Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Optimización de trayectorias de avión en un plano horizontal

Autor: Julio César Sánchez Merino

Tutor: Antonio Franco Espín

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2014

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Optimización de trayectorias de avión en un plano horizontal

Autor:

Julio César Sánchez Merino

Tutor:

Antonio Franco Espín

Profesor Ayudante Doctor

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2014

Trabajo Fin de Grado: Optimización de trayectorias de avión en un plano horizontal

Autor: Julio César Sánchez Merino
Tutor: Antonio Franco Espín

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Índice general

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de este capítulo se describe el contexto en el que se encuadra este trabajo, así como las motivaciones que originan el mismo. Por último se describen los objetivos principales que se quieren alcanzar.

1.1. Contexto

Este trabajo se enmarca dentro del diseño y optimización de trayectorias, rama de la Mécanica del Vuelo que se ocupa de diseñar trayectorias que maximizan o minimizan ciertos objetivos. Esta disciplina es de vital importancia en la industria aeroespacial por numerosos aspectos. Entre ellos destacan la reducción de costes al operar aeronaves, el aumento de alcances de las anteriores, la reducción de tiempos de vuelo... El diseño de trayectorias óptimas contribuye fundamentalmente a disminuir los costes de las compañías aéreas, pero sus beneficios van más allá: también se consigue reducir el impacto ambiental de las aeronaves al reducirse las emisiones de dióxido de carbono a la atmósfera, así como la contaminación acústica en zonas pobladas.

Todo lo anterior se consigue imponiendo unas ligaduras de vuelo o leyes de pilotaje adecuadas (grados de libertad que son impuestos por el piloto o el piloto automático) las cuales permitan seguir una trayectoria óptima atendiendo a algún criterio. En general, se tienen muchos grados de libertad entre los que figuran la posición de la palanca de gases, la altitud de vuelo, el ángulo de ataque, el ángulo de alabeo etc. Véase Stevens y Lewis [22].

En cuanto a las variables a optimizar, las más usuales suelen ser el coste operativo directo (DOC), la masa de combustible consumida, el coste de cada asiento por milla naútica (CASM), el tiempo final de la trayectoria o la distancia horizontal recorrida. En este trabajo nos centraremos en reducir la masa de combustible consumida con el objetivo de reducir el impacto medioambiental que la aeronave produce a lo largo de su operación.

Las trayectorias de los aviones están formadas por diversos segmentos: despegue, subida, crucero, espera, descenso y aterrizaje. En este trabajo consideraremos trayectorias en el plano horizontal, las cuales pueden ser consideradas como cruceros, esperas o virajes indistintamente.

1.2. Revisión de los métodos de optimización

Una vez se ha determinado qué es lo que se quiere optimizar, hay que revisar la literatura y encontrar un método matemático que dé pautas acerca de cómo llevar la optimización a buen término.

En este trabajo, se está interesado en la optimización dinámica sujeta a ciertas restricciones, es decir, en tomar las decisiones óptimas a lo largo del tiempo que minimizan un funcional cumpliendo ciertas condiciones prescritas. Existen diversos métodos para llevar esto a cabo:

- Cálculo variacional: es una disciplina del análisis matemático que se desarrolló a raíz del problema de la curva braquistócrona (Hoffman [12]). La braquistócrona es la curva entre dos puntos recorrida en menor tiempo bajo la acción de una fuerza de gravedad constante, en ausencia de fricción y partiendo del punto inicial con velocidad nula. El objetivo de esta disciplina es resolver el problema de buscar máximos y mínimos de funcionales (funciones que tienen a su vez como argumento otras funciones). Para ello se hace uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange que son las condiciones bajo las cuales cierto tipo de funcional alcanza un extremo (ver Clarke [7]). En el contexto de la optimización de trayectorias, el funcional sería la magnitud a optimizar (masa de combustible, tiempo final, DOC...), y las funciones que optimizan el funcional serían las leyes de vuelo.

- Control óptimo: es una extensión del cálculo variacional. Surge en la década de los años cincuenta como consecuencia de los esfuerzos por parte de los ingenieros y científicos soviéticos y americanos por explorar el Sistema Solar. El problema de la exploración del Sistema Solar consistía en llevar un vehículo espacial desde la Tierra a un punto del espacio siguiendo algún criterio de optimización como mínimo tiempo, mínima cantidad de combustible o una combinación de los anteriores. Esta teoría trata de encontrar las leyes de control de un sistema dinámico sujeto a restricciones de forma que se minimize una función de coste que a su vez es función tanto de los estados como de las variables de control. El problema de control óptimo puede ser resuelto mediante el uso de del Principio del Mínimo (condiciones necesarias pero no suficientes) o resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (condición suficiente). Véase Pinch [17].

En este trabajo se hace uso de la Teoría del Control Óptimo por su mayor facilidad a la hora de tratar con restricciones en los valores que pueden tomar las variables de control. En el caso del Cálculo Variacional tratar con este tipo de restricciones es más incómodo (ver Milyutin y Osmolovskii [16]). También la Teoría del Control Óptimo distingue convenientemente entre variables de estado y de control.

1.3. Motivaciones

Debido a requisitos de control de tráfico aéreo (ATC), las aeronaves comerciales están obligadas a realizar el crucero a altitud constante durante gran parte del vuelo (pueden llevar a cabo subidas previa autorización de ATC). Por ello la optimización de trayectorias en el plano horizontal cobra una especial relevancia, aunque al fijarse la restricción de altitud constante se llega a una solución peor que si ésta fuera un grado de libertad.

La optimización del vuelo de crucero rectilíneo a altitud constante está ampliamente estudiada en la literatura con diversos criterios de optimización (ver Franco, Rivas y Valenzuela en [10], [11] y [19]). Sin embargo, existe un menor número de estudios acerca de trayectorias en las que la aeronave sale de un punto inicial con una cierta dirección y llega al punto final con otra dirección fijada, de modo que ésta realiza virajes para ajustarse a las condiciones de contorno.

Usualmente, y así se hace en este trabajo, se usa como criterio de optimización la masa de combustible consumida a lo largo de la trayectoria. Aunque, como se ha comentado anteriormente, las compañías aéreas suelen estar interesadas en optimizar tanto el consumo de combustible como el tiempo de vuelo, por lo que suelen elegir el DOC como criterio de optimización. Las soluciones obtenidas de minimizar el coste operativo directo suelen implicar velocidades más altas comparadas con las obtenidas de minimizar el consumo de combustible. Por ejemplo para la aeronave Boeing 767-300 ER, al optimizar la masa de combustible en crucero a altitud constante, se obtiene $M^* = 0.76$ aproximadamente, sin embargo en las características técnicas de la misma, se da un Mach de crucero típico de 0.8 a 11500 m de altitud (Boeing [4]).

Las pautas que se darán a lo largo del trabajo podrían ser usadas para optimizar la navegación aérea con radioayudas VOR. Este tipo de navegación requiere que la aeronave cambie su rumbo para dirigirse hacia la estación VOR que desee y sobrevuele ésta por un cierto radial fijado. Otra aplicación práctica sería el caso de un vehículo aéreo no tripulado (UAV) de observación que requiere tener una cierta actitud en los puntos de inicio y final de destino para tomar fotografías, espiar... Por último, estarían ciertas aplicaciones militares como por ejemplo la determinación de la trayectoria de mínimo tiempo que un misil debe de seguir para impactar en un blanco.

1.4. Objetivos

El objetivo de este trabajo consiste en minimizar la masa de combustible en trayectorias en el plano horizontal dados una masa inicial m_0, un alcance x_f, un ángulo de guiñada inicial χ_0 y un ángulo de guiñada final χ_f. Como se verá más adelante, lo lógico es controlar el empuje que proporciona el motor y el ángulo de alabeo, lo primero se lleva a cabo mediante el control de la posición de la palanca de gases π, y lo segundo se consigue mediante la deflexión de los alerones. Para simplificar el problema se considera que se tiene un control directo sobre el ángulo de alabeo μ. Dada la complejidad en cuanto a la formulación matemática que representa el problema en primera instancia (lo cual se detalla en el Capítulo 2), se llevarán a cabo ciertas hipótesis simplificativas sobre el mismo.

El modelo de aeronave usado es lo más general posible, se tienen en cuenta los efectos de compresibilidad a la hora de considerar los coeficientes de la polar parabólica compensada, así como los efectos del número de Mach y la altitud en el empuje máximo disponible y el consumo específico. En cuanto al modelo de atmósfera, se hace uso de la Atmósfera Estándar Internacional (ISA). Nótese que se podrían elegir cualesquiera modelos de aeronave y atmósfera dada la generalidad de los planteamientos llevados a cabo.

Como principal limitación al problema planteado está el no considerar los efectos que el viento pueda tener a lo largo de la trayectoria. No obstante, este problema podría usarse como punto de partida en la resolución del problema con viento.

Capítulo 2

Formulación del problema

En este capítulo se formula el problema de encontrar trayectorias de aeronave en el plano horizontal de mínimo consumo de combustible. Se describen el sistema de ecuaciones dinámicas y cinemáticas a optimizar y los modelos suplementarios necesarios para su resolución, así como las restricciones de las variables de control. Por último se aplican ciertas hipótesis simplificativas al problema original y se describen las restricciones de las variables de control.

2.1. Ecuaciones del movimiento y función objetivo

Se considera un vuelo simétrico en un plano horizontal. El vuelo horizontal está caracterizado porque $h \equiv const$. De las ecuaciones cinemáticas de la mecánica del vuelo se deduce $\gamma = 0$. Se hace la hipótesis de que la línea de empuje está en todo momento alineada con la corriente incidente. También se considera que la atmósfera está en calma, es decir, no hay viento. Las ecuaciones del movimiento que describen el vuelo horizontal son las siguientes (véase Rivas [18]):

$$m\dot{V} = T - D \tag{2.1}$$

$$mV\dot{\chi} = -Lsin\mu \tag{2.2}$$

$$mg = Lcos\mu \tag{2.3}$$

$$\dot{m} = -cT \tag{2.4}$$

$$\dot{x} = Vcos\chi \tag{2.5}$$

$$\dot{y} = Vsin\chi \tag{2.6}$$

La ecuación (2.1) refleja que la variación de cantidad de movimiento a lo largo del eje x viento es igual al exceso de fuerza propulsiva. La ecuación (2.2) representa el equilibrio que debe cumplirse en todo instante entre la fuerza centrífuga y la componente de la sustentación que está dirigida hacia el centro del radio de curvatura, necesaria para conseguir que la aeronave vire. Para ello habrá que producir un cierto ángulo de alabeo, μ, distinto de cero. La ecuación (2.3) representa el equilibrio de fuerzas verticales entre el peso y la proyección de la sustentación en el eje vertical, se toma el signo negativo a la derecha de la ecuación para que al bajar el ala derecha del avión se tenga $\mu > 0$. La ecuación (2.4) propone un modelo de gasto de combustible proporcional al empuje generado por la aeronave, donde la constante de proporcionalidad c se denomina consumo específico. Por último, las ecuaciones cinemáticas

(2.5) y (2.6) describen como varían x e y a lo largo del tiempo, χ es el ángulo de guiñada de la velocidad, es decir, el ángulo que tiene el vector velocidad respecto del eje x.

En general, se tienen las siguientes dependencias funcionales:

$$\begin{aligned} D &= D(h, V, L) \\ T &= T(h, V, \pi) \\ c &= c(h, V, \pi) \end{aligned} \tag{2.7}$$

En el caso de vuelo simétrico en un plano horizontal, la altitud no es una variable de control al ser constante.

Se tiene un sistema de cinco ecuaciones diferenciales y una ecuación algebraica (2.3), así como cinco variables de estado (V, χ, m, x, y) y tres variables de control (μ, π, L), por lo que el problema tiene dos grados de libertad matématicos. A priori, interesa fijar $\mu(t)$ y $\pi(t)$.

Será necesario proporcionar unas condiciones iniciales a las ecuaciones diferenciales (2.1)-(2.2) y (2.4)-(2.6). Dado que las ecuaciones (2.1)-(2.6) no tienen ninguna dependencia con la posición de la aeronave, sin pérdida de generalidad, se pueden elegir los ejes de coordenadas de tal forma que el eje x esté dirigido según la línea que apunta del punto de inicio al punto final al que se desea llegar, el eje y se elige perpendicular a esta línea. Por tanto, se fija el origen de coordenadas en el punto de inicio, $x(t_0) = 0$ e $y(t_0) = 0$, definiéndose también el punto final de la trayectoria, $x(t_f) = x_f$ e $y(t_f) = 0$.

Además se consideran conocidas las direcciones con respecto al eje x con las que la aeronave sale del punto inicial y llega al punto final, es decir, los ángulos de guiñada inicial y final, $\chi(t_0) = \chi_0$ y $\chi(t_f) = \chi_f$. A su vez, la masa inicial de la aeronave es conocida, $m(t_0) = m_0$, en cambio, se desconoce el valor de la masa final. No se asumen condiciones para la velocidad, ya que más adelante se verá que no jugará el papel de variable de estado sino de variable de control. Por otra parte, el tiempo final t_f será un parámetro desconocido.

Como ya se comentó en el Capítulo 1, el objetivo del presente trabajo es determinar la evolución temporal de las variables de control que hace que se minimice la masa de combustible consumida durante la trayectoria de la aeronave, en definitiva, interesa minimizar la siguiente integral:

$$m_F = \int_{t_0}^{t_f} cT dt \tag{2.8}$$

2.2. Modelos suplementarios

En esta sección, se describen los modelos necesarios de tierra, atmósfera y aeronave, que son necesarios para resolver el sistema de ecuaciones (2.1)-(2.6). Se describe lo más relevante de cara al problema, detalles más concretos se exponen en los Apéndices A y B.

2.2.1. Modelo de tierra

Se hace uso de un modelo de tierra plana con gravedad constante, es decir, no se tienen en cuenta las variaciones de la gravedad con la altitud. Se toma el valor de la aceleración de la gravedad a nivel del mar, $g = 9.80665$ m/s^2.

2.2.2. Modelo de atmósfera

Se considera que la atmósfera está en calma, es decir, que la velocidad del viento relativa a tierra es nula, por tanto la velocidad de la aeronave respecto de tierra coincide con la velocidad aerodinámica. Se hace uso del modelo de Atmósfera Estándar Internacional (ISA) que define temperatura, presión, densidad y velocidad del sonido en función de la altitud.

La ISA tiene en cuenta que la aceleración de la gravedad disminuye al aumentar la altitud, esto es debido a que la altitud que aparece en sus ecuaciones es la geopotencial h. La relación de esta altitud geopotencial con la altitud geométrica z es la siguiente: $z = \frac{R_T \cdot h}{R_T - h}$, siendo R_T el radio de la Tierra. Sin embargo, a las altitudes típicas a las que vuela una aeronave comercial, $z \sim$10 km, la altitud geopotencial y la geométrica prácticamente coinciden. A 10 km de altitud geométrica, se tienen 9.9844 km de altitud geopotencial siendo el error de un 0.156 % . Por tanto, es admisible considerar que $h \simeq z$, (ver Anderson [1]). Las ecuaciones del modelo ISA se tratan con detalle en el Apéndice B.

2.2.3. Modelo de aeronave

En este trabajo, se hace uso de un modelo de aeronave civil de pasajeros de fuselaje ancho y dos motores, que opera en régimen subsónico pero a números de Mach elevados donde los efectos de compresibilidad no son despreciables. En particular, se ha escogido el Boeing 767-300ER cuyos modelos aerodinámico y propulsivo se explican con más detalle en el Apéndice A.

El coeficiente de sustentación y el coeficiente de resistencia aerodinámica se definen de la siguiente manera:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \tag{2.9}$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \tag{2.10}$$

El coeficiente de resistencia aerodinámica C_D es una función conocida del coeficiente de sustentación y del Mach de vuelo (ver Apéndice A).

$$C_D = C_D(M, C_L) \tag{2.11}$$

Utilizando la ecuación (2.3), se obtiene que el coeficiente de sustentación es igual a:

$$C_L = \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S cos\mu} \tag{2.12}$$

En cuanto al modelo propulsivo se tiene que el máximo empuje disponible queda definido por:

$$T_M = W_{TO}\delta C_T \tag{2.13}$$

donde W_{TO} es el peso de referencia al despegue, $\delta = p/p_{SL}$ es la ratio de presiones (p_{SL} es la presión ISA a nivel del mar), y el coefiente de empuje, $C_T = C_T(M,h)$ viene dado en el Apéndice A. Por tanto, el empuje de la aeronave está determinado por la posición de palanca. En el caso de que ésta tome de valor la unidad, se estaría usando todo el empuje disponible.

$$T = \pi T_M(M,h) \tag{2.14}$$

El consumo específico está definido por:

$$c = \frac{a(h)}{L_H} C_C(M) \tag{2.15}$$

donde L_H es el calor latente del combustible y C_C es el coeficiente de consumo específico de combustible, que puede considerarse función exclusiva del Mach de vuelo (en realidad también depende del coeficiente de empuje, aunque esta dependencia es muy débil según Miele [15]). En el Apéndice A se detalla la función $C_C(M)$ empleada.

2.3. Formulación final del problema

El problema original que se deseaba resolver era el siguiente:

$$Minimizar \qquad m_F = \int_{t_0}^{t_f} c\pi T_M dt \tag{2.16}$$

sujeto al siguiente sistema dinámico con sus correspondientes condiciones de contorno:

$$\dot{V} = \frac{\pi T_M - D}{m} \qquad V(0) = 0 \qquad V(t_f) = V_f \tag{2.17}$$

$$\dot{\chi} = -\frac{g}{V} tan\mu \qquad \chi(0) = \chi_0 \qquad \chi(t_f) = \chi_f \tag{2.18}$$

$$\dot{m} = -cD \qquad m(0) = m_0 \qquad m(t_f) \equiv \text{libre} \tag{2.19}$$

$$\dot{x} = V cos\chi \qquad x(0) = 0 \qquad x(t_f) = x_f \tag{2.20}$$

$$\dot{y} = V sin\chi \qquad y(0) = 0 \qquad y(t_f) = 0 \tag{2.21}$$

El tiempo final en el problema no está fijado, por lo que $t_f \equiv libre$. La ecuación (2.18) se obtiene sin más que dividir la ecuación (2.2) entre la (2.3). Dado que se considera que la altitud es constante y que el empuje máximo disponible y el consumo específico de combustible no dependen de la posición de la palanca de gases, se tienen las siguientes dependencias funcionales:

$$D = D(m, V, \mu) \tag{2.22}$$

$$c = c(V) \tag{2.23}$$

$$T_M = T_M(V) \tag{2.24}$$

Por tanto, se tienen cinco variables de estado (V, χ, m, x, y), y dos variables de control (π, μ). Se tienen cinco ecuaciones diferenciales, por lo que el problema tiene dos grados de libertad matemáticos, el par de variables de control. El objetivo es encontrar ($\pi(t)$, $\mu(t)$), que hacen que el consumo de combustible sea el mínimo posible de acuerdo a las condiciones de contorno.

Dado que la aeronave analizada es de tipo comercial, por motivos de confort de los pasajeros en cabina, se establecen unas restricciones a los valores máximo y mínimo que puede tener el ángulo de alabeo (véase Eurocontrol [8]):

$$-\frac{7\pi}{36} \leq \mu \leq \frac{7\pi}{36} \tag{2.25}$$

Mientras que la posición de palanca está acotada a los siguientes valores:

$$0 \leq \pi \leq 1 \tag{2.26}$$

Para determinar las leyes de control óptimas se hace uso de la teoría de Control Óptimo. Una vez resuelto el problema se obtiene la evolución temporal de las variables de control que llevan al sistema de un estado inicial a otro final de forma óptima, asegurándose el cumplimiento de las ecuaciones de estado y las restricciones a las variables de control. Las condiciones necesarias para que las variables de control sean óptimas se describen en el Apéndice C. En este trabajo no se analiza si se cumplen las condiciones suficientes de optimalidad para la solución obtenida.

Examinando el Apéndice C, se deduce que el problema planteado con $(\pi(t), \mu(t))$ como variables de control no se puede resolver con el enfoque descrito en el mismo. La posición de la palanca de gases $\pi(t)$ aparece de forma lineal en el Hamiltoniano del sistema, y en consecuencia, al aplicar la ecuación (C.16) se obtiene una expresión que no permite obtener la variable de control. En tal caso, la condición de *Legendre-Clebsch* (C.15) no se cumple con estricta desigualdad, por tanto, el Hessiano del Hamiltoniano, $H_{uu}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \lambda)$, es singular. Se dice entonces que el problema es de Control Óptimo Singular, cuya resolución entraña mayores dificultades tanto desde el punto de vista del desarrollo analítico como desde el punto de vista del procedimiento numérico de resolución (véase Betts [3]). Por ello, este problema, en su formulación original no es objeto del presente Trabajo Fin de Grado.

En consecuencia de lo anterior, se resolverá el problema dos veces con dos hipótesis simplificativas en cada caso de menor a mayor dificultad. En primer lugar, se considera que la velocidad durante la trayectoria es constante. En segundo lugar, se considera que el movimiento es cuasiestacionario, es decir, que las variaciones de la velocidad con respecto al tiempo son prácticamente despreciables. A cambio, la velocidad pasa a ser variable de control en sustitución de la posición de la palanca de gases. En la siguiente página se muestra una tabla resumen de los problemas planteados:

	Velocidad constante	Cuasiestacionario	Problema original
Controles	μ	μ, V	μ, π
Tipo de problema	Control Óptimo	Control Óptimo	Control Óptimo Singular

Tabla 2.1: Problemas de dificultad creciente

En el primer caso, la restricción adicional de velocidad constante elimina un grado de libertad del problema, la posición de la palanca de gases $\pi(t)$. En el segundo caso la velocidad pasa de ser un estado a ser una variable de control, eliminándose también una ecuación diferencial. En ambos casos se deduce que la posición de palanca de gases verifica: $\pi = D/T_M$. Para que la solución sea válida habrá que comprobar a posteriori que $\pi(t) \in [0,1]$, $\forall\, t \in [t_0, t_f]$.

Adicionalmente, la velocidad también está restringida, inferiormente por la velocidad de entrada en pérdida y superiormente por el máximo Mach de vuelo operativo de la aeronave. La velocidad de entrada en pérdida de la aeronave depende del ángulo de alabeo y de la masa de ésta, $V_{stall} = V_{stall}(\mu, m)$. La dependencia con la masa no será considerada ya que implicaría una restricción de ésta que complicaría analíticamente el problema, en consecuencia, será aproximada por la masa inicial de la aeronave al ser la condición más restrictiva posible. La dependencia con el ángulo de alabeo provoca que se tenga una restricción en ambas variables de control:

$$M^2 cos\mu \geq C_{V_{min}}^2 \frac{2m_0 g}{\rho a^2 S C_{L_{max}}} \tag{2.27}$$

donde el término a la derecha de la desigualdad es constante. C_{Vmin} es el coeficiente de velocidad mínima, siendo 1.3 en crucero (ver Eurocontrol [8]). El coeficiente de sustentación máximo de la aeronave en configuración limpia es: $C_{L_{max}}$=1.18. En todo el trabajo se hace uso de los valores m_0=150·10^3 kg y h=10 km, por lo que el término constante tiene un valor de 0.4020.

En cuanto al máximo Mach de vuelo operativo de la aeronave, Boeing [4] fija el valor de éste en 0.86:

$$M \leq 0.86 \tag{2.28}$$

En conclusión, se tienen las restricciones (2.25) y (2-27)-(2.28) a las variables de control, así como la comprobación a posteriori de la restricción (2.26). En la siguiente figura se representa el perímetro de la región de control admisible:

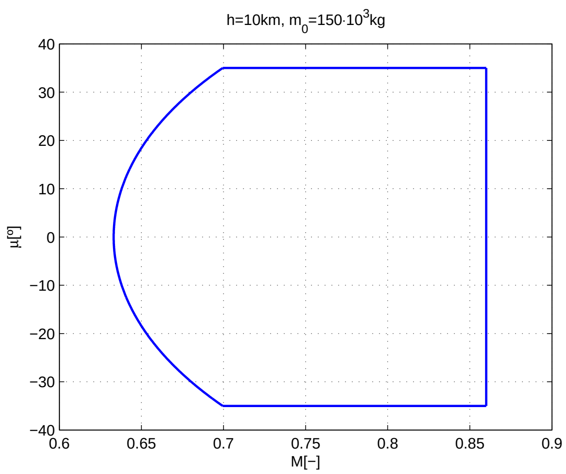


Figura 2.1: Perímetro de la región de control admisible

Capítulo 3

Obtención de trayectorias óptimas en el plano horizontal a velocidad constante

En este capítulo se trata el caso de trayectorias de mínimo consumo de combustible en el plano horizontal a velocidad constante. Se hace uso de la Teoría de Control Óptimo descrita en el Apéndice C para la formulación del problema. A continuación se describen diversas formas posibles de resolver numéricamente el problema de control óptimo. Por último se muestran los resultados numéricos obtenidos y se lleva a cabo una comparativa con otra trayectoria considerada como subóptima.

3.1. Formulación del problema

En este caso, al ser la velocidad y la altitud constantes, se tiene que el número de Mach es constante, $M \equiv cte$, y por tanto según las ecuaciones (2.14) y (2.15) el empuje máximo disponible y el consumo específico también son constantes. Ya que la velocidad es constante a lo largo de la trayectoria, el equilibrio de fuerzas en el eje x viento dada por la ecuación diferencial (2.1) se convierte en la siguiente ecuación algebraica: $T = D$.

La integral a minimizar (2.8) se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_F = \int_0^{t_f} cDdt \tag{3.1}$$

donde, sin pérdida de generalidad, se ha elegido t_0=0, ya que examinando las ecuaciones (2.17)-(2.21) se deduce que el problema es autónomo y por tanto es posible elegir el tiempo inicial arbitrariamente. La resistencia aerodinámica viene dada por la expresión (2.10), y su único término no constante es el coeficiente de resistencia $C_D(M, C_L)$. Dado que se ha señalado anteriormente que el consumo específico es constante, se concluye que habrá que minimizar el efecto que el coeficiente de resistencia tiene a lo largo de la trayectoria. En este caso, el coeficiente de resistencia solo depende del coeficiente de sustentación $C_D = C_D(C_L)$, y éste está definido por la expresión (2.12), $C_L = C_L(m, \mu)$.

El conjunto de ecuaciones de estado y condiciones de contorno está definido por (2.18)-(2.21).

$$\dot{\chi} = -\frac{g}{V} tan\mu \qquad \chi(0) = \chi_0 \qquad \chi(t_f) = \chi_f \tag{3.2}$$
$$\dot{m} = -cD \qquad m(0) = m_0 \qquad m(t_f) \equiv \text{libre} \tag{3.3}$$
$$\dot{x} = V cos\chi \qquad x(0) = 0 \qquad x(t_f) = x_f \tag{3.4}$$
$$\dot{y} = V sin\chi \qquad y(0) = 0 \qquad y(t_f) = 0 \tag{3.5}$$

Tal y como se ha dicho anteriormente, al ser la velocidad constante, ésta deja de ser un estado y se elimina la ecuación (2.17) del sistema dinámico. El Hamiltoniano del sistema tiene la siguiente expresión:

$$H = (1 - \lambda_m)cD - \lambda_\chi \frac{g}{V} tan\mu + \lambda_x V cos\chi + \lambda_y V sin\chi \tag{3.6}$$

Las ecuaciones dinámicas de los adjuntos y las condiciones de transversalidad se obtienen aplicando (C.7) y (C.9) respectivamente:

$$\dot{\lambda_\chi} = V(\lambda_x sin\chi - \lambda_y cos\chi) \qquad \lambda_\chi(t_f) \equiv \text{libre} \tag{3.7}$$
$$\dot{\lambda_m} = (\lambda_m - 1)c\frac{\partial D}{\partial m} \qquad \lambda_m(t_f) = 0 \tag{3.8}$$
$$\dot{\lambda_x} = 0 \qquad \lambda_x(t_f) \equiv \text{libre} \tag{3.9}$$
$$\dot{\lambda_y} = 0 \qquad \lambda_y(t_f) \equiv \text{libre} \tag{3.10}$$

Se deduce que $\lambda_x \equiv cte$ y $\lambda_y \equiv cte$, al ser sus derivadas con respecto al tiempo nulas. De las condiciones de transversalidad sólo la que concierne a λ_m proporciona información útil. Las que afectan a λ_χ, λ_x y λ_y no proporcionan ninguna información adicional al valor de estos adjuntos en el instante final, ya que según la ecuación (C.6) aparecerían tres incógnitas adicionales en el problema al estar $\chi(t_f)$, $x(t_f)$ e $y(t_f)$ fijados. Estas incógnitas se determinarían a raíz de las tres ecuaciones que proporcionarían las ecuaciones de transversalidad (C.9) para estos adjuntos.

La condición de minimización del Hamiltoniano (C.16) proporciona:

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = (1 - \lambda_m)c\frac{\partial D}{\partial \mu} - \lambda_\chi \frac{g}{V cos^2\mu} = 0 \tag{3.11}$$

Y por último, dado que el tiempo final no está fijado, el valor del Hamiltoniano debe ser nulo en el instante final de acuerdo a la ecuación (C.10).

$$H(t_f) = \Big[(1 - \lambda_m)cD - \lambda_\chi \frac{g}{V} tan\mu + \lambda_x V cos\chi + \lambda_y V sin\chi\Big]_{t=t_f} = 0 \tag{3.12}$$

El sistema dinámico es autónomo por lo que adicionalmente el Hamiltoniano es constante según la expresión (C.13). Además, al ser su valor nulo en el instante final, es nulo en todo instante de tiempo. Las derivadas parciales de la resistencia respecto a la masa y al ángulo de alabeo se describen en el Apéndice D.

En total se tienen seis ecuaciones diferenciales ordinarias (3.2)-(3.5) y (3.7)-(3.8), con nueve condiciones de contorno, seis estados ($\chi(t)$, $m(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $\lambda_\chi(t)$, $\lambda_m(t)$) y tres incógnitas (λ_x,

λ_y, t_f). El problema inicial de optimización se ha formulado como un problema de condiciones de contorno.

El problema se resuelve mediante la herramienta de software matemático MATLAB. La resolución numérica del mismo conlleva controlar y reducir al máximo los errores numéricos que se puedan cometer. Por tanto, se adimensionalizan algunas variables para que todas las que intervengan en el problema sean de orden unidad consiguiéndose controlar los errores de redondeo. Al estar escaladas todas las variables al mismo orden de magnitud, se obtiene un mayor grado de exactitud a la hora de exigir el cumplimiento de tolerancias relativas entre ellas.

