gravedad del motor esté más cerca del vehículo, con lo que la estabilidad es más sencilla.

Para la construcción de la tobera se suelen emplear aceros o aluminio, diseñados para soportar las cargas estructurales, y aislantes o alineantes de materiales compuestos unidos a las carcasas y que protegen el metal, a la vez que proporciona el contorno aerodinámico necesario para una expansión eficiente. Se debe asegurar que el grosor del alineante es suficiente para mantener la adhesión a la carcasa bajo una temperatura que podría degradar los materiales del conjunto. La tobera puede estar formada por una pieza simple o varias piezas que se diseñan para cumplir más requerimientos complejos, como puede ser el control de empuje.

Desde un punto de vista de la actuación, la tobera debe diseñarse para expandir el gas para generar el empuje necesario. El contorno de salida debe no ser cónico, empleando la Teoría de Gases para fijar el área de garganta, los ángulos y la relación de expansión. Se usan contornos más complejos para minimizar pérdidas, mejorar el impulso específico y reducir la masa y longitud de la tobera.

El impacto de partículas retira parte del alineante por la erosión. Radialmente, la reacción del carbono del alineante con el oxidante produce degradación y es en la garganta donde se produce con mayor intensidad. El área de garganta crece, lo cual es un problema de diseño y se deben evitar aumentos superiores al 5%, pues se penaliza el empuje y se produce un desalineamiento del vector de empuje.

La elección del contorno requiere un análisis que determina qué configuración convierte más rápido el gas en un flujo axial sin producir ondas de choque ni impactando demasiadas partículas contra las paredes.

Los motores nunca alcanzan un auténtico equilibrio térmico durante la combustión, sino que la temperatura de expansión depende del tiempo. En un buen diseño térmico, los lugares críticos alcanzan un máximo térmico permitido poco después de acabar la combustión. Los componentes de la tobera dependen de su capacidad para absorber calor (alto calor específico y necesidad de gran energía para descomponerse) y una transferencia de calor lenta para soportar las tensiones y cargas. La máxima temperatura permitida debe imponerse por debajo de aquella a la que se produce una excesiva degradación. Además, la duración operativa está limitada por el diseño y los materiales.

El objetivo del diseño es usar el material justo necesario para operar adecuadamente bajo las condiciones de actuación. La clave reside en la elección de los materiales.

En el inicio de la coherencia, se empleaban toberas de una única pieza de grafito policristalino, con una carcasa metálica, las cuales se erosionaban fácilmente pero eran de bajo coste. Se siguen usando para operaciones cortas, con baja presión de cámara y a baja altitud. Para operaciones más severas se introducen gargantas integrales en la pieza de grafito, siendo una pieza más densa, de mejor grado de carbono. Posteriormente, se pasó al grafito pirolítico y, tras éste, a la fibra de carbono reforzada y las matrices de carbono. Para motores pequeños y mediano se empleaba la fibra de carbono en una matriz de carbono, con orientaciones de la fibra bidimensional o tridimensional.

Las regiones justo aguas arriba y aguas abajo de la garganta son en las que hay una menor transferencia de calor y erosión, por lo que los materiales pueden ser más económicos, como el grafito, materiales ablativos o fibra de carbono y silicio.

En la sección divergente, la transferencia de calor y las temperaturas son aun menores y los materiales pueden ser menos resistentes y más baratos. Se puede fabricar de forma integral, con la garganta o por separado y se ensamblan entre ellos. Se usan materiales ablativos sin fibras o con fibras cortas. También se pueden emplear metales de alta temperatura de bajo peso, como el titanio o el niobio.

El soporte estructural de la tobera usa el mismo material que la carcasa del motor. Mediante elementos finitos se puede estimar la distribución de temperaturas internas con el tiempo para analizar los procesos transitorios

de transferencia de calor. Tras la ignición, se alcanza una temperatura de equilibrio por la conducción de calor desde las partes internas expuestas al gas hasta las piezas exteriores. Es necesario para hacer este estudio el conocimiento de la distribución de temperaturas. Las piezas de entrada y la garganta están sometidas a las condiciones más adversas.

Es común emplear materiales ablativos en la tobera y los aislantes, siendo, generalmente, materiales compuestos de fibra orgánica o inorgánica de alta temperatura y resistencia, como vidrios de silicio, fibra de carbono o Kevlar. Las fibras se presentan individuales o por bandas, todas impregnadas de resina. El proceso de ablación que las genera es una combinación de derretimiento de la superficie, sublimación, evaporación, descomposición y enfriamiento. Las fibras experimentan una degradación endotérmica que consiste en cambios físicos y químicos. Mientras una parte se evapora, permanece suficiente material sólido en la superficie para preservar la geometría y la integridad estructural, actuando el material como un sumidero de calor. A cierta temperatura, la resina empieza a descomponerse en gases de carbono, quedando una capa de carbón poroso, con lo que los gases provocan un proceso de agrietamiento en el sentido opuesto al flujo. Los gases formados son ricos en combustible, relativamente fríos y forman una capa límite débil.

Como el carbón formado es casi todo carbono y puede soportar alta temperatura, la capa porosa permite que se mantenga la superficie original y provee de integridad geométrica, pero es un material débil y puede ser dañado.

Las piezas de material ablativo se forman con moldeado a alta presión o por curado usando un molde, que es un método común para formar toberas muy largas. Consiste en calentar un mandril con la forma, disponer a presión la fibra e inyectar la resina a la vez que se enrolla la fibra. La experiencia muestra que la densidad es un parámetro importante para aceptar la pieza (baja densidad equivale a excesivos poros, baja resistencia y alta velocidad de erosión). La orientación de la fibra importa a la hora de resistir la erosión, obteniendo buenos resultados si está colocada a 60° respecto del flujo.

3.7 Elección del propelente

3.7.1 Compuestos posibles

Basándose en todo lo visto anteriormente respecto a la teoría de propelentes químicos sólidos y teniendo en cuenta aspectos cruciales como la seguridad, la toxicidad, el coste o la disponibilidad de los materiales, se considera oportuno utilizar propelentes que empleen como oxidante nitrato potásico o nitrato amónico. Lo ideal sería emplear compuestos basados en perclorato amónico, por sus prestaciones, pero conlleva mayor peligro y dificultad de adquisición. Se trata, en definitiva de propelentes compuestos.

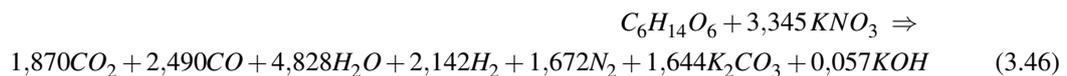
Los compuestos de nitratos junto con elementos como la sacarosa han sido ampliamente usados en cohetaría, conociéndose el propelente como "candy". Ensayos demuestran que emplear sorbitol ($C_6H_{14}O_6$), en vez de sacarosa o dextrosa, proporciona mejores propiedades físicas y de actuación.

Otras formulaciones usan resina epoxy, junto con aditivos como el aluminio y otros.

Por último, se considera la opción, aunque menos factible, de compuestos basados en perclorato amónico para ver sus prestaciones y poder compararlo con los anteriores. Se usa el perclorato como oxidante, un aglutinante elastómero y pequeñas cantidades de polvo metálico como aluminio.

Compuestos de nitrato potásico

Se considera, en primer lugar, la combinación con sorbitol, un edulcorante artificial muy parecido a la sacarosa y la dextrosa, pero que no es carbohidrato. Su fórmula química es $C_6H_{14}O_6$ y la reacción completa viene dada, para concentraciones de un 65 % de oxidante, por:



El sorbitol tiene un peso molecular de 182,2 g/mol, un punto de fusión en torno a 110 °C, una densidad de 1,489 g/cm³, una entalpía de formación de $\Delta H_f^\circ = -1353,7$ kJ/mol y se vende en forma de granos blancos.

La fabricación del propelente se hace "al baño maría" o sobre una superficie cuya temperatura pueda regularse. Tras disminuir el tamaño de grano de los componentes, se mezclan y se van añadiendo al recipiente poco a poco a medida que se va derritiendo, con una mezcla continua (con una espátula de silicona). Una vez se vierte toda la mezcla, se remueve, para eliminar grumos y poros, durante 5-10 minutos.

Se llegan a impulsos específicos del orden de 165 s.

Otra opción para el nitrato potásico son los propelentes basados en resina epoxy, que resultan más resistentes, menos susceptibles a la humedad y tienen una mejor actuación.

La resina epoxy es un compuesto formado por cadenas de Bisfenol A ($C_{15}H_{16}O_2$) ampliamente usado para reforzar materiales plásticos. En un propelente sirve, a la vez, como aglutinante y combustible, con un contenido energético aceptable y que se descompone por pirólisis. como aglutinante tiene buenas propiedades mecánicas, tiene baja viscosidad y es seguro. La entalpía de formación de la resina es de $\Delta H_f^\circ = -661$ cal/gram y tiene una densidad del orden de 1,12 g/cm³.

Además del nitrato y la resina, se añade un componente metálico, como Aluminio u óxido férrico (Fe_2O_3) para acelerar la combustión.

Se usan composiciones con un 70 % de nitrato y un 8 % de Fe_2O_3 . Es importante eliminar todos los gases en la mezcla para evitar la formación de poros.

Para la preparación, se pesan los ingredientes y se introducen en un contenedor de polietileno donde se mezclan usando mezcladores rotatorios. Por se parado se pesan la resina y el endurecedor y se combinan. La mezcla se va añadiendo poco a poco. Tras remover adecuadamente, se compacta en un contenedor de polietileno, que sirve como molde, y se deja curar durante más de un día. Se usa polietileno porque la resina no se adhiere a él.

Experimentalmente se observa que la velocidad de combustión es mucho menor que los propelentes con sorbitol y el impulso específico es del mismo orden.

Compuestos de nitrato amónico

Se considera el propelente de nitrato amónico con aluminio. El nitrato amónico es un compuesto químico de bajo coste, de alta disponibilidad, estable y que, al desintegrarse, genera productos de bajo peso molecular. Las desventajas que tiene están relacionadas con la degeneración con la humedad y su expansión volumétrica

al cambiar de fase. Además, genera agua en su descomposición, por lo que puede apagarse la llama. Otra opción al aluminio es el magnesio, el cual es más caro. El aluminio, por otra parte, arde difícilmente, por lo que resulta interesante añadir aditivos y aglutinantes que ayuden a la reacción. Para ello, y como aglutinante, se puede usar resina epoxy o neopreno.

Pese a la estabilidad en condiciones ambiente, el nitrato amónico puede provocar una detonación bajo las condiciones apropiadas, cuestión evitable si se asegura la ausencia de poros o burbujas.

Para la fabricación se mezclan los ingredientes y se comprime el resultado, introduciéndolo en un tubo, tras lo que se deja secar. Lo mejor es esperar a que se evaporen los compuestos volátiles del pegamento de neopreno antes de la mezcla y, así, evitar la formación de poros. El nitrato amónico se seca a unos 80° , se convierte en polvo y se mezcla con el resto, salvo el aglutinante. Se toma unas cinco veces más de pegamento de neopreno y se mezcla con el resto. Se deposita todo sobre un papel para el secado y, tras unas 24 horas, se tiene un producto flexible que se puede moldear. Se granula y se moldea a presión.

Compuestos de perclorato amónico

El perclorato amónico es un compuesto químico muy usado en motores cohete en la industria espacial, utilizando normalmente polibutadieno terminado en hidroxilo (HTPB) como aglutinante. El perclorato funciona como oxidante, teniendo el riesgo de su inestabilidad. Además, se suele emplear polvo de aluminio como combustible. Un ejemplo de aplicación son los lanzadores del transbordador espacial (SRB - Shuttle Rocket Boosters).

En la reacción de combustión se generan N_2 , H_2O , HCl , O_2 y Al_2O_3 . Las temperaturas y la actuación son muy superiores a los casos anteriores.

La reacción de este propelente es muy compleja y existen numerosos métodos que intentan explicarla con una precisión aceptable.

3.7.2 Análisis preliminar

De cara a estimar la actuación de cada uno de los propelentes propuestos y conocer cual resulta mejor para aplicarlo, la realización de un estudio analítico sería excesivamente complejo y largo en el tiempo. Se decide, por tanto, emplear un software comercial que implementa el conjunto de ecuaciones explicado junto con correcciones de origen experimental. Por fiabilidad, coste y la extensión de su base de datos, se elige el programa PROPEP 3 desarrollado por los miembros de la Asociación de Ciencia Aeroespacial de Nevada (NASSA).

Este programa considera las hipótesis ya planteadas (flujo unidimensional, combustión completa y adiabática, gas ideal, etc) y proporciona el impulso específico, la temperatura de combustión y otros parámetros.

PROPEP usa una gran base de datos de características termoquímicas de numerosos ingredientes y, usando las hipótesis ya planteadas (flujo unidimensional, combustión completa y adiabática, gas ideal, etc), obtiene los valores que definen las propiedades fundamentales del propelente: impulso específico ideal (I_s^*), velocidad característica de salida (c^*) y temperatura de cámara. La presión de cámara se fija como un parámetro de referencia, pues para su evolución real se precisan datos empíricos.

Se supone que la tobera está adaptada a nivel del mar y se establece una presión de cámara de 1000 psi (68 atm). Se usan granos de 100 gramos de peso para poder comparar composiciones.

Compuestos de nitrato potásico

Se procede a efectuar un barrido de concentraciones máxicas de KNO_3 desde 1% hasta 99%. Se observa que, en una primera aproximación, existe un máximo para el impulso específico en el intervalo 60-75% de concentración máxica de nitrato potásico. Se procede, por tanto, a un estudio más exhaustivo de esta región. Se llega a un máximo de impulso específico con composiciones de un 70% en masa de nitrato y un 30% de sorbitol. A partir de ahí, la temperatura de cámara sigue subiendo, pero el impulso cae. En el máximo, se tiene que $I_s \simeq 115.6s$ y $T \simeq 1864K$.

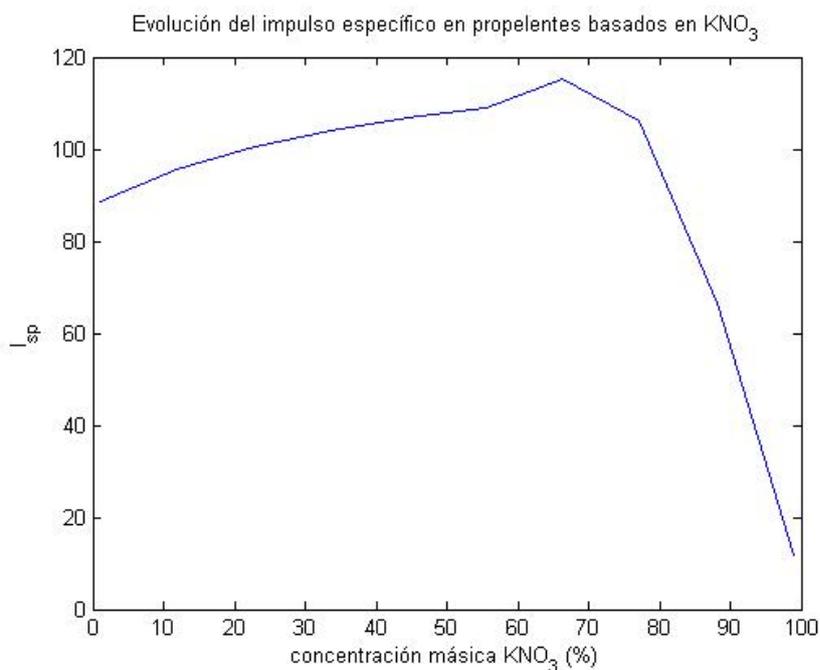


Figura 3.1 Impulso específico en función de la concentración de KNO_3 .

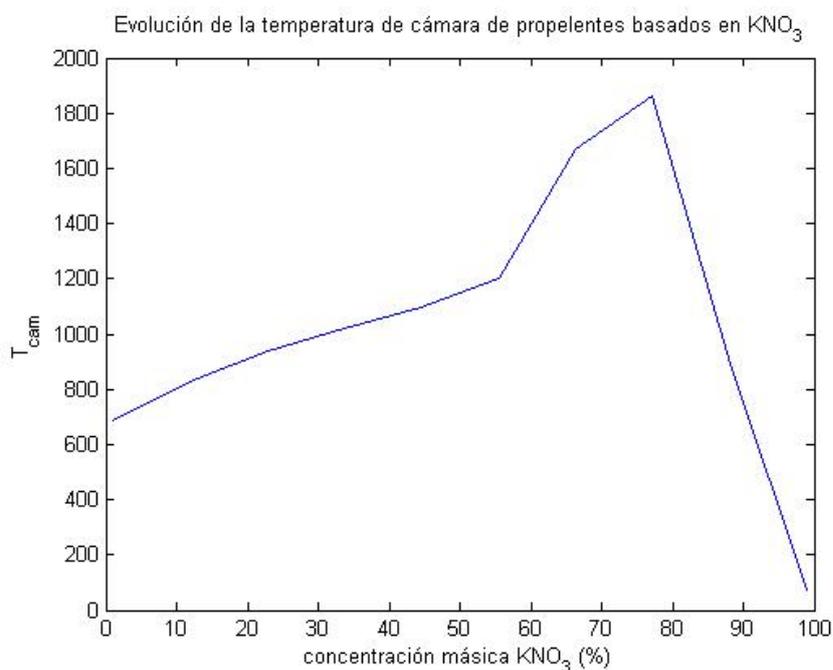


Figura 3.2 Temperatura de cámara en función de la concentración de KNO_3 .

La otra opción que se barajaba anteriormente es el uso de resina epoxy, por sus mejores propiedades. Se procede de la misma forma y se obtiene que existe un máximo, siendo las concentraciones de KNO_3 mayores. El máximo se tiene entre el 70 y el 85% de concentración máxima, encontrándose, exactamente, para una concentración de nitrato del orden del 78,5%. Con menos combustible (y más oxidante) se consigue una actuación algo mejor ($I_s \simeq 116$), con unas propiedades mecánicas, a la vez, superiores y una temperatura de cámara, $T \simeq 1838K$, algo inferior.

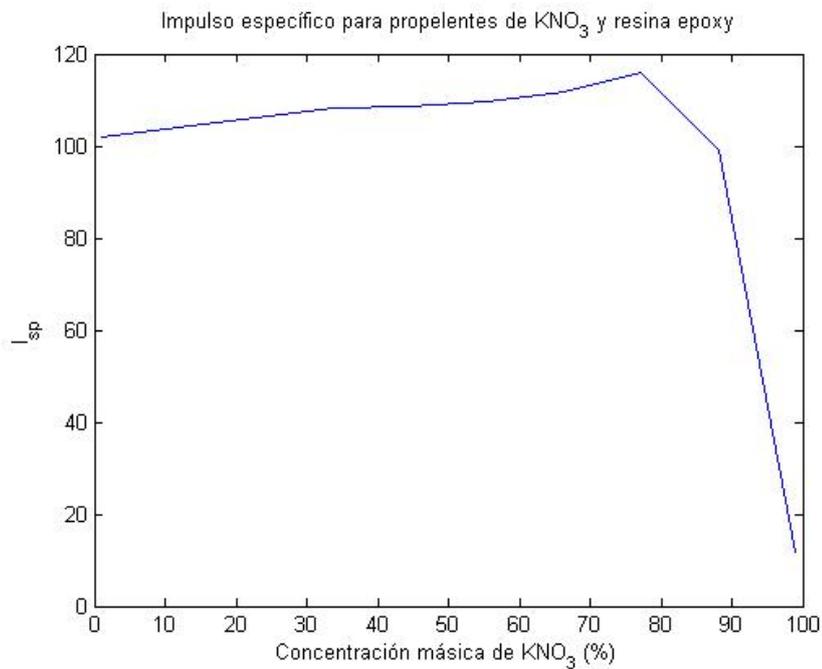


Figura 3.3 Impulso específico en función de la concentración de KNO_3 .