Se adimensionalizan la masa, el tiempo, la posición en el eje x y la posición en el eje y de la aeronave.

$$\bar{m} = \frac{m}{m_0} \qquad \bar{t} = \frac{t}{t_f} \qquad \bar{x} = \frac{x}{\sqrt{x_f^2 + y_f^2}} \qquad \bar{y} = \frac{y}{\sqrt{x_f^2 + y_f^2}} \tag{3.13}$$

Se seguirá haciendo uso del superíndice $(\dot{})$ para denotar las derivadas de las variables con respecto al tiempo adimensional. El problema de contorno en las nuevas variables adimensionalizadas queda de la siguiente forma:

$$\dot{\chi} = -\frac{gtan\mu}{V}t_f \qquad \chi(0) = \chi_0 \qquad \chi(1) = \chi_f \tag{3.14}$$

$$\dot{\bar{m}} = -cD\frac{t_f}{m_0} \qquad \bar{m}(0) = 1 \tag{3.15}$$

$$\dot{\bar{x}} = Vcos\chi\frac{t_f}{x_f} \qquad \bar{x}(0) = 0 \qquad \bar{x}(1) = 1 \tag{3.16}$$

$$\dot{\bar{y}} = Vsin\chi\frac{t_f}{x_f} \qquad \bar{y}(0) = 0 \qquad \bar{y}(1) = 0 \tag{3.17}$$

$$\dot{\lambda_\chi} = V(\lambda_x sin\chi - \lambda_y cos\chi)t_f \tag{3.18}$$

$$\dot{\lambda_m} = (\lambda_m - 1)c\frac{\partial D}{\partial m}t_f \qquad \lambda_m(1) = 0 \tag{3.19}$$

$$\left[(1-\lambda_m)cD - \lambda_\chi\frac{g}{V}tan\mu + \lambda_x Vcos\chi + \lambda_y Vsin\chi\right]_{\bar{t}=1} = 0 \tag{3.20}$$

a las que hay que añadir la condición de minimización del Hamiltoniano teniendo en cuenta que los valores que puede tomar el control están restringidos. Se hace uso de la misma notación que en el Apéndice C siendo $\mathbf{y}(t)$ el vector de estados:

$$\begin{cases} \mu^*(t) = \mu_{max} & \text{si} \quad \dfrac{\partial H}{\partial \mu}[\mathbf{y}^*(t), \mu^*(t), \lambda(t)] \leq 0 \\ (1-\lambda_m)c\left.\dfrac{\partial D}{\partial \mu}\right|_{[\mu^*(t),\mathbf{y}^*(t)]} - \lambda_\chi\dfrac{g}{Vcos^2\mu^*(t)} = 0 & \text{si} \quad \mu_{min} < \mu^* < \mu_{max} \\ \mu^*(t) = \mu_{min} & \text{si} \quad \dfrac{\partial H}{\partial \mu}[\mathbf{y}^*(t), \mu^*(t), \lambda(t)] \geq 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

donde se han aplicado las condiciones de Karush-Kuhn Tucker (C.17). No se considera la restricción (2.27), ya que los valores de M elegidos garantizan siempre su cumplimiento para todos los ángulos de alabeo permitidos por la restricción (2.25).

3.2. Procedimiento numérico de resolución

La obtención de la trayectoria óptima está supeditada a la resolución numérica de un problema de condiciones de contorno. Los procedimientos numéricos más genéricos para la resolución de este tipo de problemas son los métodos del disparo y los métodos de colocación. Ambos tipos de métodos numéricos son tratados en esta sección.

3.2.1. El método del disparo

El método del disparo intenta resolver el problema de condiciones de contorno reduciéndolo a un problema de valor inicial. Se suponen los valores iniciales de las variables de las cuales no se tiene información en el instante inicial y, mediante un método iterativo, se busca el valor de esas condiciones iniciales desconocidas que hacen que se cumplan las condiciones de contorno en el instante final.

La implementación numérica de este método mediante MATLAB requiere de un resolvedor de problemas de valor inicial (IVP) y de un método iterativo que encuentre el valor de las condiciones iniciales que hacen que se cumplan las condiciones de contorno finales. Las ecuaciones y condiciones de contorno (3.14)-(3.21) forman un sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales (DAEs). Por tanto, se requiere un resolvedor de IVP que resuelva DAEs.

MATLAB tiene funciones implementadas para resolver problemas de valor inicial cuyas ecuaciones diferenciales son ordinarias (ODE) de la forma:

$$Ny' = f(t, y) \tag{3.22}$$

donde N es la matriz de masas que premultiplica al vector de derivadas. El sistema (3.14)-(3.19) y (3.21) se puede escribir con esa estructura:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{m} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\lambda}_\chi \\ \dot{\lambda}_m \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{gtan\mu}{V} t_f \\ -cD\frac{t_f}{m_0} \\ Vcos\chi\frac{t_f}{x_f} \\ Vsin\chi\frac{t_f}{x_f} \\ V(\lambda_x sin\chi - \lambda_y cos\chi)t_f \\ (\lambda_m - 1)c\frac{\partial D}{\partial m}t_f \\ d(\mathbf{y}, \mu, \lambda) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

donde la función $d(\mathbf{y}, \mu, \lambda)$ se refiere a las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (3.21):

$$d(\mathbf{y}, \mu, \lambda) = \begin{cases} \mu - \mu_{max} & \text{si} \quad \frac{\partial H}{\partial \mu}(\mathbf{y}, \mu_{max}, \lambda) \leq 0 \\ (1 - \lambda_m)c\left.\frac{\partial D}{\partial \mu}\right|_{(\mu, \mathbf{y})} - \lambda_\chi \frac{g}{Vcos^2\mu} & \text{si} \quad \mu_{min} < \mu < \mu_{max} \\ \mu - \mu_{min} & \text{si} \quad \frac{\partial H}{\partial \mu}(\mathbf{y}, \mu_{min}, \lambda) \geq 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

La matriz de masas es singular al ser un sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales, por lo que se requiere una función que resuelva problemas de la forma (3.22) y que admita una matriz de masas singular. MATLAB incorpora dos funciones que permiten resolver lo anterior, *ode15s* y *ode23t*. Se eligió la función *ode15s* para la resolución del problema, ya que la ayuda de MATLAB considera que su uso es adecuado para problemas en los que la precisión requerida es media o baja, mientras que *ode23t* se considera adecuada para problemas en los que la precisión requerida es baja (ver MATLAB [13]). Al usarse esta función dentro de un método iterativo, es importante que su precisión sea mayor que la del propio método iterativo para poder obtener una solución.

La función *ode15s* usa un método ímplicito de diferenciación, esto quiere decir que no aproxima las derivadas del paso siguiente con la información ya conocida del paso anterior como hacen los métodos explícitos, sino que estima la derivada en un punto intermedio del paso temporal o al final del mismo, lo que requiere resolver un sistema no lineal de ecuaciones en cada paso temporal. En general, los métodos explícitos son más eficientes que los ímplicitos, sin embargo, estos últimos tienen la ventaja de ser más estables y pueden encontrar la solución con pasos temporales más grandes lo que es provechoso de cara a los problemas de tipo *stiff* (en este tipo de problemas las variables cambian muy rápidamente en intervalos de tiempo muy pequeños).

Es necesario dar un valor inicial al ángulo de alabeo μ_0, aunque no evolucione conforme a una ecuación diferencial. Para asegurar la convergencia de la solución es conveniente proporcionar unas condiciones iniciales consistentes, es decir, que el vector de estados iniciales cumpla (3.21) en el instante inicial.

Dado que se debe resolver un sistema de ecuaciones no lineal en cada paso, es necesario conocer el Jacobiano del sistema $f(t, y)$. Aunque *ode15s* pueda calcularlo numéricamente, es adecuado determinarlo analíticamente y suministrárselo a *ode15s* para disminuir el tiempo de computación y aumentar la eficiencia del método.

Así, el Jacobiano de $f(t, y)$ en el caso de que el control no esté restringido viene dado por:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{Vcos^2\mu}t_f \\ 0 & -c\frac{\partial D}{\partial m}\frac{t_f}{m_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c\frac{\partial D}{\partial \mu}\frac{t_f}{m_0} \\ -Vsin\chi\frac{t_f}{x_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Vcos\chi\frac{t_f}{x_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V(\lambda_x cos\chi + \lambda_y sin\chi)t_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_m - 1)c\frac{\partial^2 D}{\partial m^2}t_f & 0 & 0 & 0 & c\frac{\partial D}{\partial m}t_f & (\lambda_m - 1)c\frac{\partial^2 D}{\partial m \partial \mu}t_f \\ 0 & (1 - \lambda_m)c\frac{\partial^2 D}{\partial m \partial \mu} & 0 & 0 & -\frac{g}{Vcos^2\mu} & -c\frac{\partial D}{\partial \mu} & (1 - \lambda_m)\frac{\partial^2 D}{\partial \mu^2} - \lambda_\chi \frac{g}{V}\frac{2sin\mu}{cos^3\mu} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

donde las derivadas parciales se detallan en el Apéndice D. En caso de que el ángulo de alabeo esté restringido, la última fila del Jacobiano se sustituye por [0 0 0 0 0 0 1].

Una vez determinada la resolución del sistema DAEs, es necesario un método iterativo que asegure el cumplimiento de las condiciones de contorno finales con ciertas tolerancias. Las variables en el estado inicial desconocidas son el adjunto en ángulo de guiñada λ_{χ_0} y el adjunto en masa λ_{m_0}, también se desconocen los adjuntos en la posición en el eje x y el eje y, λ_x y λ_y respectivamente, así como el tiempo de integración t_f. Por otra parte, en el instante final se debe cumplir que: $\chi(1) = \chi_f$, $\bar{x}(1) = 1$, $\bar{y}(1) = 0$, $\lambda_m(1) = 0$ y $H(1) = 0$. Se tienen cinco incógnitas y cinco ecuaciones de cierre no lineales, es decir, un sistema de ecuaciones no lineal 5×5. Para la resolución del sistema de ecuaciones no lineales se emplea la función *fsolve* de MATLAB.

Como se ha comentado anteriormente a la hora de resolver el DAEs, es importante que la solución inicial sea consistente, para ello es más fácil dar una estimación inicial en el ángulo de alabeo μ_0 en vez de en el adjunto en ángulo de guiñada λ_{χ_0} y forzar el valor de éste con (3.21). La lógica del método iterativo es la siguiente:

1. Tomar k = 0 (k es un contador de iteraciones). Elegir unos valores para ${\mu_0}^{[0]}$, $\lambda_{m_0}^{[0]}$, $\lambda_x^{[0]}$, $\lambda_y^{[0]}$ y $t_f^{[0]}$.

2. Resolver la DAE mediante *ode15s*, obteniéndose: $\chi^{[k]}(\bar{t})$, $\bar{m}^{[k]}(\bar{t})$, $\bar{x}^{[k]}(\bar{t})$, $\bar{y}^{[k]}(\bar{t})$, $\lambda_\chi^{[k]}(\bar{t})$, $\lambda_m^{[k]}(\bar{t})$ y $\mu^{[k]}(\bar{t})$.

3. La función *fsolve* evalúa si se han cumplido las condiciones en el instante final, con una cierta tolerancia absoluta y relativa. Hay que hacer hincapié en que las tolerancias que se usen en *ode15s* deben ser más pequeñas que las usadas en *fsolve* ya que, al hacer *fsolve* llamadas a la función *ode15s*, si se tiene un mayor error en las variables al resolver la DAE que el permitido por *fsolve* nunca se convergería a una solución con la tolerancia deseada.

4. En caso de no satisfacerse las tolerancias fijadas, *fsolve* realizaría una nueva iteración volviendo al paso 1, hasta que la solución converge o se alcanza el número máximo de iteraciones permitidas. También podría interrumpirse la iteración porque el radio de la región de confianza es muy pequeño o porque se converge a un punto que no es una raíz, sino un mínimo de la función.

En el problema, los parámetros más importantes para comparar diferentes trayectorias entre sí son V, x_f, χ_0 y χ_f. En general nos interesa fijar tres de ellas y variar una de las otras, no obstante, es necesario un método de continuación para conseguir la convergencia de la solución conforme nos acercamos a valores altos de x_f, χ_0 y χ_f.

Para empezar el método de continuación se determina la solución en crucero ($\chi_0 = 0$, $\chi_f = 0$), la cual puede ser fácilmente conocida. Ya que, al ser un movimiento rectilíneo y uniforme, $t_f^{[0]} = x_f/V$ y $\chi^{[0]}(t) = 0$. En consecuencia, el control queda fijado a $\mu^{[0]}(t) = 0$ por el cumplimiento de la ecuación diferencial (3.2).

Fijado $\mu^{[0]}$, $C_L^{[0]} = C_L^{[0]}(m)$ y de acuerdo a la expresión (2.10), $D^{[0]} = D^{[0]}(m)$, por lo que la ecuación del consumo (3.3) queda desacoplada del resto. Es posible obtener $m^{[0]}(t)$ usando la función *ode45* de MATLAB para integrar la ecuación (3.3).

Una vez conocido cómo evoluciona la masa con el tiempo, es posible integrar de la misma manera la ecuación (3.8) y obtener $\lambda_m^{[0]}(t)$. Faltaría por conocer los valores de $\lambda_x^{[0]}$ y $\lambda_y^{[0]}$. El adjunto en y no juega ningún papel en el problema de crucero porque no hay variaciones en la variable y que influyan en el consumo de combustible, y en consecuencia puede tomarse $\lambda_y^{[0]} = 0$. El valor de $\lambda_x^{[0]}$ puede obtenerse de la condición del valor nulo del Hamiltoniano en el instante final (3.12).

El método de continuación está compuesto por dos métodos iterativos, uno en los ángulos de guiñada inicial y final, y otro para el alcance. En primer lugar se describe el método iterativo para los ángulos:

1. Fijar un alcance razonable ($x_f \sim 50$ km), i=0 (i es un contador de iteraciones).
2. Calcular ${\mu_0}^{[0]}$, $\lambda_{m_0}^{[0]}$, $\lambda_x^{[0]}$, $\lambda_y^{[0]}$ y $t_f^{[0]}$ a partir de la solución de crucero para ese alcance
3. Usar la estimación del paso i para encontrar la solución del siguiente paso a iterar, i+1, $\chi_0^{[i+1]} = \chi_0^{[i]} + \Delta\chi_0$, $\chi_f^{[i+1]} = \chi_f^{[i]} + \Delta\chi_f$.
4. Repetir el paso 3 hasta llegar a los ángulos de guiñada deseados, eligiendo los incrementos de ángulos de forma que la solución converja poco a poco hasta llegar a los ángulos deseados.

Una vez obtenidos los ángulos de guiñada deseados, se incrementa el alcance gradualmente hasta alcanzar el x_f deseado.

1. Usar la última solución del método anterior, j=0 (j es un contador de iteraciones).
2. Incrementar gradualmente el alcance, $x_f^{[j+1]} = x_f^{[j]} + \Delta x_f$.
3. Usar la estimación del paso j, para resolver el siguiente paso $j+1$, volver al paso 2 hasta llegar al alcance deseado.

Sin embargo, el método de continuación al aumentar el alcance no proporcionó los resultados deseados, pues al llegar a distancias del orden de 60 km, era necesario dar pasos del orden de la centésima de kilómetro para que la solución convergiera. Se intentó probar a resolver el *ode15s* usando fórmulas de diferenciación regresiva (BDFs) en vez de la diferenciación numérica que viene por defecto, ya que se sospechaba que el problema podía ser de tipo *stiff*, sin embargo, no mejoró el método de continuación. También, aprovechando que el Hamiltoniano es nulo en todo instante de tiempo, se forzó el cumplimiento de esa condición en el instante inicial determinándose una variable inicial, por ejemplo $\lambda_x^{[0]}$, quedando un sistema 4×4, más fácil de resolver a priori, no obstante, no se obtuvieron mejoras.

De todo lo anterior, se concluye que el problema es fuertemente inestable a variaciones en las condiciones iniciales, y no puede ser resuelto para un amplio rango de alcances haciendo uso del método del disparo.

3.2.2. El método de colocación

Los métodos de colocación son otra alternativa para resolver problemas de contorno numéricamente. Este tipo de métodos consiste en aproximar la solución mediante funciones (generalmente polinomios) que en una malla finita de puntos, llamados puntos de colocación, satisfagan las ecuaciones diferenciales, así como las condiciones de contorno.

MATLAB incorpora dos funciones que resuelven problemas de condiciones de contorno con ecuaciones diferenciales ordinarias mediante métodos de colocación, *bvp4c* y *bvp5c*. Ambas funciones son parecidas, sin embargo, el significado de las tolerancias del error son diferentes. Si $S(t)$ aproxima la función $y(t)$, entonces *bvp4c* controla lo que se conoce como el residuo $||\dot{S}(t) - f(t, S(t))||$, mientras que *bvp5c* directamente controla el verdadero error $||y(t) - S(t)||$ (véase Shampine [20]). Ambas usan en sus algoritmos la fórmula de Lobato IIIa de tres y cuatro etapas respectivamente. También proporcionan una solución continua de clase C^1. Sin embargo, en *bvp4c* es uniformemente exacta de cuarto orden y en *bvp5c* es de quinto orden (ver Shampine, Kierzenka y Reichelt en [21]).

En general *bvp4c* necesita un menor tiempo de computación al ser menos precisa que *bvp5c*, sin embargo, *bvp5c* es más eficiente cuando se trata con pequeñas tolerancias de error. El problema de condiciones de contorno se decidió resolverlo con *bvp4c* por su menor tiempo de computación en comparación con *bvp5c*; la justificación a lo anterior se muestra en el Capítulo 4.

A diferencia de los resolvedores de ODE de MATLAB que solo necesitan un valor inicial de las variables de estado para integrar las ecuaciones diferenciales, *bvp4c* necesita una estimación inicial de las variables de estado en ciertos instantes de tiempo. Lo usual es mallar uniformemente en la variable independiente y suponer la solución en esos puntos de la malla. Al igual que con *ode15s*, es recomendable dar una estimación inicial consistente, es decir, que se cumplan las condiciones de contorno.

Uno de los inconvenientes que tiene la función *bvp4c* a la hora de resolver el problema de condiciones de contorno es que no resuelve sistemas DAEs, es decir, no admite una matriz singular que premultiplique al vector columna de derivadas. Por tanto, es necesario incluir a las funciones a las que *bvp4c* llama (la función donde están las condiciones de contorno, y la función que proporciona el sistema de ecuaciones diferenciales) una función que proporcione $\mu(\bar{t})$, es decir, que resuelva la expresión (3.21) dentro de las dos funciones mencionadas. Esto se lleva a cabo mediante la función *fzero* de MATLAB que encuentra una raíz de una ecuación no lineal.

Esta forma de resolución no es recomendable, porque introducir un método iterativo (*fzero*) dentro de otro método iterativo (*bvp4c*) puede hacer que la solución no converja de la forma deseada y que aumenten los tiempos de computación. Sin embargo, no se encontró una mejor alternativa. Para imponer la restricción (2.25) en los valores del control, se examina si la solución es mayor de 35º, en caso afirmativo, se impone que el control valga 35º, es decir se necesitaría la potencia máxima de control posible. En caso de obtenerse valores menores que -35º, se impone que el control valga -35º.

Se tienen tres parámetros desconocidos, λ_x, λ_y y t_f. Aparte de las variables que tienen dependencia temporal, *bvp4c* admite la resolución de parámetros siempre y cuando se tenga el mismo número de condiciones de contorno que de estados más parámetros desconocidos. Se tienen nueve condiciones de contorno (3.14)-(3.20), y seis estados ($\chi(\bar{t})$, $\bar{m}(\bar{t})$, $\bar{x}(\bar{t})$, $\bar{y}(\bar{t})$, $\lambda_\chi(\bar{t})$, $\lambda_m(\bar{t})$), a los que hay que sumar los tres parámetros antes mencionados, por tanto el problema está cerrado matemáticamente.

Como se ha comentado anteriormente *bvp4c* necesita una estimación inicial de los estados, así como de los parámetros. En primer lugar, se distribuyen N puntos uniformemente espaciados entre [0,1]. Estos son los puntos de colocación de la variable independiente $\bar{t}$ en los que se da la estimación inicial de los estados. Usualmente se elige $N \sim 200$. La variable de estado $\chi(\bar{t})$ se intuye que va a ser constante en un gran tramo de la trayectoria. Ya que para reducir el coeficiente de resistencia, interesa $\mu(\bar{t}) = 0$. Esto según (3.2) haría que $\chi(\bar{t}) \equiv cte$ en un gran tramo de la trayectoria. Al resolverse el problema de media y larga distancia se intuye que $\chi(\bar{t}) \sim 0$ al ser las distancias recorridas en el eje x mucho mayores que las recorridas en el eje y, por lo que se elige el iterante inicial $\chi^{[0]}(\bar{t}) = 0$, $\forall \bar{t} \in [0, 1]$. En consecuencia, se aproxima el tiempo final por el de crucero, $t_f^{[0]} = x_f/V$.

En el caso de la masa, el método del disparo ha proporcionado una evolución aproximadamente lineal decreciente para bajos alcances, por lo que se intuye que esta tendencia se mantiene a medias y largas distancias. Se aproximan el consumo específico y la resistencia en el instante inicial, es decir con la masa inicial m_0 e imponiendo que el ángulo de alabeo sea nulo, en definitiva se tiene: $\bar{m}^{[0]}(\bar{t}) = 1 - \frac{c_0 D_0 x_f}{m_0 V}\bar{t}$, $\forall \bar{t} \in [0, 1]$.

Para las posiciones adimensionales, dado que la velocidad es constante, se recorren aproximadamente distancias iguales en tiempos iguales. Como ya se ha comentado anteriormente, se elige un ángulo de guiñada nulo en todo instante de tiempo, por lo que: $\bar{x}^{[0]}(\bar{t}) = \bar{t}$, $\bar{y}^{[0]}(\bar{t}) = 0$, $\forall \bar{t} \in [0, 1]$. El adjunto en ángulo de guiñada también se aproxima al de crucero, al ser $\mu^{[0]}(\bar{t}) = 0$ para cumplir la ecuación de optimalidad (3.11), $\lambda_\chi^{[0]}(\bar{t}) = 0, \forall \bar{t} \in [0, 1]$.

El adjunto en masa tiene que cumplir la condición de contorno de que su valor sea nulo en el instante final. Si examinamos la ecuación (3.8), siempre se cumplirá que $c > 0, \partial D/\partial m > 0$ en todo instante de tiempo, por tanto la tendencia del adjunto en masa dependerá de su valor. Si se tuvieran valores de λ_m mayores que uno o iguales a uno, la derivada temporal sería positiva o cero y nunca se alcanzaría un valor nulo en el instante final. En el caso de que el valor de λ_m fuera negativo, la tendencia sería decreciente y tampoco se cumpliría con la condición de contorno. Se concluye pues que los valores que λ_m puede tomar están acotados en el rango entre cero y uno, no estando permitido el valor unidad. Del método del disparo anterior se obtuvieron diveros valores de λ_{m_0}, haciendo un promedio $\lambda_{m_0} \sim 0.02$. Por tanto, se supone una ley lineal decreciente del mismo que haga cumplir la condición de contorno (3.19): $\lambda_m^{[0]}(\bar{t}) = 0.02(1 - \bar{t})$,$\forall \bar{t} \in [0, 1]$.

En cuanto a los adjuntos en la posición λ_x y λ_y, al ser $\chi^{[0]}(\bar{t})$=0 no hay variaciones en la variable y y por tanto, ésta no juega ningún papel en el problema por lo que se toma de iterante inicial $\lambda_y^{[0]} = 0$. Respecto a $\lambda_x^{[0]}$ se fuerza su valor al cumplimiento de la condición de contorno (3.20), al conocerse las evoluciones de todas las variables, es posible despejar $\lambda_x^{[0]}$ de (3.20). Las únicas condiciones de contorno que no se han impuesto para que el iterante inicial sea consistente con las condiciones de contorno son las referentes a los ángulos de guiñada inicial y final. Sin embargo, se obtienen soluciones válidas que cumplen las condiciones de contorno sin un excesivo gasto computacional.

3.3. Análisis de resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos del problema. Se muestran dos conjuntos de soluciones, uno para cortos alcances, del orden de 100 km, y otro para largos alcances del orden de 5000 km. Por un lado, los largos alcances son interesantes porque la variación en masa de la aeronave es apreciable. Sin embargo, el hecho de que la aeronave deba de virar para cumplir las condiciones de ángulo de guiñada impuestas en los puntos inicial y final queda enmascarada por la gran longitud recorrida en el eje x. Por ello, se muestran resultados de corto alcance en los que sí son apreciables los efectos de los virajes inicial y final.

3.3.1. Resultados de largo alcance

En primer lugar, se representan la trayectoria, $\chi(x)$, $m(x)$, $\mu(x)$ y $C_L(x)$ para varios valores del Mach de vuelo, un alcance de 6000 km y unos ángulos de guiñada inicial y final de 45º y 60º respectivamente. Para una mayor claridad en la representación, se divide la trayectoria en tres regiones: viraje inicial, crucero y viraje final.

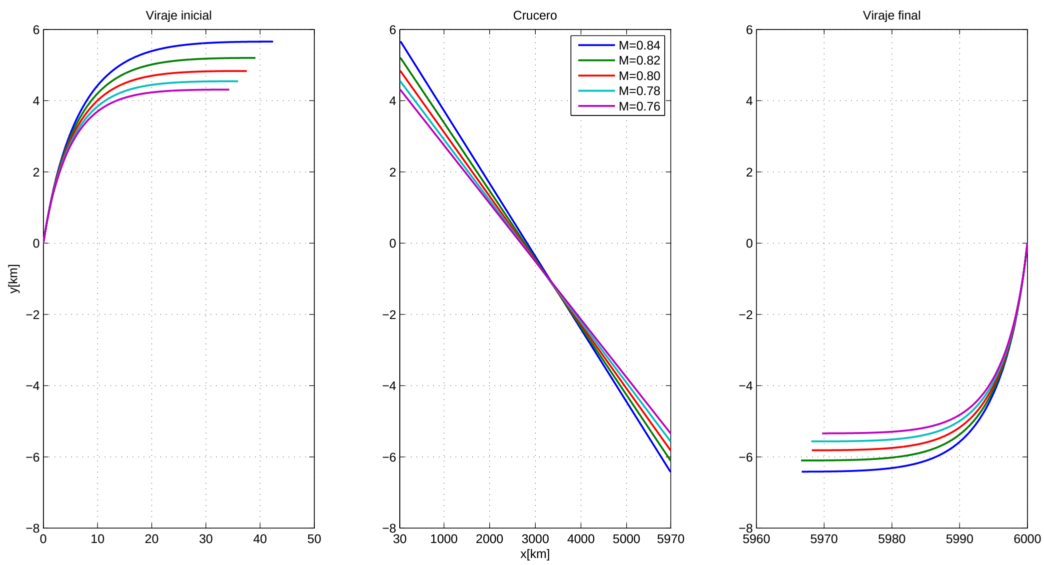


Figura 3.1: Trayectoria para varios M

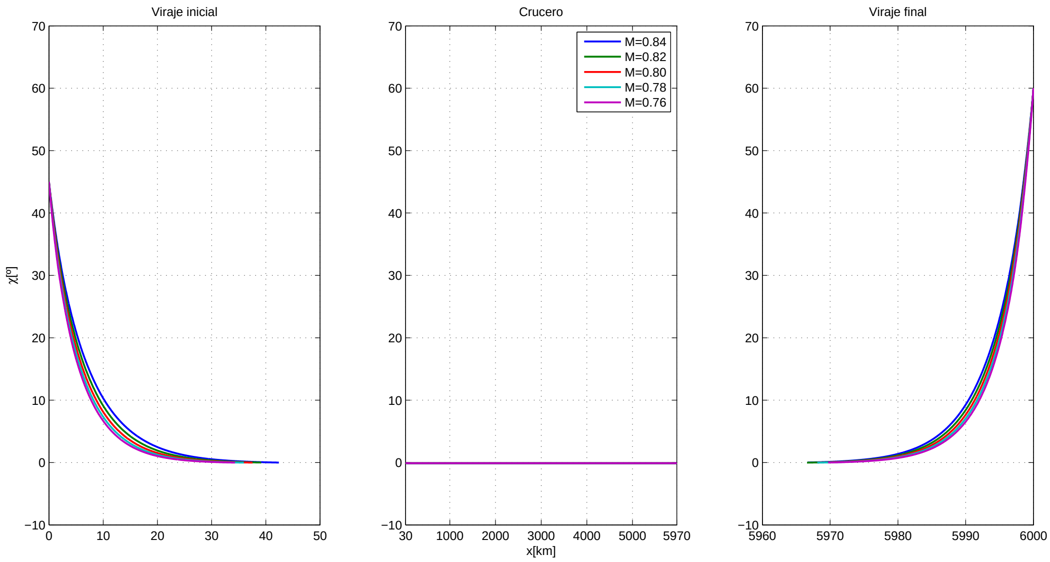


Figura 3.2: Ángulo de guiñada para varios M

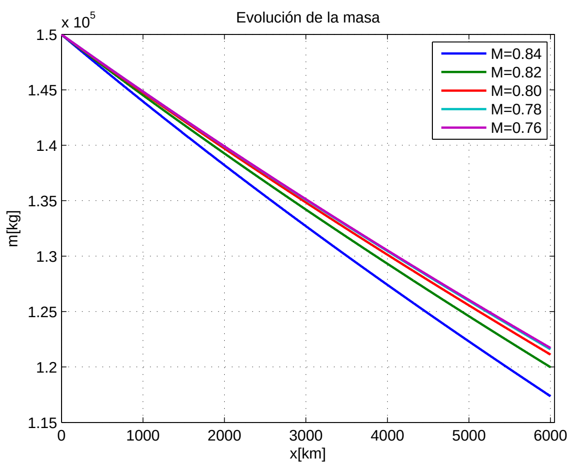


Figura 3.3: Masa para varios M

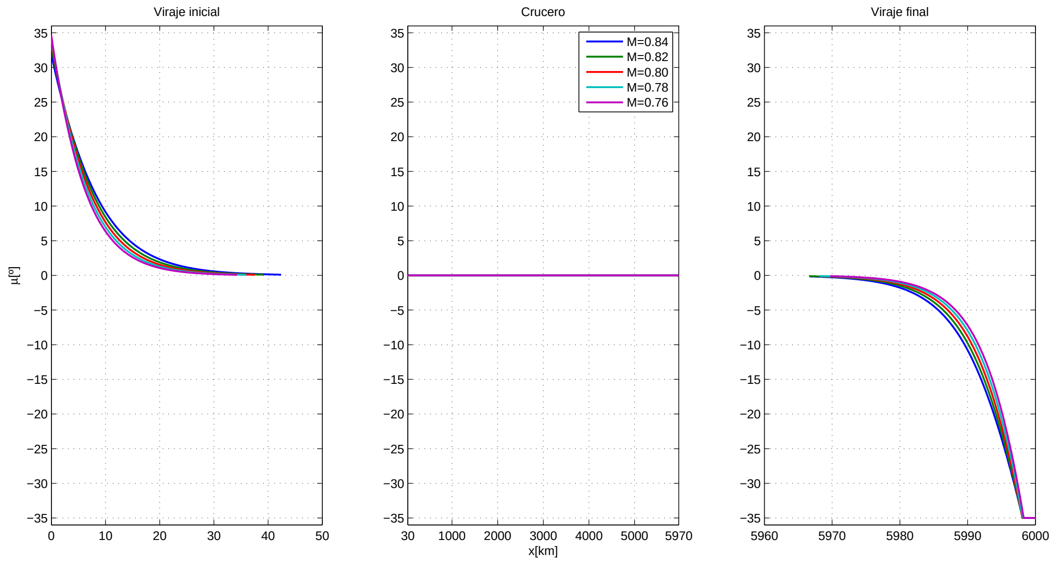


Figura 3.4: Ángulo de alabeo para varios M

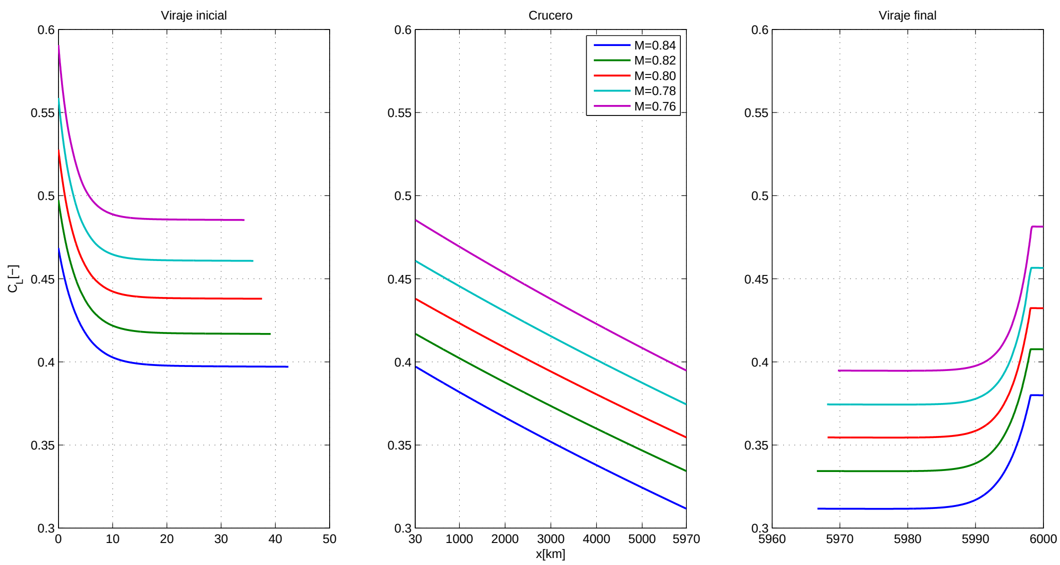


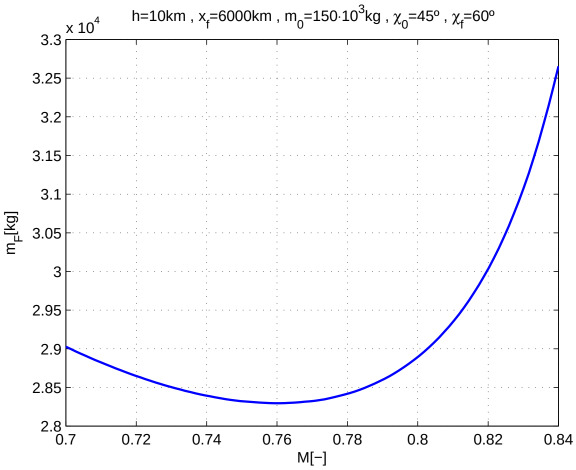
Figura 3.5: Coeficiente de sustentación para varios M

De las figuras anteriores se extrae que la trayectoria recorrida por la aeronave está compuesta de los siguientes tramos: viraje-crucero-viraje. Los efectos de los virajes, donde las variaciones en el ángulo de guiñada y en el control son apreciables, están confinados en regiones muy pequeñas comparadas con la distancia total. Se observa que interesa empezar con la máxima potencia de control posible para irla reduciendo hasta que se llega al tramo de crucero donde es nula. Ello tiene sentido. Ya que, tal y como se comentó tras la ecuación (3.1), el objetivo del problema es minimizar el efecto que tiene el coeficiente de resistencia a lo largo de la trayectoria. El tener el avión con un cierto ángulo de alabeo es negativo, ya que aumenta el coeficiente de sustentación y por tanto el coeficiente de resistencia. El ángulo de guiñada durante el crucero no es nulo, pero sí de orden mucho menor que la unidad debido a que las variaciones en la posición en el eje y son de varios órdenes de magnitud menores que las del eje x: $\Delta x \sim 10^6$ km, $\Delta y \sim 10^3$ km, $\Delta \chi \sim \frac{\Delta y}{\Delta x} << 1$.

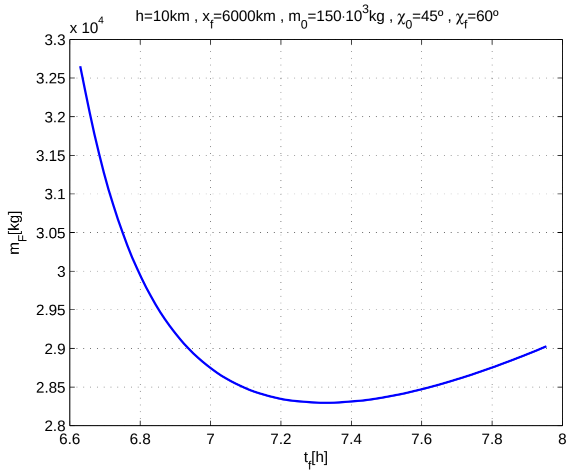
Es posible apreciar incrementos importantes en el coeficiente de sustentación en los virajes inicial y final. En general la tendencia del C_L es lineal decreciente durante el tramo de crucero ya que la masa a altitud y velocidad constantes evoluciona de forma prácticamente lineal. Los virajes son los tramos que más coeficiente de resistencia tienen, pero a largos alcances apenas tienen efecto ya que como se ha comentado anteriormente, están confinados en una región muy pequeña de la trayectoria (en el Capítulo 4 se lleva a cabo una comparación entre este modelo y uno de viraje instantáneo).

En cuanto a las variaciones con el Mach de vuelo, se tiene que a mayor valor de éste, la aeronave tiene que recorrer más distancia en su trayectoria, ya que el ángulo de alabeo está limitado y el radio de curvatura es aproximadamente: $r \sim V^2/(gtan\mu)$. Deduciéndose de la expresión anterior que mayor velocidad corresponde con más radio de curvatura lo que provoca que se recorra más distancia en el eje y. También se observa que mayores números de Mach hacen que el tiempo final en recorrer la trayectoria sea menor. En cuanto al consumo de combustible se observa que en torno a Mach 0.76 hay un mínimo, de lo que se deduce la existencia de un número de Mach óptimo que minimiza el consumo de combustible a esa altitud.

En las figuras 3.6 (a) y 3.6 (b) se representan la masa de combustible consumida a lo largo de la trayectoria frente al número de Mach y al tiempo final respectivamente. Se observa que el número de Mach óptimo que minimiza el consumo de combustible está en torno a 0.76:



(a)



(b)

Figura 3.6: Masa de combustible en función de: (a) M y (b) t_f

La gráfica 3.6 (b) es una figura de trade-off, implica la pérdida de una cualidad por otra, en este caso el tiempo final por la masa de combustible. La utilidad de esta figura radica en que las compañías aeréas suelen trabajar con el DOC=$(m_F$+$CIt_f)c_{fuel}$, siendo la variable CI el índice de coste cuyo valor da una idea de la importancia relativa del tiempo de vuelo frente a la masa de combustible y c_{fuel} es el coste en dólares del kilogramo de combustible. La gráfica asocia a cada valor de la masa de combustible un valor del tiempo de vuelo. Si se le asignara un valor no nulo al CI se podría buscar la pareja de M y t_f que minimizase el DOC en primera aproximación, ya que los puntos de las gráficas no se corresponden exactamente con soluciones de problema de mínimo DOC porque $\mu(t)$ se ha obtenido para minimizar m_F.

A continuación, se muestran las mismas variables que antes para analizar el efecto de variar el ángulo de guiñada inicial. Se fijan el ángulo de guiñada final a 30º y el Mach de vuelo a 0.8. Los ángulos de guiñada iniciales elegidos son: [45º,135º,-135º,-45º].

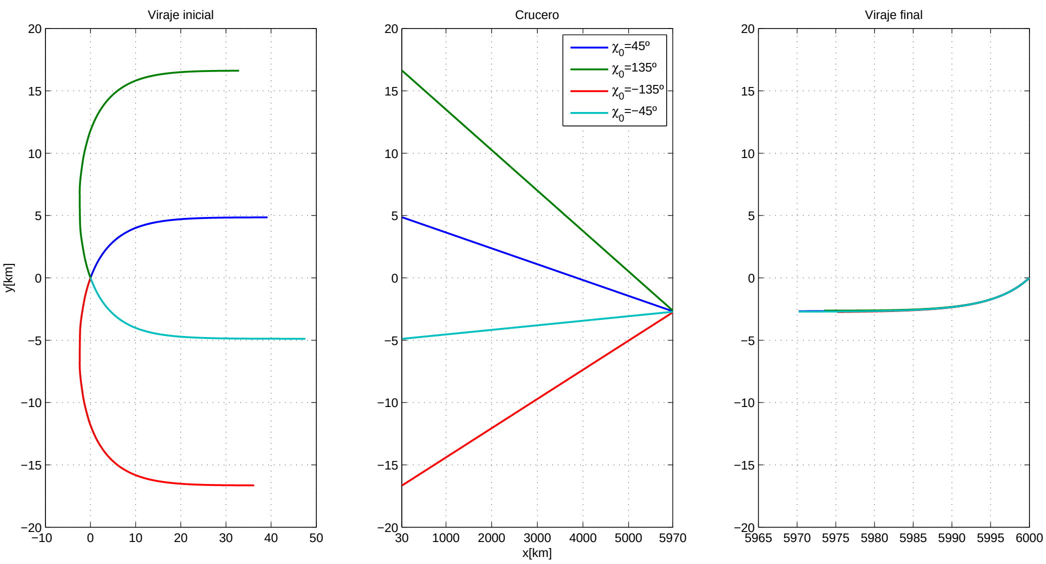


Figura 3.7: Trayectoria para varios χ_0

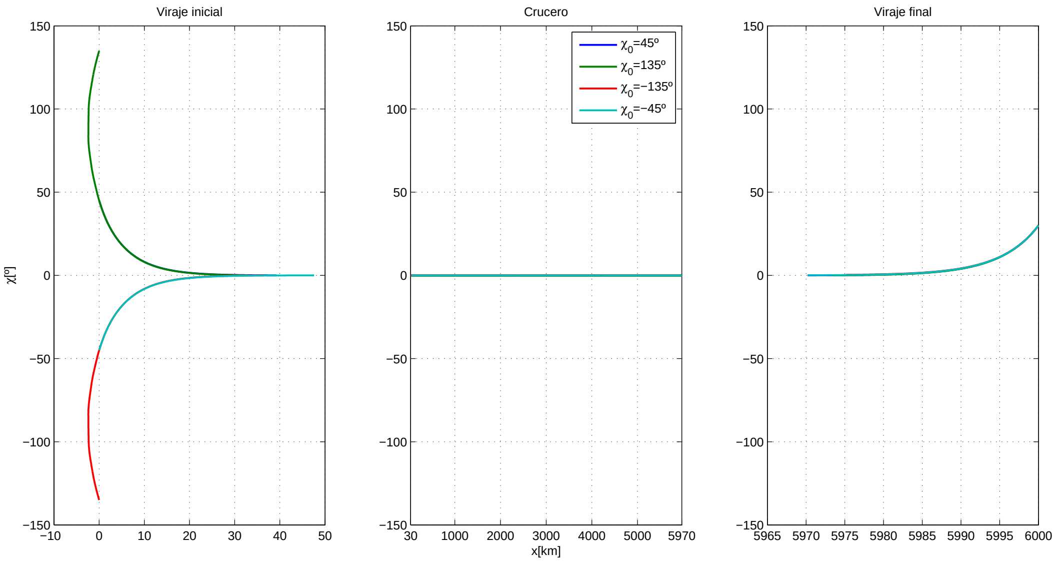


Figura 3.8: Ángulo de guiñada para varios χ_0

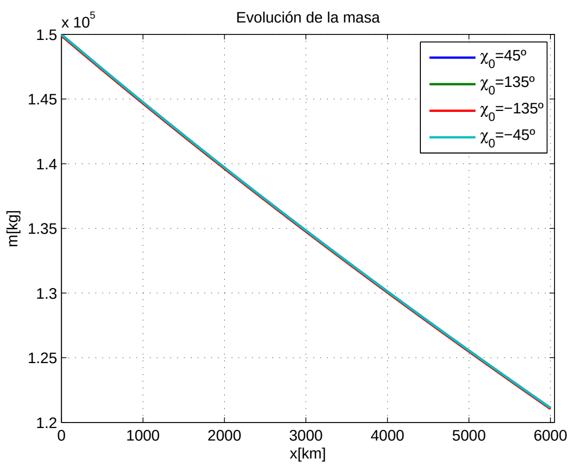


Figura 3.9: Masa para varios χ_0

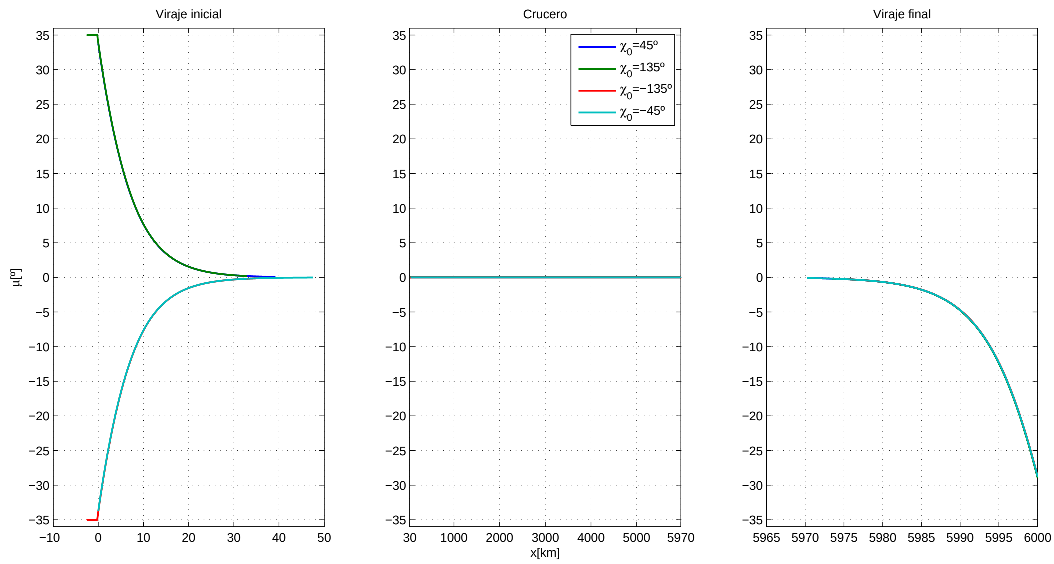


Figura 3.10: Ángulo de alabeo para varios χ_0

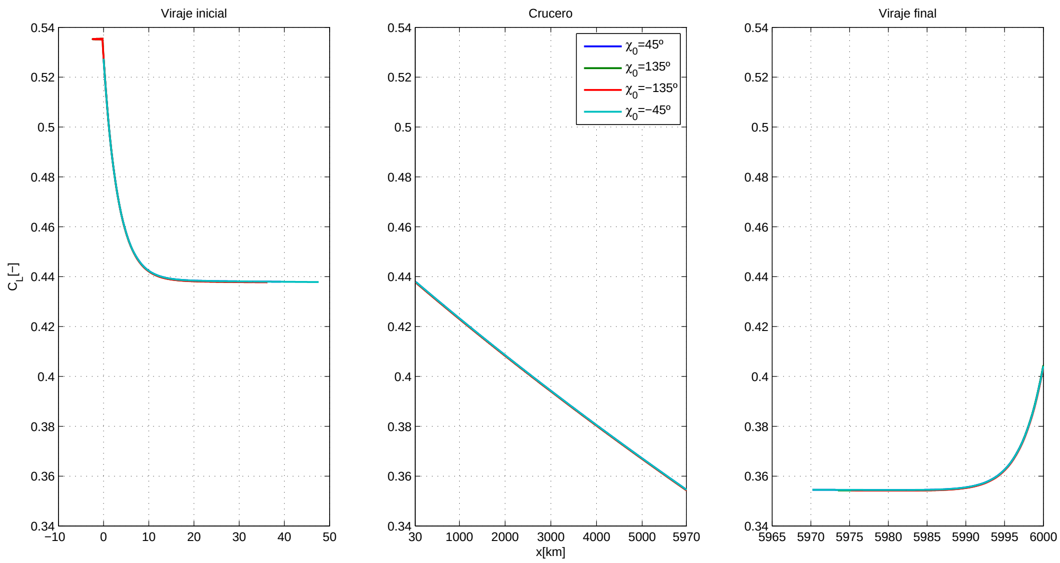


Figura 3.11: Coeficiente de sustentación para varios χ_0

χ_0[º]	m_F [kg]	t_f [h]
45	28885	6.9591
135	28959	6.9743
-135	28959	6.9743
-45	28885	6.9591

Tabla 3.1: Resultados globales para varios χ_0

De las figuras anteriores se extrae que en trayectorias de largo alcance los efectos de variar el ángulo de guiñada inicial son despreciables. Prácticamente se obtienen las mismas evoluciones de $\chi(x)$, $m(x)$, $\mu(x)$ y $C_L(x)$, y por tanto da igual el ángulo de guiñada inicial. Las cuatro opciones gastan aproximadamente el mismo combustible (el error máximo es de un 0.26 %). Como ya se ha comentado anteriormente, los efectos de los virajes inicial y final están confinados en regiones muy pequeñas de la trayectoria. Al variarse un parámetro que afecta exclusivamente al tramo de viraje inicial y estar todos los demás fijados, siendo la distancia tan larga, sólo se observan efectos apreciables en ese tramo de viraje inicial. Un resultado interesante es que el ángulo de alabeo sigue la misma evolución para el par de ángulos que están en el mismo semiplano, por tanto se podría tener una ley universal de control $\mu(x)$ independientemente del ángulo de guiñada inicial (como se verá en los siguientes resultados, esto es debido a la simetría particular de los ángulos elegidos en este caso). Con el objetivo de analizar el control y el coeficiente de sustentación con más claridad, se representan frente al tiempo:

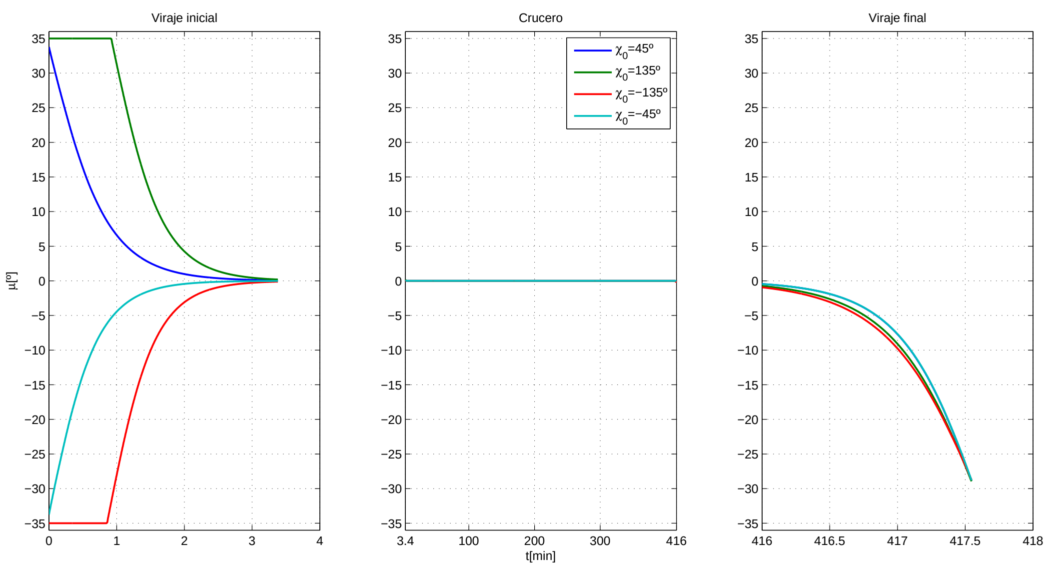


Figura 3.12: Ángulo de alabeo para varios χ_0

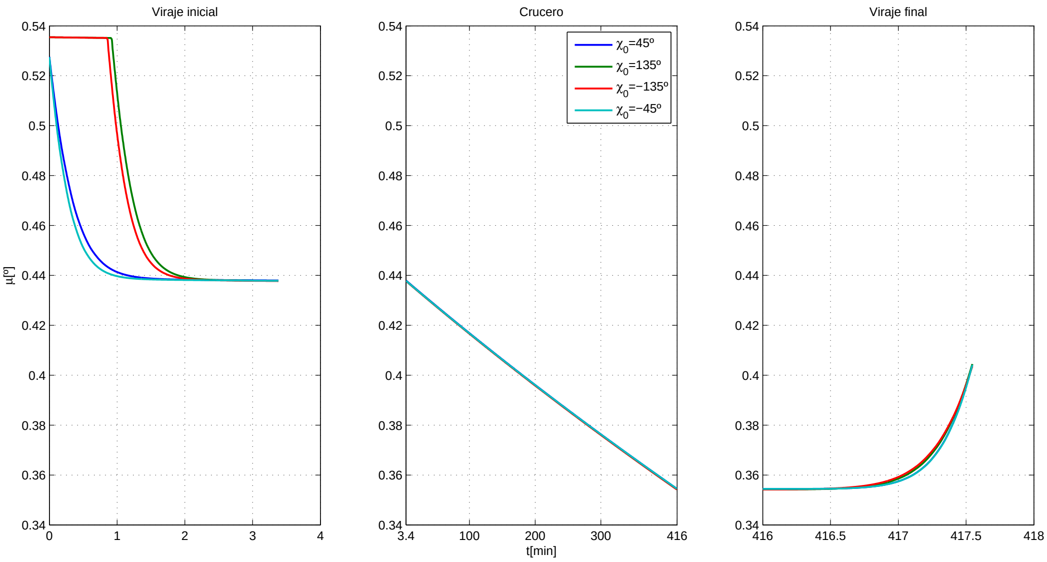


Figura 3.13: Coeficiente de sustentación para varios χ_0

Los ángulos que más potencia de control necesitan son los correspondientes a los cuadrantes segundo y tercero. De hecho, durante gran parte del viraje saturan el ángulo de alabeo. En la trayectoria se oberva que necesitan un mayor radio de curvatura hasta conseguir el ángulo de guiñada casi nulo con el que empiezan el tramo de crucero. El consumo de las trayectorias correspondientes a los ángulos de 135º y -135º son prácticamente idénticos; lo mismo ocurre con los ángulos de 45º y -45º. No obstante, estas dos últimas trayectorias consumen y tardan menos que las primeras debido a que se necesitan unos menores ángulos de alabeo. Por tanto, un menor valor del coeficiente de sustentación hace que se tenga un menor valor del coeficiente de resistencia, y en consecuencia una menor resistencia aerodinámica y un menor consumo de combustible. Se observa que cuando se tiene el ángulo de alabeo saturado, el coeficiente de sustentación apenas sufre variaciones apreciables debido a que solo depende de la masa, y ésta última apenas sufre variaciones apreciables en ese tramo del viraje.

Por último, para terminar este conjunto de resultados de largos alcances, se varían los ángulos de guiñada finales. Se fija el Mach de vuelo a 0.8 y el ángulo de guiñada inicial a 0º. Al ser el ángulo de guiñada inicial nulo, el viraje inicial se da a lo largo del crucero gradualmente.

χ_f[º]	m_F [kg]	t_f [h]
30	28876	6.9580
60	28886	6.9594
90	28904	6.9633
120	28932	6.9697

Tabla 3.2: Resultados globales para varios χ_f

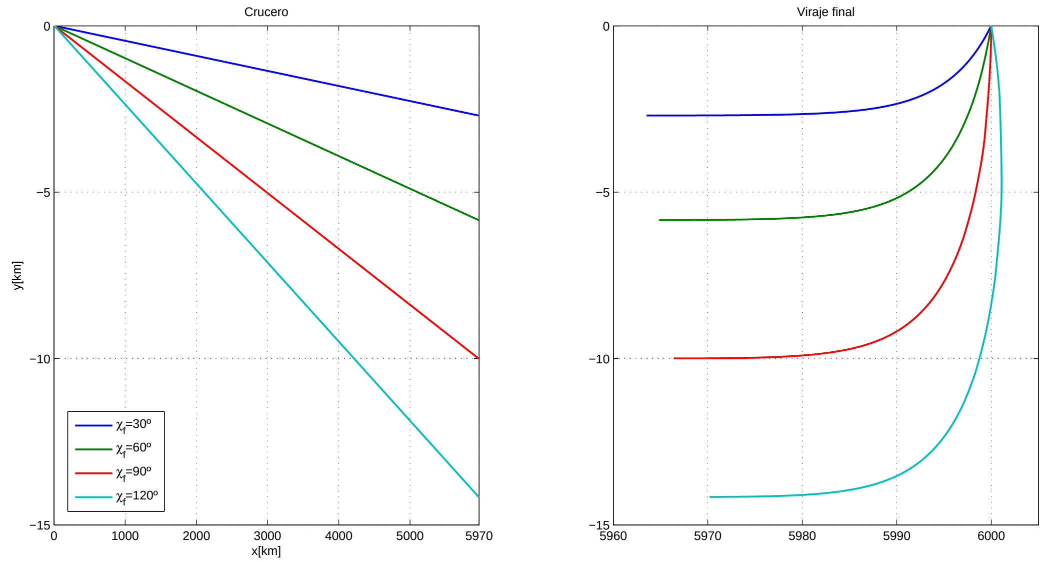


Figura 3.14: Trayectoria para varios χ_f

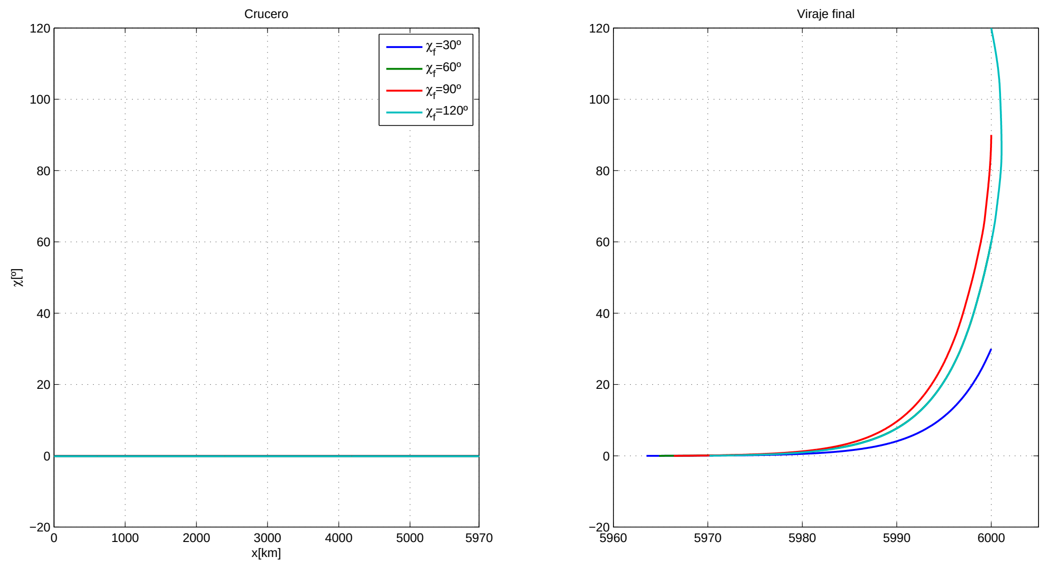


Figura 3.15: Ángulo de guiñada para varios χ_f

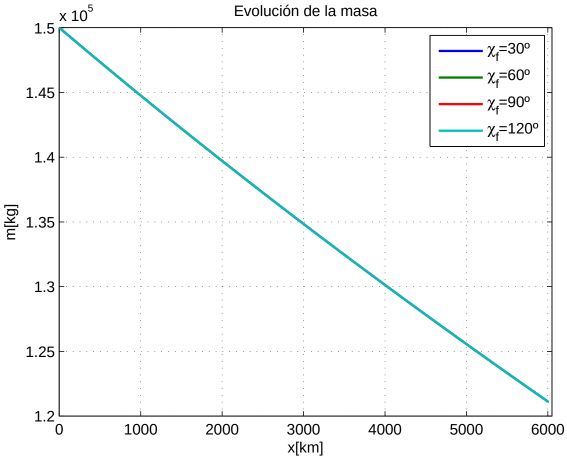


Figura 3.16: Masa para varios χ_f

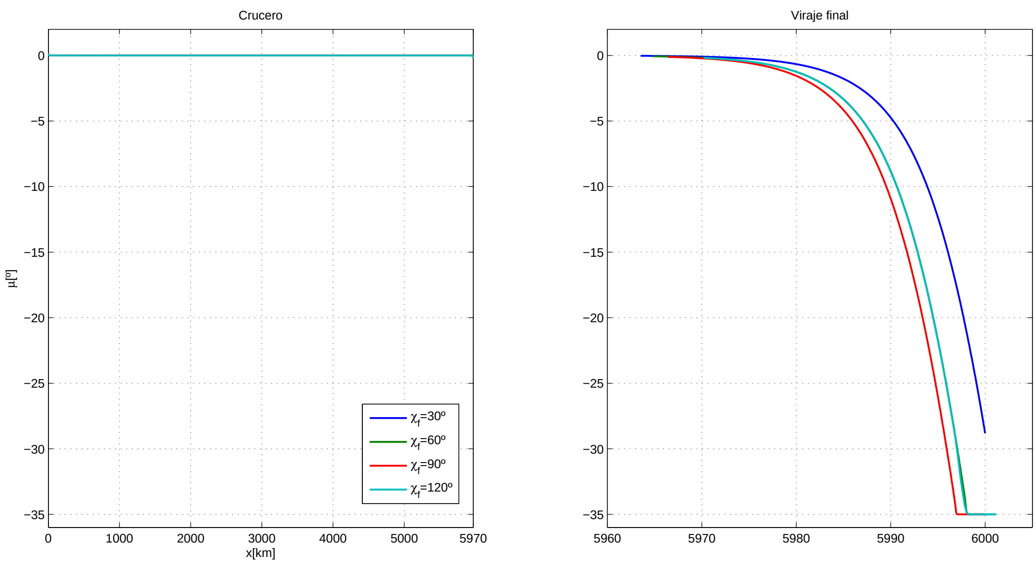


Figura 3.17: Ángulo de alabeo para varios χ_f

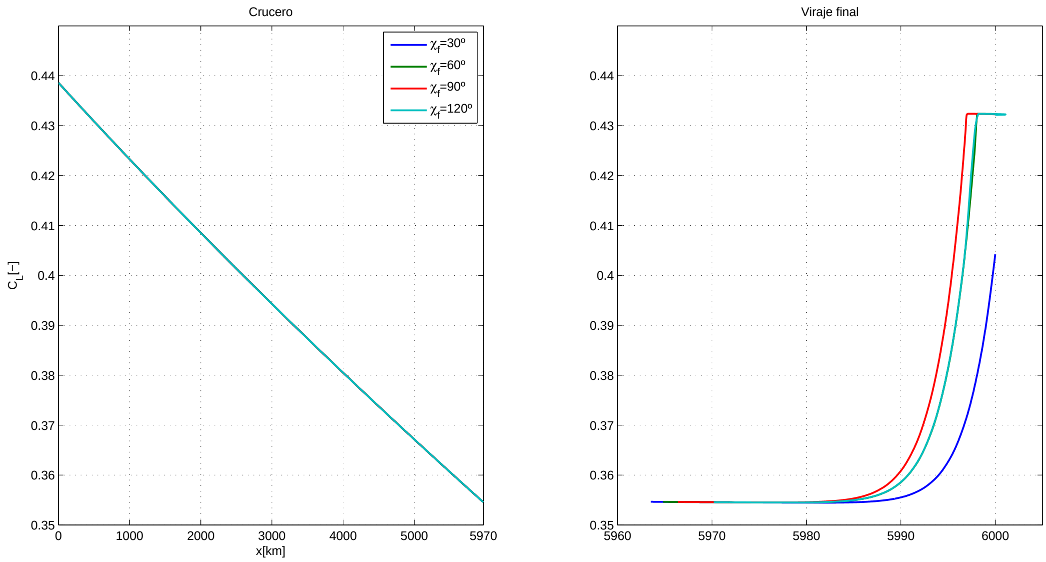


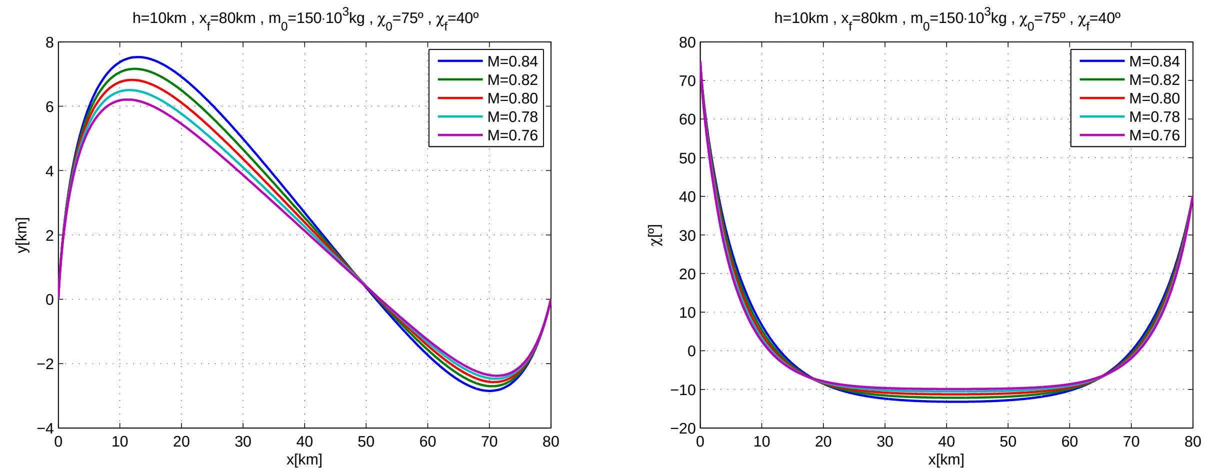
Figura 3.18: Coeficiente de sustentación para varios χ_f

Se extraen las mismas conclusiones que cuando se variaba el ángulo de guiñada inicial (el mayor porcentaje de diferencia en masa de combustible es de un 0.19 %). Esta vez al estar los ángulos de guiñada final contenidos en [0,180º] se concluye que trayectorias correspondientes a ángulos más grandes necesitan una potencia de control mayor durante mayor tiempo para cumplir la condición de contorno final. En el instante inicial las trayectorias asociadas a ángulos mayores tienden a virar más que los pequeños, siendo el ángulo de guiñada de las primeras en crucero más negativo. En cuanto al consumo se obtiene que las trayectorias correspondientes a ángulos más pequeños necesitan menos combustible en comparación con las otras, de hecho la que menos consume es la asociada a 30º. Esto es debido al efecto, ya explicado anteriormente, que la potencia de control tiene sobre el coeficiente de resistencia. Se observa también que cuanto menor es el ángulo de guiñada final, menos se tarda en recorrer la trayectoria, lo cual es lógico al tener la misma velocidad y tener que recorrer una menor distancia para llegar al punto final.