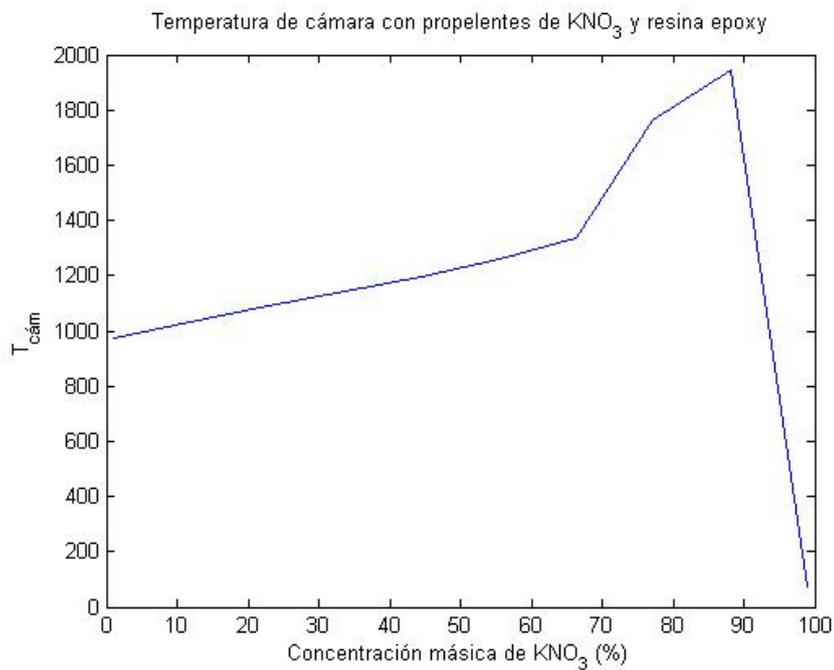


Figura 3.4 Temperatura de cámara en función de la concentración de KNO_3 .

Comparando las gráficas, se comprueba que con concentraciones algo superiores se tiene un funcionamiento superior con temperaturas algo superiores, pero se consiguen unas propiedades mecánicas mejores.

Compuestos de nitrato amónico

Para conocer las ventajas del empleo de nitrato amónico en vez de potásico, se estudian los valores obtenidos al combinarlo con sorbitol. Los máximos para el impulso y la temperatura se alcanzan para valores mayores de oxidante, más concretamente en el rango 75-90%. Exactamente, con un 85% en masa de NH_4NO_3 se tiene que $I_{sp} \simeq 172s$ y, la temperatura de cámara, $T \simeq 2190K$, lo que supone tener casi un 50% más de I_{sp} con sólo un aumento del 17% de la temperatura.

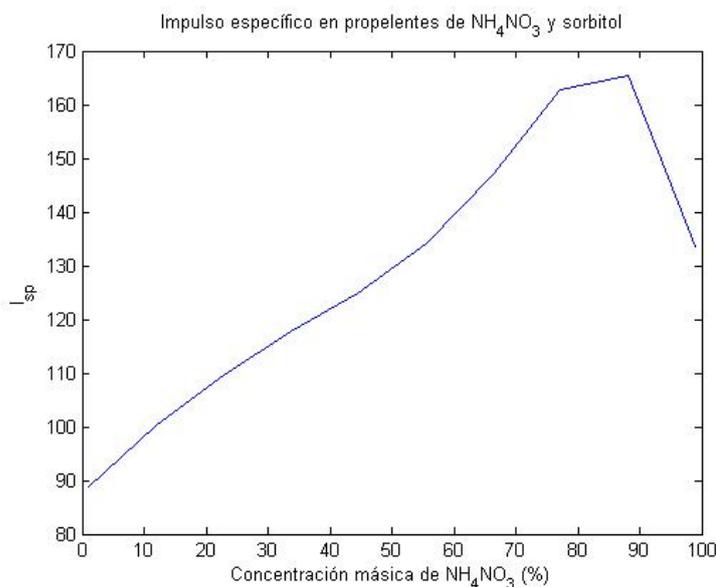


Figura 3.5 Impulso específico en función de la concentración de NH_4NO_3 .

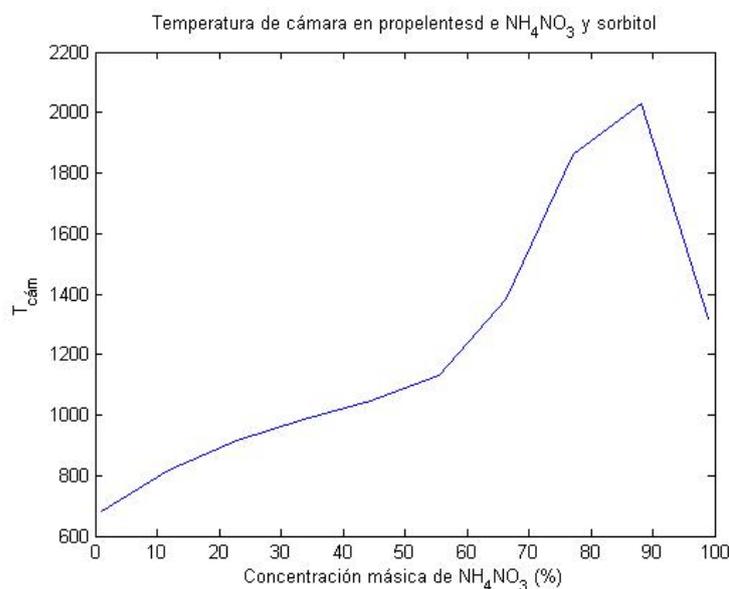


Figura 3.6 Temperatura de cámara en función de la concentración de NH_4NO_3 .

De cara a conocer las propiedades del propelente que combina nitrato amónico, polvo de aluminio y neopreno, es necesario incluir en el código de la base de datos un compuesto que se asemeje a este último. Por ello, se introduce el cloropreno, cuya composición es C_4H_5Cl , con una entalpía de formación de

$\Delta h_f^\circ = -2000 \text{ cal/gramo}$ y una densidad de $1,51 \text{ g/cm}^3$.

Se comprueba que los valores de impulso específico son bastante superiores, alcanzándose $I_{sp} \approx 190s$. El problema reside en que la temperatura supera los 3000 K, suponiendo un más que probable problema estructural. Es necesario, entonces, decidir cómo se obtiene un punto equilibrado entre los requisitos de proteger los materiales y obtener una mejor actuación. Además, altos valores de aluminio hacen que la mezcla sea más difícil de encender. Para una composición de: 70% de NH_4NO_3 , 21% de Al y 9% de neopreno, se llega a $I_{sp} = 183,533s$, lo que significa mejorar el impulso en un 7% aumentando la temperatura un 37%.

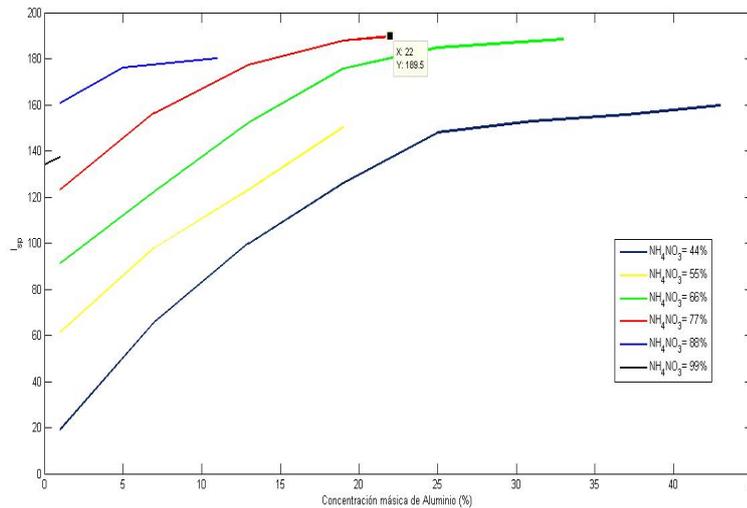


Figura 3.7 Impulso específico en función de la concentración de NH_4NO_3 y de Al.

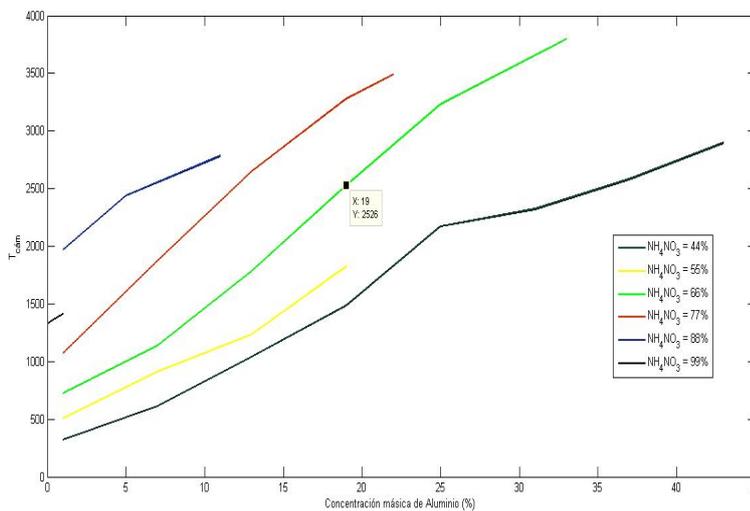


Figura 3.8 Temperatura de cámara en función de la concentración de NH_4NO_3 y de Al.

Compuestos de perclorato amónico

Si se analiza, por ejemplo, el propelente usado en los lanzadores comerciales, se llega a impulsos específicos del orden de 200s y temperaturas de cámara que rondan los 3300-3500K. Este es el caso del propelente usado por los lanzadores de los transbordadores espaciales (SRB): perclorato amónico (69,6%), aluminio (16%),

óxido de hierro (0,4%), un aglutinante (12,04%) y resina epoxy (1,96%).

Conclusiones

Si únicamente se tiene en cuenta las prestaciones de impulso específico, el mejor candidato sería el basado en perclorato amónico. El problema reside en que hay otros factores a tener en cuenta. Uno de ellos es el coste, según el cual el propelente "candy" sería el idóneo. Otra desventaja del perclorato es la temperatura: un valor mayor supone mayor peligro estructural y unos requerimientos de aislante y carcasa superiores y, en consecuencia, más costosos.

Se decide, por tanto, seguir trabajando con el combustible "candy" y las variantes ya mostradas para nitrato potásico y nitrato amónico. Se trata de propelentes sencillos y bien conocidos, cuyos componentes son económicos y fáciles de obtener.

3.8 Prediseño del motor

Una vez se tiene elegido el propelente o propelentes posibles, se procede a diseñar el grano, la cámara de combustión y la tobera. En primer lugar se analiza la cámara de combustión y, de acuerdo a sus características, la tobera en función del proceso de optimización basado en la Teoría de Gases.

3.8.1 Prediseño de la cámara de combustión

Tal y como se vio anteriormente, el funcionamiento del motor depende fuertemente de un parámetro llamado K_n , el cual es el cociente entre la superficie de quemado y el área de la garganta. El valor de K_n determina el diseño de la cámara.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

- Elegir una configuración de grano.
- Decidir la geometría del grano y de la tobera.
- Implementación del algoritmo para obtener la presión y la temperatura de la cámara durante la combustión.

De entre todas las geometrías de grano posibles (determinadas por la forma de la cavidad central), se observa que siendo la cavidad cilíndrica y estando la superficie interna y el borde externo expuestos, se dispone de una evolución creciente de la presión. Además, para iguales geometrías de grano, se comprueba que el impulso total alcanzado exponiendo la superficie externa es superior.

Llegados a este punto, se requiere fijar una presión de cámara. Haciendo pruebas se observa que, a mayor presión de cámara, el tiempo de combustión es menor (mayor velocidad de combustión $r = ap_{cam}^n$ y el empuje máximo es mayor).

Dadas las dimensiones del cohete, se deciden fijar las siguientes dimensiones del grano:

- Longitud: 470 mm.
- Diámetro externo: 170 mm.
- Diámetro interno: 20 mm.

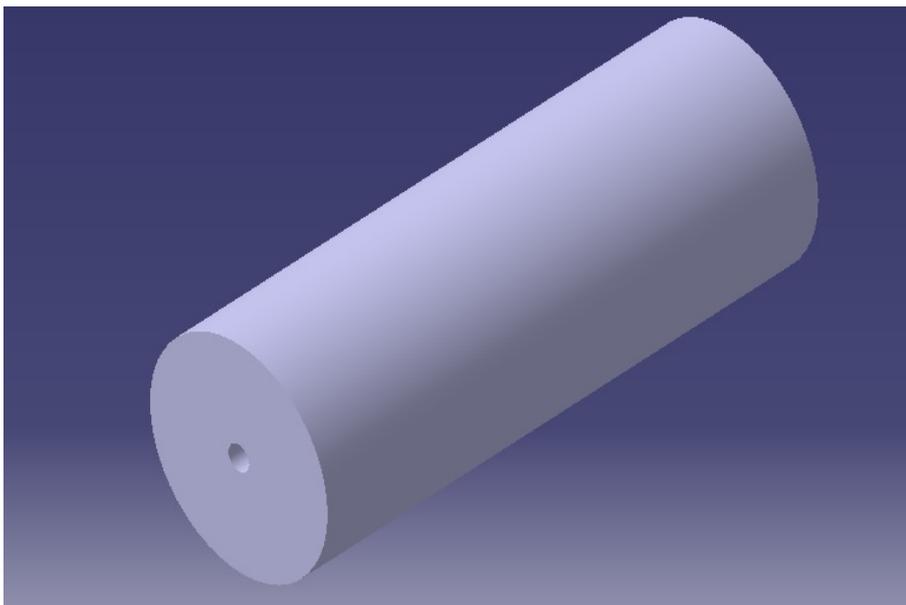


Figura 3.9 Vista en perspectiva del grano de propelente.

Para conocer el funcionamiento del motor se diseña el siguiente algoritmo:

- Se parte de unas condiciones iniciales tales que:

$$\begin{aligned}x(0) &= 0 \\L(0) &= L_0 \\D(0) &= D_{ext} \\d(0) &= D_{int} \\\dot{m} &= 0 \\P_{cam}(0) &= p_{atm}\end{aligned}$$

- para cada instante t_i , las variables que definen la actuación propulsiva son:

$$\begin{aligned}x_i &= x_{i-1} + \Delta x \\L_i &= L_{i-1} - \Delta x \\D_i &= D(0) \\d_i &= d_{i-1} + 2\Delta x \\t_{web_i} &= (D_i - d_i)/2 \\P_{0_i} &= P_{cam_{i-1}} \\T_{cam_i} &= f(\text{propelente}, P_{0_i}) \\a_i, n_i &= f(\text{propelente}, P_{cam}) \\r_i &= a_i P_{0_i}^{n_i} \\t_i &= (\Delta x)/r_i + t_{i-1} \\V_{grano_i} &= \pi/4 L_i (D_i^2 - d_i^2) \\m_{grano_i} &= \rho_{grano} V_{grano_i} \\\dot{m}_{gen_i} &= (m_{grano_{i-1}} - m_{grano_i})/(t_i - t_{i-1}) \\\dot{m}_{lob_i} &= (P_{0_i} - p_{atm}) A_g \sqrt{\frac{\gamma}{RT_{cam_i}}} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \\\dot{m}_i &= \dot{m}_{gen_i} - \dot{m}_{lob_i} \\m_i &= \dot{m}(t_i - t_{i-1}) + m_{i-1} \\V_{libre_i} &= V_{cam} - V_{grano_i} \\\rho_{prod_i} &= m_i/V_{libre_i} \\P_{cam_i} &= \rho_{prod_i} RT_{cam_i} + p_{atm}\end{aligned}$$

Donde t es la variable temporal, \dot{m}_{gen} es la masa por unidad de tiempo consumida, \dot{m}_{lob} es la masa por unidad de tiempo que sale por la tobera, r es la velocidad de combustión (junto con los dos parámetros experimentales a y n).

- Se implementa el algoritmo hasta que el diámetro interno sea igual al diámetro externo, lo cual ocurre antes de que la longitud sea nula.

Se toma como propelente de partida el formado por Nitrato Potásico (KNO_3) y sorbitol, con una relación oxidante/combustible (a partir de ahora, O/F) de O/F=70/30. Con esta composición, se dispone de la siguiente evolución de la temperatura de cámara en función de la presión a la que se produce la reacción:

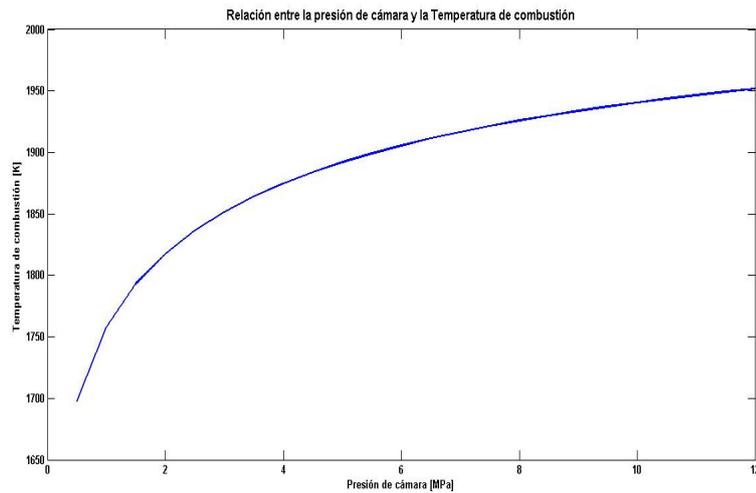


Figura 3.10 Relación entre la presión de cámara y la temperatura de combustión.

Para analizar la actuación propulsiva es necesario conocer los valores experimentales a y n , los cuales dependen de la presión siguiendo la siguiente tabla:

P_{cam} (MPa)	a	n
<0.807	10.708	0.625
0.807-1.503	8.763	-0.314
1.503-3.792	7.852	-0.013
3.792-7.033	3.907	0.535
>7.033	9.653	0.064

Tras esto, fijando la geometría del grano (definida anteriormente), la de la cámara y el diámetro de la garganta de la tobera, se obtiene la evolución temporal de la presión y la temperatura dentro de la cámara de combustión. En este caso, se ha elegido una cámara de 500 mm de largo y 170 mm de diámetro; y el diámetro de la garganta de 25 mm. Con esto, se tienen los siguientes resultados:

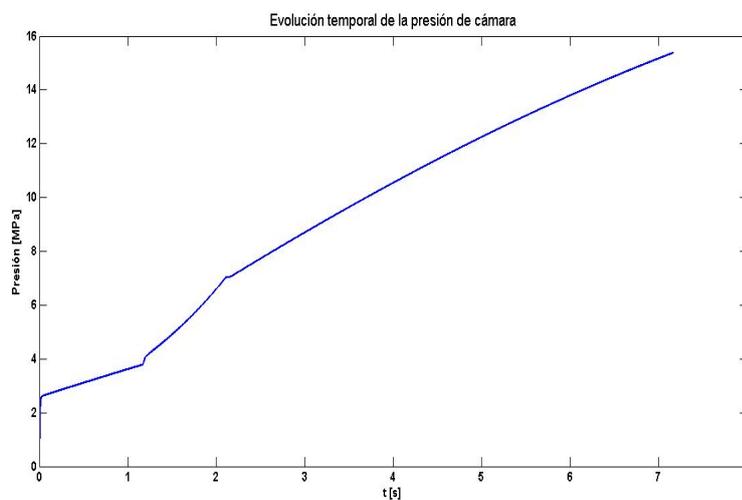


Figura 3.11 Evolución temporal de la presión de cámara con $D_g = 20\text{mm}$.

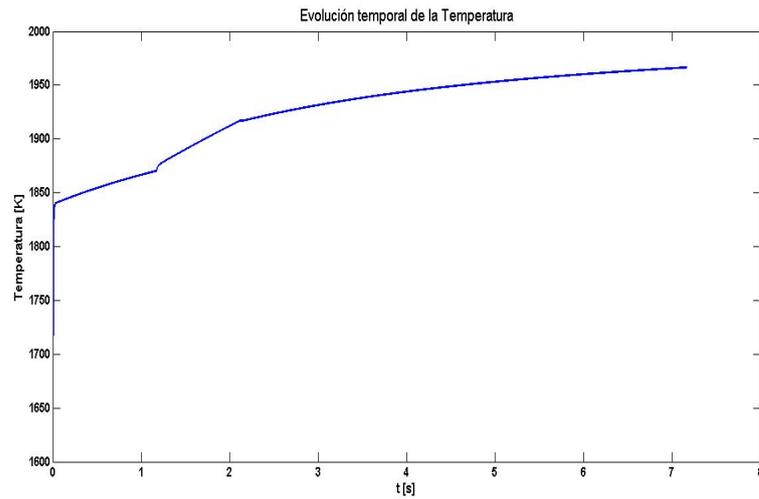


Figura 3.12 Evolución temporal de la temperatura de cámara con $D_g = 20mm$.

Se puede comprobar en estas dos evoluciones temporales que los máximos de presión y temperatura se alcanzan al final de la combustión y que ambos valores, junto con el tiempo de combustión, tienen una clara dependencia con la geometría de la garganta de la tobera. En la imagen adjunta se puede ver que a mayor diámetro de garganta, la presión máxima es menor y el tiempo de combustión es mayor. Es necesario establecer un equilibrio para obtener impulsos totales (I_t) lo mayores posibles.