En definitiva, el efecto de los virajes en trayectorias de largo alcance es prácticamente despreciable. Puede hacerse una analogía con la capa límite que aparece cuando una corriente fluida incide sobre un sólido: sus efectos son inapreciables en prácticamente todo el dominio fluido, pero el fluido está obligado a cumplir las condiciones de contorno en esa región. En este problema el fluido sería la aeronave y la capa límite ambos virajes. El tramo de crucero es el más relevante a efectos prácticos. Cabe mencionar que sería más adecuado variar la velocidad a lo largo de la trayectoria en vez de fijarla a un valor constante arbitrario. Sería un caso más general que daría una mejor solución; esto se trata en el Capítulo 4.

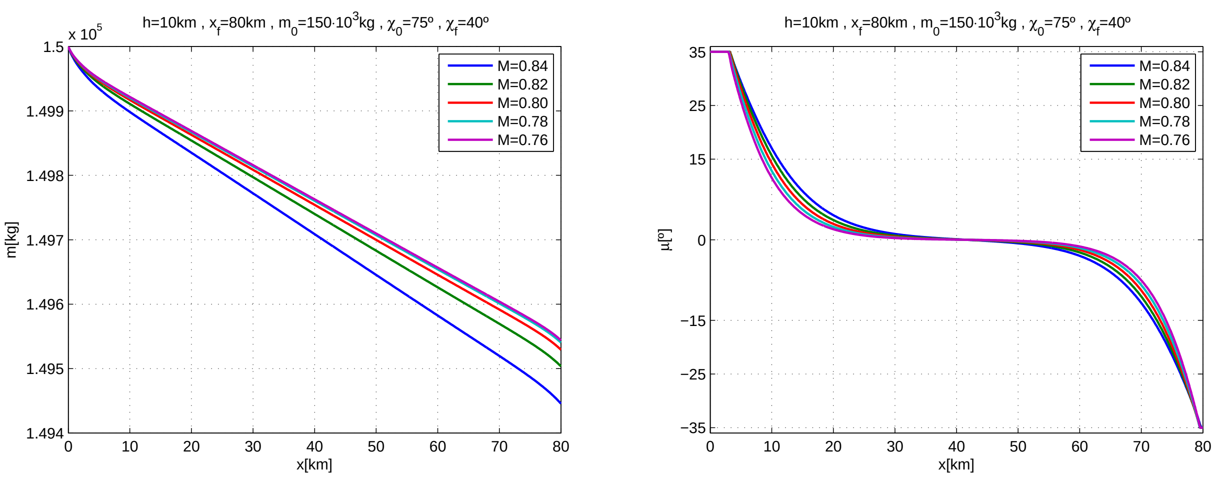
3.3.2. Resultados de corto alcance

A continuación, se muestran los resultados globales (m_F y t_f) y se representan la trayectoria, $\chi(x)$, $m(x)$, $\mu(x)$ y $C_L(x)$ para varios valores del número de Mach entre 0.76 y 0.84, x_f=80 km, χ_0=75º y χ_f=40º.



(a) (b)

Figura 3.19: (a) Trayectoria y (b) ángulo de guiñada para varios M



(a) (b)

Figura 3.20: (a) Masa y (b) ángulo de alabeo para varios M

M[-]	m_F [kg]	t_f [min]
0.84	554.38	5.6265
0.82	496.40	5.7425
0.80	470.66	5.8664
0.78	459.52	5.9988
0.76	456.05	6.1398

Tabla 3.3: Resultados globales de corto alcance para varios M

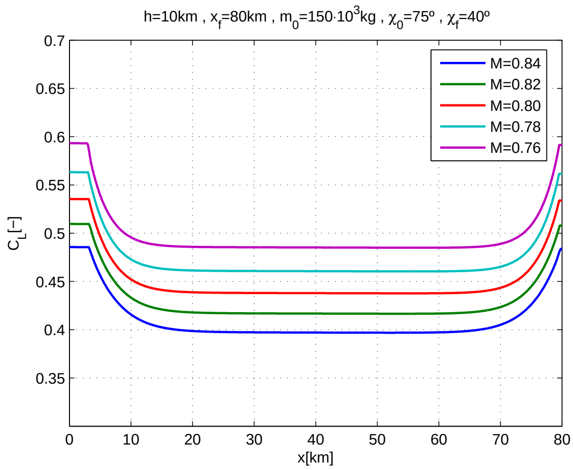


Figura 3.21: Coeficiente de sustentación para varios M

Se obtiene que, conforme se aumenta el Mach de vuelo, más camino debe recorrer la aeronave durante la trayectoria (aunque, al ir a mayor velocidad, acaba tardando menos globalmente). Al ser más grandes los radios de giro conforme aumenta la velocidad se tiene que las trayectorias que más valor absoluto de ángulo de guiñada en crucero necesitan son las de mayor velocidad al tenerse que enlazar dos tramos de mayor curvatura. Las variaciones en masa de la aeronave son ínfimas, del orden de un 0.33 %. Se observa que debe haber un Mach óptimo de vuelo al igual que en el caso del largo alcance.

En cuanto al ángulo de alabeo se observa que se satura al inicio y al final de la trayectoria. Esto se manifiesta en que el C_L sufre variaciones bruscas en las transiciones de los tramos de viraje a crucero. Y, por tanto, se tienen aumentos del C_D. Números de Mach más altos hacen que se requieran coeficientes de sustentación más bajos como es de esperar.

Por último se varía χ_0 dejando $\chi_f \equiv cte$, y viceversa, para comparar las diferentes trayectorias que se obtienen. Las gráficas obtenidas se muestran en las páginas siguientes, así como las tablas de resultados globales.

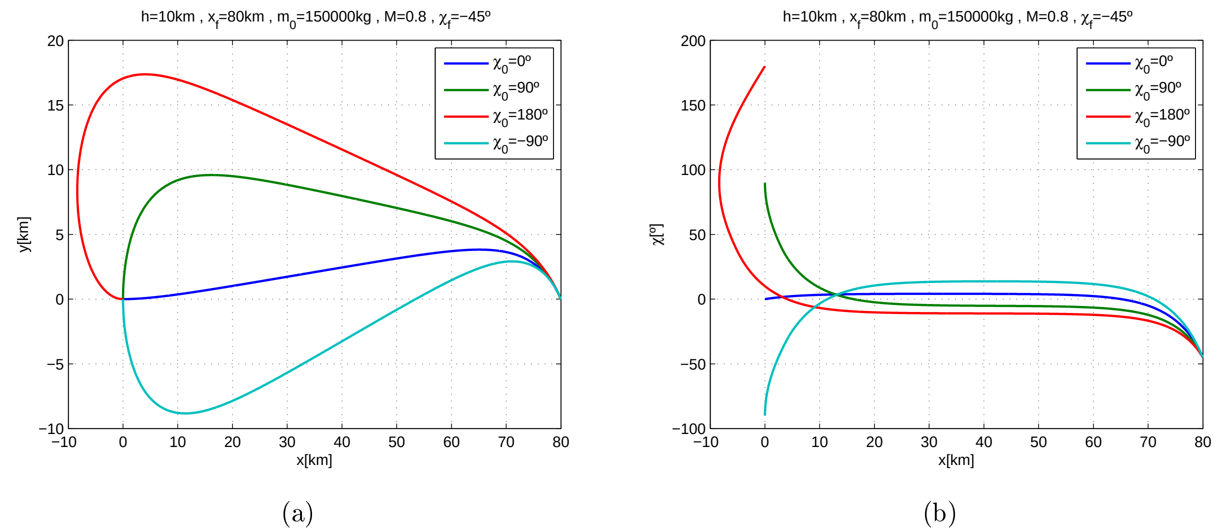


Figura 3.22: (a) Trayectoria y (b) ángulo de guiñada para varios χ_0

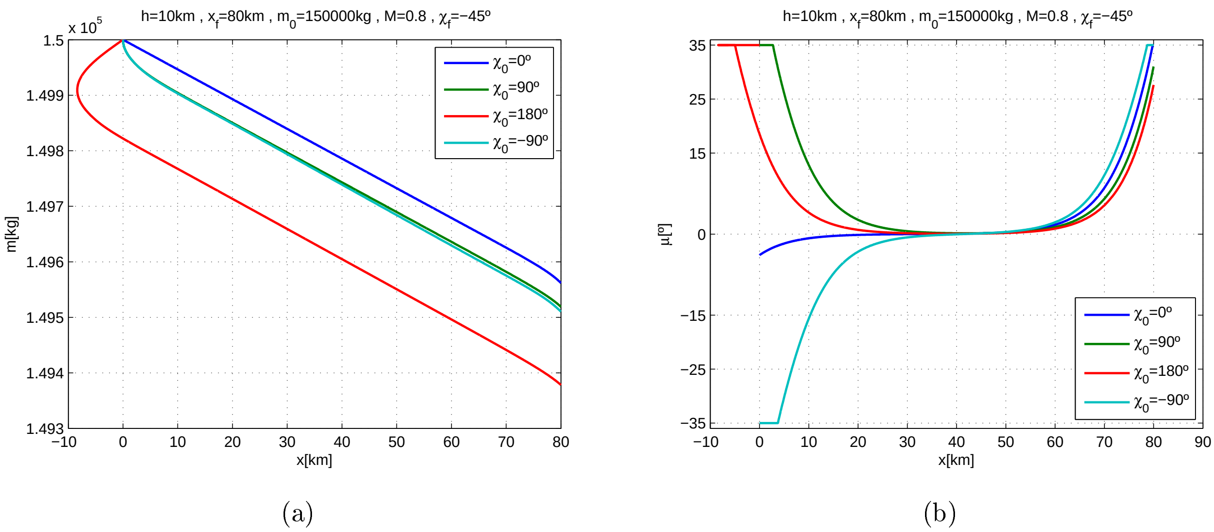


Figura 3.23: (a) Masa y (b) ángulo de alabeo para varios χ_0

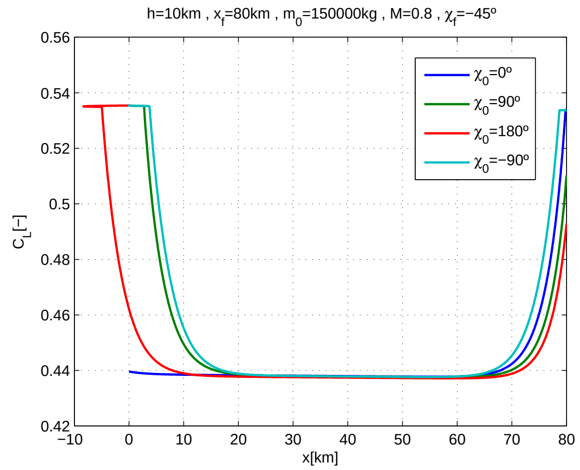
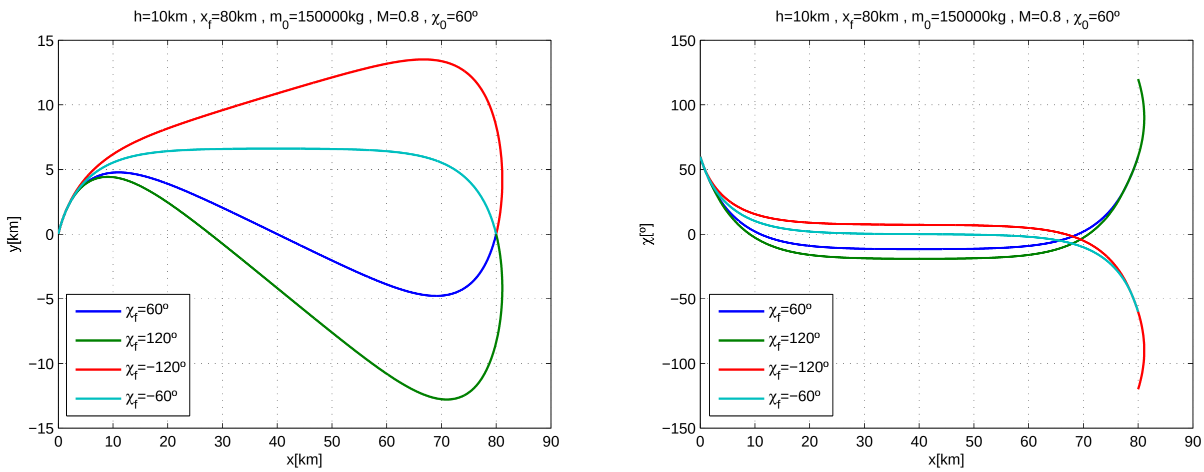


Figura 3.24: Coeficiente de sustentación para varios χ_0

χ_0[º]	m_F [kg]	t_f [min]
0	437.98	5.6343
90	480.91	6.0071
180	621.68	7.5751
-90	489.60	6.0392

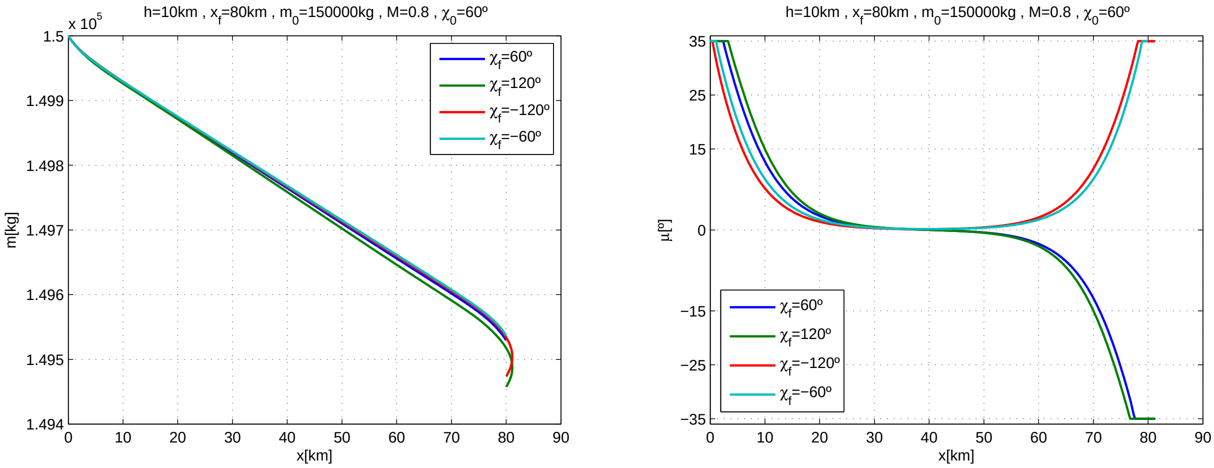
Tabla 3.4: Resultados globales de corto alcance para varios χ_0

Al variar los ángulos de guiñada iniciales se observa que los tiempos finales son diferentes entre sí. La trayectoria que más tarda en llegar es la de 180º, al ser la que más debe reajustar su dirección para llegar al punto final con el ángulo de guiñada deseado. La que menos tiempo tarda es la opuesta a 180º, es decir, la de 0º, al ser la que más directa puede ir al punto final y no necesitar de un viraje inicial acusado (el ángulo de alabeo inicial es de apenas 4º). Entre las trayectorias de 90º y la de -90º como era de esperar, la de 90º tarda menos, ya que el ángulo de guiñada final le es más favorable al no tener la trayectoria que cortar el eje horizontal en ningún momento, sin embargo las diferencias de tiempo son pequeñas. Como era de esperar, la trayectoria con peor consumo es la de 180º, lo cual es deducible de la gráfica 3.23 (b), ya que tiene el control saturado más tiempo que la de 90º y -90º. La que menos consume es la trayectoria de 0º: sólo necesita más ángulo de alabeo al llegar al final. Entre la de 90º y -90º, la primera consume un poco menos que la segunda por lo ya comentado anteriormente. También se pueden extraer las conclusiones anteriores viendo los coeficientes de sustentación necesarios a lo largo de la trayectoria en la figura 3.24.



(a) (b)

Figura 3.25: (a) Trayectoria y (b) ángulo de guiñada para varios χ_f



(a) (b)

Figura 3.26: (a) Masa y (b) ángulo de alabeo para varios χ_f

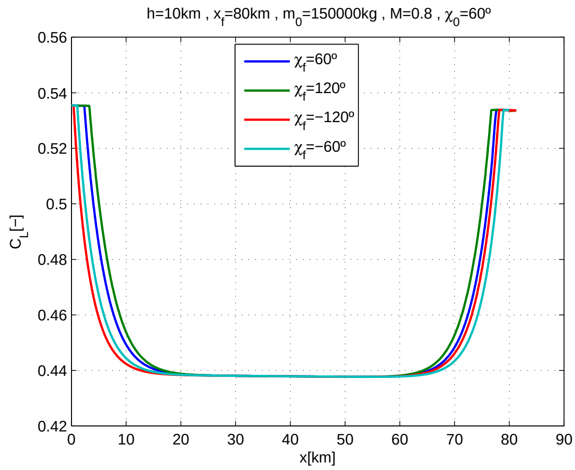


Figura 3.27: Coeficiente de sustentación para varios χ_f

χ_0[º]	m_F [kg]	t_f [min]
60	470.52	5.8476
120	542.69	6.5681
-120	526.34	6.4693
-60	463.28	5.8235

Tabla 3.5: Resultados globales de corto alcance para varios χ_f

Las conclusiones a extraer al variar el ángulo de guiñada final son similares. En términos de consumo de combustible y tiempo, se observa que hay dos pares análogos de similitud entre las soluciones. Las soluciones de 120º y -120º son muy parecidas en algunos aspectos, así como la de 60º y -60º. Sin embargo en cada par de soluciones, las que no deben pasar por el eje horizontal para ajustar su trayectoria obtienen ligeramente mejores resultados que sus parejas.

3.4. Comparación con trayectorias subóptimas

En este apartado, se compara la trayectoria obtenida mediante la formulación en control óptimo con una trayectoria subóptima. Esta última consiste en realizar cada tramo de viraje mediante dos circunferencias tangentes entre sí, siendo una de ellas tangente al eje x y la otra al vector dirección del ángulo de guiñada inicial o final en el punto inicial o final respectivamente. Al considerarse que la velocidad es constante, la única forma de que el radio de las circunferencias sea constante a lo largo del viraje es que en cada circunferencia el ángulo de alabeo sea constante a su vez. Se elige la potencia de control máxima en cada caso.

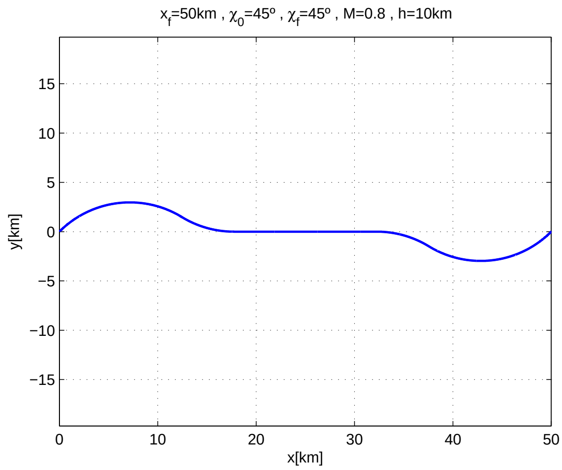


Figura 3.28: Trayectoria subóptima para un caso típico

En primer lugar, se hallará el viraje inicial a realizar en caso de tener un ángulo de guiñada inicial distinto de cero. El radio de cada circunferencia es $R = \left|\frac{V^2}{gtan\mu}\right|$, siendo μ:

$$\begin{array}{llll} \mu_1 = 35^o & \mu_2 = -35^o & \text{si} & \chi_0 \in [0, 180^o] \\ \mu_1 = -35^o & \mu_2 = 35^o & \text{si} & \chi_0 \in (-180^o, 0^o) \end{array} \qquad (3.26)$$

En definitiva, cada viraje está compuesto por dos tramos con potencia de control máxima para tener el menor radio de giro posible. El siguiente paso será determinar dónde están situados los centros de cada circunferencia para seguidamente hallar el punto de tangencia entre ambas. La primera circunferencia debe pasar por el origen con un ángulo χ_0 por lo que la posición de su centro (x_1,y_1) es:

$$x_1 = \frac{V^2}{gtan\mu_1} sin\chi_0 \qquad y_1 = -\frac{V^2}{gtan\mu_1} cos\chi_0 \qquad \forall\chi_0 \in (-180^o, 180^o] \qquad (3.27)$$

a efectos geométricos también sería válida la solución ($-x_1$,$-y_1$), sin embargo, si se eligiese este centro de circunferencia la trayectoria se acabaría alejando del punto final.

Para hallar el centro de la segunda circunferencia hay que tener en cuenta que la distancia entre los centros de dos circunferencias tangentes es igual a la suma de sus radios. Dado que se quiere que ambas circunferencias tengan el mismo radio, se deduce que el centro de la segunda circunferencia deberá estar contenido en una circunferencia auxiliar de radio $2R$ centrada en (x_1, y_1). Además, se requiere que ésta segunda circunferencia sea tangente al eje horizontal, por lo que el centro de la misma deberá estar contenido en la recta horizontal $y = \frac{V^2}{gtan\mu_1}$. Se concluye que la intersección de la circunferencia auxiliar con la recta horizontal $y = \frac{V^2}{gtan\mu_1}$ determina el centro de la segunda circunferencia.

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (2R)^2 \\ y = \frac{V^2}{gtan\mu_1} \end{cases} \qquad (3.28)$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

$$(x - x_1)^2 + \left(\frac{V^2}{gtan\mu_1} - y_1\right)^2 = (2R)^2 \qquad (3.29)$$

Y despejando x:

$$x = \sqrt{3R^2 + \frac{2V^2}{gtan\mu_1}y_1 - y_1^2} + x_1 \tag{3.30}$$

Donde se toma signo positivo en la raíz, ya que se debe cumplir que $x_2 > x_1$ para que la trayectoria no se aleje del punto final. En definitiva el centro de la segunda circunferencia está situado en:

$$x_2 = \sqrt{3R^2 + \frac{2V^2}{gtan\mu_1}y_1 - y_1^2} + x_1 \qquad y_2 = \frac{V^2}{gtan\mu_1} \qquad \forall \chi_0 \in (-180^o, 180^o] \tag{3.31}$$

A continuación, se muestra esquemáticamente la construcción geométrica realizada:

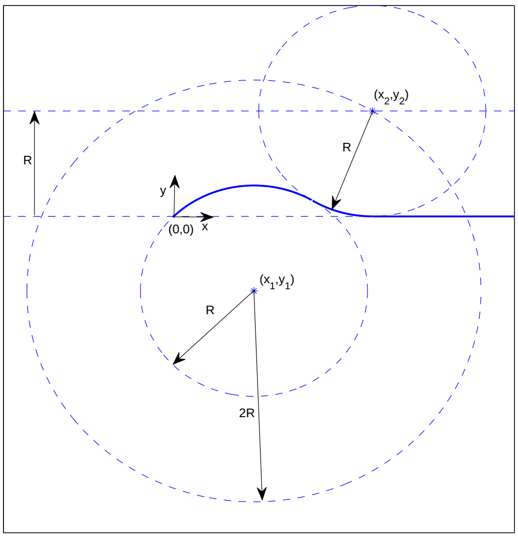


Figura 3.29: Boceto de la construcción geométrica

El incremento $\Delta\chi$ de cada una de las circunferencias se deducirá a partir del ángulo τ_1 que forma la recta que une los centros de ambas circunferencias con el eje horizontal. Esto es debido a que el punto de tangencia está contenido en la recta que une los centros de ambas circunferencias:

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \qquad \tau_1 = arccos\left(\frac{x_2 - x_1}{\left\|\overrightarrow{O_1O_2}\right\|}\right) \tag{3.32}$$

Una vez conocido τ_1, se concluye que las variaciones en el ángulo de guiñada de la primera circunferencia y la segunda son iguales a:

$$\Delta\chi_1 = \frac{\pi}{2} + |\chi_0| - |\tau_1| \tag{3.33}$$
$$\Delta\chi_2 = \frac{\pi}{2} - |\tau_1| \tag{3.34}$$

Y por tanto los tiempos finales de cada tramo medidos desde el tiempo inicial que es cero son:

$$t_{f_1} = \frac{V}{g\,|tan\mu_1|}\Delta\chi_1 \tag{3.35}$$
$$t_{f_2} = \frac{V}{g\,|tan\mu_2|}\Delta\chi_2 + t_{f_1} \tag{3.36}$$

Integrando la ecuación diferencial (3.2), las evoluciones del ángulo de guiñada en cada uno de los tramos que componen el viraje es lineal con el tiempo, ya que $\mu \equiv cte$ y $V \equiv cte$:

$$\chi_1(t) = -\frac{gtan\mu_1}{V}t + \chi_0 \tag{3.37}$$
$$\chi_2(t) = -\frac{gtan\mu_2}{V}(t - t_{f_1}) - \frac{tan\mu_1}{|tan\mu_1|}\Delta\chi_1 + \chi_0 \tag{3.38}$$

La posición horizontal y vertical evolucionan de acuerdo a las ecuaciones cinemáticas (2.5) y (2.6). En este caso son fácilmente integrables al ser $\chi(t)$ una función lineal respecto de la variable temporal:

$$x_1(t) = -\frac{V^2}{gtan\mu_1}(sin\chi_1(t) - sin\chi_0) \tag{3.39}$$
$$y_1(t) = \frac{V^2}{gtan\mu_1}(cos\chi_1(t) - cos\chi_0) \tag{3.40}$$
$$x_2(t) = -\frac{V^2}{gtan\mu_2}(sin\chi_2(t) - sin\chi_2(t_{f_1})) + x_1(t_{f_1}) \tag{3.41}$$
$$y_2(t) = \frac{V^2}{gtan\mu_2}(cos\chi_2(t) - cos\chi_2(t_{f_1})) + y_1(t_{f_1}) \tag{3.42}$$

Si se tuviera un cierto ángulo de guiñada final, el procedimiento para hallar el viraje sería muy parecido al caso anterior, sólo que con algunas ligeras modificaciones, el radio de cada circunferencia seguiría siendo $R = \left|\frac{V^2}{gtan\mu}\right|$, siendo el ángulo de alabeo:

$$\begin{array}{llll} \mu_3 = 35^o & \mu_4 = -35^o & \text{si} & \chi_f \in [0, 180^o] \\ \mu_3 = -35^o & \mu_4 = 35^o & \text{si} & \chi_f \in (-180^o, 0^o) \end{array} \tag{3.43}$$

La última circunferencia pasa por el punto final con un ángulo χ_f, de modo que las coordenadas de su centro vienen dadas por:

$$x_4 = x_f - Rsin\chi_f \qquad y_4 = Rcos\chi_f \qquad \forall\chi_f \in (-180^o, 180^o] \tag{3.44}$$

Tal y como se vio anteriormente, intersectando una circunferencia auxiliar de radio dos veces la final y centrada en la circunferencia final con la recta horizontal $y = -\frac{V^2}{gtan\mu_3}$ se obtienen las coordenadas del centro de la tercera circunferencia:

$$\begin{cases} (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 = (2R)^2 \\ y = -\frac{V^2}{gtan\mu_3} \end{cases} \tag{3.45}$$

Sustituyendo la ecuación de la recta en la de la circunferencia:

$$(x - x_4)^2 + \left(-\frac{V^2}{gtan\mu_3} - y_4\right)^2 = (2R)^2 \tag{3.46}$$

Y despejando x:

$$x = -\sqrt{3R^2 - \frac{2V^2}{gtan\mu_3}y_4 - y_4^2} + x_4 \tag{3.47}$$

Se escoge la raíz con signo negativo ya que debe cumplirse que $x_3 < x_4$ para que la trayectoria no se aleje del punto final. En resumen, el centro de la circunferencia que precede a la final está situado en:

$$x_3 = -\sqrt{3R^2 - \frac{2V^2}{gtan\mu_3}y_4 - y_4^2} + x_4 \qquad y_3 = -\frac{V^2}{gtan\mu_3} \qquad \forall\chi_f \in (-180^o, 180^o] \tag{3.48}$$

Al igual que en el caso anterior, para hallar el incremento de ángulo de guiñada de cada una de las dos circunferencias, se hallará el ángulo τ_2 que forma el vector que une los centros de ambas circunferencias con el eje horizontal:

$$\overrightarrow{O_3O_4} = \begin{bmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \end{bmatrix} \qquad \tau_2 = arccos\left(\frac{x_4 - x_3}{\left\|\overrightarrow{O_3O_4}\right\|}\right) \tag{3.49}$$

Una vez conocido este ángulo, se puede deducir que las variación del ángulo de guiñada de cada una de las circunferencias es:

$$\Delta\chi_3 = \frac{\pi}{2} - |\tau_2| \tag{3.50}$$

$$\Delta\chi_4 = \frac{\pi}{2} + |\chi_f| - |\tau_2| \tag{3.51}$$

Al ser el instante inicial cero, el tiempo en el que finaliza el viraje dependerá de la trayectoria que haya seguido la aeronave (seguramente del tiempo final de crucero):

$$t_{f_3} = \frac{V}{g\,|tan\mu_3|}\Delta\chi_3 + t_{f_{cruise}} \tag{3.52}$$

$$t_{f_4} = \frac{V}{g\,|tan\mu_4|}\Delta\chi_4 + t_{f_3} \tag{3.53}$$

Conocidos los resultados anteriores, es posible determinar la evolución del ángulo de guiñada en cada subviraje integrando la ecuación diferencial (3.2):

$$\chi_3(t) = \frac{gtan\mu_3}{V}(t - t_{f_{cruise}}) \tag{3.54}$$

$$\chi_4(t) = \frac{gtan\mu_4}{V}(t - t_{f_3}) + \frac{tan\mu_3}{|tan\mu_3|}\Delta\chi_3 \tag{3.55}$$

Las posiciones en el eje x y en el eje y se pueden obtener fácilmente sin más que integrar las ecuaciones (2.5) y (2.6):

$$x_3(t) = -\frac{V^2}{gtan\mu_3}sin\chi_3(t) + x_{f_{cruise}} \tag{3.56}$$

$$y_3(t) = \frac{V^2}{gtan\mu_3}(cos\chi_3(t) - 1) \tag{3.57}$$

$$x_4(t) = -\frac{V^2}{gtan\mu_4}(sin\chi_4(t) - sin\chi_4(t_{f_3})) + x_3(t_{f_3}) \tag{3.58}$$

$$y_4(t) = \frac{V^2}{gtan\mu_4}(cos\chi_4(t) - cos\chi_4(t_{f_3})) + y_3(t_{f_3}) \tag{3.59}$$

Cómo se haga el tramo de crucero intermedio estará condicionado por el valor que tengan los ángulos de guiñada inicial y final deseados. Se establece por tanto la siguiente lógica condicional:

$$t_{f_{cruise}} = \frac{x_3 - x_2}{V} \quad , \quad x_{f_{cruise}} = x_3 \quad \text{si} \quad \chi_0 \neq 0, \chi_f \neq 0 \tag{3.60}$$

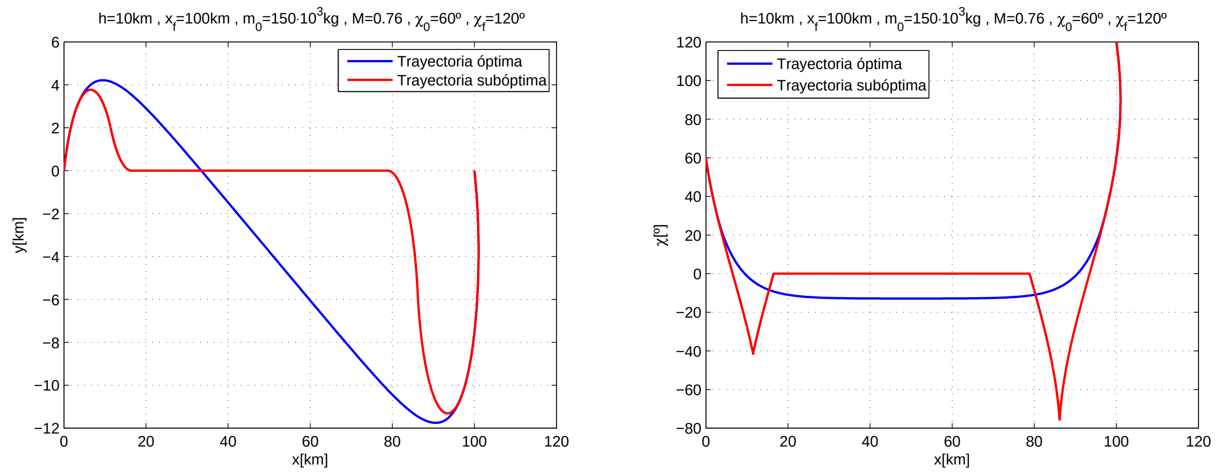
$$t_{f_{cruise}} = \frac{x_f - x_2}{V} \quad , \quad x_{f_{cruise}} = x_f \quad \text{si} \quad \chi_0 \neq 0, \chi_f = 0 \tag{3.61}$$

$$t_{f_{cruise}} = \frac{x_3}{V} \quad , \quad x_{f_{cruise}} = x_3 \quad \text{si} \quad \chi_0 = 0, \chi_f \neq 0 \tag{3.62}$$

$$t_{f_{cruise}} = \frac{x_f}{V} \quad , \quad x_{f_{cruise}} = x_f \quad \text{si} \quad \chi_0 = 0, \chi_f = 0 \tag{3.63}$$

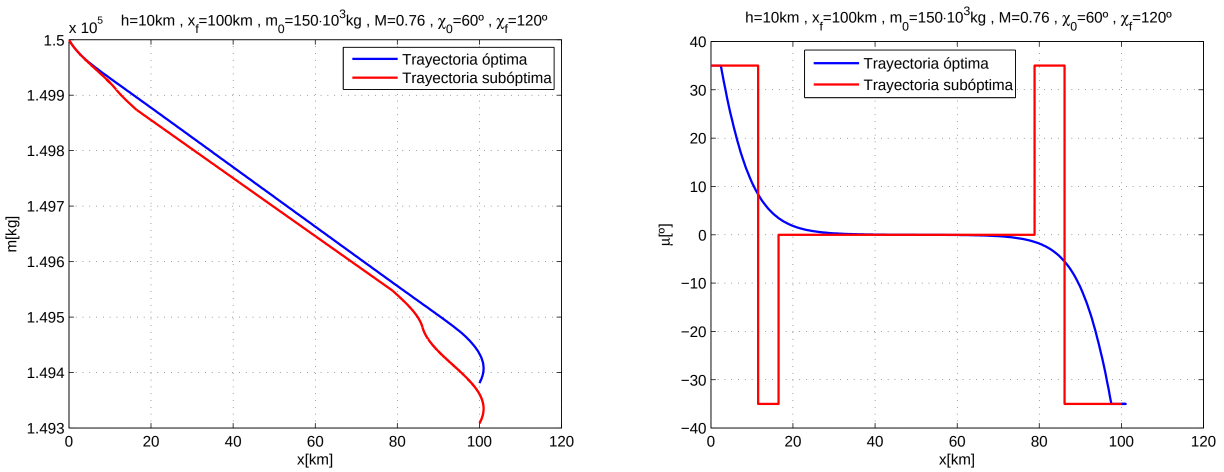
En el último caso, se hace un crucero a velocidad constante y altitud constante hasta el punto final, en este caso la trayectoria subóptima coincide con la óptima. En última instancia, lo que interesa es el consumo de combustible de estas trayectorias para compararlas con las obtenidas mediante la formulación en control óptimo. La variación de la masa a lo largo de la trayectoria viene dada por la ecuación diferencial (3.3). En este caso, al estar compuesta la trayectoria por tramos de altitud, velocidad y ángulo de alabeo constantes, se obtiene que la resistencia aerodinámica sólo depende de la masa de la aeronave en cada instante, y por tanto se puede integrar (3.3) para obtener $m(t)$. Para ello, se hace uso del comando *ode45* en MATLAB que resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). Es importante hacer notar que desde el punto de vista de control del error numérico es preferible integrar cada subtramo por separado y alimentar el siguiente mediante los datos en el instante final del tramo que le precede, en vez de integrar toda la trayectoria en un único *ode45*. Esto es debido a que $\mu(t)$ es un función discontinua en el tiempo, lo que provoca que el error de integración pueda dispararse en los puntos donde confluyen dos subtramos al tenerse bruscas variaciones de μ.

A continuación se muestra la comparativa de y frente a x, $\chi(x)$, $m(x)$, $\mu(x)$ y $C_L(x)$ para las trayectoria óptima y subóptima para: x_f=100 km, χ_0=60º y χ_f=120º.



(a) (b)

Figura 3.30: Comparación: (a) trayectoria y (b) ángulo de guiñada



(a) (b)

Figura 3.31: Comparación: (a) masa y (b) ángulo de alabeo

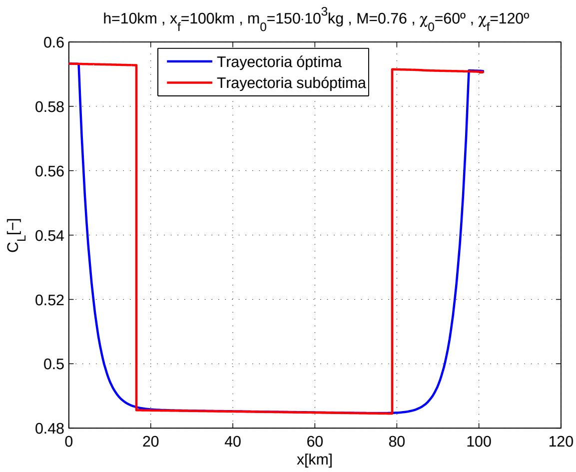


Figura 3.32: Comparación del coeficiente de sustentación

La trayectoria óptima tiene un gasto de combustible de 618.92kg, en cambio la trayectoria subóptima consume 691.55kg. El porcentaje de mejora de la trayectoria óptima frente a la subóptima es de un 11.74 %, un valor nada despreciable. Esto se debe al aumento de la potencia de control necesaria provocado por tener que hacer un viraje final acusado.

Variando los alcances de la trayectoria anterior se obtiene la siguiente tabla comparativa:

x_f[km]	m_F (Óptima)[kg]	m_F (Subóptima)[kg]	Mejora[%]
100	618.92	691.55	11.74
200	1133.1	1211.4	6.91
500	2678.6	2758.8	2.99
1000	5219.7	5298.7	1.51
3000	14935	15007	0.48
5000	24012	24077	0.27

Como era de esperar, optimizar la trayectoria se traduce en mejores resultados en términos de consumo de combustible que no hacerlo. No obstante, a largos alcances se observa que ambas trayectorias difieren muy poco entre sí ($<$1 %). En consecuencia, las trayectorias subóptimas constituyen una buena aproximación a largos alcances.

Se podrían haber empleado otras trayectorias subóptimas para comparar las soluciones como por ejemplo una que esté formada por dos circunferencias de igual radio al inicio y final de la trayectoria enlazadas por la recta tangente que las une. La aeronave recorrería una circunferencia inicial que pasa por el origen con el ángulo de guiñada deseado, llegaría al punto de tangencia con la recta, y recorrería un tramo de crucero hasta llegar al punto de tangencia de la circunferencia final. Por último recorre la circunferencia final y termina en el punto final con el ángulo de guiñada final deseado. Aunque seguramente presentaría mejores resultados al parecerse más a la trayectoria óptima, es más díficil analíticamente hallar la trayectoria anterior que en el caso considerado.

Capítulo 4

Obtención de trayectorias óptimas cuasiestacionarias en el plano horizontal

En este capítulo se analizan las trayectorias de mínimo consumo de combustible en el plano horizontal haciéndose la hipótesis de que el movimiento de la aeronave es cuasiestacionario. Se vuelve a hacer uso de la Teoría de Control Óptimo, descrita en el Apéndice C, para garantizar la optimalidad de la solución. Acto seguido, se describe el método numérico empleado y se muestran los resultados numéricos obtenidos. Por último, se lleva a cabo una comparativa con una trayectoria subóptima y se revisa la hipótesis inicial de movimiento cuasiestacionario.

4.1. Formulación del problema

Tal y como se describió al final del Capítulo 2, se hace uso de la hipótesis simplificativa de considerar el movimiento cuasiestacionario, es decir, la variación de la velocidad con el tiempo se considera despreciable, $\dot{V} \simeq 0$. Esto transforma la ecuación diferencial (2.17) en una ecuación algebraica donde $\pi(t)$ queda determinada en todo instante de tiempo, $\pi(t) = D/T_M$, y en consecuencia no puede ser una variable de control en este caso.

Sin embargo, el que la variación de la velocidad con el tiempo sea despreciable, no quiere decir que no se produzcan variaciones de velocidad a lo largo de la trayectoria. De hecho, esta variable no está fijada, por lo que se considera como variable de control en sustitución de la posición de la palanca de gases.

De nuevo, la integral a minimizar es (2.8):

$$m_F = \int_0^{t_f} cDdt \tag{4.1}$$

donde, sin pérdida de generalidad, se vuelve a tomar $t_0 = 0$, ya que el problema también es autónomo tal y como se deduce de las ecuaciones (2.17)-(2.21). En este caso, estando la resistencia aerodinámica dada por la expresión (2.10), se deduce que el término no constante de la integral es $cV^2C_D(M, C_L)$. Se quiere minimizar el efecto de ese término a lo largo de la trayectoria eligiendo las variables de control, $\mu(t)$ y $V(t)$ adecuadas.

Las ecuaciones de estado y las condiciones de contorno corresponden de nuevo a (2.18)-(2.21):

$$\dot{\chi} = -\frac{g}{V}tan\mu \qquad \chi(0) = \chi_0 \qquad \chi(t_f) = \chi_f \tag{4.2}$$

$$\dot{m} = -cD \qquad m(0) = m_0 \qquad m(t_f) \equiv \text{libre} \tag{4.3}$$

$$\dot{x} = Vcos\chi \qquad x(0) = 0 \qquad x(t_f) = x_f \tag{4.4}$$

$$\dot{y} = Vsin\chi \qquad y(0) = 0 \qquad y(t_f) = 0 \tag{4.5}$$

El Hamiltoniano del sistema vuelve a tener la misma expresión:

$$H = (1 - \lambda_m)cD - \lambda_\chi \frac{g}{V}tan\mu + \lambda_x Vcos\chi + \lambda_y Vsin\chi \tag{4.6}$$

Las ecuaciones dinámicas de los adjuntos y las condiciones de transversalidad son las mismas que en (3.7)-(3.10):

$$\dot{\lambda_\chi} = V(\lambda_x sin\chi - \lambda_y cos\chi) \qquad \lambda_\chi(t_f) \equiv \text{libre} \tag{4.7}$$

$$\dot{\lambda_m} = (\lambda_m - 1)c\frac{\partial D}{\partial m} \qquad \lambda_m(t_f) = 0 \tag{4.8}$$

$$\dot{\lambda_x} = 0 \qquad \lambda_x(t_f) \equiv \text{libre} \tag{4.9}$$

$$\dot{\lambda_y} = 0 \qquad \lambda_y(t_f) \equiv \text{libre} \tag{4.10}$$

Véase el Capítulo 3 para una explicación más detallada de lo anterior. La condición de minimización del Hamiltoniano (C.16) proporciona esta vez (en el Apéndice D se describen las derivadas parciales que aparecen):

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = (1 - \lambda_m)c\frac{\partial D}{\partial \mu} - \lambda_\chi \frac{g}{Vcos^2\mu} = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial H}{\partial V} = (1 - \lambda_m)\left(\frac{\partial c}{\partial V}D + c\frac{\partial D}{\partial V}\right) + \lambda_\chi \frac{gtan\mu}{V^2} + \lambda_x cos\chi + \lambda_y sin\chi = 0 \tag{4.12}$$

Se considera que el tiempo final no está fijado, en consecuencia, el valor del Hamiltoniano debe ser nulo en el instante final según la ecuación (C.10).

$$H(t_f) = \left[(1 - \lambda_m)cD - \lambda_\chi \frac{g}{V}tan\mu + \lambda_x Vcos\chi + \lambda_y Vsin\chi\right]_{t=t_f} = 0 \tag{4.13}$$

Como ya se ha comentado anteriormente el sistema dinámico es autónomo por lo que otra vez el Hamiltoniano es constante según la expresión (C.13), de modo que es nulo en todo instante de tiempo.

En total se tienen seis ecuaciones diferenciales ordinarias (4.2)-(4.5) y (4.7)-(4.8), con nueve condiciones de contorno, seis estados ($\chi(t)$, $m(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $\lambda_\chi(t)$, $\lambda_m(t)$) y tres incógnitas (λ_x, λ_y, t_f). El problema inicial de optimización se formula como un problema de condiciones de contorno.

Por las mismas razones que se comentaron en la sección 3.1, para un mejor control del error numérico se adimensionalizan la masa, el tiempo, la posición en el eje x, la posición en el eje y y la velocidad. En el caso de la velocidad se hace uso del número de Mach para su adimensionalización, al ser de orden unidad y al simplificar el cálculo de ciertas derivadas (el número de Mach juega el papel de variable de control):

$$\bar{m} = \frac{m}{m_0} \qquad \bar{t} = \frac{t}{t_f} \qquad \bar{x} = \frac{x}{\sqrt{x_f^2 + y_f^2}} \qquad \bar{y} = \frac{y}{\sqrt{x_f^2 + y_f^2}} \qquad M = \frac{V}{a} \tag{4.14}$$

Se sigue haciendo uso del superíndice $(\dot{})$ para denotar las derivadas de las variables con respecto al tiempo adimensional. El problema de contorno en las nuevas variables adimensionalizadas queda de la siguiente forma:

$$\dot{\chi} = -\frac{gtan\mu}{aM}t_f \qquad \chi(0) = \chi_0 \qquad \chi(1) = \chi_f \tag{4.15}$$

$$\dot{\bar{m}} = -cD\frac{t_f}{m_0} \qquad \bar{m}(0) = 1 \tag{4.16}$$

$$\dot{\bar{x}} = aMcos\chi\frac{t_f}{x_f} \qquad \bar{x}(0) = 0 \qquad \bar{x}(1) = 1 \tag{4.17}$$

$$\dot{\bar{y}} = aMsin\chi\frac{t_f}{x_f} \qquad \bar{y}(0) = 0 \qquad \bar{y}(1) = 0 \tag{4.18}$$

$$\dot{\lambda_\chi} = aM(\lambda_x sin\chi - \lambda_y cos\chi)t_f \tag{4.19}$$

$$\dot{\lambda_m} = (\lambda_m - 1)c\frac{\partial D}{\partial m}t_f \qquad \lambda_m(1) = 0 \tag{4.20}$$

$$\left[(1-\lambda_m)cD - \lambda_\chi\frac{g}{aM}tan\mu + aM(\lambda_x cos\chi + \lambda_y sin\chi)\right]_{\bar{t}=1} = 0 \tag{4.21}$$

A la hora de obtener las variables de control $\mu(t)$ y $M(t)$, hay que considerar las restricciones que éstas tienen, se trata de hallar:

$$[\mu^*, M^*](\mathbf{y}^*(t), \lambda(t)) = \arg\min H(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}, \lambda(t)), \qquad \forall t \in [t_0, t_f] \tag{4.22}$$

estando μ^* y M^* restringidos por las desigualdades (2.25), (2.27) y (2.28).

4.2. Procedimiento numérico de resolución

En el capítulo anterior, se describían dos tipos de métodos con los que resolver el problema de contorno, los métodos del disparo y los métodos de colocación. El método del disparo no funcionó de la manera esperada, por lo que se resolvió el problema mediante el método de colocación. En el caso cuasiestacionario, al tenerse prácticamente las mismas ecuaciones, salvo por la ecuación adicional de optimización del Hamiltoniano respecto a la velocidad, se decide hacer uso directamente del método de colocación al no esperarse que el método del disparo funcione en un problema más complejo que el del Capítulo 3.

Como ya se describió en 3.2.2, MATLAB incorpora funciones que resuelven problemas de contorno mediante el método de colocación, *bvp4c* y *bvp5c*. Estas funciones requieren a su vez de dos funciones auxiliares, una en la que se les proporcionen las condiciones de contorno y otra en la que se les suministren las ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). Uno de los grandes inconvenientes de estas funciones es que no admiten una matriz de masas singular (de hecho, no admiten matrices de masas), y por tanto no es posible resolver directamente el problema DAE con condiciones de contorno (4.15)-(4.22). Esto conlleva que las variables de control $\mu(t)$ y $M(t)$ deben de ser determinadas en cada paso de integración y en cada evaluación de las condiciones de contorno.

Sin embargo, el Principio del Mínimo establece que el Hamiltoniano tiene que ser mínimo respecto de las variables de control, por lo que, en vez de resolver las ecuaciones (4.11)-(4.12), así como la programación de una lógica de selección de la solución que garantice que se cumplan las restricciones (2.25), (2.27)-(2.28), es posible minimizar directamente el Hamiltoniano mediante la función *fmincon* de MATLAB. Esta función sustituirá a *fsolve* para obtener las variables de control.

La función *fmincon* halla el mínimo de una función que depende de varias variables y éstas están restringidas de alguna forma. Examinando las restricciones (2.25), (2.27)-(2.28), se tienen restricciones del tipo:

$$lb \leq \mathbf{x} \leq ub \tag{4.23}$$

y

$$b(\mathbf{x}) \leq 0 \tag{4.24}$$

donde el vector de variables $\mathbf{x}$ se corresponde con $[\mu,\ M]$, lb y ub son los límites constantes que pueden tener las variables, se tienen para (2.25) y (2.28). Y la función no lineal $b(\mathbf{x})$ se corresponde con la restricción (2.27). La función *fmincon* admite los anteriores tipos restricciones.

A *fmincon* se le proporciona la función donde se evalúa el Hamiltoniano, así como la función que contiene la restricción no lineal (2.27). Los límites constantes se proporcionan directamente en los argumentos de entrada de *fmincon*, no obstante, es necesario dar límites inferiores y superiores. Se da un valor límite inferior del número de Mach de 0.5, valor al que nunca se llega, ya que para todos los valores de μ permitidos, la restricción (2.27) da cotas inferiores del Mach mayores que ese valor.

La función *fmincon* implementa varios algoritmos para la resolución del sistema. Se elige el algoritmo *active-set* ya que toma pasos grandes al evaluar la función, lo cual proporciona rapidez frente a otros métodos ya que *bvp4c* llama a la función de ODE y de condiciones de contorno muchas veces, y cada vez que se las llama, se evalúa *fmincon*.

Adicionalmente, *fmincon* es un método basado en el gradiente, en concreto, el algoritmo *active-set* usa el método del gradiente conjugado. Al necesitar el algoritmo el gradiente, si no se le proporciona analíticamente, lo evalúa numéricamente, lo cual es peor desde el punto de vista del tiempo de computación. Por tanto, se le proporciona a la función tanto el gradiente del Hamiltoniano que viene dado por las expresiones (4.11)-(4.12), así como el gradiente de la función de restricción no lineal dada por (2.27):

$$G = [M^2 sin\mu, -2Mcos\mu] \tag{4.25}$$

El proceso anterior con *fmincon* embebida en la función del sistema de ecuaciones diferencial y en la función de condiciones de contorno conlleva un alto coste computacional. Lo anterior tiene como consecuencia un gran aumento de los tiempos de computación con respecto al problema del Capítulo 3.

Una opción para evitar el proceso anterior, sería derivar las ecuaciones (4.11)-(4.12) con respecto al tiempo apareciendo términos de $\dot{\mu}$ y $\dot{M}$, y las dos ecuaciones algebraicas se convertirían en ecuaciones diferenciales que podrían ser incorporadas a la función de ODE. Sin embargo, al tenerse restricciones sobre los controles, las ecuaciones (4.11)-(4.12) no aplican cuando μ y M se salen de los límites establecidos; en tal caso, habría que imponer el control a uno de sus valores extremos y no se sabría cuándo se debe salir de la región de saturación a la de no saturación y viceversa.

Otra alternativa es hacer uso de la función *fsolve*, pero como ya se ha comentado anteriormente, la lógica de selección de solución es bastante compleja, sobre todo si se tiene la restricción en ambas variables (2.27). Se probó a transformar (2.27) en una restricción inferior al número de Mach tomando μ=μ_{max}, lo cual es una hipótesis conservadora.

Adicionalmente se suministró el Jacobiano que requiere *fsolve* para resolver el sistema (4.11)-(4.12) mediante unas diferencias finitas centradas. También podría hacerse analíticamente pero el derivar la ecuación (4.12) de nuevo respecto al número de Mach es bastante tedioso. Las diferencias centradas se postulan de la siguiente forma:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+\epsilon)-f(x-\epsilon)}{2\epsilon} \tag{4.26}$$

Siendo ϵ una cantidad suficientemente pequeña, se probó con varios valores de ϵ usando la función *bvp4c*, así como las funciones *bvp4c* y *bvp5c* con el Jacobiano calculado numéricamente por MATLAB:

Función	Jacobiano *fsolve*	ϵ	$t_{cpu}[s]$
bvp4c	MATLAB	-	258.1349
bvp5c	MATLAB	-	291.1603
bvp4c	Diferencias centradas	10^{-5}	277.6194
bvp4c	Diferencias centradas	10^{-6}	280.0998
bvp4c	Diferencias centradas	10^{-7}	269.3825

Tabla 4.1: x_f=100 km , χ_0=60º , χ_f=30º , h=10 km , m_0=150 · 10^3 kg

Para el caso analizado, se observa que *bvp4c* es el método más rapido calculando el Jacobiano que requiere *fsolve*, es mejor que *bvp5c* y que sus homólogos que lo calculan por diferencias centradas. Es de esperar que se mantengan las diferencias en tiempos de computación para cualquier otro caso. En consecuencia, el problema se resolverá con *bvp4c* y el Jacobiano calculado por MATLAB.

Sin embargo, no se obtuvó una mejora en tiempos de computación lo suficientemente apreciable como para que el uso de *fsolve* mereciera la pena frente a *fmincon*, además se obtiene una solución peor en términos de optimalidad al restringirse más el número de Mach por la hipótesis realizada.

Como iterante inicial del *bvp4c*, se usa la solución obtenida en el Capítulo 3, es decir, se calculan ($\chi(\bar{t})$, $m(\bar{t})$, $x(\bar{t})$, $y(\bar{t})$, t_f, λ_x y λ_y) para los mismos x_f, χ_0 y χ_f, y se impone una velocidad constante cercana a la óptima en crucero (M=0.76).

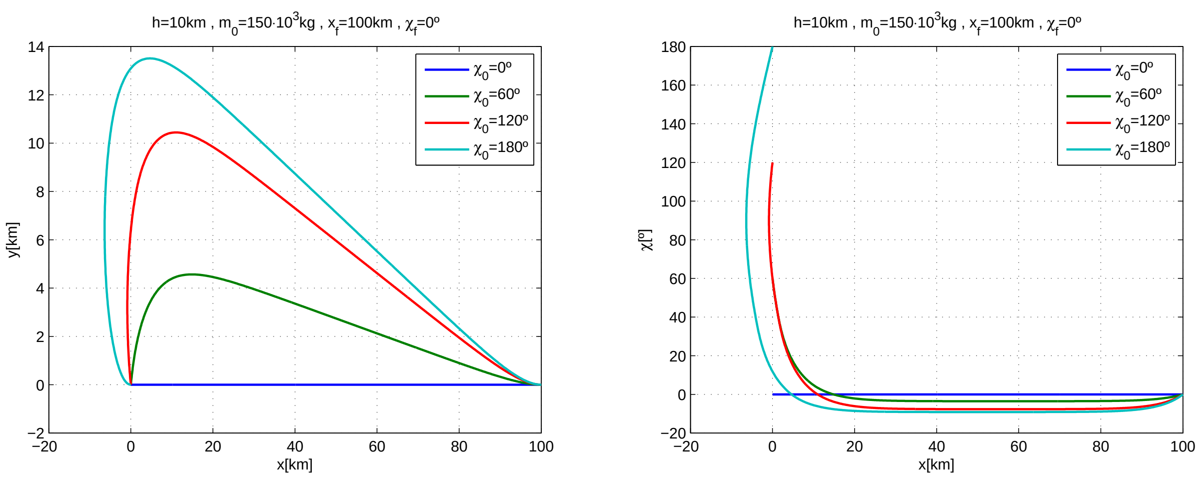
4.3. Análisis de resultados

En esta sección se muestran los resultados obtenidos del problema. Primero se muestran las soluciones obtenidas para cortos alcances, acto seguido se muestra un caso paradigmático de largo alcance. Después se lleva a cabo una comparación con una trayectoria subóptima, y por último se lleva a cabo una crítica a la hipótesis de movimiento cuasiestacionario.

4.3.1. Resultados de corto alcance

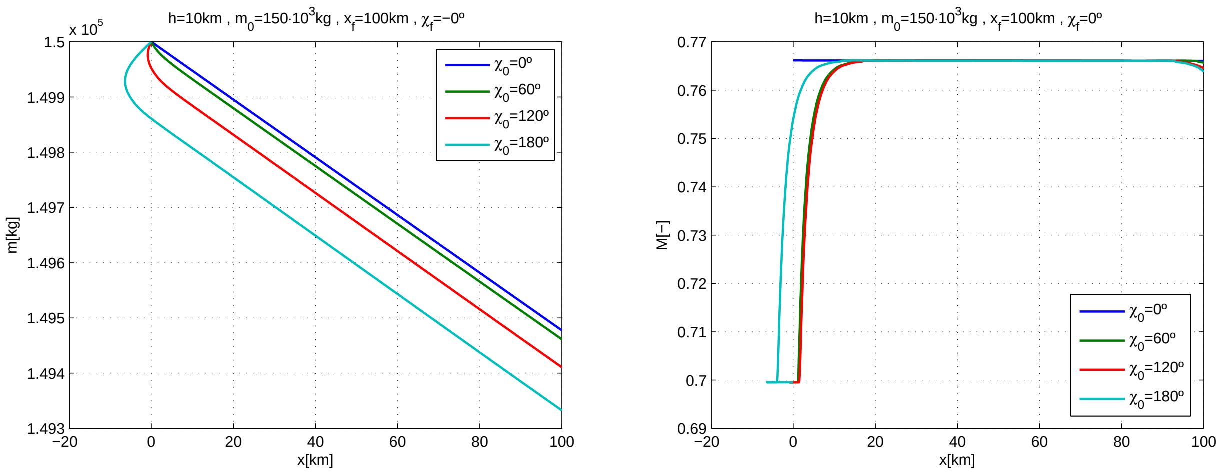
Se muestran la trayectoria y la evolución con la distancia recorrida en el eje x del ángulo de guiñada, la masa, el número de Mach, el ángulo de alabeo, el coeficiente de sustentación y la posición de la palanca de gases. Como resultados globales se dan los valores de la masa de combustible consumida y el tiempo final. En este problema resulta de interés variar los ángulos de guiñada inicial y final. El alcance se fija en 100 km.

Se representan las gráficas anteriormente descritas para χ_f=0º y diferentes valores del ángulo de guiñada inicial, χ_0=[0º,60º,120º,180º]. Se eligen solo ángulos de guiñada inicial entre [0º,180º] al ser la solución simétrica para los contenidos entre [-180º,0º].