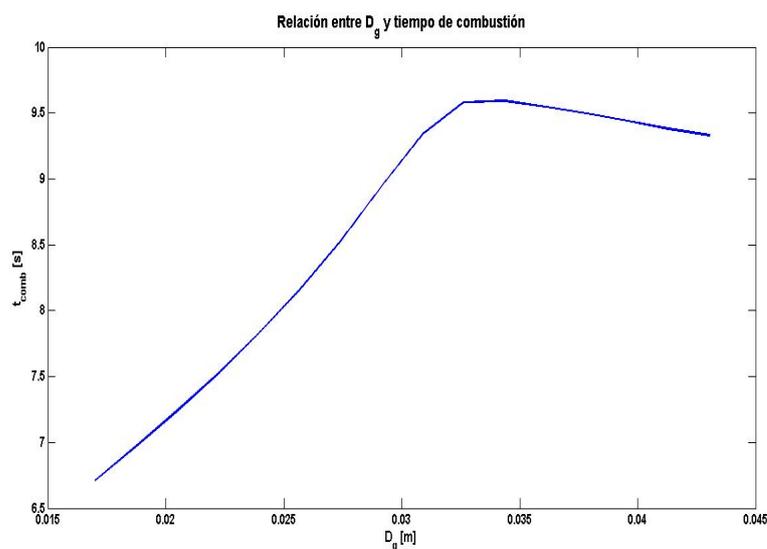


Figura 3.13 Tiempo de combustión en función del diámetro de garganta.

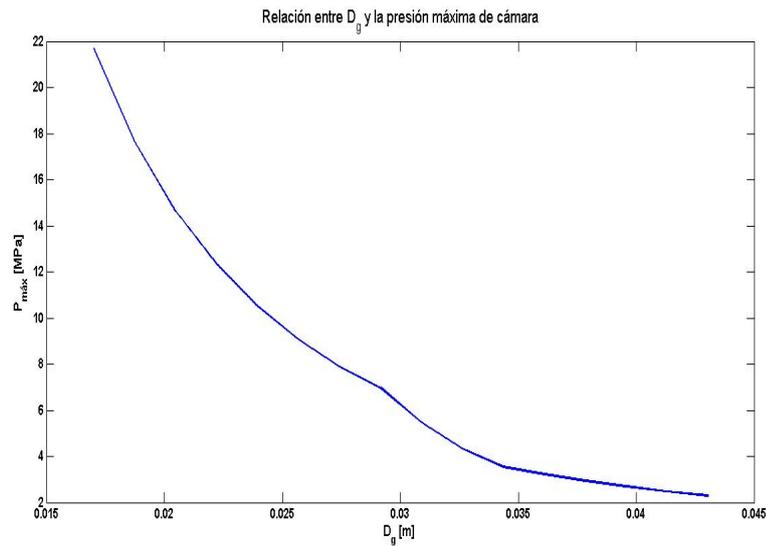


Figura 3.14 Presión máxima de cámara en función del diámetro de garganta.

Tras analizar estas evoluciones, se aboga por aumentar el diámetro de garganta hasta los 25 mm, de forma que las presiones en la cámara se reducen significativamente, de igual forma que disminuye la temperatura de combustión y aumenta el tiempo de combustión. El descenso de la presión máxima es de un 40%, mientras que la de la temperatura no llega al 5%. Esto permitirá tener una carcasa más delgada, pero los requisitos térmicos seguirán siendo igual de exigente. La decisión afecta al empuje de forma que el máximo es menor, pero se compensa con un tiempo de combustión mayor.

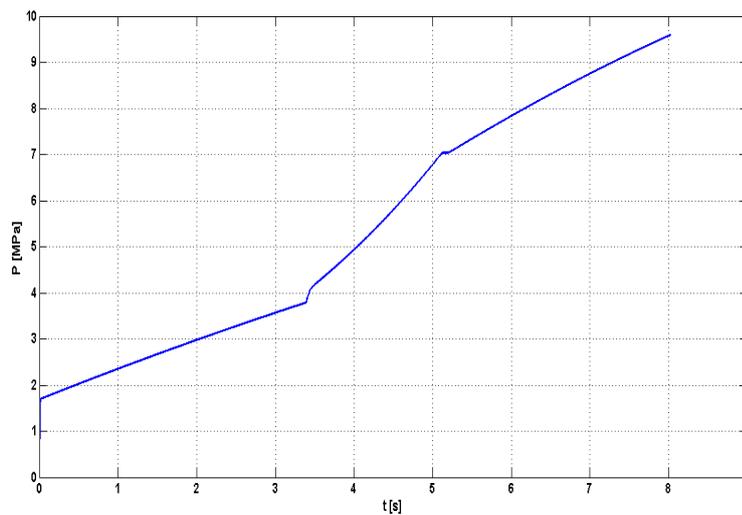


Figura 3.15 Evolución de la presión de cámara con $D_g = 25\text{ mm}$.

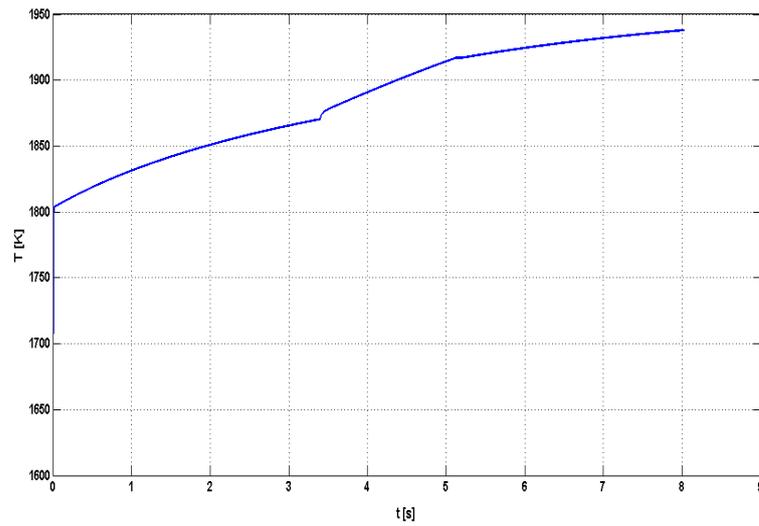


Figura 3.16 Evolución de la temperatura de combustión con $D_g = 25 \text{ mm}$.

3.8.2 Prediseño de la tobera

Para diseñar la tobera se emplean las ecuaciones obtenidas durante el desarrollo de la Teoría de Gases. La prueba de distintas geometrías en función de si son cónicas o con forma de campana, su longitud y relación de áreas permite obtener la configuración óptima. La tobera es de tipo convergente-divergente. Considerando que la diferencia de presiones entre el interior y el exterior y el cociente entre el área de salida y el área de garganta son lo suficientemente altos, se puede considerar que la garganta (sección de área mínima) va a estar bloqueada, es decir, que $M=1$ en esa zona. Siendo la zona convergente corta respecto a la longitud total de la tobera, los valores de las variables de remanso permanecen constantes hasta la garganta. Es por ello por lo que el estudio se centra en la sección divergente.

Como primer paso en el estudio, por simplicidad, se analiza la evolución isentrópica del fluido, sin entrar en consideraciones de variaciones de áreas, fricción o transmisión de calor. La tobera se encuentra bloqueada mientras $p_{ext}/p_0(0) > p_{L_2}/p_0(0)$. Tal y como se describió anteriormente, el empuje que proporciona el motor se maximiza si la tobera está adaptada y esta situación se da cuando $p_{ext}/p_0(0) > p_{L_1}/p_0(0)$, describiendo el fluido una evolución supersónica en la sección divergente. Las ecuaciones de movimiento isentrópico permiten obtener el cociente de áreas para el que se produce dicha relación de presiones. Un valor mayor de A_s/A_g hace que la tobera esté subexpandida, al ser la presión de salida menor que la atmosférica. Si A_s/A_g es menor, se producen ondas de choque a la salida o en el interior.

Interpolando las tablas de flujo isentrópico es posible calcular la relación de áreas óptimas. De esta forma, introduciendo los valores de presión obtenidos de la operación del motor y fijando distintas alturas de vuelo, se obtienen los resultados buscados. Dado que la presión aumenta durante la combustión, el cociente entre las áreas también aumenta. También existe un aumento a mayores alturas, dado que la presión ambiental es menor y hace falta una mayor expansión para adaptar el flujo a las condiciones externas.

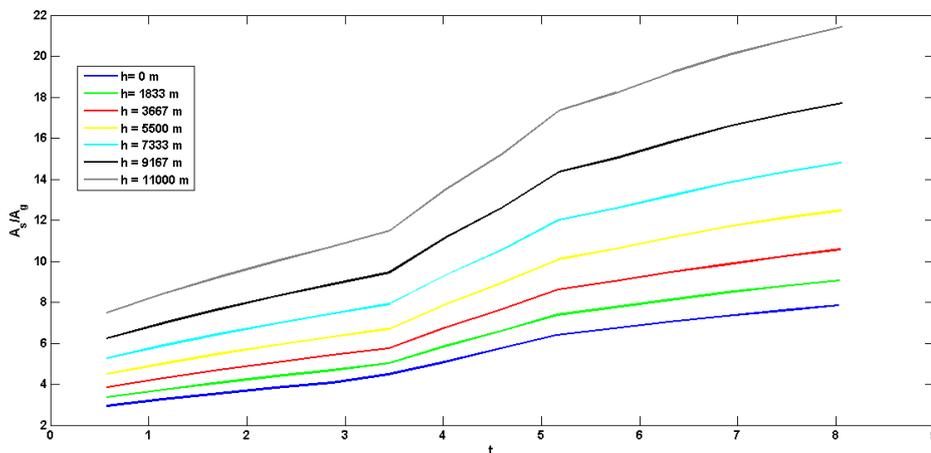


Figura 3.17 Relación de áreas para tobera adaptada según flujo isentrópico.

Los resultados mostrados en la imagen anterior proporciona una idea del rango de relación de áreas en el que se ha de operar para maximizar el empuje. A continuación se prosigue con el análisis teniendo ya en cuenta el efecto de la distribución de áreas y la fricción. Aunque se debe tener en cuenta el efecto de la altura, para la implementación de la Teoría de Gases se toman únicamente las condiciones a nivel del mar. Se considera que no hay transmisión de calor a través de las paredes de la tobera, lo cual no es cierto, pero se toma como primera aproximación. Mientras se asegure que la tobera permanece adaptada, la altura no afecta significativamente al empuje (considerando igual número de Mach de vuelo). Sin embargo, si se mantiene la distribución de áreas para tener adaptada la tobera a nivel del mar, el empuje disminuye significativamente.

Para comenzar se considera una tobera cónica, de área inicial A_0 , área de garganta A_g y área de salida A_s .

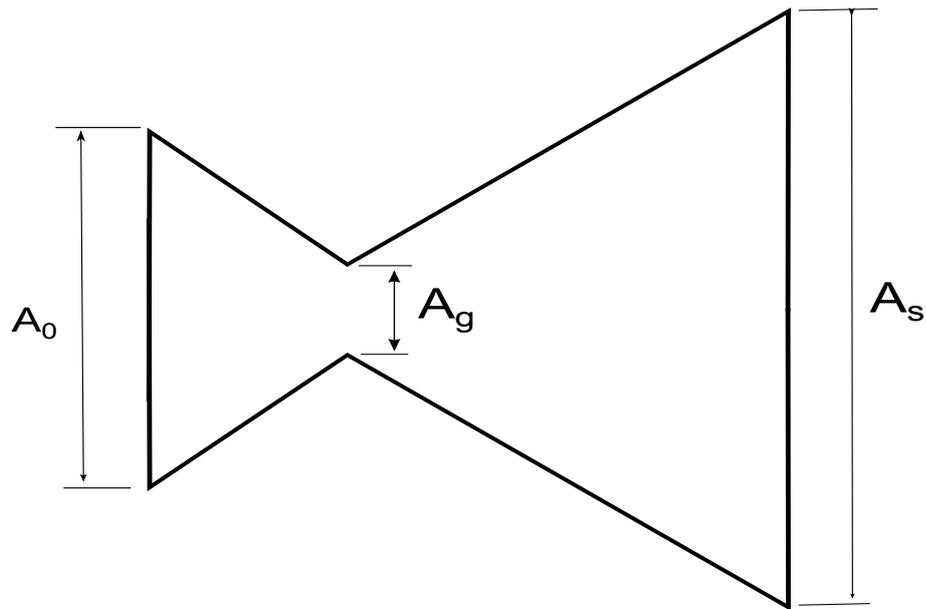


Figura 3.18 Geometría esquemática de tobera cónica.

Mediante la Teoría de Gases se puede conocer la evolución de la presión y el número de Mach a lo largo de la sección divergente. Partiendo de la condición de bloqueo de la garganta y con los valores de las variables de remanso correspondientes a la cámara de combustión, se observa que la presión se reduce, mientras que el número de Mach aumenta. Se prueban distintos cocientes de áreas entre 1 y 10. Para poder calcular las relaciones de áreas óptimas, se hace un barrido y se buscan los valores que hacen que, en cada instante, la presión a la salida sea la presión atmosférica. De esta forma, se obtienen los resultados mostrados en la imagen inferior:

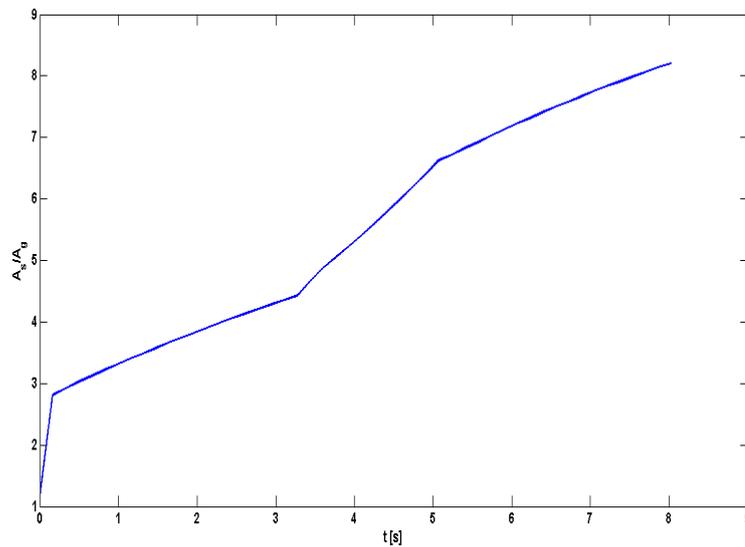


Figura 3.19 Relación de áreas óptima en cada instante de tiempo.

Con estos valores, se calcula el empuje que proporciona el conjunto motor y tobera a lo largo del tiempo.

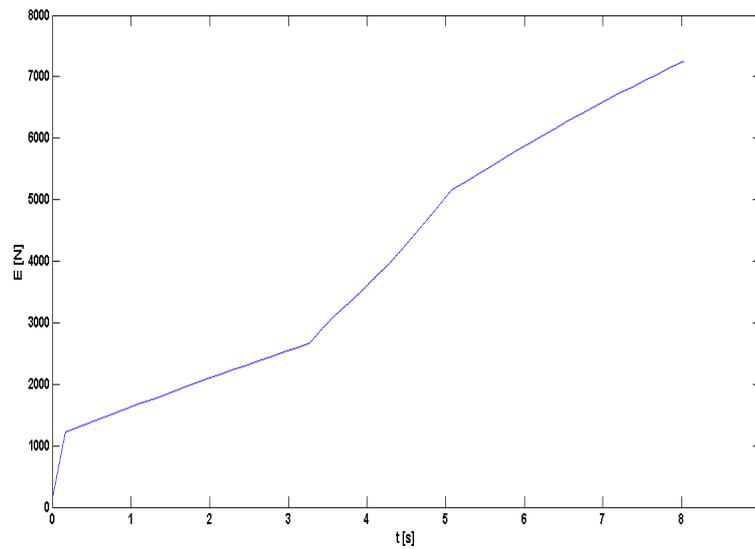


Figura 3.20 Evolución temporal del empuje con tobera adaptada.

La otra geometría planteada consiste en la comúnmente conocida como tobera de campana. El contorno de dicha tipología de tobera puede ser aproximada por una parábola, siendo los parámetros el diámetro de garganta, el diámetro de salida y la pendiente de la recta tangente en la garganta θ_i .

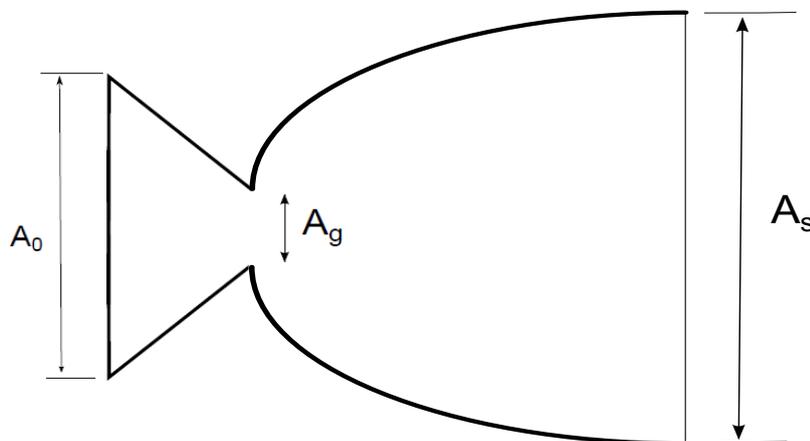


Figura 3.21 Geometría esquemática de tobera cónica.

Se prueban tres ángulos distintos: 20° , 25° y 30° y se calculan las relaciones de áreas tales que la tobera esté en todo momento adaptada. La variación entre las tres es prácticamente insignificante. De hecho, una vez representadas como se puede comprobar en la imagen inferior, no se distinguen las tres evoluciones.

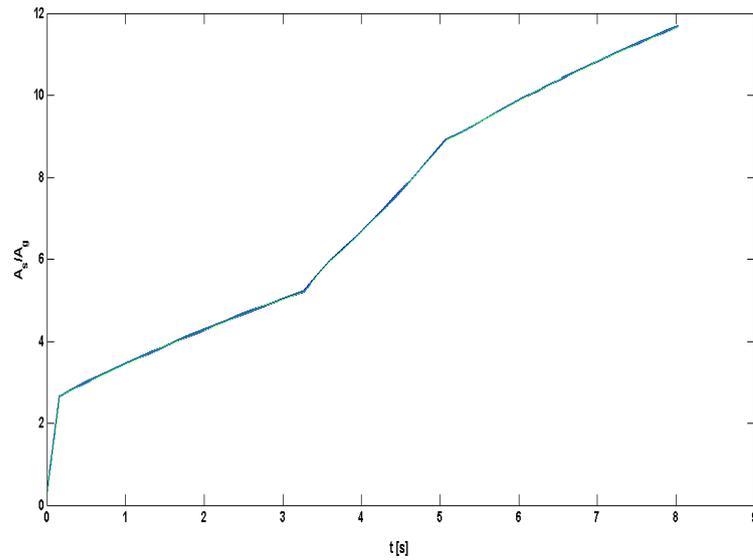


Figura 3.22 Relación de áreas para salida adaptada en tobera parabólica.

Si de nuevo se calcula el empuje, se tiene una distribución a simple vista menor que para la tobera cónica.

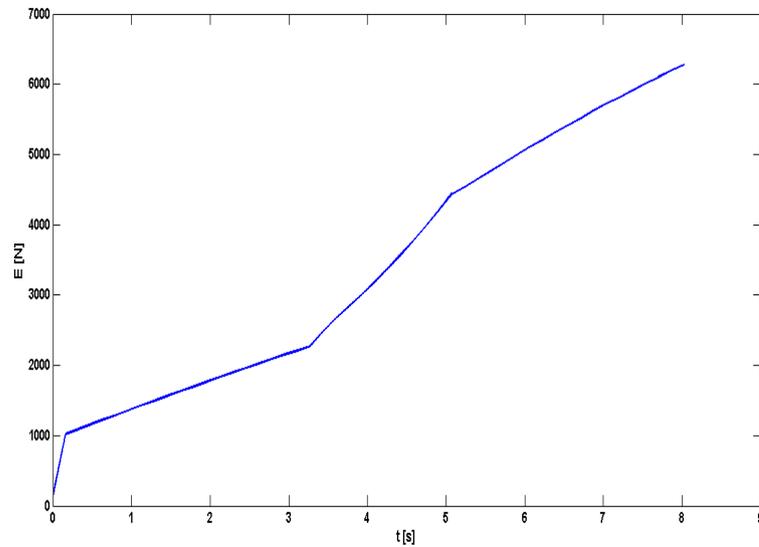


Figura 3.23 Evolución temporal del empuje con tobera adaptada.