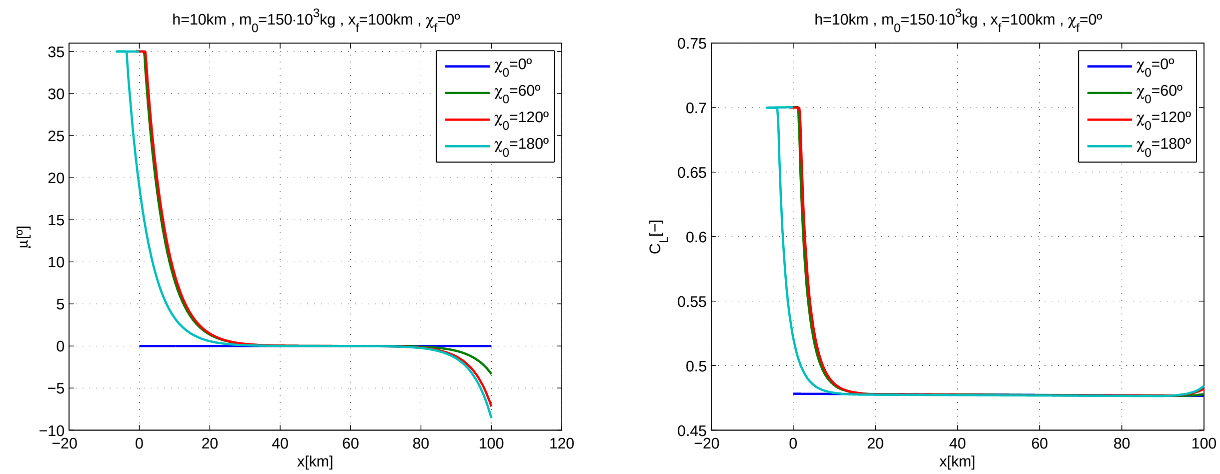
(a) (b)

Figura 4.1: (a) Trayectoria y (b) ángulo de guiñada para varios χ_0



(a) (b)

Figura 4.2: (a) Masa y (b) número de Mach para varios χ_0



(a) (b)

Figura 4.3: (a) Ángulo de alabeo y (b) coeficiente de sustentación para varios χ_0

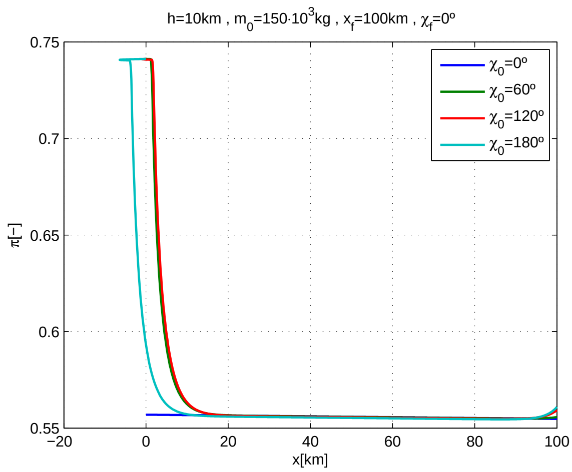


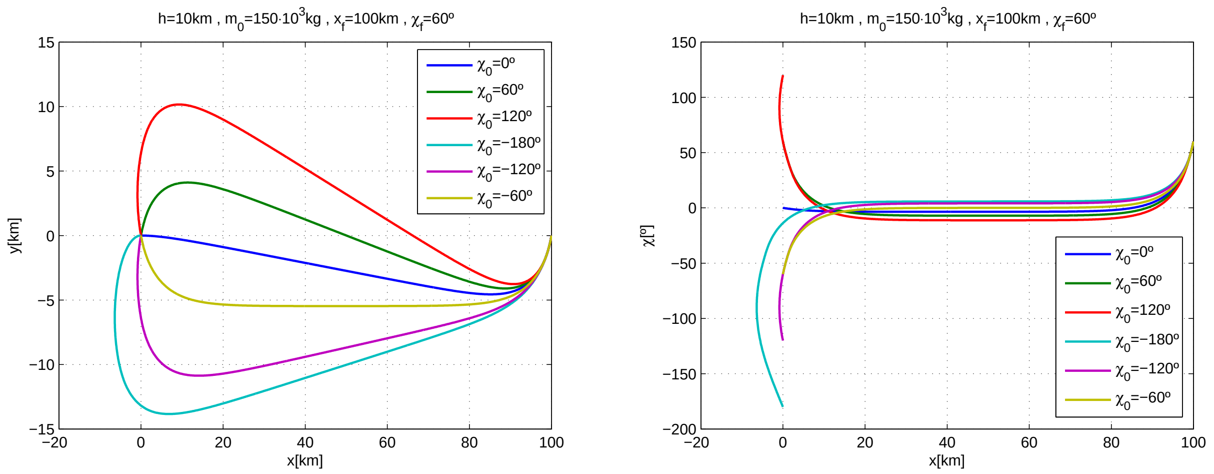
Figura 4.4: Posición de palanca para varios χ_0

Al inicio de la trayectoria de los ángulos de 120º y 180º se saturan ambas variables de control. Dado que las variaciones en masa son pequeñas, el coeficiente de sustentación se mantiene prácticamente constante, y en consecuencia la resistencia aerodinámica y la posición de palanca también. La trayectoria correspondiente al ángulo de guiñada inicial de 180º tiene dos soluciones por simetría, dependiendo de si se toma 180º o -180º como ángulo de guiñada se activará una u otra. A continuación se muestra una tabla con los resultados globales, m_F y t_f. Como era de esperar, trayectorias asociadas a mayores ángulos de guiñada iniciales consumen más y tardan más.

χ_0[º]	m_F[kg]	t_f[min]
0	522.48	7.2652
60	538.74	7.4030
120	589.32	7.9709
180	667.58	8.9313

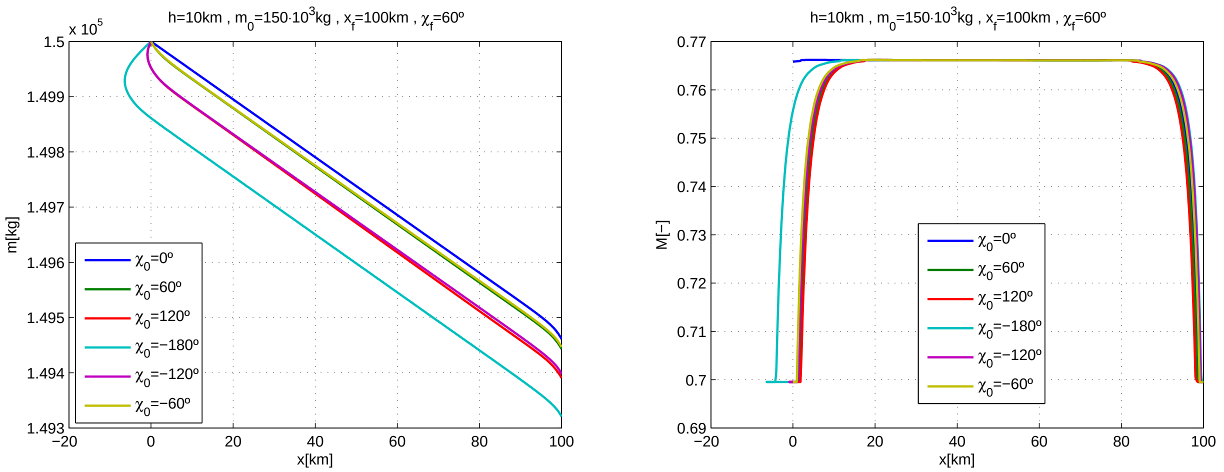
Tabla 4.2: x_f=100 km , χ_f=0º , h=10 km , m_0=150·10^3 kg

Acto seguido, se representa la solución para un ángulo de guiñada final de 60º, por lo que se pierde la simetría respecto al eje x de la solución. Se elige el siguiente abanico de ángulos de guiñada iniciales, χ_0=[0º,60º,120º,-180º,-120º,-60º].



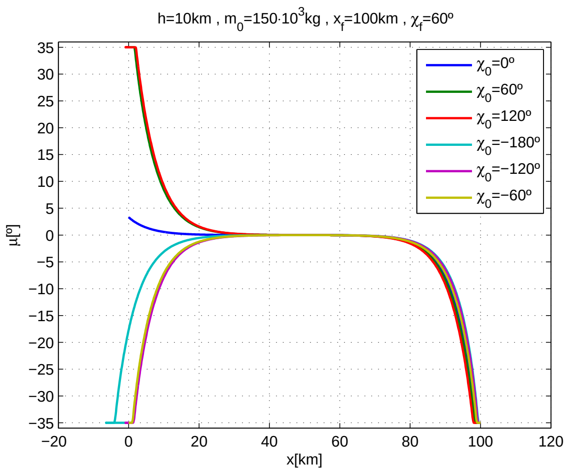
(a) (b)

Figura 4.5: (a) Trayectoria y (b) ángulo de guiñada para varios χ_0

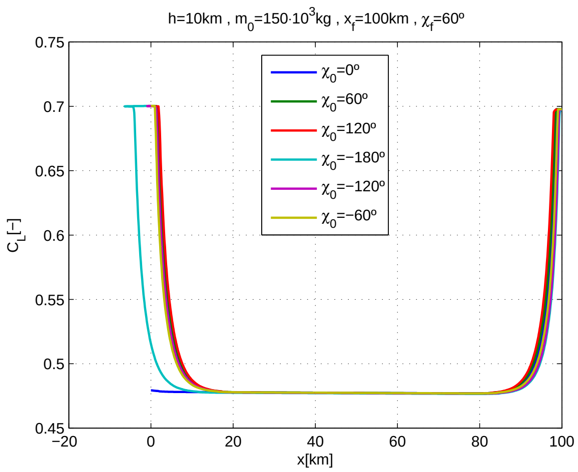


(a) (b)

Figura 4.6: (a) Masa y (b) número de Mach para varios χ_0



(a)



(b)

Figura 4.7: (a) Ángulo de alabeo y (b) coeficiente de sustentación para varios χ_0

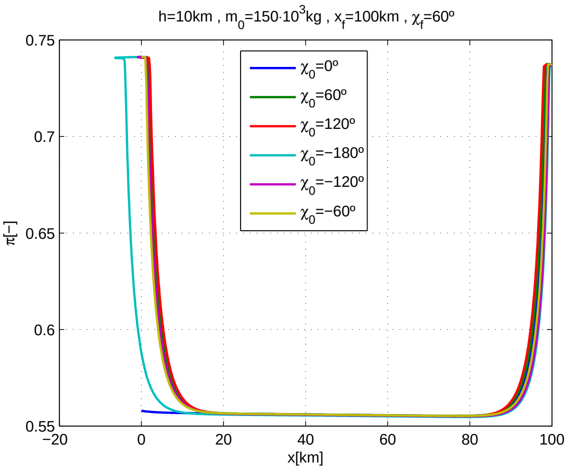


Figura 4.8: Posición de palanca para varios χ_0

Se deduce que los trayectorias más desfavorables en términos de consumo de combustible son las que más longitud de arco recorren. A mismo valor absoluto del ángulo de guiñada inicial, las trayectorias asociadas a los ángulos que están contenidos en el semiplano negativo presentan un menor consumo de combustible y tiempo de vuelo al no tener que cruzar el eje x para cumplir con la condición de contorno final.

En cuanto al ángulo de guiñada, se vuelve a observar lo mismo que en el Capítulo 3. La trayectoria se compone de viraje-crucero-viraje. Las distancias recorridas a lo largo del eje y son de un orden de magnitud menor que las recorridas en el eje x, por lo que en el tramo de crucero los ángulos de guiñada son constantes y cercanos a cero.

Las soluciones de 120º, -120º y -60º saturan inicialmente el Mach de vuelo, al necesitar un viraje inicial de poco radio de curvatura para minimizar la duración e intensidad del viraje. Durante el tramo de crucero, todas las trayectorias tienen un valor aproximado de M^*=0.765.

Lo cual está en consonancia con las conclusiones extraídas al respecto en el Capítulo 3.

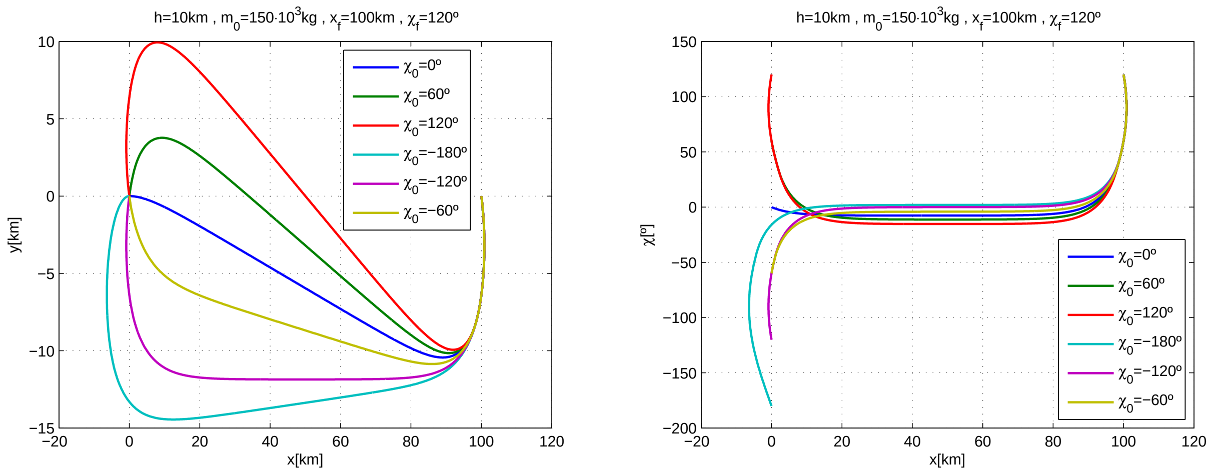
El control en ángulo de alabeo satura en todos los virajes, salvo en el de 0º, que tiene un tramo de crucero al principio donde se va virando lentamente. El coeficiente de sustentación y la palanca de gases mantienen valores constantes al inicio de la trayectoria correspondientes a los ángulos de guiñada de 120º, 180º y -120º, ya que ambos controles están saturados.

A continuación se muestra la tabla con resultados globales de las seis trayectorias.

χ_0[º]	m_F[kg]	t_f[min]
0	538.70	7.4028
60	556.72	7.5508
120	609.35	8.1397
-180	679.18	9.0339
-120	601.72	8.0808
-60	553.20	7.5317

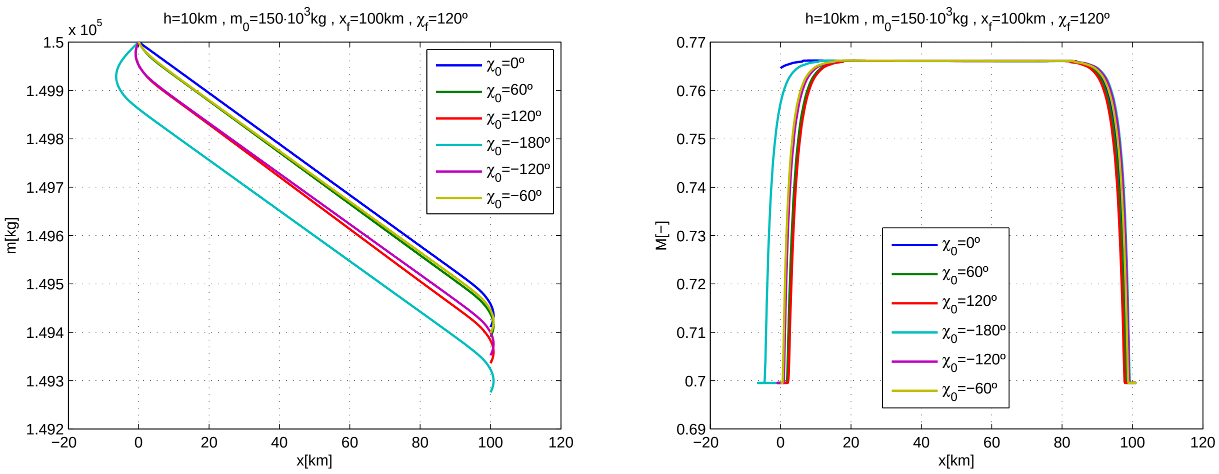
Tabla 4.3: x_f=100 km , χ_f=60º , h=10 km , m_0=150·10^3 kg

Se representan los resultados para los mismos ángulos de guiñada iniciales que en el anterior conjunto de soluciones, el ángulo de guiñada final se cambia a 120º.



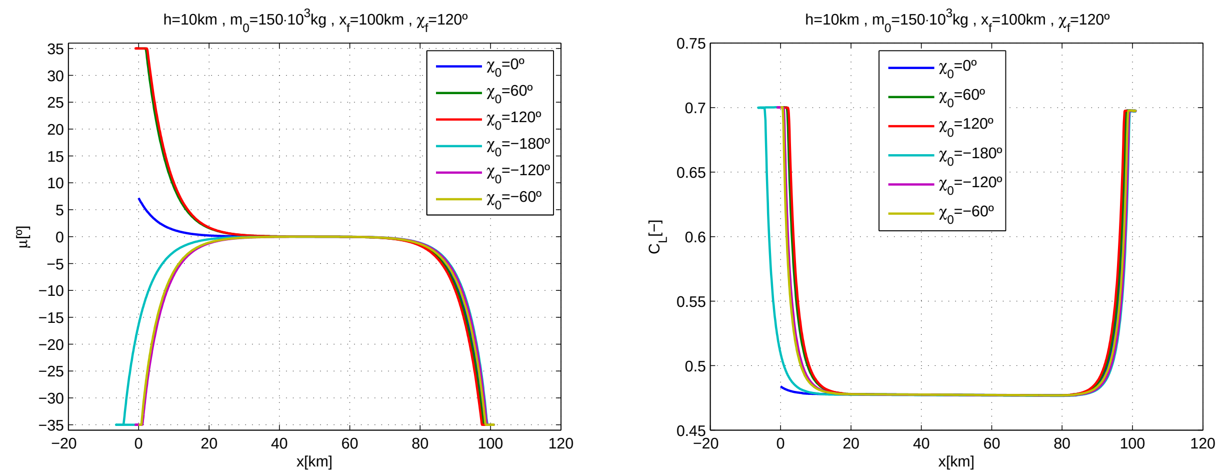
(a) (b)

Figura 4.9: (a) Trayectoria y (b) ángulo de guiñada para varios χ_0



(a) (b)

Figura 4.10: (a) Masa y (b) número de Mach para varios χ_0



(a) (b)

Figura 4.11: (a) Ángulo de alabeo y (b) coeficiente de sustentación para varios χ_0

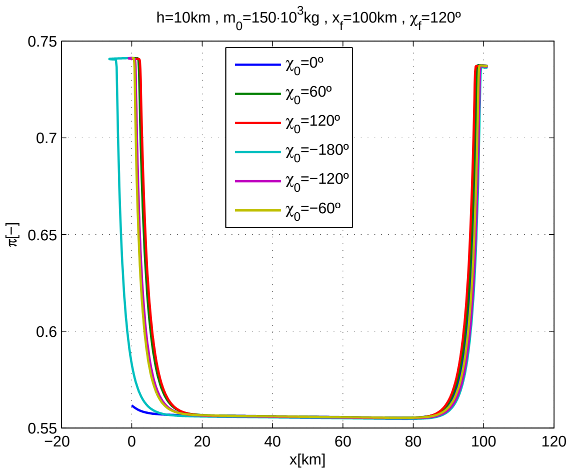


Figura 4.12: Posición de palanca para varios χ_0

Se extraen las mismas conclusiones que en el caso de χ_f=60º, aunque en esta ocasión al ser el ángulo de guiñada final más extremo, las trayectorias saturan el control en velocidad al final del viraje.

Nótese el cambio de pendiente en el coeficiente de sustentación y la posición de palanca de gases en el momento en el que se pasa de los tramos de viraje al tramo de crucero y viceversa. Esto es debido al cambio de pendiente del número de Mach que de ser prácticamente lineal se adapta hasta ser nula en el crucero. Se muestra la siguiente tabla con los resultados globales de las trayectorias anteriores:

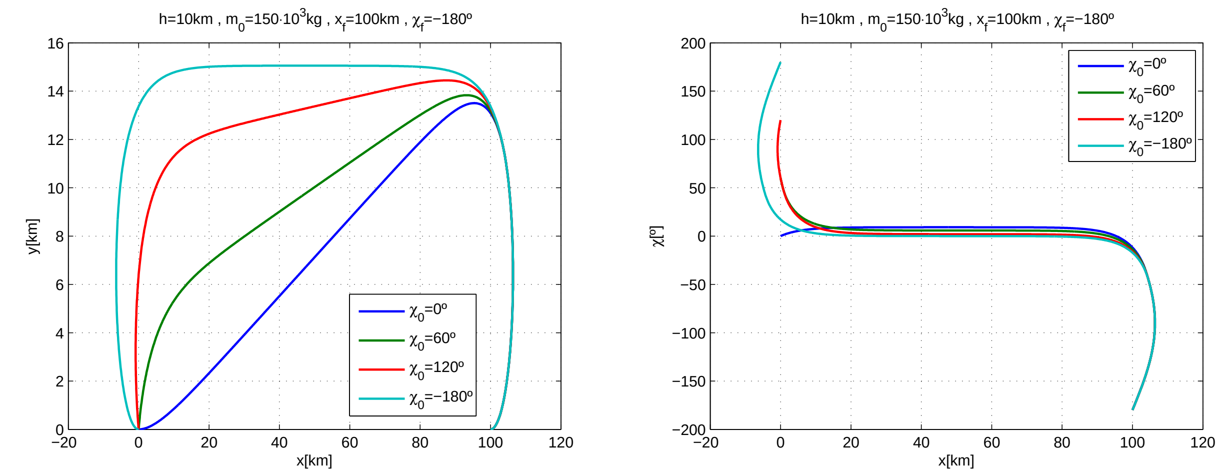
χ_0[º]	m_F[kg]	t_f[min]
0	589.23	7.9706
60	609.30	8.1397
120	664.24	8.7615
-180	724.15	9.5350
-120	647.77	8.5964
-60	601.66	8.0807

Tabla 4.4: x_f=100 km , χ_f=120º , h=10 km , m_0=150·10^3 kg

Comparando esta tabla con la tabla 4.3, se obtienen peores resultados en términos de consumo y tiempo. Esto era de esperar, ya que hay que hacer un viraje final más acusado para cumplir la condición de contorno final.

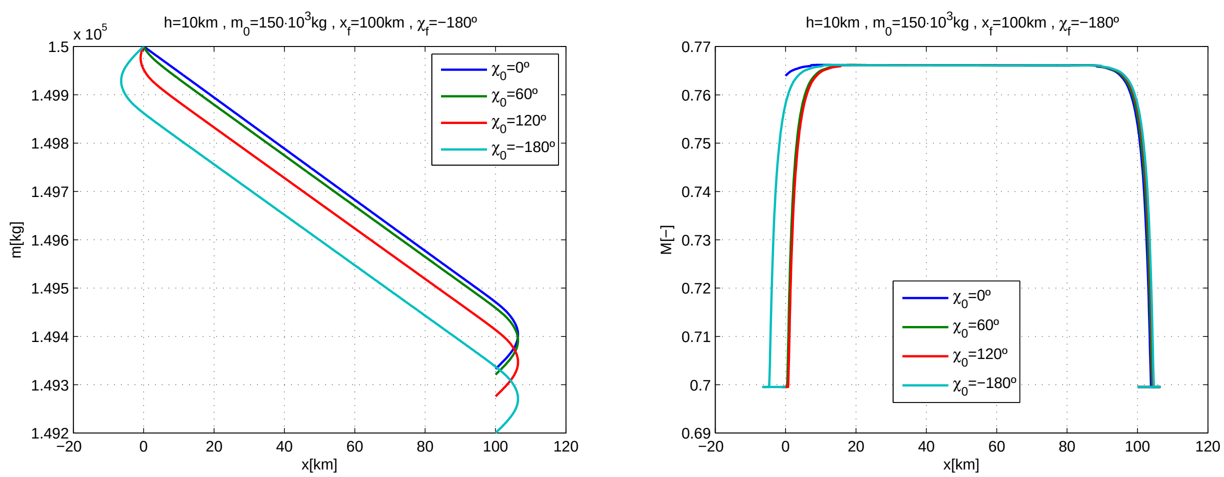
Dada la simetría de las trayectorias respecto al eje x no se muestran trayectorias correspondientes a ángulos de guiñada finales entre -180º y 0º. Por ejemplo, la solución para -120º es la misma que ahora sólo que el ángulo de guiñada inicial de 60º se corresponde en este caso con su opuesto -60º.

Por último, se muestran las variables del problema correspondientes a los mismos ángulos de guiñada iniciales que en el primer conjunto de soluciones representado, solo que ahora el ángulo de guiñada final tiene un valor de -180º.



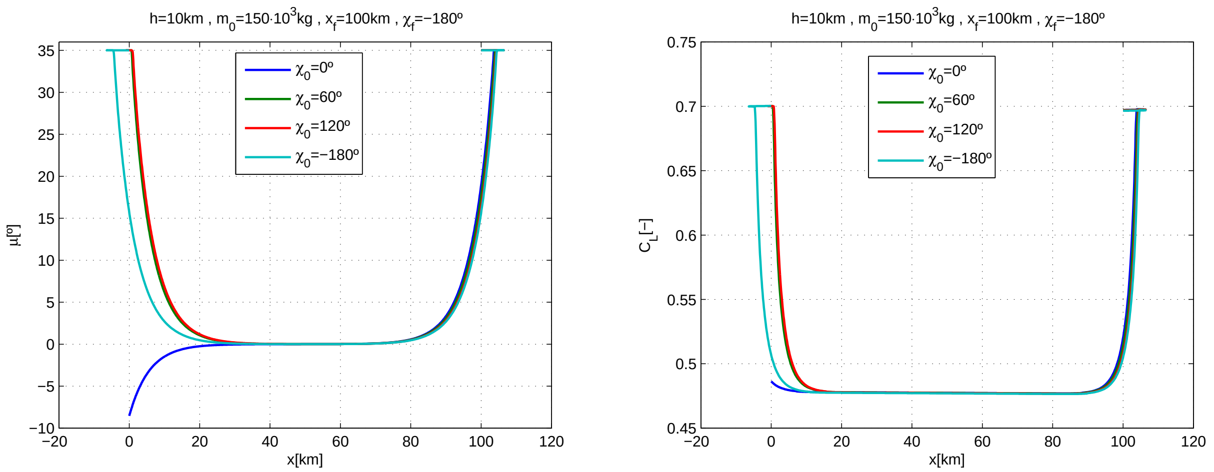
(a) (b)

Figura 4.13: (a) Trayectoria y (b) ángulo de guiñada para varios χ_0



(a) (b)

Figura 4.14: (a) Masa y (b) número de Mach para varios χ_0



(a) (b)

Figura 4.15: (a) Ángulo de alabeo y (b) coeficiente de sustentación para varios χ_0

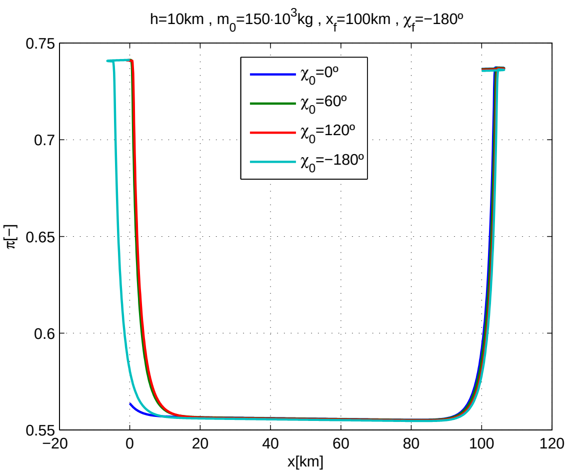


Figura 4.16: Posición de palanca para varios χ_0

Se observan las mismas tendencias que en el primer conjunto de soluciones representado. Existen dos soluciones para las trayectorias con ángulos de guiñada iniciales de 0º y 180º dada la simetría de la trayectoria respecto al eje x. En la tabla siguiente se muestran los resultados globales:

χ_0[º]	m_F[kg]	t_f[min]
0	667.44	8.9310
60	679.07	9.0337
120	724.09	9.5348
180	799.86	10.466

Tabla 4.5: x_f=100 km , χ_f=-180º , h=10 km , m_0=150·10^3 kg

En el Capítulo 3 se observó que para largos alcances, los efectos de los virajes inicial y final de la aeronave en los resultados globales eran prácticamente inexistentes. Por ello se compara el peor escenario posible en términos de consumo (a raíz de los veinte resultados anteriores corresponde a χ_0=180º y χ_f=-180º) con un modelo de viraje instantáneo en el que se supone que el avión realiza los virajes de forma instantánea y por tanto la trayectoria se convierte en un crucero (χ_0=0º, χ_f=0º). La tabla comparativa para alcances comprendidos entre 0 y 1000 km se muestra en la siguiente página:

	Modelo actual		Viraje instantáneo		Variación porcentual	
x_f[km]	m_F[kg]	t_f[min]	m_F[kg]	t_f[min]	$\%_{m_F}$	$\%_{t_f}$
100	799.86	10.466	522.48	7.2652	34.68	30.58
200	1319.1	17.732	1042.9	14.531	20.94	18.05
300	1836.3	25.000	1516.4	21.799	17.42	12.80
400	2351.6	32.269	2077.8	29.067	11.64	9.92
500	2864.9	39.538	2592.3	36.336	9.52	8.10
600	3376.2	46.811	3104.8	43.607	8.04	6.85
700	3885.6	54.079	3615.3	50.878	6.96	5.92
800	4393.1	61.340	4124.0	58.151	6.13	5.20
900	4898.7	68.634	4630.7	65.425	5.47	4.68
1000	5402.4	75.898	5135.5	72.701	4.94	4.21

Tabla 4.6: Comparativa de modelos para distintos alcances

Se considera que el valor de la distancia final en el eje x que marca el límite de los cortos alcances es 1000 km. Para este alcance se tiene que la diferencia entre ambos modelos es de un 4.94 % en el valor de la masa de combustible y un 4.21 % en el valor del tiempo final. Estos porcentajes no son para nada despreciables, para que lo fueran deberían ser menores que un 1 %. Se concluye que para todo el rango de cortos alcances desde cien a mil kilómetros el modelo de viraje instantáneo no es adecuado al introducirse errores apreciables en los resultados globales de consumo y tiempo final. Sin embargo, los resultados anteriores se obtienen en la condición más desfavorable posible por lo que se tienen unas cotas porcentuales del error máximo que se comete al aproximar la trayectoria con el modelo de viraje instantáneo.

4.3.2. Resultados de largo alcance

Tal y como se observó en la sección 3.3.1 al variarse los ángulos de guiñada inicial y final, se obtienen prácticamente los mismos resultados a largos alcances. Dado que en este problema los únicos parámetros que son interesantes de analizar son los ángulos, y no se aprecian variaciones significativas en los resultados al variarlos. Se representa un caso paradigmático para mostrar las evoluciones de las variables a largo alcance.

Se fija el alcance a 3000 km, el ángulo de guiñada inicial a 120º y el ángulo de guiñada final a 120º. Se representan por tramos la trayectoria, $\chi(x)$, $m(x)$, $M(x)$, $\mu(x)$, $C_L(x)$ y $\pi(x)$:

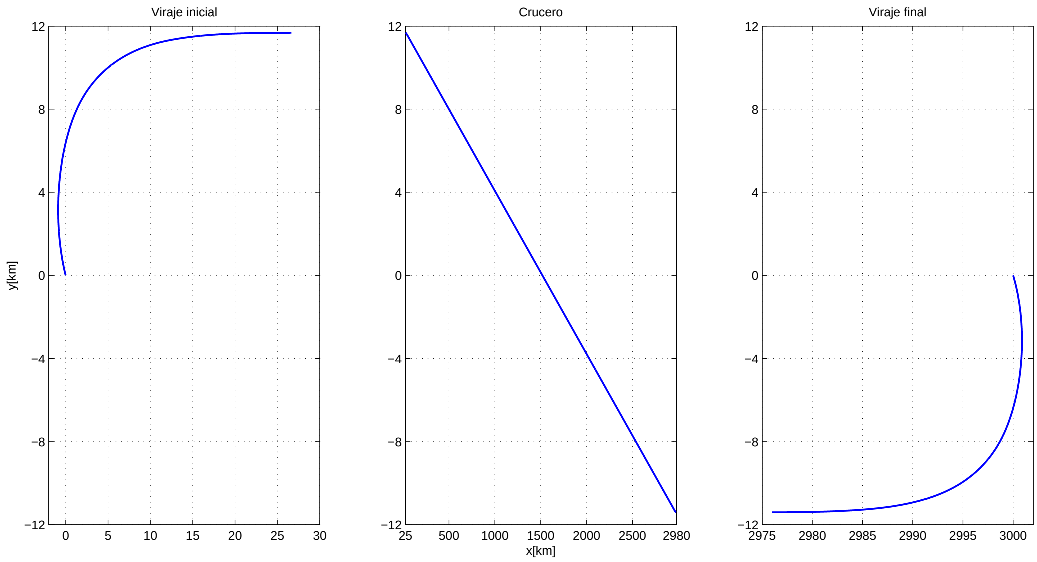


Figura 4.17: Trayectoria

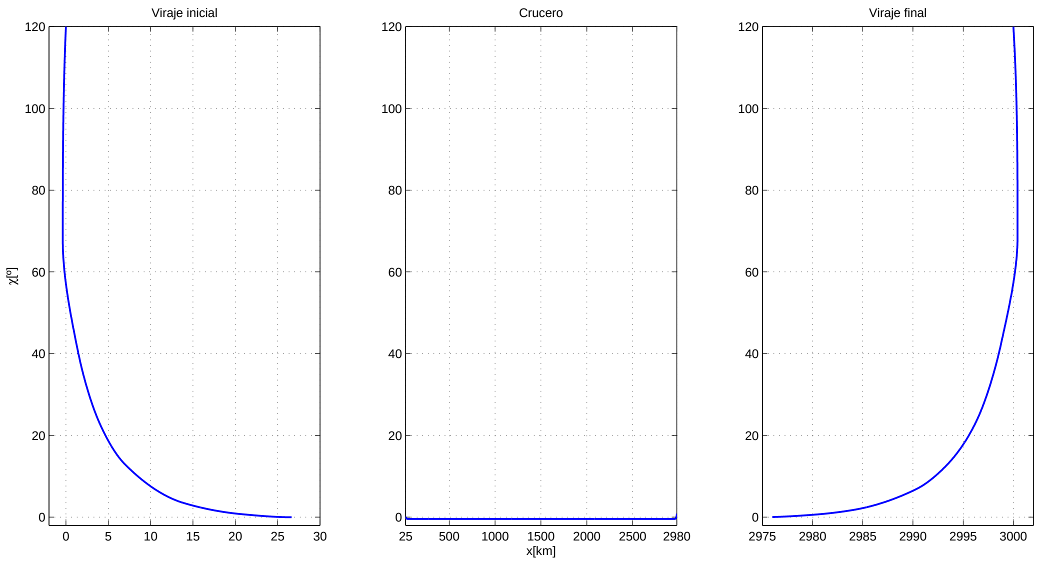


Figura 4.18: Ángulo de guiñada

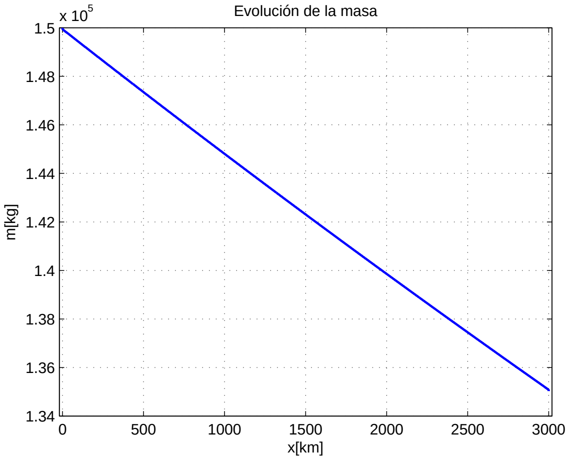


Figura 4.19: Masa

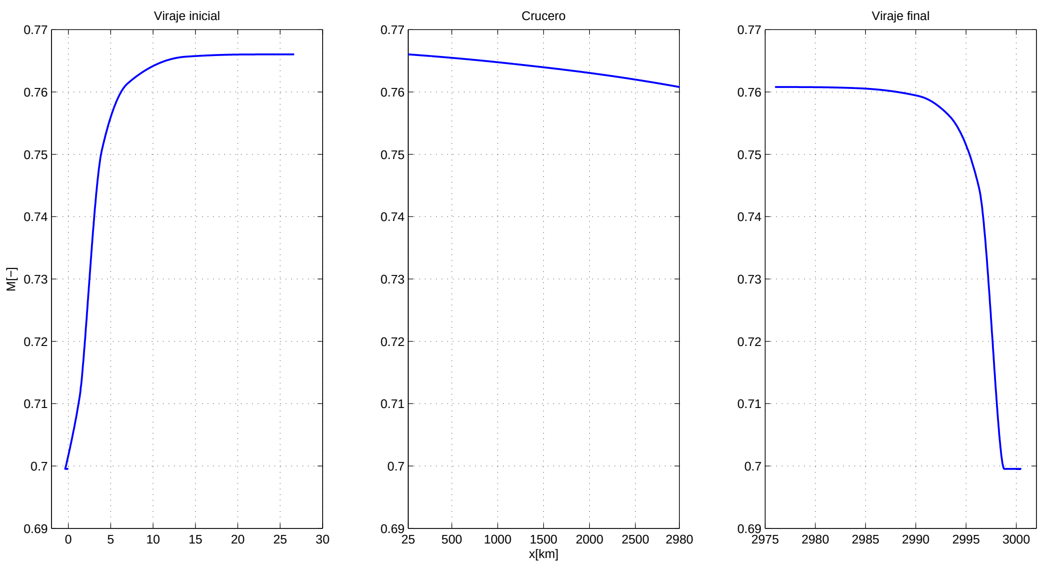


Figura 4.20: Número de Mach

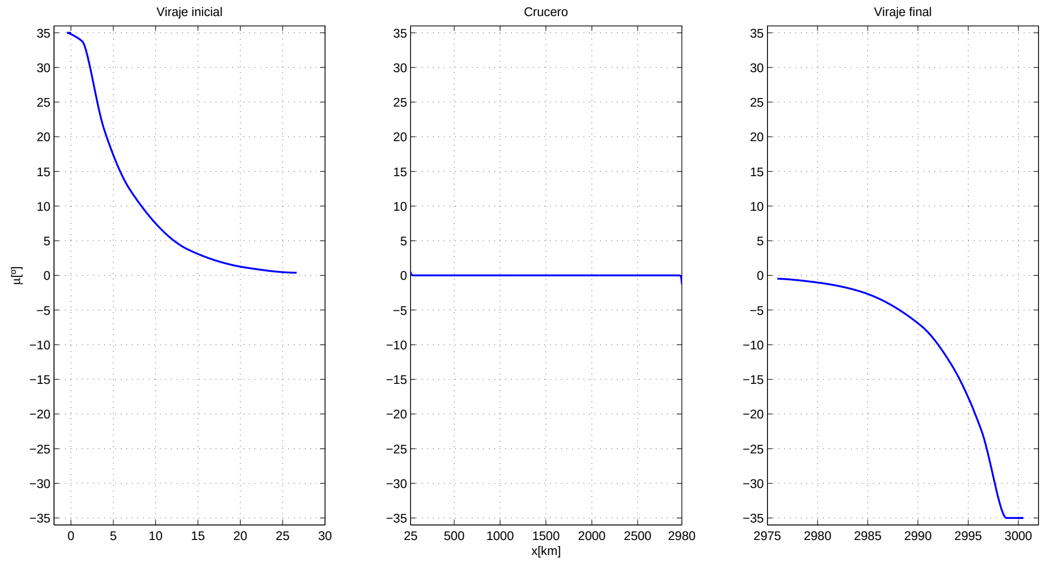


Figura 4.21: Ángulo de alabeo

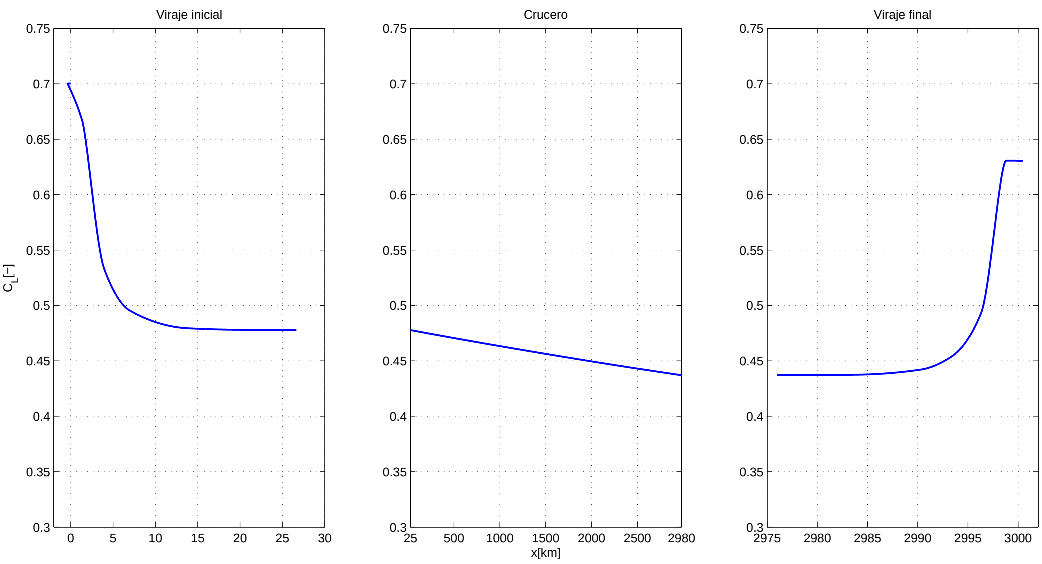


Figura 4.22: Coeficiente de sustentación

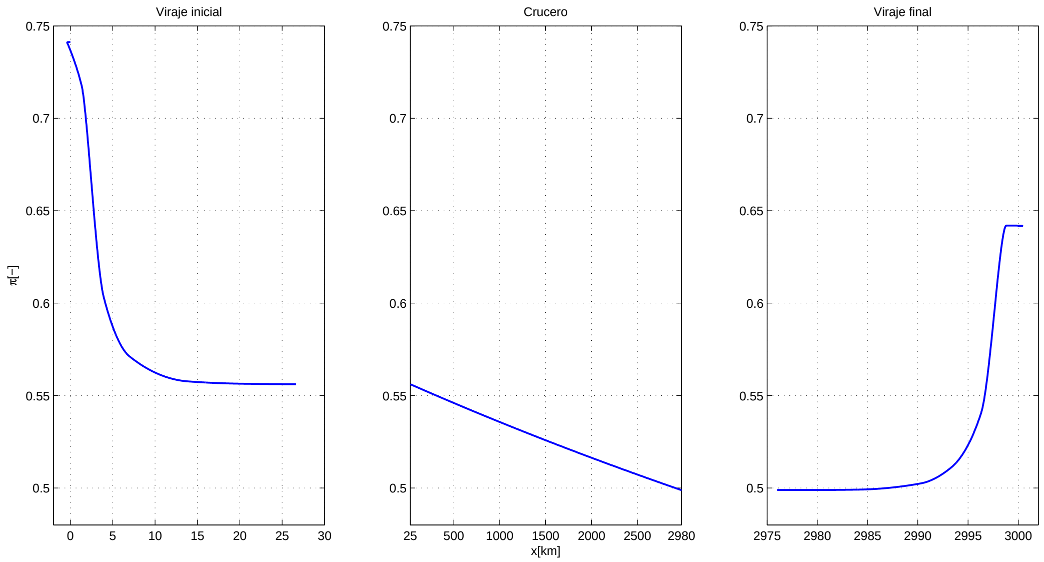


Figura 4.23: Posición de la palanca de gases

Como era de esperar, en términos de variables globales los tramos de viraje son prácticamente despreciables frente al tramo de crucero. El tramo de crucero se desarrolla a altitud constante y a ángulo de alabeo nulo, la única ley de pilotaje no constante del mismo es el Mach de vuelo, o lo que es lo mismo, la velocidad. La velocidad disminuye levemente a medida diminuye la masa de la aeronave, lo que provoca que el coeficiente de sustentación se vaya reduciendo a lo largo del crucero. Al ser menor el requerimiento en coeficiente de sustentación, se tiene una menor resistencia aerodinámica que hace que la posición de palanca disminuya.

Los resultados anteriores también muestran la optimización de un crucero a altitud constante con la velocidad como variable de control. La solución a largo alcance, se podría aproximar por una ley de vuelo a velocidad constante, al ser las variaciones de ésta muy pequeñas a lo largo del mismo, de 0.766 a 0.761 en 3000 km.

Por último, se compara el modelo actual con el modelo de viraje instantáneo ya comentado anteriormente para los alcances de 2000, 3000, 4000 y 5000 km. Se consideran unos ángulos de guiñada inicial y final de 120º.

	Actual		Viraje instantáneo		Variación porcentual	
x_f[km]	m_F[kg]	t_f[h]	m_F[kg]	t_f[h]	$\%_{m_F}$	$\%_{t_f}$
2000	10199	2.4478	10083	2.4257	1.14	0.903
3000	14969	3.6659	14858	3.6430	0.742	0.625
4000	19579	4.8868	19473	4.8646	0.541	0.454
5000	24042	6.1144	23940	6.0919	0.424	0.368

Tabla 4.7: Comparativa de modelos para largos alcances

Se tiene que el modelo de viraje instantáneo es una excelente aproximación para largos alcances, al ser las variaciones porcentuales en masa de combustible y tiempo menores del 1 %

(salvo en el caso de 2000km). A efectos prácticos, el modelo de viraje instantáneo es adecuado para aproximar las trayectorias de largo alcance por su menor tiempo de computación y la similitud de resultados obtenidos en comparación con el modelo actual que sí considera los virajes.

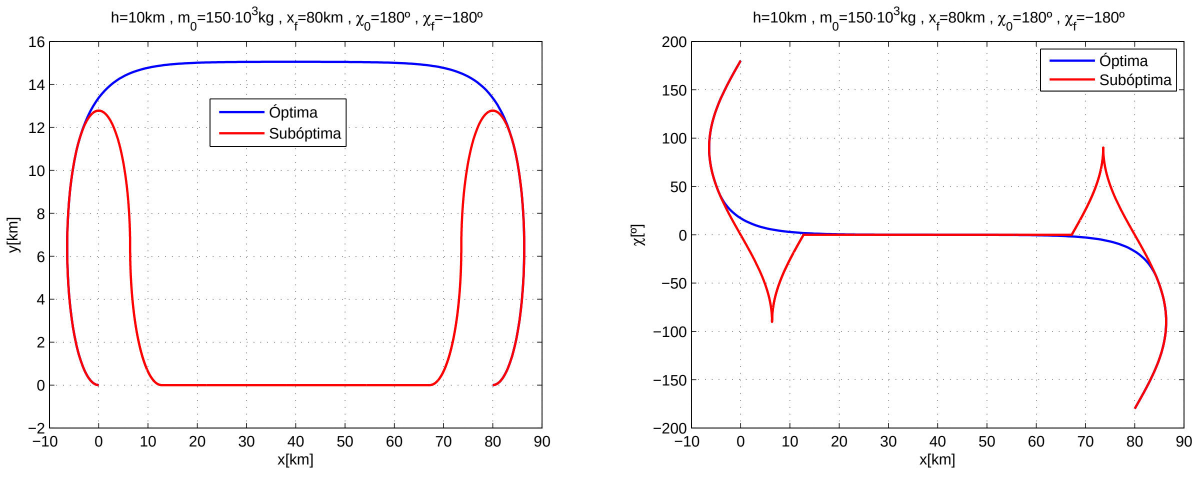
4.4. Comparativa con trayectorias subóptimas

En esta sección, se comparan las trayectorias propuestas por la formulación en control óptimo con una trayectoria subóptima. Se considera que la trayectoria subóptima tiene la misma estructura geométrica que la propuesta en la sección 3.4. No obstante, cada tramo de la trayectoria (viraje inicial, crucero y viraje final) se recorre a diferente velocidad. En cada tramo se considera que la velocidad es constante.

Las velocidades elegidas son las que minimizan el consumo de combustible del avión a lo largo de la trayectoria. Estas tres velocidades se calculan mediante la función *fmincon* de MATLAB ya usada para obtener las variables de control en la trayectoria óptima. La restricción superior al Mach de vuelo sigue estando dada por (2.28). En cada viraje el ángulo de alabeo es el máximo o mínimo posible permitido por (2.25) para reducir el radio de curvatura al máximo, esto provoca que se tenga una restricción inferior al Mach de vuelo constante fijada por (2.27) al estar μ definido.

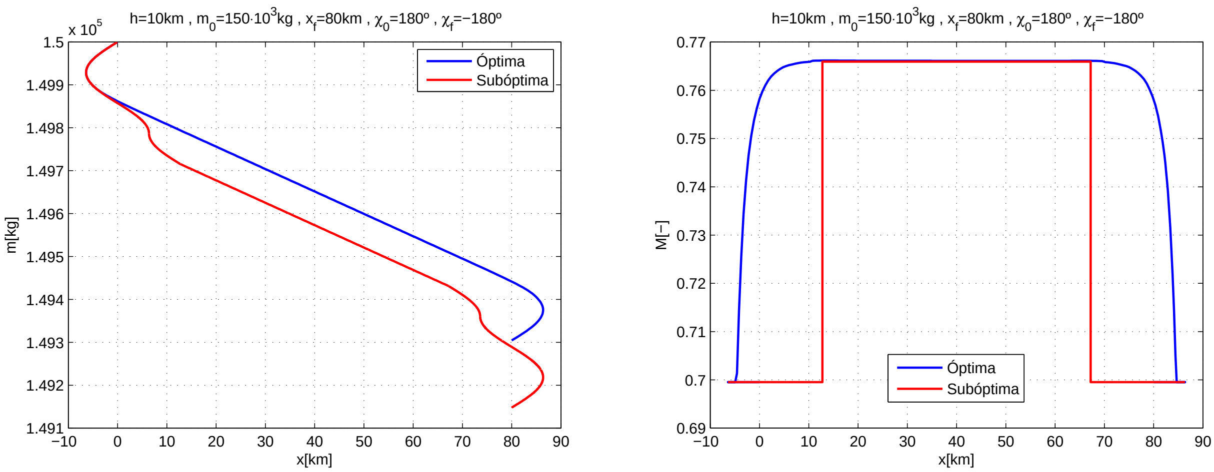
En caso de que el ángulo de guiñada inicial o final sean nulos, la estructura de la solución subóptima cambiaría. En tal caso sólo se optimizaría el viraje final o inicial respectivamente, así como el crucero. Si ambos ángulos fueran nulos, entonces sólo se tendría una velocidad que optimizar.

A continuación, se comparan la trayectoria, el ángulo de guiñada, la masa, el número de Mach, el ángulo de alabeo, el coeficiente de sustentación y la posición de palanca para una trayectoria con un alcance de 80km y unos ángulos de guiñada inicial y final de 180º y -180º respectivamente.



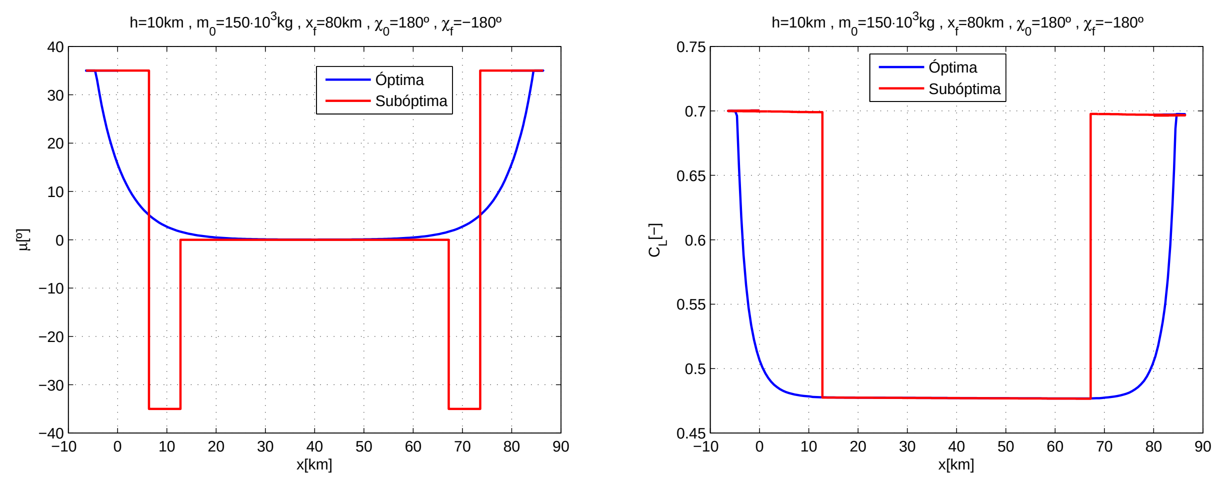
(a) (b)

Figura 4.24: Comparativa: (a) trayectoria y (b) ángulo de guiñada



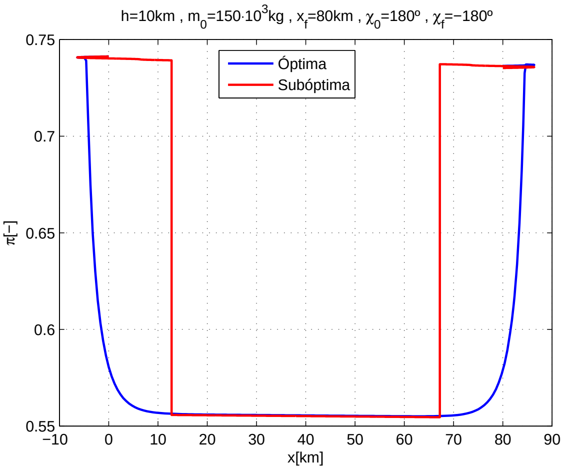
(a) (b)

Figura 4.25: Comparativa: (a) masa y (b) Mach de vuelo



(a) (b)

Figura 4.26: Comparativa: (a) ángulo de alabeo y (b) coeficiente de sustentación



(a)

Figura 4.27: Comparativa de la posición de palanca

Los números de Mach óptimos en los virajes para la trayectoria subóptima son iguales al Mach mínimo permitido según (2.27) cuando μ=μ_{max}, para este caso, 0.6995. Se concluye que interesa minimizar el radio de giro de la aeronave para recorrer una menor distancia. En el tramo de crucero se tiene que el número de Mach de ambas trayectorias coinciden al valor de 0.7660. Los valores de Mach y ángulo de alabeo constantes en cada tramo de la trayectoria subóptima provocan que el coeficiente de sustentación y la posición de palanca también sean constantes al ser las variaciones en masa poco apreciables.

Como era de esperar, la trayectoria óptima obtiene mejores resultados en términos de masa de combustible. En la trayectoria óptima se consumen 695.77 kg, mientras que en la subóptima se gastan 852.23 kg, la diferencia es del 22.49 %. En cuanto al tiempo de vuelo se observa que la trayectoria óptima ofrece una solución más rápida con 9.0123 minutos frente a los 10.345 que tarda la subóptima.

En este caso, las diferencias anteriores están en gran parte condicionadas por la distancia recorrida en una y otra trayectoria, lo cual en última instancia, es debido a la duración e intensidad de los virajes. En la figura 4.24 (a) se observa que la distancia que recorre la trayectoria subóptima es mayor que la recorrida por la óptima. La trayectoria óptima minimiza la distancia recorrida enlazando los virajes con un tramo de crucero a un cierto ángulo de guiñada no nulo.

A continuación, se muestra una tabla comparativa para distintos x_f de corto alcance comprendidos entre 100 y 1000 km. Los ángulos de guiñada inicial y final son 180º y -180º respectivamente.

	Óptima		Subóptima		Variación porcentual	
x_f[km]	m_F[kg]	t_f[min]	m_F[kg]	t_f[min]	$\%_{m_F}$	$\%_{t_f}$
100	799.86	10.466	956.17	11.798	19.54	12.73
200	1319.1	17.732	1474.6	19.065	11.79	7.52
300	1836.3	25.000	1991.1	26.327	8.43	5.31
400	2351.6	32.269	2505.6	33.602	6.55	4.13
500	2864.9	39.538	3018.2	40.871	5.35	3.37
600	3376.2	46.811	3528.7	48.141	4.52	2.84
700	3885.6	54.079	4037.4	55.413	3.91	2.47
800	4393.1	61.340	4544.1	62.678	3.44	2.18
900	4898.7	68.634	5049.0	69.961	3.07	1.93
1000	5402.4	75.898	5552.0	77.240	2.77	1.77

Tabla 4.8: Comparativa de ambas trayectorias para cortos alcances

Todas las variaciones porcentuales en la masa de combustible superan el 1 % que se estima como el valor límite a partir del cual la formulación en control óptimo no es adecuada a efectos prácticos por su mayor coste computacional, por tanto, para alcances comprendidos entre los mostrados en la tabla anterior es adecuada.

Con la trayectoria subóptima se obtienen resultados más parecidos al óptimo que con el modelo de viraje instantáneo (Tabla 4.6). Por ejemplo, en el viraje instantáneo se tiene una diferencia porcentual en masa de un 4.94 %, mientras que en el caso de la trayectoria subóptima es de un 2.77 %. A tenor de los resultados anteriores, se concluye que la trayectoria subóptima aproxima mejor la trayectoria óptima para todos los alcances analizados en la tabla anterior.

Acto seguido, se muestra una tabla comparativa para largos alcances, en concreto, se toman los valores de 2000, 3000, 4000 y 5000 km. Se mantienen todos los parámetros anteriores menos los ángulos de guiñada inicial y final, que ahora son de 120º:

	Óptima		Subóptima		Variación porcentual	
x_f[km]	m_F[kg]	t_f[h]	m_F[kg]	t_f[h]	$\%_{m_F}$	$\%_{t_f}$
2000	10199	2.4478	10303	2.4621	1.02	0.584
3000	14969	3.6659	15068	3.6794	0.661	0.368
4000	19579	4.8868	19675	4.9001	0.490	0.272
5000	24042	6.1144	24136	6.1249	0.391	0.172

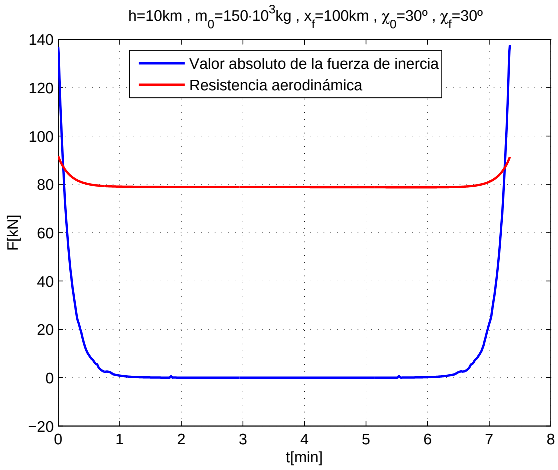
Tabla 4.9: Comparativa de ambas trayectorias para cortos alcances

Como es lógico, ambas trayectorias se parecen más en términos de consumo de combustible y tiempo que en el caso del viraje instantáneo. Se obtienen diferencias menores del 1 % en todos los casos analizados (salvo en la masa de combustible de 2000 km), lo que implica que a largos alcances mayores de 2000km, la trayectoria subóptima propuesta proporciona resultados bastante próximos con la óptima, lo cual justifica su uso en la práctica.

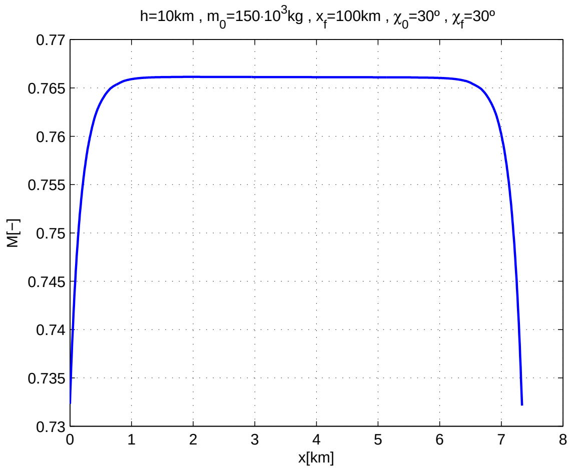
4.5. Críticas a la hipótesis de movimiento cuasiestacionario

A lo largo de este capítulo se hace uso de la hipótesis de que el movimiento de la aeronave es cuasiestacionario a lo largo de la trayectoria, es decir, que las variaciones de velocidad de la aeronave son despreciables, lo que se traduce en $\dot{V}$=0. Sin embargo, si se revisan las gráficas que muestran la evolución temporal del Mach de vuelo como en las figuras 4.2 (b), 4.6 (b), 4.10 (b), 4.14 (b), 4.20 y 4.25(b), se observa que hay variaciones apreciables en la velocidad en los tramos de viraje inicial y final que pueden provocar que las fuerzas de inercia $m\dot{V}$ sean del orden del empuje o la resistencia.

A continuación, se muestran $m\dot{V}$ y D frente al tiempo de una trayectoria típica, así como la evolución temporal del Mach de vuelo:



(a) Comparativa entre la fuerza de inercia y la resistencia



(b) Evolución temporal del número de Mach

Figura 4.28: Revisión de la hipótesis de movimiento cuasiestacionario

Tal y como se observa en la figura 4.28 (a), la fuerza de inercia no es para nada despreciable en los tramos de viraje inicial y final, de hecho, dobla el valor de la resistencia aerodinámica. En el tramo de crucero esta hipótesis sí es adecuada, ya que la fuerza de inercia es prácticamente nula al ser las variaciones de velocidad muy pequeñas.

Se concluye que la hipótesis realizada no es realista para optimizar los tramos de viraje inicial y final de la aeronave, y por tanto, para cortos alcances que es donde los virajes tienen un mayor porcentaje de peso en la trayectoria global, los resultados estarán afectados por un error no despreciable, lo que recomienda la consideración de un modelo mejor, como tomar π como variable de control. Sin embargo, para largos alcances, se ha visto que la influencia de los virajes inicial y final es prácticamente despreciable, por lo que tales resultados no tienen un gran porcentaje de error y son aceptables.