Hasta ahora no se han considerado las pérdidas reales asociadas a la geometría. Experimentalmente, se sabe que a mayor es el ángulo de salida, más difiere el resultado teórico del experimental. Durante la descripción de las distintas geometrías se introdujo un parámetro (λ) que mide la eficiencia de la tobera, que es menor que la unidad y por el cual debe multiplicarse el empuje.

De hecho, para visualizar mejor las diferencias, se representan las relaciones de áreas y la evolución del empuje para el caso isentrópico, y las toberas cónicas y parabólicas.

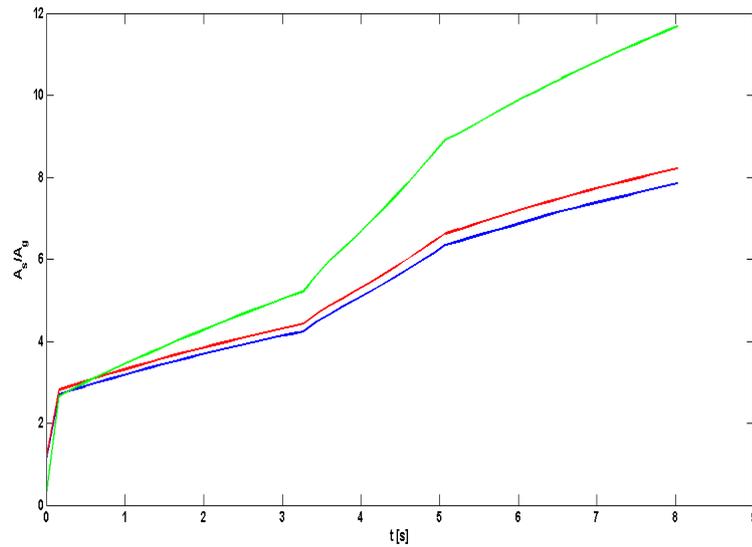


Figura 3.24 Distribución temporal de áreas para tobera adaptada: caso isentrópico (azul), tobera cónica (rojo) y parabólica (verde).

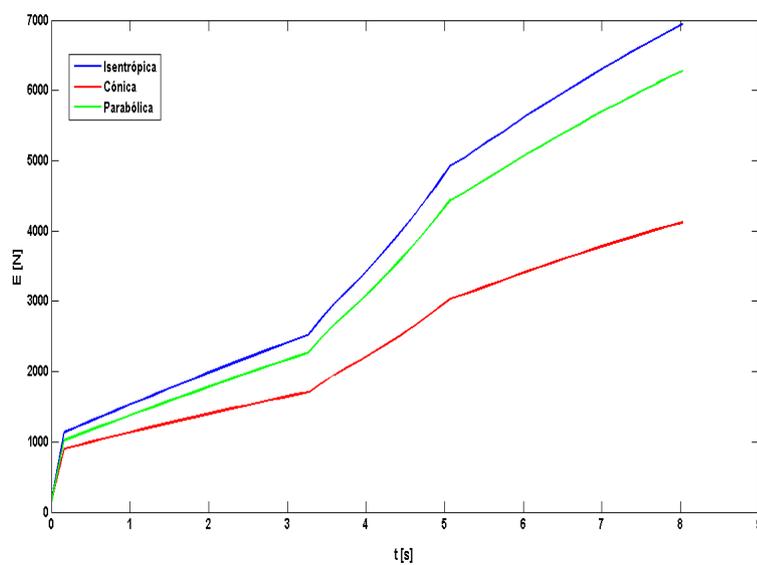


Figura 3.25 Evolución temporal del empuje con tobera adaptada: caso isentrópico (azul), tobera cónica (rojo) y parabólica (verde).

Tal y como se veía reflejado en la Bibliografía consultada, los resultados para la tobera parabólica mejoran los de la tobera cónica, a costa de una relación de áreas mayor pero que sigue resultado asumible. La actuación propulsiva de ambas toberas es, lógicamente, menor que la del caso isentrópico. Los valores de empuje que se muestran en la imagen superior difieren de los que se veían anteriormente y es debido a la introducción de la eficiencia, la cual es significativamente menor en la tobera cónica:

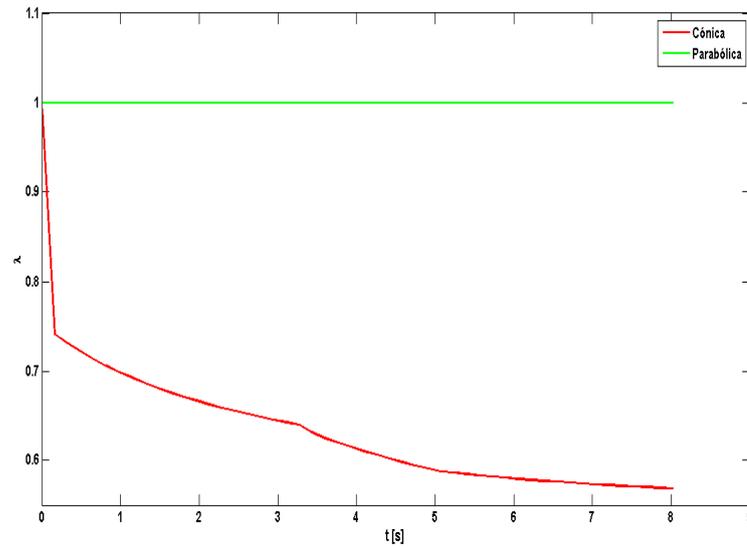


Figura 3.26 Evolución temporal de la eficiencia: tobera cónica (rojo) y parabólica (verde).

Existe otra forma de comparar las distintas toberas de cara a poder elegir una de ellas y es mediante el impulso total, definido anteriormente como $I_t = \int E dt$. Los resultados (que se pueden contemplar en la tabla inferior), vuelven a avalar la elección de la tobera parabólica con un ángulo de la tangente en la garganta de $\theta = 20^\circ$. Como era de esperar, el impulso total es mayor para el caso isentrópico. La geometría de campana mejora la actuación de la cónica en torno a un 40%.

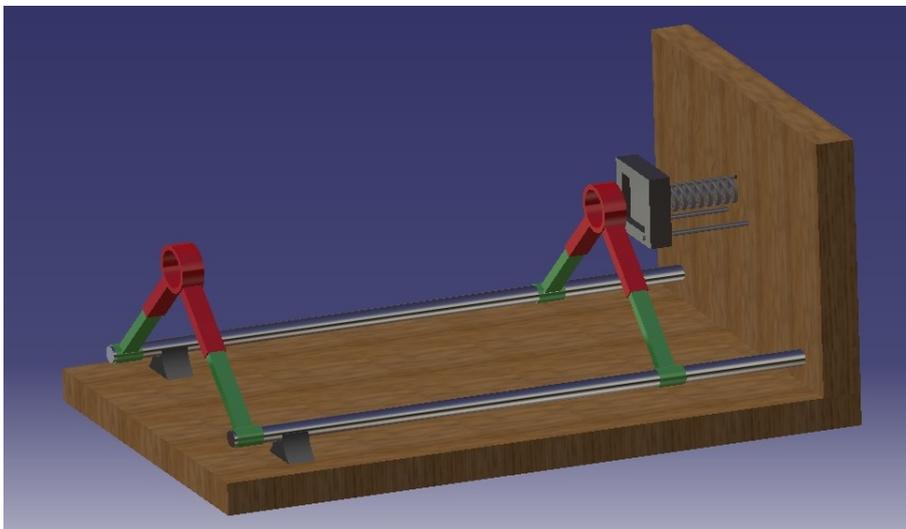
			Parabólica		
	Isentrópica	Cónica	$\theta = 20^\circ$	$\theta = 25^\circ$	$\theta = 30^\circ$
$I_t [N \cdot s]$	187355.8674	118367.4417	168968.791	168968.61038	168968.47281

3.9 Experimentación

Dado que el modelo teórico que se ha empleado para tener un diseño del motor cohete no es totalmente exacto, es necesario recurrir a la experimentación para comprobar que los resultados reales son aceptables. Con este fin, se decide diseñar un banco de ensayo con el que medir el empuje durante el tiempo de combustión.

De acuerdo con la bibliografía, existen diversas tipologías de bancos de ensayo para motores cohete y diversos métodos de análisis. Generalmente, los bancos de ensayo (o "bemco") se distinguen según su disposición vertical u horizontal y si la medición es por compresión o tracción. En este caso se decide emplear una configuración horizontal y a compresión por resultar más simple. Dentro de los métodos de análisis, lo más preciso es el uso de sistemas electrónicos de adquisición de datos. Normalmente, se colocan células de carga de gran precisión y que soportan grandes aceleraciones para medir el empuje del motor. A la vez, es común colocar sondas de presión y temperatura para verificar los cálculos teóricos de presión y temperatura de cámara. Por simplificación y cuestiones de reducción costes, se decide desarrollar un banco horizontal con medida óptica de la fuerza propulsiva, esto es, mediante grabación de las deformaciones de un muelle. Se deja como futuro desarrollo el sistema electrónico junto con los sensores de compresión, temperatura y presión. Además, el banco está planteado para ser lo más versátil posible, pudiendo añadirse estos sistemas intercambiando elementos.

Se plantea un banco de ensayo, cuya geometría es la siguiente:



Se tiene una base de madera, con rigidizadores metálicos. El banco está concebido para poder ensayar motores de diversas geometrías, por lo que es totalmente desmontable e intercambiable. El motor cohete iría montado sobre las anillas circulares, siendo necesario colocar lubricante entre la superficie de la cámara y las piezas. Estas anillas son construidas en material plástico, lo cual facilita su fabricación en impresoras 3D y recubiertas de neopreno o teflón para evitar defectos por la temperatura del motor. La disposición de estas anillas es ajustable según su posición en las dos barras inferiores sobre las que apoyan. Por otra parte, el motor se coloca con su cara cerrada sobre la placa rectangular que se conecta al muelle. Dicha placa, preferiblemente metálica está sostenida por dos varillas que impiden la flexión del muelle por su propio peso. El muelle debe elegirse de forma que se asegure su integridad ante las fuerzas máximas y las aceleraciones experimentadas durante el ensayo. El coeficiente de rigidez K debe elegirse de forma que no se superen las deformaciones máximas del muelle, pero sin llegar a ser tan rígido que no se puedan distinguir las variaciones de longitud.

La versatilidad del banco no es únicamente para probar motores de distintos cohetes, sino también para poder ensayar modelos a escala. El uso de motores que alberguen cargas de unos 20 Kg para cada experimento resultaría excesivamente costoso, por lo que habría que recurrir a modelos de menor tamaño.

4 Diseño estructural

4.1 Cuestiones introductorias

El diseño del cohete debe tener en cuenta las conclusiones a las que se llegó en apartados anteriores y, asegurando la integridad del vehículo, perseguir la optimización de peso. Este objetivo se persigue principalmente en el fuselaje y su estructura interna de soporte, así como la ojiva, mientras la cámara de combustión se encuentra más condicionada por las solicitaciones térmicas y de presión a las que se somete. De esta forma, es el cuerpo principal el que ofrece una mayor libertad para la reducción de peso. Por tanto, serán varios los apartados que se deben atacar desde el diseño:

- Cuerpo principal: fuselaje, ojiva, estructura interna y bahías de carga.
- Ojiva
- Superficies estabilizadoras
- Cámara de combustión y tobera.
- Sistema de recuperación

4.2 Cuerpo principal

Dentro de la literatura, se pueden encontrar multitud de configuraciones para el cuerpo de un cohete de sondeo. Aquí se nombran dos en especial:

- La primera una estructura única, todo el cuerpo (fuselaje y estructura interna) forman una única pieza indivisible, con diversos accesos para las bahías de carga y el motor. Las uniones fijas son más sencillas de realizar, pero se pierde en versatilidad.
- La segunda configuración es de tipo modular, el fuselaje y la estructura interna son piezas distintas, separables. La unión entre ellas no es de forma permanente, como en la configuración anterior, sino mecánica. De esta forma, se consigue una mayor versatilidad, pudiendo cambiar la disposición interna y resulta más fácil realizar reparaciones sin tener que efectuar manipulaciones destructivas.

Se decide apostar por el segundo caso, dado que permite realizar cambios para adaptar el vehículo cambiando la posición de las bahías y el motor, poder usar un mismo fuselaje para distintas estructuras internas y, en caso de rotura de una de las dos piezas, se puede cambiar sin afectar a la otra. La unión entre los elementos debe ser mecánica, para posibilitar la separación, lo cual puede dificultar el diseño.

En cuanto a los materiales, se consideran varios que deben ser ensayados mediante un software de elementos finitos (como ANSYS o Nastran-Patran) y experimentalmente una vez se construyan las piezas. La elección debe ser acorde al peso y al precio, según se verifique que tienen un correcto comportamiento ante las solicitaciones a las que se someten.

Las cargas que se aplican al cuerpo tienen principalmente las siguientes fuentes:

- Cargas inerciales fruto de las aceleraciones durante el vuelo.

- Fuerzas aerodinámicas, principalmente, la resistencia que se transmite desde la ojiva.
- Transmisión de la fuerza propulsiva desde la cámara de combustión.
- Solicitaciones durante el transporte y almacenamiento.

Existen otras muchas, pero las que afectan de mayor forma son las anteriores, siendo más importantes las tres primeras. La fuerza de inercia es algo que experimenta todo el cuerpo por igual, mientras las otras dos cargas se transmiten a través de los contactos mecánicos, que serán los que más sufran. Será necesario, además del análisis principal, estudiar estas regiones mediante la teoría de la plasticidad y mecánica de la fractura. Respecto a los materiales a estudiar, se consideran una aleación de aluminio y un material compuesto de fibra de carbono reforzada (CFRP - *Carbon Fiber Reinforced Polymer*), cuyas propiedades se muestran a continuación.

	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν	G_{12}	ρ [Kg/m ³]
Aluminio	135	135	0.3	-	2500
CFRP	135	10	0.3	5	1600

Los valores de E_1 y E_2 designan el módulo de Young en las dos direcciones del plano. El aluminio tiene el mismo número para ambas por ser un material isótropo, mientras el compuesto es menos resistente en una dirección que en la otra. Únicamente aparecen las variables referidas al plano por tratarse de una lámina. Todos los valores se han obtenido a partir de los proporcionados por el Departamento de Estructuras de la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla durante la realización de un trabajo anterior perteneciente a la asignatura de Estructuras Aeronáuticas.

La estructura interna se compone completamente de fibra de carbono, con seis larguerillos que recorren el cuerpo desde la ojiva hasta el final del fuselaje y una serie de discos y anillos que sirven como unión mecánica entre elementos y para separar las diferentes secciones. Se disponen, además, dos piezas utilizadas para dar soporte y afianzar el motor. Todas las uniones que se realizan se intenta que sean mecánicas para hacer del modelo lo más versátil y adaptable posible. Es necesario, por tanto, hacer un análisis más exhaustivo de cuál es la mejor forma de unir piezas que son de material compuesto.

En primer lugar, los anillos permiten cerrar la estructura, además de rigidizarla, y sirven para enganchar el fuselaje mediante un sencillo mecanismo de rosca. Cada uno de los discos dispone de una apertura de forma que unas pequeñas aletas del fuselaje se introducen y, al girar, quedan fijadas ambas piezas. Para asegurar el ensamblaje y evitar un movimiento entre las piezas, se introducen cierres de muelles en los anillos que se encuentran en los extremos, zonas donde hay accesibilidad manual.

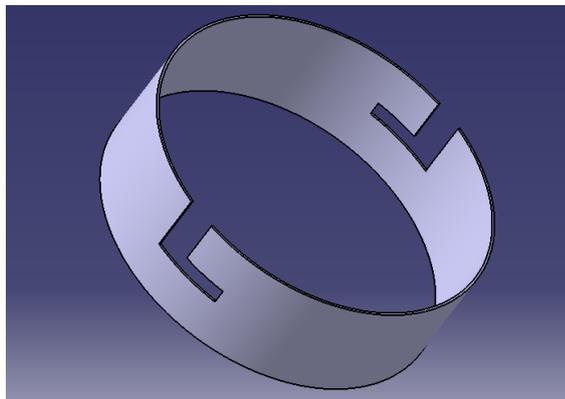


Figura 4.1 Imagen en perspectiva de los anillos de sujeción.

Por otra parte, los discos sirven para separar las bahías de carga, la zona del paracaídas y la del motor, todas con accesibilidad manual mientras el fuselaje está retirado. Para posibilitar la unión con los largueros,

constan de las correspondientes inserciones.

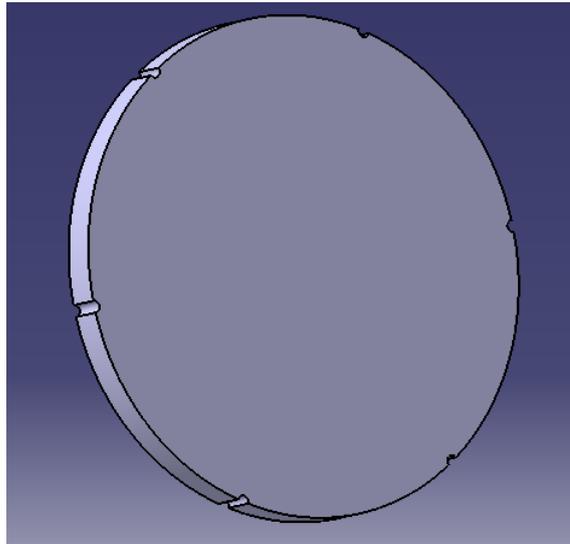


Figura 4.2 Imagen en perspectiva de los discos de separación.

La estructura dispone también de dos elementos de unión con el motor, uno roscado y otro atornillado, de forma que se garantiza el ensamblaje seguro del motor. Aún así, es necesario para futuras ampliaciones un análisis mecánico para conocer cómo se comporta ante el peso del motor y la fuerza propulsiva.

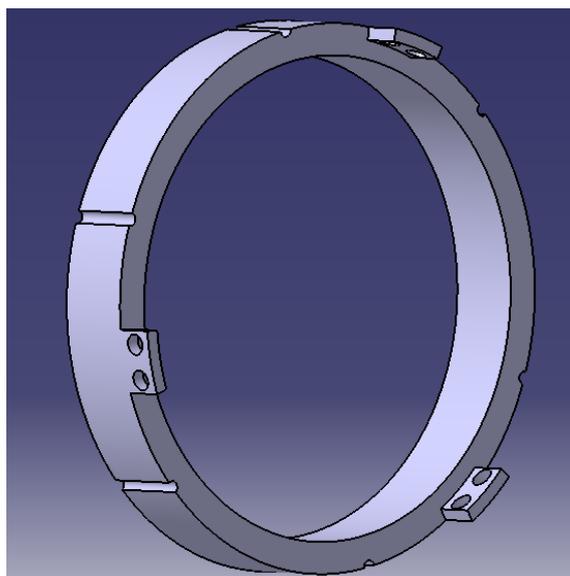


Figura 4.3 Imagen en perspectiva de la pieza de unión atornillada con el motor.

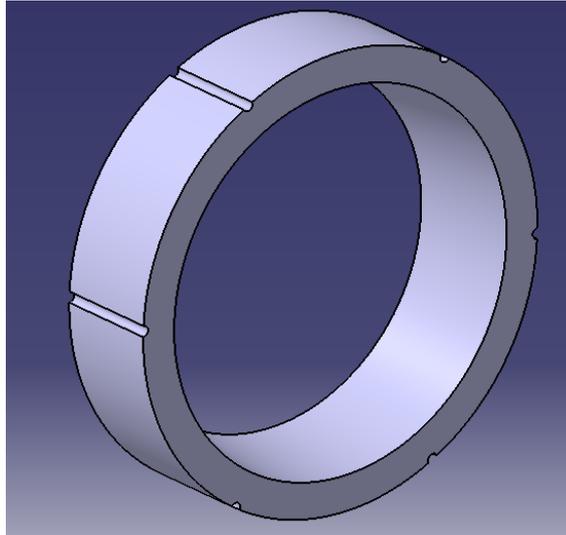


Figura 4.4 Imagen en perspectiva de la pieza de unión roscada con el motor.

Una vez dispuesta cada pieza en su lugar, la estructura queda tal y como se puede apreciar en la imagen inferior. Se pueden observar en rojo los larguerillos y los anillos de unión con el fuselaje y, en azul, los discos separadores. Las uniones con el motor se encuentran ocultas tras los discos más cercanos a la base.

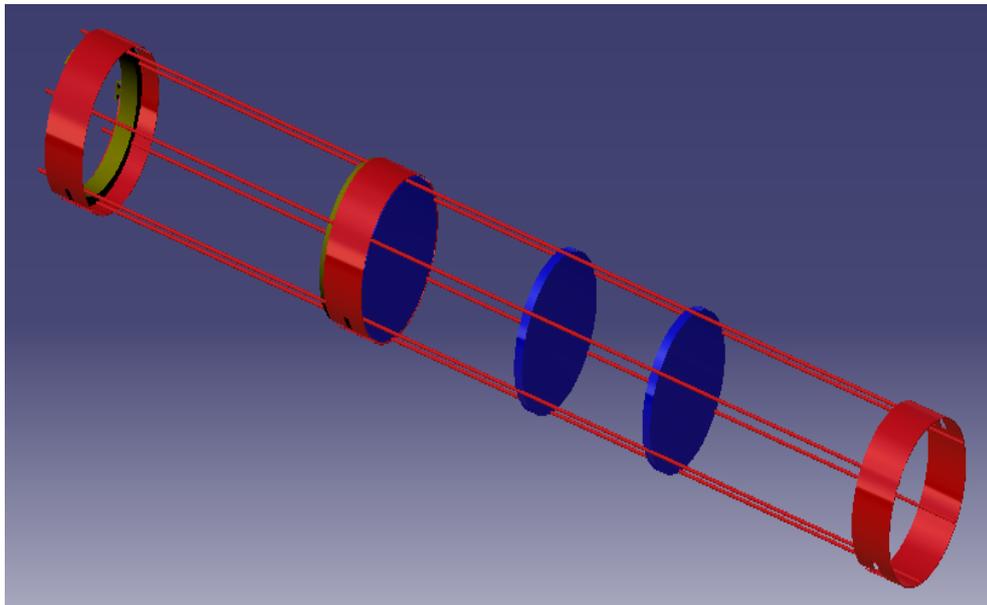


Figura 4.5 Imagen en perspectiva de la estructura interna.

Y las dimensiones principales se recogen en la figura siguiente, donde se observa como se distribuyen según se dediquen las bahías al motor, el sistema de recuperación (paracaídas), la electrónica y telemetría y la carga de pago.

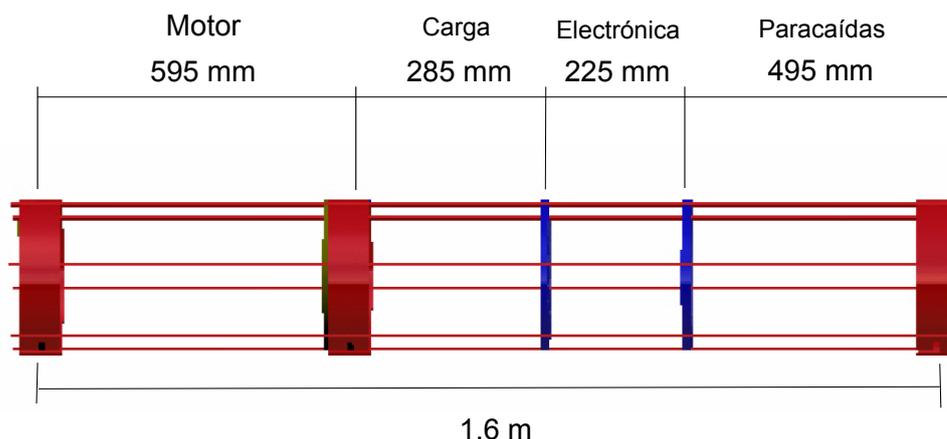


Figura 4.6 Dimensiones principales de la estructura interna.

En cuanto al fuselaje, se toma la fibra de vidrio como material y se define con el radio externo estudiado en la sección de Aerodinámica y un espesor de unos 2 mm.

Por último, la ojiva se diseña para ser construída en una impresora 3D, con un material plástico cuya densidad es del orden de 1050 kg/m^3 . El diseño es el escogido anteriormente de ojiva cónica con punta roma (esfera del 15% del radio del fuselaje) y unión suave con el cuerpo:

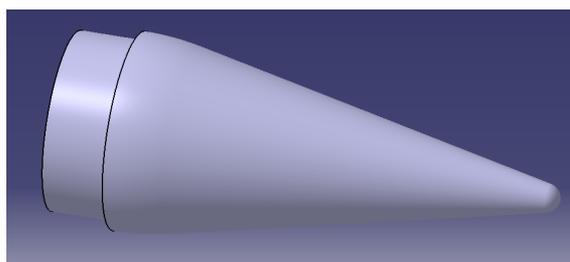


Figura 4.7 Imagen en perspectiva de la ojiva.

El peso de cada elemento estructural viene recogido en la siguiente tabla:

	Cantidad	Masa [kg/ud]	Masa total [kg]
Larguerillos	6	0.028	0.1680
Discos de separación	3	0.778	2.3340
Anillos de unión	3	0.095	0.2850
Unión roscada al motor	1	0.928	0.928
Unión atornillada al motor	1	0.369	0.369
Fuselaje	1	4.119	4.119
Ojiva	1	1.267	1.267
		Total	9.47

4.3 Cámara de combustión y tobera

Para el diseño de la carcasa del motor y el material a elegir hay que considerar las temperaturas de combustión y las presiones que se alcanzan en su interior. La sollicitación térmica también determina el aislante a elegir. En primer lugar, se considera como material de fabricación el acero AISI 310 s, cuyas propiedades mecánicas y térmicas se muestran en la tabla inferior. Se trata de una aleación refractaria de alta resistencia, usada

en condiciones de elevadas temperaturas. Todos los valores están obtenidos a partir de la norma AISI que clasifica aceros y aleaciones no ferrosas.

E [GPa]	σ_f [MPa]	σ_{max} [MPa]	k [W/m K]	T_{max} [°C]	ρ [g/cm ³]
200	280	580	13.9	1400-1455	8.03

De acuerdo a la distribución de presión interna y suponiendo un régimen cuasiestacionario, se toma la presión última como aquella con la que se estima el espesor mínimo de la carcasa:

$$\sigma = \frac{PR}{t} \Rightarrow t_{min} = \frac{1.6PR}{\sigma_{max}} = 2.249 \text{ mm} \quad (4.1)$$

Si en vez de la tensión de fractura se considera la tensión de fluencia del material, el espesor mínimo sería de 4.659 mm. Desde un punto de vista conservador, se decide escoger un valor intermedio que resulte más seguro: $t_{min} = 3.454 \text{ mm}$.

En cuanto a los requisitos térmicos, la temperatura de fusión de la aleación considerada se encuentra por debajo de la temperatura máxima de combustión, lo que obliga aún más a proteger la carcasa mediante un aislante. La elección del material protector debe hacerse en función a sus propiedades térmicas realizando un estudio de la transmisión de calor a través de las distintas capas de material.

Bajo la suposición de evolución cuasiestacionaria de la temperatura y que la relación entre el espesor y el radio es tal que se puede suponer localmente que se está ante una placa plana, las ecuaciones que modelan el problema térmico se resumen en las siguientes:

$$\text{Ecuación diferencial: } \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{Flujo total de calor: } q'' = \frac{T_{ext} - T_{cam}}{\frac{1}{h_{cam}} + \frac{e_1}{k_1} + \frac{e_2}{k_2} + \frac{1}{h_{ext}}} \quad (4.3)$$

La primera ecuación permite establecer una evolución lineal en cada una de las capas. Las condiciones de contorno que deben comprobarse son:

- Continuidad de temperaturas en el contacto entre aislante y carcasa:

$$T_{ais}(x = e_1) = T_{acero}(x = e_1) \quad (4.4)$$

- Flujo de calor por conducción igual en la interfase entre aislante y acero:

$$-k_{ais} \frac{dT_{ais}}{dx} \Big|_{x=e_1} = -k_{acero} \frac{dT_{acero}}{dx} \Big|_{x=e_1} \quad (4.5)$$

- Flujo de calor por convección igual a flujo de calor por conducción en las interfases entre la cámara y el aislante y la carcasa y el aire exterior:

$$h_{int}(T_{comb} - T_{ais}(0)) = -k_{ais} \frac{dT_{ais}}{dx} \Big|_{x=0} \quad (4.6)$$

$$h_{ext}(T_{acero}(x = e_1 + e_2) - T_{ext}) = -k_{acero} \frac{dT_{acero}}{dx} \Big|_{x=e_1+e_2} \quad (4.7)$$

Como aislante se escoge un tejido conformado por un compuesto refractario a partir de óxido de aluminio, óxido de sílice y cerámicos (*RS-3000* en el catálogo de *ZIRCAR Refractory Composites*). Las tres propiedades que es necesario conocer para el diseño son la densidad ($\rho = 0.14 \text{ g/cm}^3$), la temperatura máxima de operación ($T_{max} = 2000 \text{ °C}$) y la conductividad del material ($k = 0.17 \text{ W/mK}$).

De esta forma, la distribución de temperaturas a través de la carcasa y el aislante son función del espesor del

aislante y de la temperatura externa. Imponiendo que la temperatura externa es de 300 K y la de la cámara 1920 K, se tiene la siguiente temperatura en la superficie interna de la carcasa metálica en función del espesor de aislante:

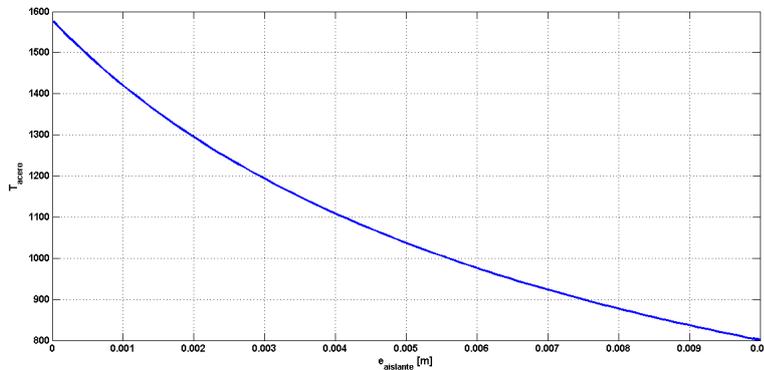


Figura 4.8 Temperatura en la superficie interna de la carcasa según espesor de aislante.

Dado el informe sobre el acero refractario del fabricante, la temperatura máxima de operación se encuentra en torno a $1400^{\circ}C$ y la temperatura de servicio se establece en unos $1200^{\circ}C$. Hay que tener en cuenta que la temperatura de servicio se fija para trabajos continuos, mientras que, en el caso de la cámara, se somete a temperaturas muy elevadas pero durante tiempos muy cortos, lo cual permite flexibilizar algo más el límite. Por otra parte, el análisis anterior del efecto del espesor del aislante es para el instante de mayor temperatura de cámara, que es justamente al final de la combustión. Siendo lo más conservador posible, si se tiene un espesor de aislante de 4 mm, la temperatura en el acero se encuentra alrededor de los $1100-1200^{\circ}C$, lo cual es admisible.

Fijando el espesor, se tiene una evolución térmica distinta en función de la temperatura de la cámara, la cual crece con el tiempo:

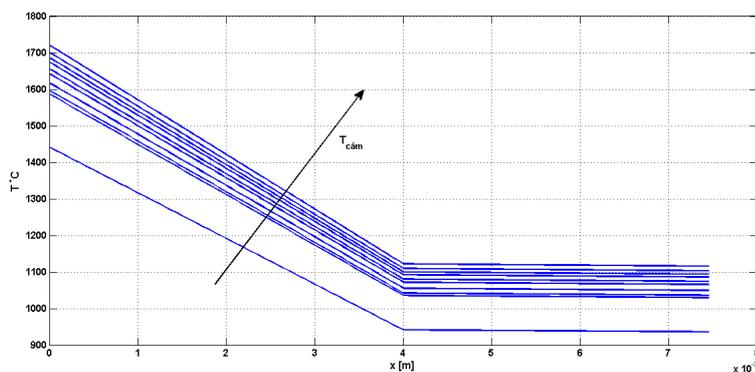


Figura 4.9 Temperatura a través del aislante y la carcasa de acero.

Con los materiales y las dimensiones principales de la cámara definidos, se procede a diseñar la geometría. La configuración interna viene determinada por la forma y tamaño del grano de propelente, incluyéndose un elemento de fijación consistente en un anillo que se introduce por apriete. Por otra parte, la cara delantera de la carcasa es extraíble mediante rosca para facilitar el mantenimiento y la introducción del propelente. La cara posterior está roscada para unirse a las piezas de la estructura del cohete y se disponen también tres piezas con agujeros roscados para la unión atornillada. Por último, la sección frontal posee cuatro piezas para unirse a la tobera mediante tornillos. El peso de la cámara de combustión es de 10.325 Kg.

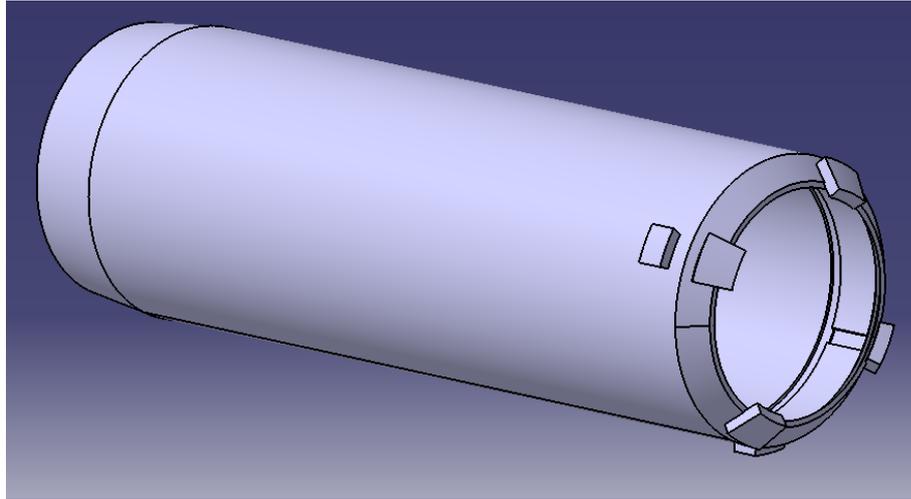


Figura 4.10 Imagen en perspectiva de la carcasa.

El otro elemento crucial que queda del motor es la ojiva. Anteriormente, en el estudio propulsivo, se definió la evolución temporal de la relación de áreas entre la sección de salida y la garganta, pero no la longitud de la ojiva. Existe un método de estimación de dicha magnitud en función de los ángulos de divergencia en la salida y de la recta tangente en la unión con la garganta. Aunque en el pasado capítulo se consideró toda la sección divergente como una parábola, hay que considerar una pequeña región que no lo es.

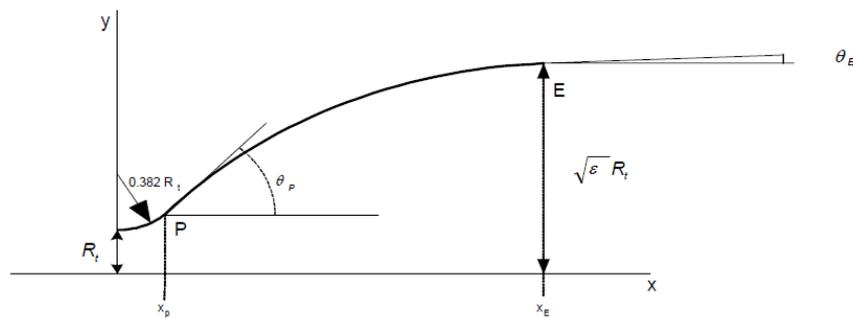


Figura 4.11 Contorno de la tobera en forma de campana.

El primer punto a determinar es (x_p, y_p) , para los que existen unas definiciones dadas:

$$x_p = 0.382 R_g \operatorname{sen}(\theta_p) = 1.6331 \text{ mm} \quad (4.8)$$

$$y_p = 1.382 R_g \cos(\theta_p) - 0.382 R_g \operatorname{sen}(\theta_p) = 12.7880 \text{ mm} \quad (4.9)$$

$$(4.10)$$

Por otra parte, la parte restante de la tobera se aproxima adecuadamente por una parábola de la forma $y = ax^2 + b * x + c$. Es necesario conocer las variables a , b y c imponiendo la continuidad en (x_p, y_p) del contorno y la derivada y la pendiente en la salida:

$$y'_p = 2ax_p + b = \tan(\theta_p) \quad (4.11)$$

$$y'_s = 2ax_s + b = \tan(\theta_s) \quad (4.12)$$

Resolviendo las ecuaciones se tiene que la longitud de la tobera debe ser variable al igual que ocurría con la relación de áreas. Para cada instante de tiempo, se tiene la siguiente longitud de la sección divergente:

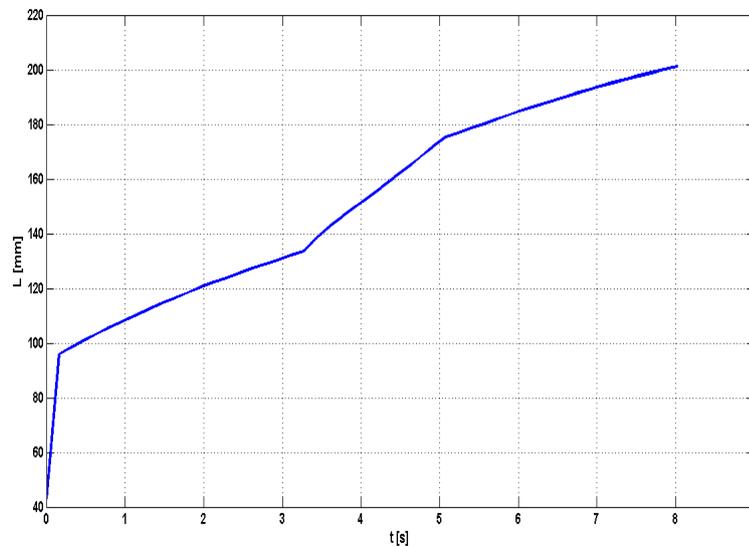


Figura 4.12 Evolución de la longitud de la sección divergente durante la combustión.

Para su representación en CATIA se toma una longitud intermedia de 100 mm, correspondiente a 4 segundos tras comenzar la combustión. En ese instante, a nivel del mar, la relación de áreas es de, aproximadamente, 6.55, por lo que el diámetro de salida es de unos 70 mm. Respecto a los materiales, el análisis mediante la Teoría de Gases estima que se alcanzan temperaturas que rondan los 1000 °C, con lo que es necesario asegurar que se garantiza la integridad estructural de la tobera. Por tanto, se utilizan materiales como el acero refractario (igual que la cámara de combustión) o, si se dispone de un mayor presupuesto, titanio. También es posible emplear aleaciones de aluminio (que resultan más económicas) con recubrimientos de materiales refractarios o cerámicos.

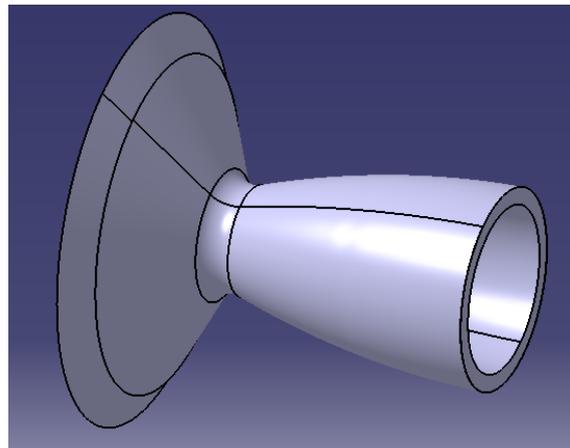


Figura 4.13 Imagen en perspectiva de la tobera.

Para tener una relación de áreas y, consecuentemente, una longitud variables es necesario diseñar un sistema que controle esto de forma que la tobera esté adaptada, bien según las condiciones ambientales y de cámara (lo cual sería ideal) o bien según una evolución programada. Pese a que no se va a entrar a diseñar este sistema, se piensa que existe la posibilidad de disponer de unos servos que deslicen unas placas sobre otras de forma que se modifique la geometría de la tobera. También existe la opción de que esos servos simplemente abran la tobera manteniendo la longitud, pero eso no permitiría tener un ángulo θ de la pendiente en la

garganta constante.

El peso del motor es de 10.919 kg, siendo 10.2 kg los correspondientes a la cámara de combustión en sí.

4.4 Superficies estabilizadoras

De cara al diseño de las superficies estabilizadoras (aletas) es preciso hacer un estudio de las posiciones del centro de gravedad y del centro de presiones, lo cual determina el carácter estable o inestable del cohete, tal y como ya se comentó previamente.