Capítulo 5

Conclusiones y avances futuros

5.1. Análisis de resultados

Salvo en el caso de ángulos de guiñada inicial y final nulos, la trayectoria sigue la estructura viraje-crucero-viraje. Los virajes son necesarios para el cumplimiento de las condiciones de contorno, mientras que el tramo de crucero optimiza la solución globalmente, al ser perjudicial mantener un ángulo de alabeo distinto de cero por el efecto que éste tiene al aumentar la resistencia. También se concluye que a partir de ciertos ángulos de guiñada, los tramos de viraje inicial y final conviene realizarlos a máximo ángulo de alabeo (en valor absoluto) al inicio y final de cada uno respectivamente. Se llega a una solución de compromiso entre la disminución del radio de curvatura y el aumento de la resistencia, debido a que esta transición hasta la potencia de control máxima se lleva a cabo de forma continua.

En cuanto al número de Mach, durante el viraje, interesan valores bajos de éste al inicio y final de la trayectoria; tanto es así que se restringe por (2.27). El radio de curvatura crece proporcional a la velocidad al cuadrado, por lo que interesa de nuevo llegar a un compromiso entre éste y el aumento del coeficiente de sustentación que provoca volar a números de Mach bajos. En el tramo de crucero, el número de Mach disminuye, pero prácticamente es constante. A una altitud de 10000 m se tiene que el número de Mach óptimo tiene un valor de 0.765 para la masa inicial y la altitud consideradas en este trabajo.

Como era de esperar, los tramos de viraje aumentan el consumo de la aeronave. De hecho, en las gráficas se observa que la pendiente de la masa en estos tramos es más acentuada que en el tramo de crucero. No obstante, estos tramos son necesarios para el cumplimiento de las condiciones de contorno en ángulo de guiñada y posición.

La comparación con trayectorias subóptimas más intuitivas o con el modelo de viraje instantáneo ponen de manifiesto que a largos alcances o con ángulos de guiñada inicial y final bajos no es práctica la formulación en control óptimo al obtenerse prácticamente los mismos resultados en términos de consumo de combustible y tiempo final.

A tenor de lo anterior, se concluye que para ciertos casos es más práctico hacer uso directamente de una trayectoria subóptima o de un modelo de viraje instántaneo por su menor tiempo de computación frente a la formulación en control óptimo.

5.2. Avances futuros

En un futuro, el principal trabajo a realizar sería llevar a cabo una formulación en Control Óptimo Singular para resolver el problema con la palanca de gases, π, como control en vez de con la velocidad, ya que como se comenta en el Capítulo 4, la hipótesis de movimiento cuasiestacionario es poco adecuada en los virajes donde se producen variaciones bastante apreciables de la velocidad en pequeños intervalos de tiempo que hacen que las fuerzas de inercia no sean despreciables.

Una vez realizado lo anterior, sería bastante interesante la resolución del problema con viento. Se podría comprobar como la aeronave intenta aprovechar las corrientes de viento a su favor para aumentar su velocidad con respecto a tierra, tardar menos tiempo en llegar y por tanto, consumir una menor cantidad de combustible. El viento se modelaría como una función vectorial dependiente de la posición $w(x, y, h)$. Por tanto, el Hamiltoniano del sistema dependerá de la posición de la aeronave, y los adjuntos en x e y variarán con el tiempo provocando que la solución óptima dependa de la posición del avión. Las trayectorias obtenidas en el presente trabajo, al estar obtenidas sin considerar viento, pueden ser usadas como iterantes iniciales a los problemas en los que se tenga en cuenta el viento.

El efecto del viento tiene particular interés en vuelos transoceánicos por la existencia de lo que se conoce como *jet stream*. El *jet stream* consiste en vientos que se dan en ciertas regiones de la Tierra que viajan de oeste a este a gran velocidad cerca de la tropopausa. De hecho, en ciertas ocasiones es más adecuado volar siguiendo una de estas corrientes que siguiendo la línea de menor distancia, ya que si el viento es de cola, los tiempos de vuelo pueden disminuirse notablemente.

Otro futuro avance sería la elección de otra función objetivo en la optimización como por ejemplo el DOC. Con ello, se conseguirían soluciones más rápidas y realistas al asignarse un coste al tiempo de vuelo ponderado mediante el CI. Al igual que en el caso del viento, el actual trabajo podría usarse como iterante inicial para aumentar el CI mediante un método de continuación (tal y como lleva a cabo Bernad en [2]), ya que las trayectorias obtenidas en este trabajo son la solución al problema en CI=0.

Por último, se podría hacer un análisis de trayectorias tridimensionales (virajes en subida), es decir, se incluiría la altitud como variable de control en vez de fijarse constante. Este planteamiento daría lugar a trayectorias más optimizadas que las consideradas en este trabajo pues se añade la altitud h como un grado de libertad adicional al problema.

Apéndice A

Modelo de Aeronave

En este apéndice se presenta el modelo de aeronave usado a lo largo del trabajo para las aplicaciones numéricas. Se hace uso de un modelo típico de aeronave civil de fuselaje ancho y dos motores, que opera en régimen subsónico a números de Mach elevados donde los efectos de compresibilidad son relevantes.

En particular se ha escogido el Boeing 767-300ER, en la siguiente tabla se presentan algunas características de la aeronave:

Superficie alar de referencia, S[m^2]	283.3
Peso máximo al despegue, W_{TO}[N]	1832666
Peso máximo de combustible [N]	722112

Tabla A.1: Características del Boeing 767-300ER

A.1. Modelo aerodinámico

El modelo aerodinámico define el coeficiente de resistencia como una polar parabólica de coeficientes dependientes del número de Mach, $C_D = C_D(M, C_L)$, siendo por tanto función del número de Mach y del coeficiente de sustentación. Se tienen en cuenta los efectos de compresibilidad, no obstante se desprecian los efectos asociados al número de Reynolds y a la variación del centro de gravedad de la aeronave. Se considera la polar parabólica propuesta por Cavcar [6].

$$\begin{aligned} C_D(M, C_L) = &\left(C_{D_{0,i}} + \sum_{j=1}^{5} k_{0j} \cdot \hat{H}^j(M)\right) + \left(C_{D_{1,i}} + \sum_{j=1}^{5} k_{1j} \cdot \hat{H}^j(M)\right) C_L \\ &+ \left(C_{D_{2,i}} + \sum_{j=1}^{5} k_{2j} \cdot \hat{H}^j(M)\right) C_L^2 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde

$$\hat{H}(M) = \frac{(M-0.4)^2}{\sqrt{1-M^2}} \tag{A.2}$$

Los coeficientes de la polar parabólica incompresible valen: $C_{D0,i} = 0.01322$, $C_{D1,i} = -0.00610$ y $C_{D2,i} = 0.06000$. Los coeficientes de la polar parabólica compresible están dados en la tabla A.2. La correción por compresibilidad se aplica si $M \geq 0.4$, si $M < 0.4$ se aplica la polar parabólica incompresible que se obtiene haciendo $\hat{H} = 0$ en la ecuación (A.1).

j	1	2	3	4	5
k_{0j}	0.0067	-0.1861	2.2420	-6.4350	6.3428
k_{1j}	0.0962	-0.7602	-1.2870	3.7925	-2.7672
k_{2j}	-0.1317	1.3427	-1.2839	5.0164	0.0000

Tabla A.2: Coeficientes de polar parabólica compresible

A.2. Modelo propulsivo

El modelo propulsivo define el empuje disponible y el consumo específico de combustible. Torenbeek [23] define el empuje máximo disponible de la siguiente forma:

$$T_M = W_{TO} \delta C_T \tag{A.3}$$

donde W_{TO} es el peso de referencia al despegue, $\delta = p/p_{SL}$ es la ratio de presiones y el coeficiente de empuje está dado por(ver Mattingly [14]).

$$C_T = \frac{T_{SL}}{W_{TO}} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} (1 - 0.49\sqrt{M}) \frac{1}{\theta} \tag{A.4}$$

donde κ=1.4, el máximo empuje a nivel del mar para $M = 0$ es T_{SL}=5.0·10^5 N, y θ=T/T_{SL} es la ratio de temperaturas (T_{SL} es la temperatura ISA a nivel del mar).

Se considera el coeficiente de consumo específico definido por Mattingly [14]:

$$C_C(M) = c_{SL} \frac{L_H}{a_{SL}} (1.0 + 1.2M) \tag{A.5}$$

Donde c_{SL} es el coeficiente de consumo específico de combustible al nivel del mar y para M=0, cuyo valor para esta aeronave es c_{SL}=9.0·10^{-6} kg/(sN). Para el calor latente de combustible se toma L_H=43·10^6 J/kg.

No se ha considerado la dependencia del coeficiente de consumo específico de combustible con el coeficiente de empuje, pues es muy débil y puede ser despreciado (véase Torenbeek [23]).

Apéndice B

Atmósfera Estándar Internacional

La ISA considera que la composición del aire no varía y como consecuencia su constante R=287 J/(kgK). También hace uso de la hipótesis de que la temperatura en la troposfera (h<11 km) decrece linealmente con una pendiente de -6.5 K/km, mientras que en la estratosfera (11 km $\leq$ h <20 km) la temperatura se mantiene constante.

Una vez conocida la temperatura, Θ, como función de la altitud, el modelo ISA hace uso del equilibrio fluidostático de los gases atmosféricos para hallar $p(h)$. La ecuación de los gases ideales determina la densidad del aire, $\rho(h)$.

Las altitudes típicas a las que vuela un avión comercial suelen estar comprendidas entre la troposfera y la baja estratosfera, por tanto, solo se describe el modelo ISA para estas dos capas de la atmósfera. Se hace uso del subíndice SL para denotar que las variables están referidas al nivel del mar, cuando estén referidas a la tropopausa se hará uso del subíndice TP.

Troposfera (h<11 km)

- Gradiente térmico: α=-6.5 K/km
- Temperatura a 0 m: Θ_{SL}=288.15 K
- Presión a 0 m: p_{SL}=101325 Pa
- Densidad a 0 m: ρ_{SL}=1.225 kg/m^3

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_{SL} + \alpha h \\ p &= p_{SL}\left(1+\frac{\alpha h}{\Theta_{SL}}\right)^{-\frac{g}{R\alpha}} \\ \rho &= \rho_{SL}\left(1+\frac{\alpha h}{\Theta_{SL}}\right)^{-\frac{g}{R\alpha}-1} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Baja estratosfera (11 km$\leq$ h <20 km)

- Gradiente térmico: α=0 K/km
- Temperatura a 11 km: Θ_{TP}=216.55 K
- Presión a 11 km: p_{TP}=22552 Pa
- Densidad a 11 km: ρ_{TP}=0.3629 kg/m^3

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_{TP} \\ p &= p_{TP} \cdot e^{\frac{-g(h-h_{TP})}{RT}} \\ \rho &= \rho_{TP} \cdot e^{\frac{-g(h-h_{TP})}{RT}} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Independientemente de si la aeronave se encuentra en la troposfera o la baja estratosfera, la velocidad del sonido se puede obtener a partir de la temperatura, a=$\sqrt{\kappa R\Theta}$, siendo κ=1.4 el coeficiente de dilatación adiabática del aire.

Apéndice C

Formulación del problema de control óptimo

La resolución del problema planteado en el Capítulo 2 se resuelve mediante el enfoque de la teoría de control óptimo. Para ello se presentan las condiciones necesarias para la optimalidad del problema (véase Franco [9]).

C.1. Problema de control óptimo

Considérese un intervalo de tiempo $[t_0,t_f]$, la función dinámica $\mathbf{f}:[t_0,t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, y el conjunto de controles $U \subset \mathbb{R}^m$. Se considera un *control* a una función vectorial de dimensión m en $[t_0, t_f]$ que toma valores contenidos en U, mientras que los *estados*, que se corresponden al control $\mathbf{u}$ se refieren a una solución $\mathbf{y}$ del problema de valor inicial definido por

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}[t, \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)], \qquad && \forall t \in [t_0, t_f] \\ &\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 && \end{aligned} \tag{C.1}$$

donde $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ es la condición inicial dada e $\mathbf{y}:[t_0,t_f] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial de dimensión n cuyas componentes son continuas. A las ecuaciones diferenciales ordinarias (C.1) que ligan las variables de control $\mathbf{u}$ y los estados $\mathbf{y}$ se las denominan *ecuaciones de estado*. La pareja $(\mathbf{f},U)$ es el *sistema de control*. Un *proceso* del sistema de control $(\mathbf{f},U)$ es la pareja $(\mathbf{y},\mathbf{u})$ consistente en una función vectorial de n componentes continuas $\mathbf{y}$, y una función vectorial de m componentes $\mathbf{u}$ que satisface la ecuación de estado (C.1). Se define la función de coste $J(\mathbf{y}, \mathbf{u})$:

$$J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \phi[t_f, \mathbf{y}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} l[t, \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)]dt \tag{C.2}$$

donde el *coste marginal* l y el *coste terminal* ϕ son funciones dadas. En algunos casos, se estaría interesado en prescribir los valores de los estados en el instante final, lo cual puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\psi(t_f, \mathbf{y}(t_f)) = 0 \tag{C.3}$$

donde la función vectorial de dimensión k, $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es la función de restricción del estado final. En este caso, el problema de control óptimo se establece de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \textit{Minimizar} & J(\mathbf{y},\mathbf{u}) = \phi[t_f,\mathbf{y}(t_f)] + \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} l[t,\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)]dt & \\ \textit{sujeto a} & \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}[t,\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)], \qquad \forall t \in [t_0,t_f] & \\ & \mathbf{u}(t) \in U \qquad\qquad\qquad \forall t \in [t_0,t_f] & \\ & \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 & \\ & \psi[t_f,\mathbf{y}(t_f)] = 0 & \end{array} \tag{C.4}$$

Por tanto, un proceso óptimo sería una pareja $(\mathbf{y}^*,\mathbf{u}^*)$ definida en el intervalo $[t_0,t_f]$ que satisface las restricciones de la ecuación (C.4) y verifica que: $J(\mathbf{y}^*,\mathbf{u}^*) \leq J(\mathbf{y},\mathbf{u})$.

Aunque la forma más general de plantear el problema de control óptimo es la dada en la ecuación (C.4), se pueden hacer ciertas consideraciones adicionales al mismo:

En primer lugar, el tiempo final t_f puede estar dado o no, es decir, puede ser un parámetro desconocido cuyo valor se obtendría de resolver el problema de control óptimo. Aunque no implica ningún cambio en la formulación del problema, tiene un impacto directo al establecer las condiciones necesarias de optimalidad. En este caso un proceso óptimo es un proceso $(\mathbf{y}^*,\mathbf{u}^*)$ definido en el intervalo $[t_0,t_f]$, que satisface las restricciones de la ecuación (C.4) y verifica que $J(\mathbf{y}^*,\mathbf{u}^*) \leq J(\mathbf{y},\mathbf{u})$, para cualquier otro proceso $(\mathbf{y},\mathbf{u})$ definido en el intervalo $[t_0,\tau_f]$ que satisface las restricciones ya comentadas.

En segundo lugar, se pueden considerar restricciones aplicadas en puntos intermedios del intervalo de tiempo $t \in [t_0,t_f]$, o que aplican sobre todo el intervalo. En concreto, podrían tenerse restricciones integrales, de igualdad o de desigualdad de las funciones del control o de las variables de estado.

C.2. Condiciones necesarias de optimalidad

En esta sección, se formulan las condiciones necesarias para que un proceso $(\mathbf{y},\mathbf{u})$ sea la solución del problema de control óptimo (C.4). Estas condiciones son conocidas como el Principio del Mínimo de Pontryagin o simplemente como el Principio del Mínimo. En este trabajo las condiciones suficientes de optimalidad no serán consideradas, se supondrá que la solución será óptima si cumple solamente las condiciones necesarias.

El Principio del Mínimo es un conjunto de condiciones necesarias para la optimalidad equivalentes a las condiciones de Euler-Lagrange, Weierstrass y Legendre-Clebsch en la teoría clásica del cálculo de variaciones. Además el Principio del Mínimo extiende esas condiciones tanto para problemas de control óptimo, así como problemas en los cuales el control está restringido a un conjunto de valores.

Se define el Hamiltoniano y el Lagrangiano en el instante final del problema (C.4) como las funciones $H : [t_0,t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y $E : [t_0,t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$H(t,\mathbf{y},\mathbf{u},\lambda) = l(t,\mathbf{y},\mathbf{u}) + \lambda^T\mathbf{f}(t,\mathbf{y},\mathbf{u}) \tag{C.5}$$

y

$$E[t_f,\mathbf{y}(t_f),\nu] = \phi[t_f,\mathbf{y}(t_f)] + \nu^T\psi[t_f,\mathbf{y}(t_f)] \tag{C.6}$$

Asumiendo la regularidad de las funciones involucradas (ver Clarke [7]), el Principio del Mínimo se establece de la siguiente manera:

Siendo ($\mathbf{y}^*$,$\mathbf{u}^*$) un proceso óptimo del problema (C.4), donde U está acotado. Entonces existe una función vectorial de n componentes continuos λ : [t_0,t_f] $\to \mathbb{R}^n$, y un vector de multiplicadores de Lagrange $\nu \in \mathbb{R}^k$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1) La condición de la no trivialidad de la solución, ($\lambda(t)$,ν) $\neq 0$, $\forall t \in$ [t_0,t_f].

2) Las ecuaciones dinámicas de los adjuntos:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}[t,\mathbf{y}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\lambda(t)], \qquad \forall t \in [t_0,t_f] \tag{C.7}$$

3)La condición de minimización del Hamiltoniano:

$$\mathbf{u}^*[t,\mathbf{y}^*,\lambda(t)] = \arg\min H[t,\mathbf{y}^*,\mathbf{u},\lambda(t)], \qquad \mathbf{u} \in U \qquad \forall t \in [t_0,t_f] \tag{C.8}$$

4)Las condiciones de transversalidad:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{y}(t_f)}[t_f,\mathbf{y}^*(t_f),\nu] \tag{C.9}$$

en el caso de que el tiempo final no esté fijado, habría que añadir una condición de transversalidad más denominada la condición del valor del Hamiltoniano dada por

$$H[t_f,\mathbf{y}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),\lambda(t_f)] = -\frac{\partial E}{\partial t_f}[t_f,\mathbf{y}^*(t_f),\nu] \tag{C.10}$$

Además, el Hamiltoniano minimizado $\mathcal{H}$: [t_0,t_f] $\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido como:

$$\mathcal{H}(t,\mathbf{y},\lambda) = \min H(t,\mathbf{y},\mathbf{u},\lambda), \qquad \mathbf{u} \in U \tag{C.11}$$

evoluciona de acuerdo a la ecuación de evolución del Hamiltoniano:

$$\dot{\mathcal{H}}[t,\mathbf{y}^*(t),\lambda(t)] = \frac{\partial H}{\partial t}[t,\mathbf{y}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\lambda(t)], \qquad \forall t \in [t_0,t_f] \tag{C.12}$$

Si el problema es autónomo, la ecuación (C.12) se reduce a la condición de que el Hamiltoniano sea constante, que establece que para una constante $\overline{\mathcal{H}}$:

$$H[t,\mathbf{y}^*(t),\mathbf{u}^*(t_f),\lambda(t)] = \overline{\mathcal{H}}, \qquad \forall t \in [t_0,t_f] \tag{C.13}$$

En el caso de que el tiempo final no esté fijado, la condición anterior proporciona que $\overline{\mathcal{H}}$=0.

La condición de minimización del Hamiltoniano puede ser considerado como el siguiente problema(ver Bryson y Ho [5]):

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & H(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \lambda) \\ \text{sujeto a} & \mathbf{u} \in U \end{array} \tag{C.14}$$

para todo $t \in [t_0,t_f]$.

La condición de convexidad del problema (C.14) se puede expresar como

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}[t, \mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda(t)] \geq 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_f] \tag{C.15}$$

también conocida como la condición de *Legrendre-Clebsch*.

Además, si el control óptimo es interior al conjunto U ($\mathbf{u}^*(t) \in intU$, $\forall\ t \in [t_0,t_f]$), la condición de optimalidad para el problema (C.14) es

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}[t, \mathbf{y}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda(t)] = 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_f] \tag{C.16}$$

también conocida como la condición de *Euler-Lagrange*. Esta ecuación permite la determinación del control óptimo, $\mathbf{u}^*$, en el caso de que el Hessiano del Hamiltoniano $H_{uu}(t,\mathbf{y},\mathbf{u},\lambda)$ no sea singular. En un caso más general en el que las restricciones al control estén activas en algunos intervalos del proceso óptimo, (C.14) sería un problema de programación no lineal. En particular, cuando $\mathbf{u}$ es un escalar (llámese u), y el conjunto U esté dado por $U=\{u \in \mathbb{R} : u_{min} \leq u \leq u_{max}\}$, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker aplicadas al problema (C.14) proporcionan:

$$\begin{cases} u^*(t) = u_{max} & \text{si} \quad \frac{\partial H}{\partial u}[t, \mathbf{y}^*(t), u^*(t), \lambda(t)] \leq 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u}[t, \mathbf{y}^*(t), u^*(t), \lambda(t)] = 0 & \text{si} \quad u_{min} < u^* < u_{max} \\ u^*(t) = u_{min} & \text{si} \quad \frac{\partial H}{\partial u}[t, \mathbf{y}^*(t), u^*(t), \lambda(t)] \geq 0 \end{cases} \tag{C.17}$$

para cada $t \in [t_0,t_f]$.

Según el Principio del Mínimo, una vez que se obtiene el control óptimo, éste puede ser sustituido en las ecuaciones de estado y de los adjuntos llegándose a un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias con las condiciones de contorno dadas por el estado inicial, las restricciones en el estado final y las condiciones de transversalidad. Las condiciones de contorno elevarían a $2n + k$ el número de ecuaciones necesarias, pero los k multiplicadores de Lagrange en el estado final no proporcionan ninguna información relevante para la resolución del problema, por lo que pueden ser eliminados a la hora de resolver el problema, quedando $2n$ condiciones de contorno para un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales, con lo cual el problema puede ser resoluble. En el caso de que el tiempo final no esté dado, se tendría una incógnita adicional t_f y la condición del valor del Hamiltoniano, lo que llevaría a un sistema de $2n + 1$ condiciones de contorno para un sistema $2n$ con 1 incógnita adicional.

Apéndice D

Desarrollo de derivadas parciales

En este apéndice se desarrollaran las derivadas parciales necesarias para la resolución del problema, de acuerdo al modelo de aeronave descrito en el apéndice A.

D.1. Derivadas parciales de la resistencia aerodinámica

Con respecto a la masa:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial m} = \dfrac{1}{2}\rho V^2 S \dfrac{\partial C_D}{\partial m} = \dfrac{1}{2}\rho V^2 S \dfrac{\partial C_D}{\partial C_L}\dfrac{\partial C_L}{\partial m} \\ \dfrac{\partial C_D}{\partial C_L} = C_{D_1}(M) + 2C_{D_2}(M)C_L \\ \dfrac{\partial C_L}{\partial m} = \dfrac{2g}{\rho V^2 S cos\mu} \\ \dfrac{\partial D}{\partial m} = \dfrac{g}{cos\mu}\left(C_{D_1}(M) + C_{D_2}(M)\dfrac{4mg}{\rho V^2 S cos\mu}\right) \end{cases} \tag{D.1}$$

Con respecto al ángulo de alabeo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial \mu} = \dfrac{1}{2}\rho V^2 S \dfrac{\partial C_D}{\partial \mu} = \dfrac{1}{2}\rho V^2 S \dfrac{\partial C_D}{\partial C_L}\dfrac{\partial C_L}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial C_L}{\partial \mu} = \dfrac{2mg}{\rho V^2 S}\dfrac{sin\mu}{cos^2\mu} \\ \dfrac{\partial D}{\partial \mu} = mg\dfrac{sin\mu}{cos^2\mu}\left(C_{D_1}(M) + C_{D_2}(M)\dfrac{4mg}{\rho V^2 S cos\mu}\right) \end{cases} \tag{D.2}$$

Con respecto a la masa dos veces:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial m^2} = \frac{C_{D_2}(M)}{\rho S}\left(\frac{2g}{V cos\mu}\right)^2 \tag{D.3}$$

Con respecto al ángulo de alabeo dos veces:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \mu^2} = \frac{mg}{cos^3\mu}\left(C_{D_1}(M)(1+sin^2\mu) + C_{D_2}(M)\frac{4mg(1+2sin^2\mu)}{\rho V^2 S cos\mu}\right) \tag{D.4}$$

Con respecto a la masa y al ángulo de alabeo:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \mu \partial m} = g\frac{sin\mu}{cos^2\mu}\left(C_{D_1}(M) + C_{D_2}(M)\frac{8mg}{\rho V^2 S cos\mu}\right) \tag{D.5}$$

Con respecto al número de Mach:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial M} = \dfrac{1}{2}\rho a^2 S\left(2MC_D + M^2\dfrac{\partial C_D}{\partial M}\right) \\ \dfrac{\partial C_D}{\partial M} = \dfrac{\partial C_{D_0}}{\partial M} + \dfrac{\partial C_{D_1}}{\partial M}C_L + C_{D_1}\dfrac{\partial C_L}{\partial M} + \dfrac{\partial C_{D_2}}{\partial M}C_L^2 + 2C_{D_2}C_L\dfrac{\partial C_L}{\partial M} \\ \dfrac{\partial C_{D_i}}{\partial M} = \displaystyle\sum_{j=1}^{5} k_{ij} j \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial M}\hat{H}^{j-1} \\ \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial M} = \dfrac{2(M-0.4)(1-M^2) + M(M-0.4)^2}{(1-M^2)^{3/2}} \\ \dfrac{\partial C_L}{\partial M} = \dfrac{-4mg}{\rho a^2 M^3 S cos\mu} \end{cases} \tag{D.6}$$

D.2. Derivadas parciales del consumo específico

Con respecto al número de Mach:

$$\frac{\partial c}{\partial M} = 1.2 c_{SL}\sqrt{\theta} \tag{D.7}$$

Notación matemática

Símbolo	Unidad	Nombre
a	m/s	Velocidad del sonido
c	kg/(sN)	Consumo específico de combustible
C_C	-	Coeficiente de consumo específico de combustible
C_T	-	Coeficiente de empuje
C_D	-	Coeficiente de resistencia aerodinámica
C_{D_i}	-	Coeficientes de la polar parabólica compensada compresible (i=0,1,2)
C_L	-	Coeficiente de sustentación
$C_{L_{max}}$	-	Coeficiente de sustentación máximo en configuración limpia
$C_{V_{min}}$	-	Coeficiente de velocidad mínima
CI	kg/s	Índice de Coste
D	N	Resistencia aerodinámica
DOC	$	Coste Operativo Directo
g	m/s^2	Aceleración de la gravedad terrestre
h	m	Altitud
H	kg/s	Hamiltoniano
L	N	Sustentación
L_H	J/kg	Calor latente del combustible
m	kg	Masa de la aeronave
m_F	kg	Masa de combustible consumida
M	-	Número de Mach
N	-	Matriz de masas
p	Pa	Presión atmósferica
R	J/(kgK)	Constante universal de los gases ideales
R_T	m	Radio terrestre
r	m	Radio de curvatura de la trayectoria
S	m^2	Superficie alar de referencia
t	s	Tiempo
T	N	Empuje
T_M	N	Empuje máximo disponible
T_{SL}	N	Empuje máximo a nivel del mar con M=0
V	m/s	Velocidad de la aeronave
W_{TO}	N	Peso de referencia al despegue
x	m	Posición de la aeronave en el eje x
y	m	Posición de la aeronave en el eje y
z	m	Altitud geométrica
α	K/m	Gradiente térmico atmosférico
γ	-	Ángulo de asiento de la velocidad

δ	-	Ratio de presiones, δ=p/p_{SL}
ρ	kg/m^3	Densidad atmosférica
Θ	K	Temperatura atmosférica
θ	-	Ratio de temperaturas, θ=Θ/Θ_{SL}
π	-	Posición de la palanca de gases
μ	-	Ángulo de alabeo
χ	-	Ángulo de guiñada
λ_m	-	Adjunto en masa
λ_χ	kg	Adjunto en ángulo de guiñada
λ_x	kg/m	Adjunto en la posición en el eje x
λ_y	kg/m	Adjunto en la posición en el eje y

Subíndices

Símbolo	Significado
SL	Condiciones a nivel del mar
TP	Condiciones en la tropopausa
0	Condiciones iniciales
f	Condiciones finales

Superíndices

Símbolo	Significado
$\dot{}$	Derivada temporal
$\bar{}$	Variable adimensional
$*$	Valor óptimo

Bibliografía

[1] Anderson J.D.: *Introduction to Flight*, 3rd Edition, 1989.

[2] Bernad, A.: *Análisis del Vuelo de Crucero de Mínimo Coste de Aviones Comerciales.* Proyecto fin de carrera, 2013.

[3] Betts J.T.: *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming.* SIAM books, 1987.

[4] Boeing: *http://www.boeing.com/boeing/*

[5] Bryson, A.E y Y.C.Ho: *Applied Optimal Control.* Hemisphere Publishing Corporation, Washington, DC, 1975.

[6] Cavcar, A. y M. Cavcar: *Approximate solutions of range for constant altitude - constant high subsonic speed flight of transport aircraft.* Aerospace Science and Technology, 8:557-567, 2004.

[7] Clarke, F.: *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control.* Springer, 2013.

[8] Eurocontrol: *User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA) Revision 3.11.* EEC Technical/Scientific Report No. 13/04/16-01.

[9] Franco, A.: *Aircraft Trajectory Optimization using Singular Optimal Control Theory.* Doctoral Thesis, 2014.

[10] Franco, A. y D.Rivas: *Minimum-Cost Cruise at Constant Altitude of Commercial Aircraft Including Wind Effects.* Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 34(4):12531260, 2011.

[11] Franco, A., D. Rivas y A. Valenzuela: *Minimum-Fuel Cruise at Constant Altitude with Fixed Arrival Time.* Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 33(1):280285, 2010.

[12] Hoffman, J.E.: *Historia de la matemática.* Limusa, 2002.

[13] MATLAB: *http://www.mathworks.es/es/help/matlab/*

[14] Mattingly, J. D., W.H. Heiser y D.T. Pratt: *Aircraft Engine Design.* AIAA Education Series,2ª edición, 2002.

[15] Miele, A.: *Flight Mechanics.* Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

[16] Myliutin A.A. y Osmolovskii N.P.: *Calculus of Variations and Optimal Control.* American Mathematical Society, 1980.

[17] Pinch E.R.: *Optimal Control and the Calculus of Variations.* Oxford University Press, Nueva York, 1995.

[18] Rivas, D.: *Temario de Mecánica del Vuelo*, 2013.

[19] Rivas, D. y A. Valenzuela: *Compressibility effects on maximum range cruise at constant altitude.* Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 32(5):16541658, 2009.

[20] Shampine, L.F.: *Control of residual and error.*

[21] Shampine, L.F., J.Kierzenka y M.W.Reichelt: *Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c*, 2000.

[22] Stevens, B.L y F.L.Lewis: *Aircraft Control and Simulation.* John Wiley & Sons, 2003.

[23] Torenbeek, E.: *Flight Physics.* Springer, 2009.