La aplicación de cada uno de los materiales descritos a cada una de las piezas del vehículo permite estimar de una forma sencilla la situación del centro de gravedad del cohete. El cálculo se realiza incorporando una carga de pago de 5 Kg y un equipo de telemetría de 4 Kg. Además, el grano de propelente es el considerado en el estudio propulsivo, es decir, 19.4 Kg de la composición decidida.

$$X_{cg} = \frac{\sum W_i \cdot X_{cgi}}{\sum W_i} = 1573.3mm \quad (4.13)$$

El centro de presiones se encuentra, aproximadamente, medio metro por delante, lo cual hace que el vehículo sea inestable y obliga al diseño de aletas que retrasen el centro de presiones.

Se van a emplear dos métodos simplificados para estimar el centro de presiones del cuerpo con aletas. Se deja como desarrollo futuro su simulación en un software computacional como FLUENT.

El primero se basa en discretizar por partes el cohete, hallar el centro de presiones de cada uno de ellos y estimar el global según la siguiente ecuación:

$$X_{cp}A = \sum X_{cp_i}A_i \quad (4.14)$$

Donde X_{cp_i} es el centro de presiones del elemento "i" y A_i es el área proyectada sobre el plano longitudinal.

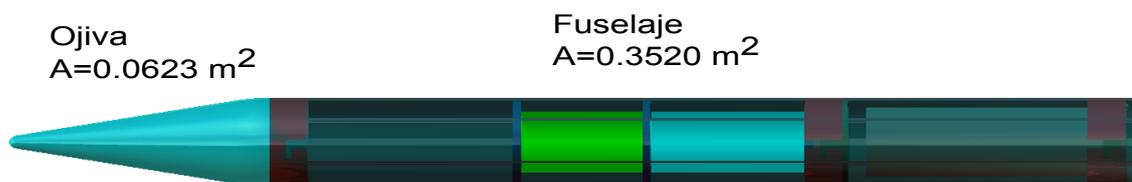


Figura 4.14 Áreas de las proyecciones longitudinales.

El otro método es el comúnmente proporcionado por los fabricantes de cohetes amateur y se basa en calcular el centro de presiones conociendo el coeficiente adimensional de la fuerza normal en función del ángulo de ataque ($C_{N\alpha}$) de cada una de las partes del cohete. Toma la suposición de que el vehículo se

encuentra en un régimen de vuelo tal que $M_\infty \ll 1$, de forma que el coeficiente sólo depende de la geometría; el ángulo de ataque es cero o muy pequeño, el cohete es un sólido rígido y el vehículo es esbelto. Con estas hipótesis, estima el C_{N_α} y el centro de presiones de la ojiva y de las aletas:

- **Ojiva.** Al no tratarse de una ojiva convencional, se debe considerar una ojiva cónica equivalente de forma que no acabe en punta roma y no tenga una sección de transición tangencial con el fuselaje. Con esta geometría virtual, el centro de presiones se encuentra en $x_{cp} = \frac{2}{3}L$, siendo L la longitud equivalente. Por otra parte, se comprueba experimentalmente que para todas las configuraciones se cumple que $C_{N_\alpha} \simeq 2$.
- **Aletas.** Es necesario calcular el coeficiente C_{N_α} debido a la interferencia entre las aletas y el cuerpo principal. Esto pasa por conocer el de las aletas, definido de la siguiente forma:

$$C_{N_\alpha}|_{aletas} = \frac{4n\left(\frac{b}{D}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2l}{c_r + c_t}\right)^2}} \quad (4.15)$$

Donde "n" es el número de aletas, "b" es la envergadura, "D" el diámetro del cuerpo, "l" la longitud de la aleta desde la mitad de la cuerda en la raíz hasta la mitad de la cuerda en la punta, " c_r " es la cuerda en la raíz y c_t la cuerda en la punta.

Tras esto, se calcula un parámetro $k_{fb} = 1 + \frac{R}{b+R}$, de forma que el coeficiente de interferencia es $C_{N_\alpha}|_{fb} k_{fb} C_{N_\alpha}|_{aletas}$.

El último paso consiste en estimar el centro de presiones de la aleta, dado analíticamente por la siguiente expresión:

$$x_{cp_{aletas}} = (b \tan(\psi)) \frac{c_r + 2c_t}{3(c_r + c_t)} + \frac{1}{6} \left(c_r + c_t - \frac{c_r c_t}{c_r + c_t} \right) \quad (4.16)$$

Para tener el diseño de las aletas se buscan aquellas que, con la mínima superficie posible (para repercutir lo menos posible en el peso del vehículo), hagan que el margen estático (definido como $SM = (X_{cp} - X_{cg})/L$) sea igual o mayor que el 10%, asegurando así la estabilidad.

Se prueban distintas geometrías de aletas, considerando la instalación de cuatro en concreto que sobresalen una distancia x_0 respecto del final del fuselaje.

x_0	c_r	E	ψ	b	SM - Método 1	SM - Método 2
0	0.4	0.55	30°	0.3	-2.38	1.14
0	0.4	0.7	30°	0.3	-1.0147	-0.4227
0	0.4	0.7	30°	0.35	2.358	3.9211
0	0.4	0.7	30°	0.4	4.1147	5.6567
0.05	0.4	0.7	30°	0.4	5.5339	7.9734
0.1	0.4	0.7	30°	0.4	6.9531	10.2901
0.1	0.4	0.85	40°	0.35	8.2840	11.1244
0.1	0.4	0.85	40°	0.4	10.3623	13.2925
0.1	0.4	0.85	45°	0.4	10.6007	14.7462

Tras estas iteraciones se decide elegir los parámetros del último caso, quedando la geometría tal y como se ven la siguiente imagen. Además, se considera el uso de madera de balsa por su alta resistencia y su bajo peso con perfiles de 3 mm de espesor. Los bordes de ataque se encuentran rebajados para reducir aún más la resistencia aerodinámica ante la corriente, aunque la contribución de las aletas sea ya de por sí (dado su pequeño espesor) pequeña al valor total.

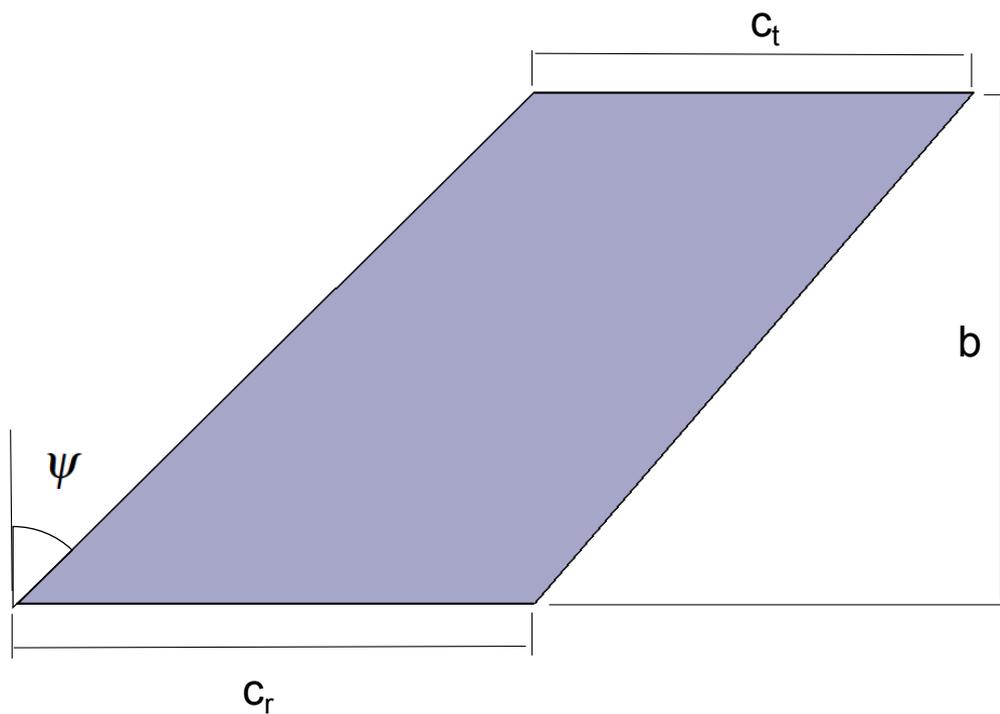


Figura 4.15 Aleta trapezoidal.

A la hora de la fabricación mediante madera de balsa, ha de tenerse en cuenta la posición relativa de las vetas del material respecto a la dirección del aire. Esto se debe a que la madera es mucho más resistente en una dirección que en otra, por lo que ha de asegurarse que las vetas forman, aproximadamente, 60° respecto a la corriente.

5 Desarrollo del vuelo

Con el objetivo de establecer una predicción de las capacidades operativas del cohete, se realiza Se pretende establecer cuáles son la altura máxima, la velocidad máxima, las aceleraciones que experimenta, el número de Mach de vuelo y otros parámetros.

Como hipótesis iniciales se consideran las siguientes:

- Se emplea un modelo estándar de atmósfera ISA sin viento.
- La actuación del motor, respecto a la evolución de presión y temperatura en la cámara, es la analizada a nivel del mar. Esta suposición no es nada cierta, es necesario conocer cómo actúa a cada altura, pues la presión exterior condiciona cómo se comporta el proceso de combustión.
- La tobera tiene una evolución para estar adaptada a nivel del mar.
- La dependencia del coeficiente de resistencia con respecto al número de Mach de vuelo es la estudiada también a altura cero.

La ecuación que describe el vuelo del cohete es la siguiente:

$$m(t) \cdot a(t) = E(t) - D(t) - W(t) = E(t) - \frac{1}{2} \rho V(t)^2 S C_D - m(t)g \quad (5.1)$$

Discretizando en el tiempo, se tiene en cada instante t_i :

$$a(t_i) = \frac{1}{m(t_i)} \left(E(t_i) - \frac{1}{2} \rho(h(t_i)) V(t_i)^2 S C_D(M_i) - m(t_i)g \right) \quad (5.2)$$

$$m(t_i) = m(t_{i-1}) - G(t_{i-1}) \Delta_t \quad (5.3)$$

$$v(t_i) = v(t_{i-1}) + a(t_i) \Delta_t \quad (5.4)$$

$$M(t_i) = v(t_i) / a(h(t_i)) \quad (5.5)$$

$$h(t_i) = h(t_{i-1}) + v(t_i) \Delta_t + \frac{1}{2} a(t_i) \Delta_t^2 \quad (5.6)$$

Implementando este algoritmo en un código en MATLAB, se tiene una evolución temporal de la altura desde el nivel del mar ($h=0$ m) hasta un techo de vuelo que se encuentra a 9029 m. Se cumple, de esta forma, el objetivo buscado de volar en un amplio rango dentro de la troposfera.

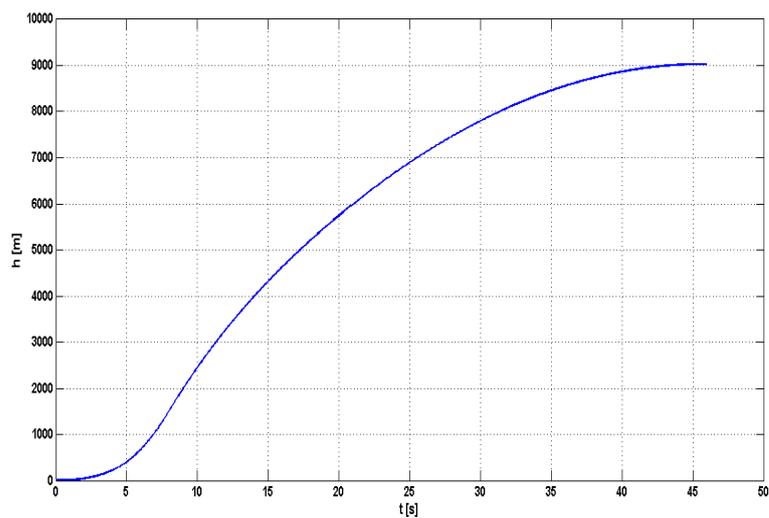


Figura 5.1 Altura frente al tiempo.

Respecto a la velocidad y el número de Mach, se tienen las siguientes evoluciones temporales, con máximos de Mach 1.6 y 500 m/s. Ambos parámetros crecen rápidamente mientras el motor está encendido y decrecen a partir de ese punto. Ha de comentarse que el motor proporcionará empuje algunos segundos más, aunque no exista combustión ya que aún hay gases a alta presión dentro de la cámara. Esto debe ser objeto de un estudio más avanzado.

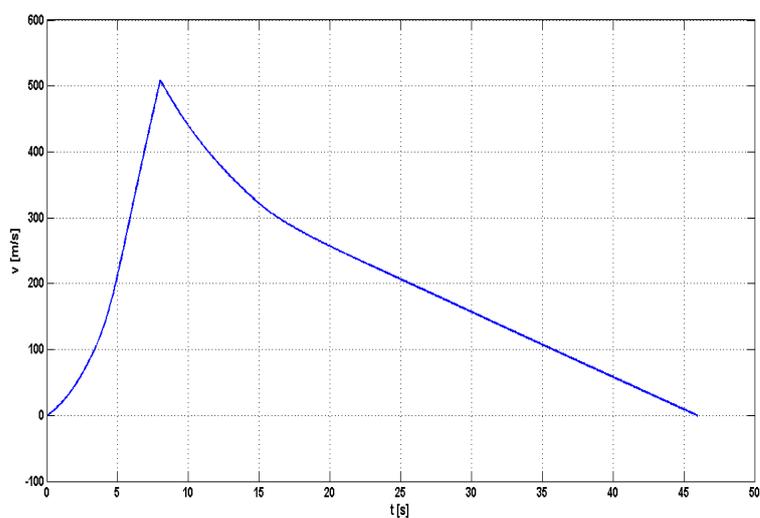


Figura 5.2 Velocidad frente al tiempo.

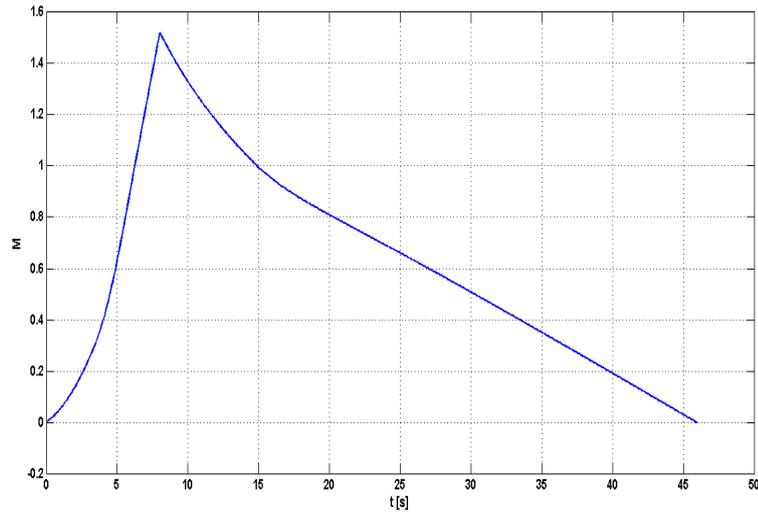


Figura 5.3 Número de Mach de vuelo frente al tiempo.

Un aspecto importante que es preciso analizar es la aceleración que experimenta el vehículo ya que son transmitidas a las posibles cargas de pago que haya en su interior. La forma más común de medirla es en unidades de gravedad (en g's), consistente en dividir la aceleración por la aceleración de la gravedad. Al igual que en los dos casos anteriores, la aceleración crece durante la combustión hasta llegar a 10 g's y se mantiene en valores negativos dado la desaceleración que se produce posteriormente.

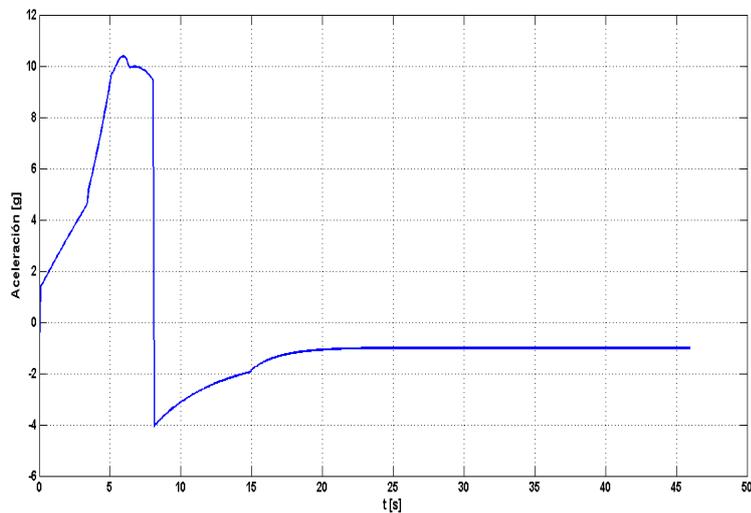


Figura 5.4 Aceleraciones medidas en g's frente al tiempo.

Por último, si se comparan los valores de empuje que se obtenían a nivel del mar con la tobera adaptada y aquellos con las relaciones de áreas para adaptar la tobera a nivel del mar pero a distinta altura, se observa que la diferencia es significativa, habiendo una pérdida de fuerza propulsiva que se hace más importante a mayores alturas.

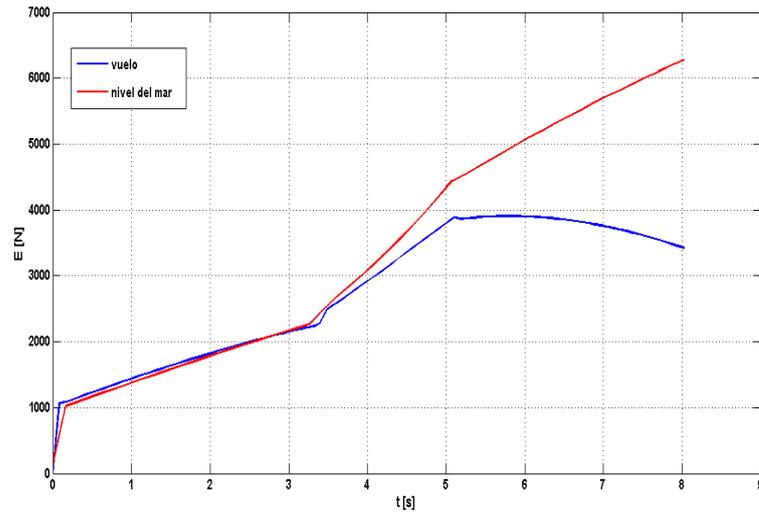


Figura 5.5 Comparación empujes a nivel del mar y durante el vuelo.

Todos estos cálculos se han realizado para una carga de pago de 5 Kg, que es el máximo establecido para el diseño. En función de la masa que se tome, se tiene un alcance variable, menor a mayor carga.

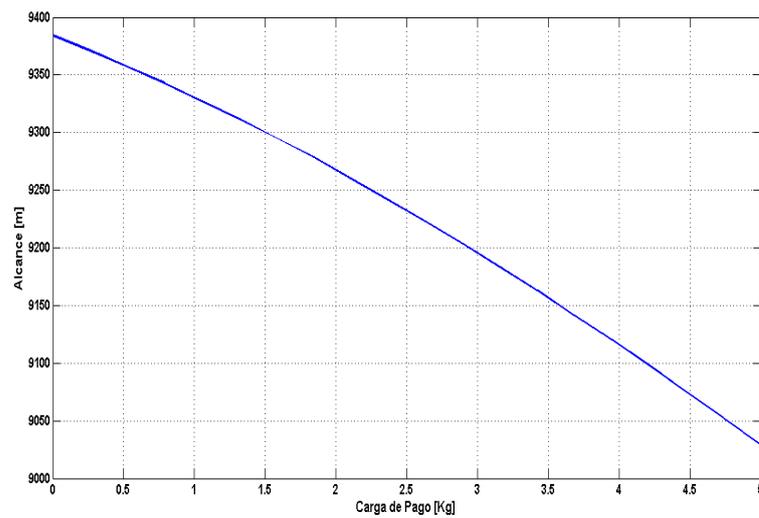


Figura 5.6 Alcance en función de la carga de pago.

6 Conclusiones y líneas de desarrollo futuras

Tras todo el trabajo desarrollado, se pueden realizar una serie de conclusiones finales y de posibles estudios, modificaciones y proyectos que pudieran surgir a partir de este.

El procedimiento de diseño seguido se ha basado en estudiar aerodinámicamente un conjunto de geometrías para el cuerpo, teniendo la longitud del mismo fijada a priori pensando en que dicha dimensión podría bastar para cumplir los objetivos perseguidos. El análisis teórico y computacional de un conjunto de ojivas permitió realizar un diseño preliminar del cuerpo del cohete.

Durante el proceso se comprueba las grandes deficiencias que presentan los métodos teóricos fundamentados en la Teoría Potencial y la mejor aproximación que se consigue con programas informáticos. Si bien con las Teorías de Cuerpos Esbeltos se tienen resultados que se distancian de aquellos que se recopilan en ensayos experimentales, son métodos rápidos una vez que se programan y que sí permiten extraer conclusiones para comparar geometrías, el efecto de los parámetros de diseño o poder ver cuándo la teoría falla, observando las distribuciones de presión o los resultados ilógicos de resistencia. De esta forma, aunque la teoría no lo contabilice, se puede deducir que los gradientes adversos que se producen provocan el desprendimiento de la capa límite o que un dato de resistencia negativa es fruto de un fallo en la teoría o de dicha separación de la corriente.

Tanto la información recopilada en la bibliografía como los datos experimentales obtenidos de un proyecto anterior verifican la diferencia entre los resultados de la Teoría Potencial y la realidad, siendo la resistencia subestimada en régimen subsónico y sobreestimada cuando $M_\infty > 1$.

La utilización de un software de CFD, como es FLUENT, permite disponer de resultados más precisos a costa de un coste computacional y temporal elevado. Además, exige que el mallado y el modelo se ajusten a las necesidades del problema a abordar, pudiendo dar una solución errónea si no es así.

De las distintas geometrías probadas, queda escogida la ojiva cónica con punta roma como la óptima. La longitud de la misma es fruto de un compromiso entre minimizar la resistencia (que se reduce al aumentar la longitud) y no reducir tanto el volumen interno del cuerpo para los sistemas y la carga de pago que deben albergarse.

Permanece como ampliación futura la mejora del mallado y la determinación de los parámetros de los modelos turbulentos de FLUENT a través de un estudio exhaustivo. Con ello se espera mejorar la precisión de los resultados frente a los experimentales.

Con la geometría definida se procede a diseñar un sistema de propulsión que se ajuste al diseño preliminar y a los requisitos operacionales. Para ello se hace un estudio del *estado del arte* de los motores cohete, contemplando las diversas opciones y los procedimientos de análisis y diseño.

Si bien se concluye que los motores de propelente líquido permiten disponer de unas características superiores, dado que se puede controlar el vector de empuje y se alcanzan mayores niveles de fuerza, su diseño es bastante más complejo y costoso, requiriendo de mayor tiempo. Por tanto, se decide apostar por el propelente sólido, que presenta un coste y una complejidad menores y mayor disponibilidad de sus componentes. A su vez, debido a la falta de tiempo, se escoge un propelente basado en nitrato potásico para su estudio ya que se trata de compuestos ampliamente usados y estudiados.

A través de las distintas herramientas ya explicadas se consigue analizar el comportamiento de la cámara de combustión. Tras esto, es posible especificar las dimensiones de la tobera mediante la Teoría de Gases, estableciendo las relaciones de áreas necesarias en cada instante de tiempo para tener la tobera adaptada, con

lo cual se maximiza el empuje. Se han probado las dos geometrías más comunes: tobera cónica y tobera en forma de campana. Aproximando esta última por una tobera cuyo diámetro tiene una distribución parabólica, se comprueba que los resultados son, tal y como se esperaban, mejores. Obviamente dado que se incluyen el efecto de la distribución de áreas y la fricción, los niveles de empuje se mantienen por debajo de aquellos que resultan del estudio isentrópico, pero superiores a la otra geometría. El diseño de la tobera se ha realizado para una altura de referencia a nivel del mar, algo que debería modificarse debido a que el comportamiento del motor completo depende de la altura.

Por tanto, suponiendo que el propelente se agota completamente y teniendo un factor de fricción de diseño, se escoge la tobera en forma de campana, cuyas dimensiones se determinan a partir de la relación de áreas, la pendiente de la tangente en la zona de la garganta y una serie de relaciones desarrolladas en la sección de diseño.

En conclusión, el estudio químico y la Teoría de Gases permiten diseñar el sistema de propulsión cohete y predecir su comportamiento. Dicho esto, la Balística Interna es una disciplina que depende fuertemente de la experimentación. Pese a que dos granos de propelente del mismo compuesto y fabricados mediante el mismo procedimiento tienden a parecerse en su funcionamiento, es muy difícil conocer qué ocurre en el interior de la cámara sin recurrir a ensayos. El banco de ensayo horizontal que se ha diseñado o su variante con una célula de carga, permitirían analizar mejor la actuación del motor o de un modelo a escala. También se propone el diseño de un sistema de propulsión alimentado con propelente líquido, lo cual mejoraría significativamente las prestaciones del vehículo. La configuración modular del cohete y sus dimensiones permiten la introducción de los equipos necesarios para ello, aunque se perdiese capacidad para albergar carga de pago. Aún así sería un desarrollo interesante pues el vehículo podría convertirse en una plataforma para el ensayo de nuevos sistemas de propulsión, mucho más avanzados y complejos que los de propulsión sólida.

Por tanto, se ha desarrollado un método en este proyecto que permite estimar la actuación de un sistema propulsivo cohete de propelente sólido, basándose en análisis químicos, datos experimentales y cálculos teóricos. Con ello se obtiene un equipo que se espera pueda cumplir con los objetivos buscados, que produce unos niveles de empuje bastante elevados y que se encuentra optimizado a nivel del mar.

Bajo estas premisas basadas en los cálculos desarrollados a lo largo de todo el proyecto, se realiza un diseño de los principales componentes del vehículo: la estructura interna, el fuselaje, la ojiva, el sistema propulsivo y las aletas. Para establecer las dimensiones de estas últimas, se recurre a dos métodos bastante usados que estiman la posición del centro de presiones del vehículo completo. Con ello, se tiene un vehículo modular, reconfigurable, aerodinámicamente eficiente, con un sistema propulsivo adaptado al nivel del mar pero que puede ser rediseñado para adaptarse a cualquiera altura y con capacidad para albergar cargas de pago de unos 5 Kg.

Con el cohete diseñado se decide realizar una simulación teórica de cómo evoluciona el vuelo, lo cual permite confirmar que se cumple con los objetivos buscados al disponer de un vehículo que se ha tratado de optimizar aerodinámicamente y desde el punto de vista propulsivo, que opera dentro de la Troposfera, cuyo motor emplea un propelente sólido, que la estabilidad está asegurada gracias a las superficies estabilizadoras y que consta de bahías para albergar la electrónica, la carga de pago y el sistema de recuperación.

Por tanto y en conclusión, permanecen como posibles líneas de desarrollo las siguientes:

- Mejora del mallado y elección más precisa de los parámetros de los modelos de simulación en FLUENT.
- Simulación en FLUENT para un rango más amplio de M_∞ .
- Añadir las aletas al modelo de FLUENT para disponer del efecto de estas superficies sobre la resistencia y el centro de presiones.
- Modificación del fuselaje teniendo una distribución de áreas variable para reducir la resistencia e introducción de acabados superficiales que experimentalmente demuestran mejorar el comportamiento ante la corriente.
- Simulación a distintas alturas para conocer cómo afecta este parámetro al coeficiente de resistencia.
- Construcción del modelo o de uno a escala para ensayo en túnel de viento. Estos ensayos tienen la limitación del rango de velocidades con el que se experimenta, pero permiten validar resultados computacionales.

- Fabricación del propelente en forma de probetas y ensayo en cámaras de combustión a escala para disponer de datos que permitan estimar los coeficientes experimentales que determinan las velocidades de combustión.
- Fabricación del motor o de uno equivalente a escala para su ensayo en el banco de ensayo diseñado.
- Diseño del sistema de modificación de la relación de áreas para mantener la tobera adaptada.
- Elección y diseño de los sistemas electrónicos que permitan recopilar datos de vuelo y seguir desde la estación de tierra la misión. En principio es necesario disponer de equipos como un altímetro, GPS, sistemas de toma de datos de presión y temperatura, acelerómetros, etc.
- Diseño del sistema de recuperación. Además del paracaídas, es preciso establecer cómo se produce la eyección del mismo.
- Sustitución del motor cohete de propelente sólido por uno de propelente líquido.

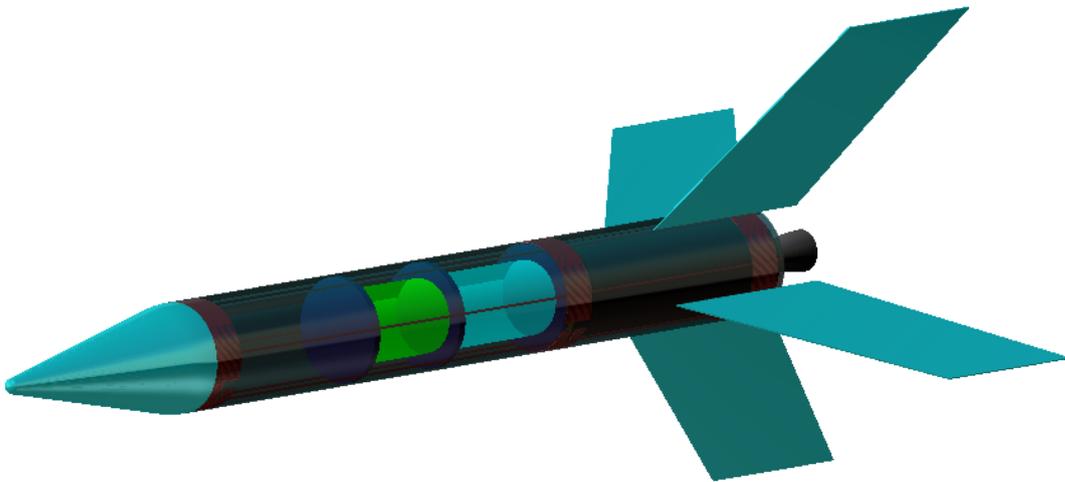
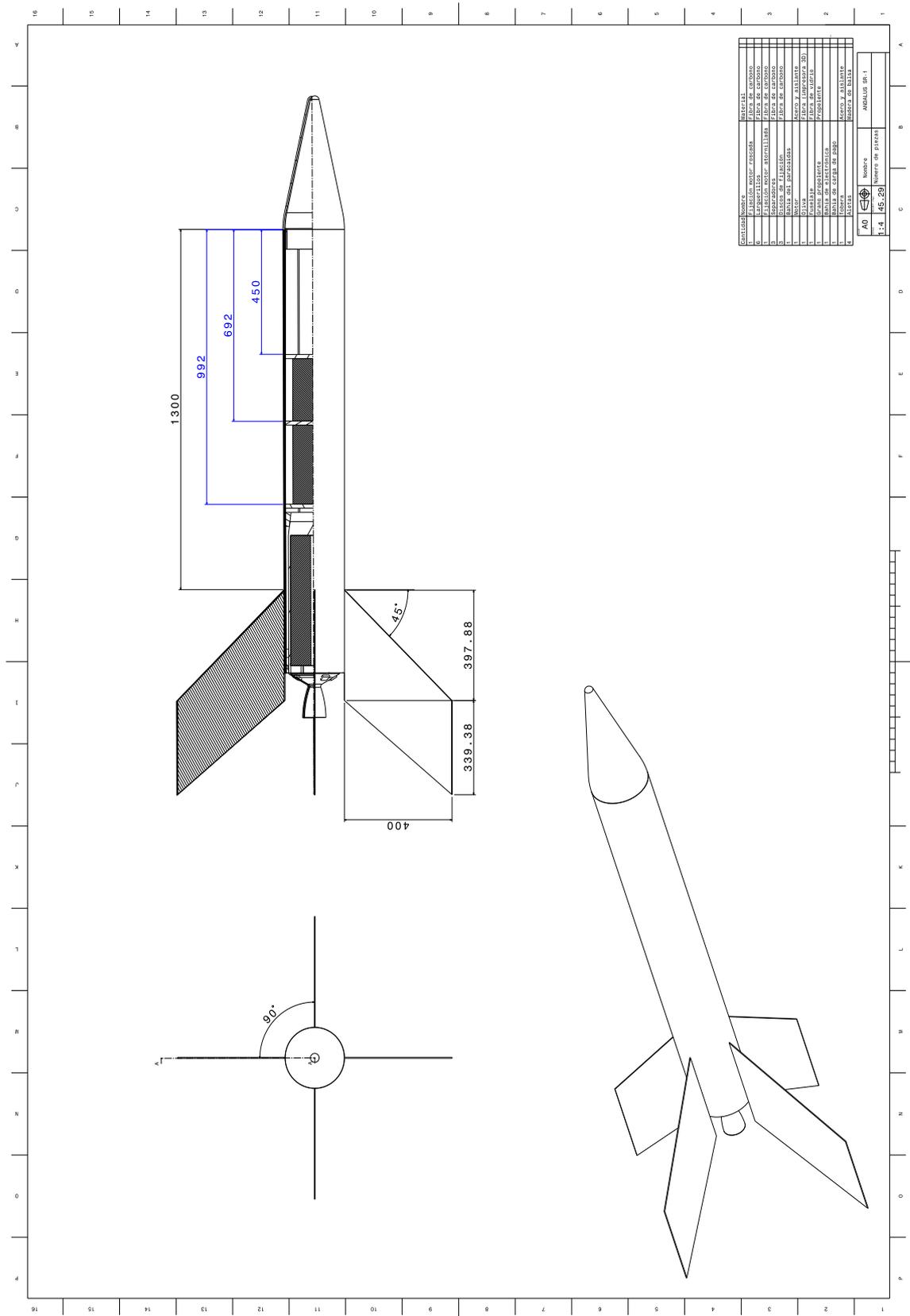


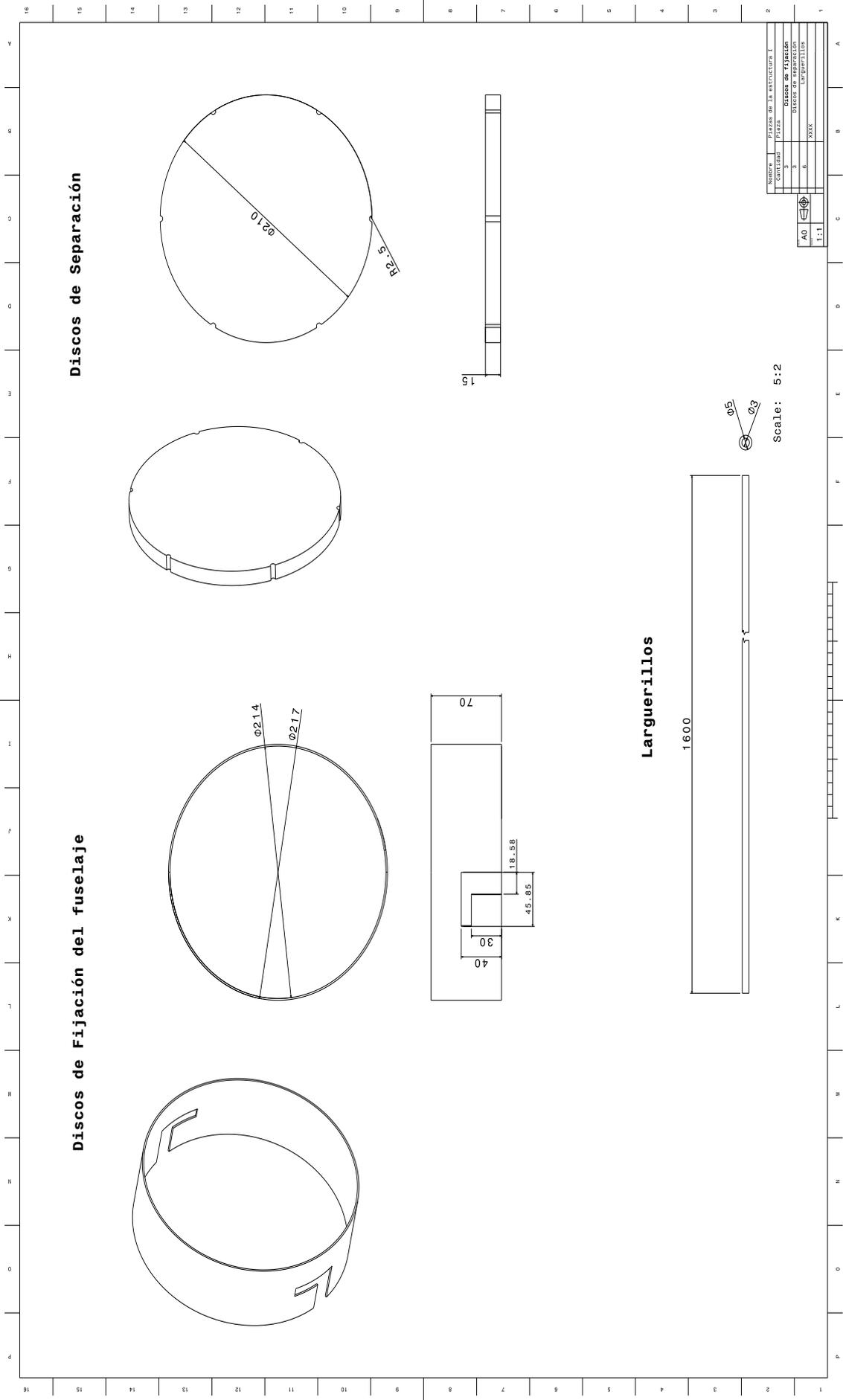
Figura 6.1 Imagen del diseño final.

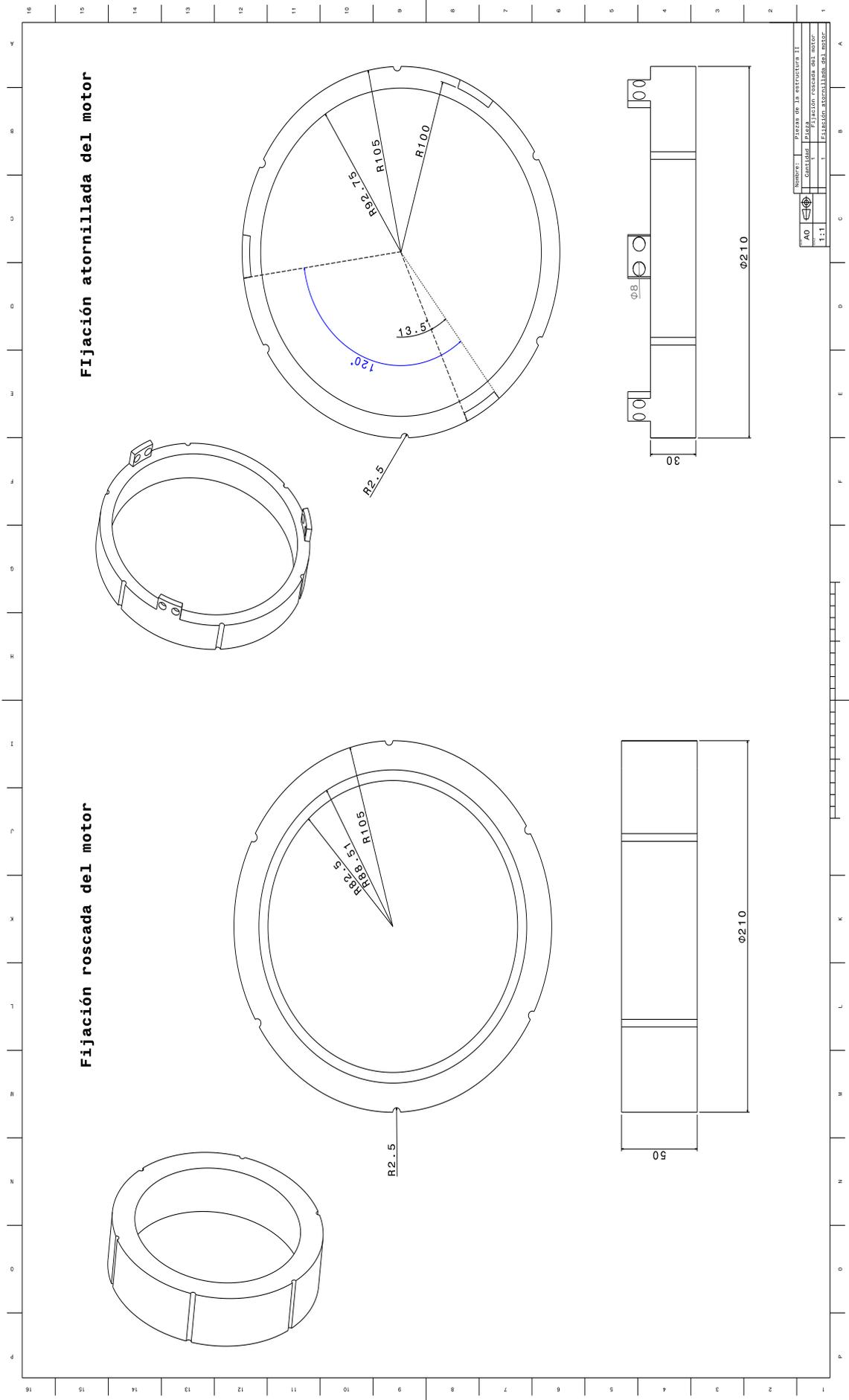
7 Anexos

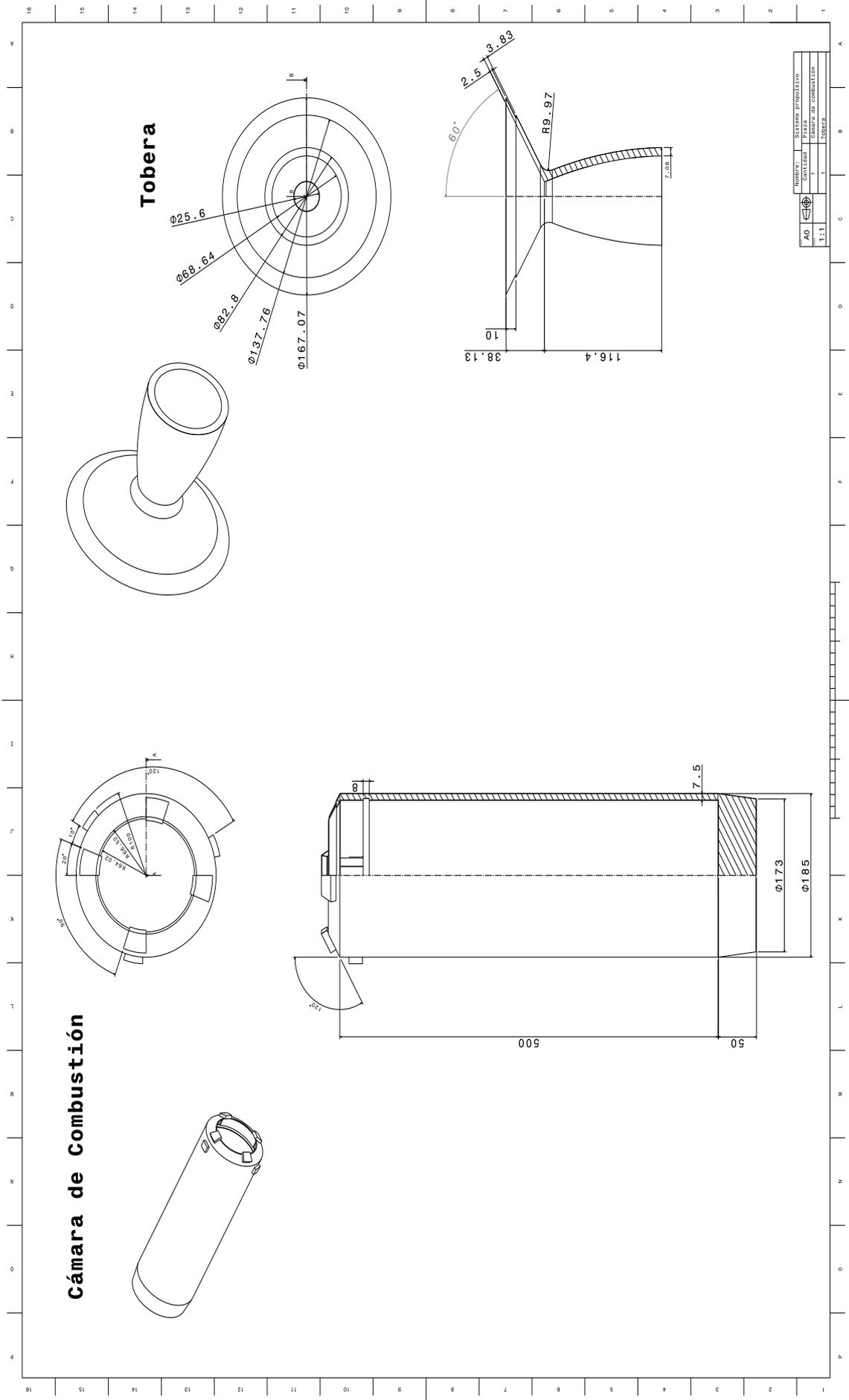
Se adjuntan a continuación las representaciones gráficas de los elementos diseñados durante el desarrollo del proyecto. Para comenzar se muestran los del vehículo y sus componentes y, posteriormente, se procede con los del banco de ensayo horizontal cuya imagen aparecía en el apartado de experimentación del estudio propulsivo.

7.1 Anexo I: Planos del cohete

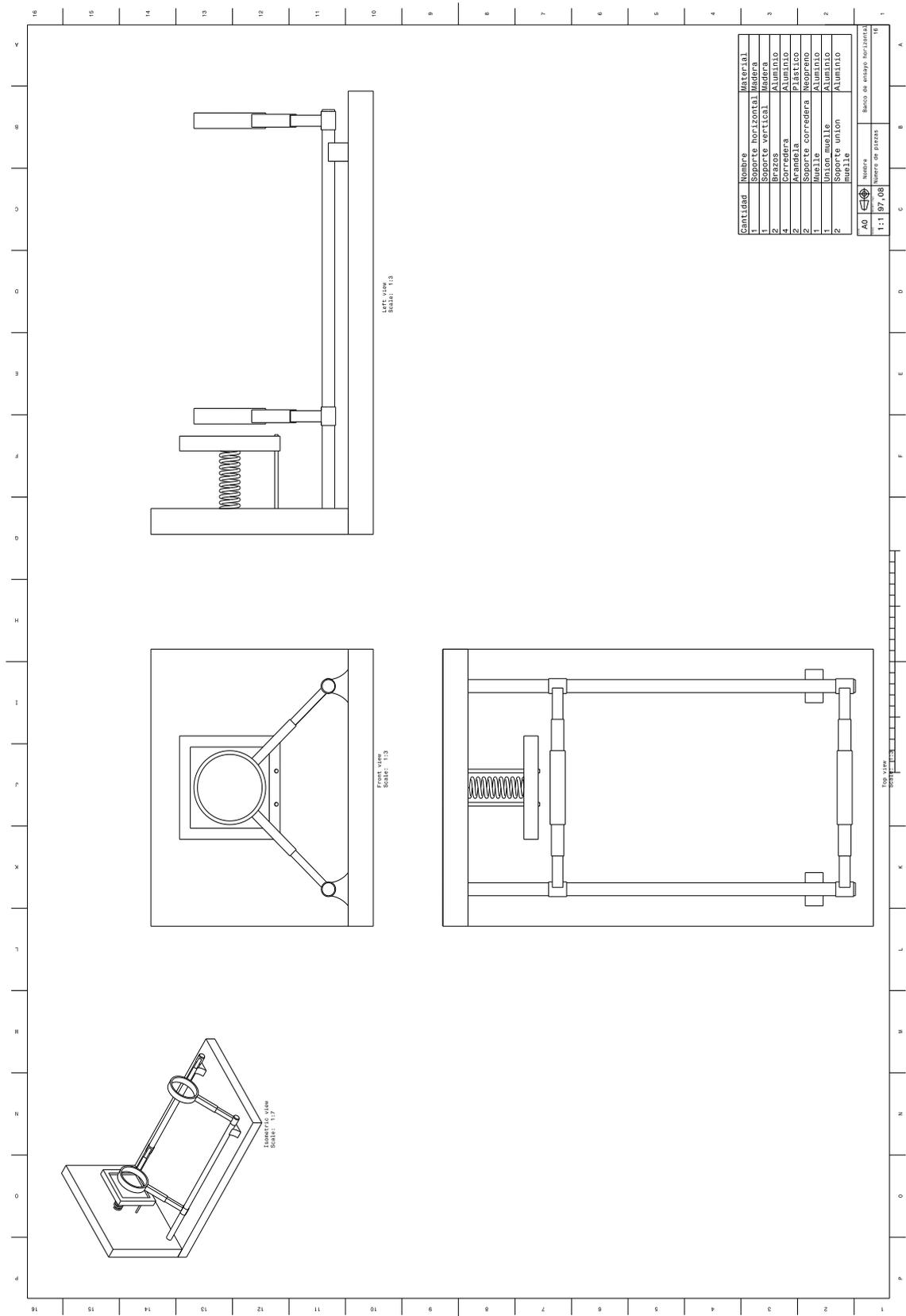


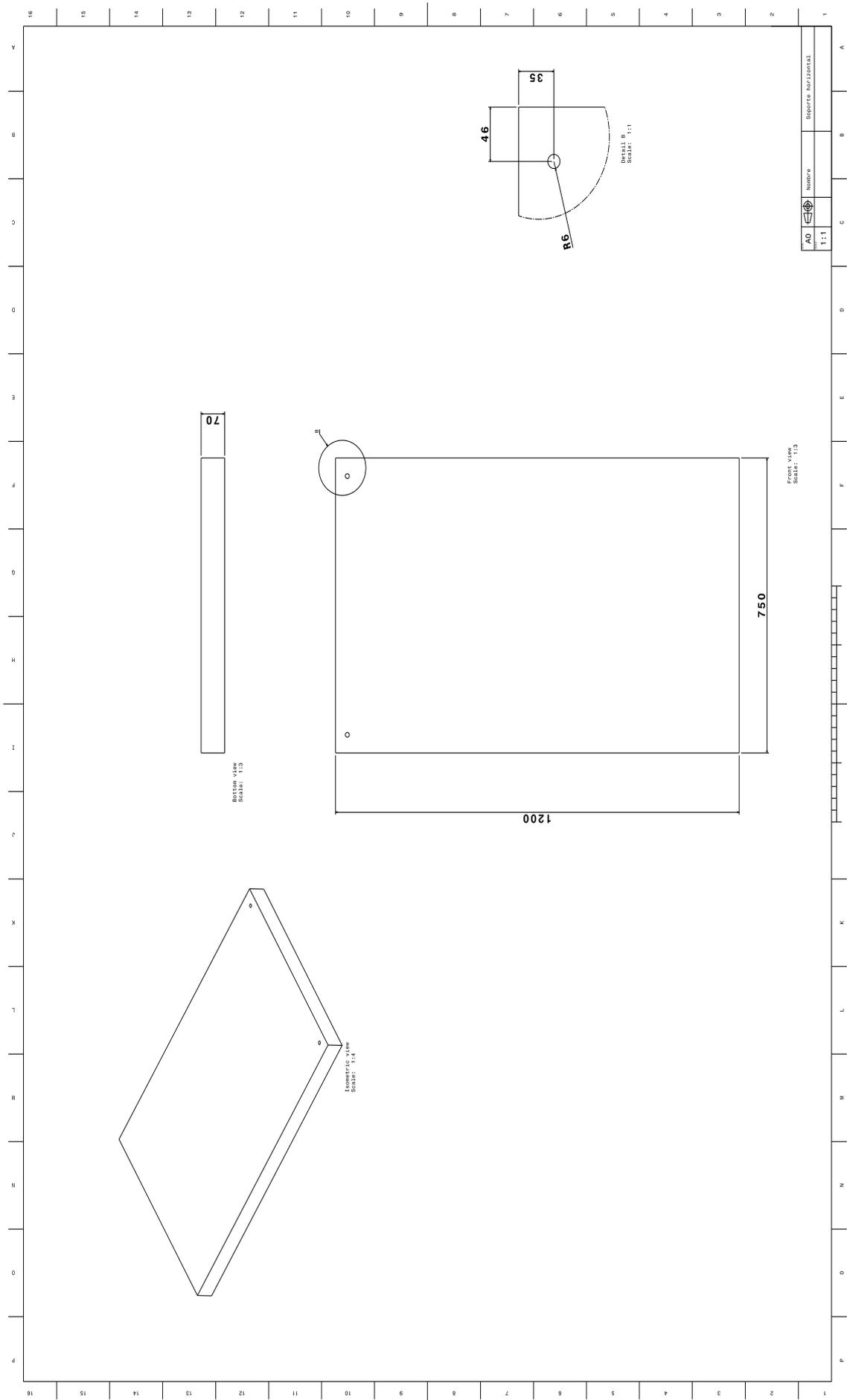


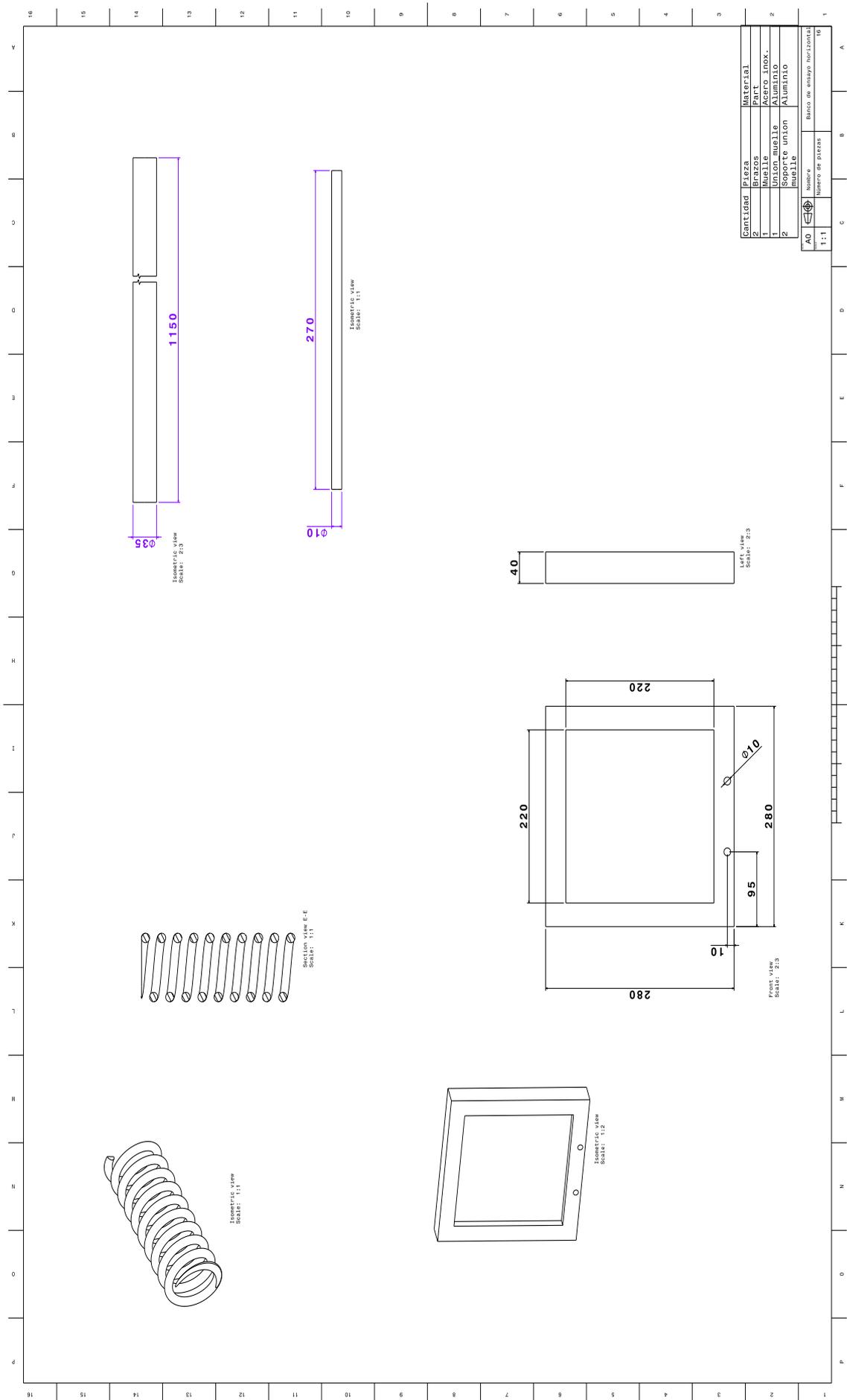




7.2 Anexo II: Planos del banco de ensayo







Bibliografía

- [1] John David Anderson, *Fundamentals of aerodynamics*, 4th ed., McGraw-Hill, Boston, 2007.
- [2] Ansys Inc., USA, *Ansys fluent user's guide*, 2011.
- [3] Iñaki Ascacíbar, *Descubrir los cohetes*, 1st ed., Centro de Documentación y Publicaciones de Aena, Madrid, 2006.
- [4] Francisco Javier Mateo Bonilla, *Análisis numérico de alas en régimen supersónico*, (2010).
- [5] Weidong Cai, Piyush Thakre, and Vigor Yang, *A model of ap-htpb composite propellant combustion in rocket motor environments.*, (2008).
- [6] Yeunwoo Cho and Angelica Aessopos, *Similarity transformation methods in the analysis of the two dimensional steady compressible laminar boundary layer.*, (2004).
- [7] Jaime Beneyto Gomez de Barreda, *Aerodinámica ii*, 2012.
- [8] José Manuel Gordillo Arias de Saavedra and Guillaume Riboux Acher, *Introducción a la aerodinámica potencial*, 1st ed., Paraninfo, Sevilla, 2012.
- [9] Dorris M Ehret, *Accuracy of approximate methods for predicting pressures on pointed nonlifting bodies of revolution in supersonic flow*, (1952).
- [10] Tamir Hasan and Jay Phillips, *Potassium nitrate based rocket propulsion.*, (2008).
- [11] Mohsen Jahanmiri, *Aircraft drag reduction: An overwie*, (2011).
- [12] Gordon E Jensen and David W Netzer, *Tactical missile propulsion*, 1st ed., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Virginia, 1996.
- [13] Robert T Jones, *Theory of wing-body drag at supersonic speeds*, (2012).
- [14] N Kafoussias, A Karabis, and M Xenos, *Numerical study of two dimensional laminar boundary layer compressible flow with pressure gradient and heat and mass transfer*, (1998).
- [15] J F Kirkbride, *Solid propellant rocket motor*, (1959).
- [16] Jr Lionel L. Levy and Kenneth K Yoshikawa, *A numerical method for calculating the wave drag of a configuration from the second derivative of the area distribution of a series of equivalent bodies of revolution*, (1959).
- [17] Jim Longuski, *How to think like a rocket scientist*, 1st ed., Copernicus Books, New York, 2007.
- [18] Andrés Pajares Martínez, *Diseño y construcción de un cuerpo esbelto en túnel de viento. estudios experimentales y numéricos.*, (2012).
- [19] Richard Allan Nakka, *Solid propellant rocket motor design and testing.*, (1984).

- [20] NASA Explorer Institute (NEI), *Main adventures in rocket science*, 1st ed., National Aeronautics and Space Administration (NASA), 2008.
- [21] Antonio Barrero Ripoll, J Meseguer Ruiz, A Sanz Andrés, and Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, *Aerodinámica de altas velocidades*, 2nd ed., Garceta Grupo Editorial, Madrid, 2010.
- [22] Antonio Barrero Ripoll and Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, *Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos*, McGraw-Hill, Sevilla, 2005.
- [23] Lucy Rogers, *It is only rocket science*, 1st ed., Springer, New York, 2008.
- [24] Alvin Seiff, Carl A Sandahl, Dean R Chapman, E.W. Perkins, and F E Gowen, *Aerodynamic characteristics of bodies at supersonic speeds. a collection of three papers.*, (1951).
- [25] Richard H Sforzini and Jesse E Murph, *Solid-propellant rocket motor internal ballistics performance variation analysis.*, (1969).
- [26] F Stancato, J G Catalani Racca, F Castaldo, G Carbonar, L A Souza, and M G Ballarotti, *Solid propellant rocket motor design and testing.*, (2000).
- [27] George P Sutton and Oscar Biblarz, *Rocket propulsion elements*, 7th ed., Wiley Interscience, New York, etc., 2000.
- [28] Travis S Taylor, *Introduction to rocket science and engineering*, 1st ed., CRC Press, Florida etc, 2009.
- [29] MIT Rocket Team, *Rockets and composites*, 2010.
- [30] Jiyuan Tu, Guan Heng Yeoh, and Chaoqun Liu, *Computational fluid dynamics: A practical approach*, 1st ed., Butterworth Heinemann, Australia and Texas, 2008.
- [31] Martin J L Turner, *Rocket and spacecraft propulsion*, 2nd ed., Springer, Leicesterk, 2007.
- [32] Richard T Whitcomb, *A study of the zero-lift drag-rise characteristics of wing-body combinations near the speed of sound.*, (1952).

