

Trabajo de Fin de Grado
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Modelado computacional de la interacción
neumático-terreno de una bicicleta para su
simulación en tiempo real

Autor: Jesús Alcocer Tagua

Tutor: Dr. José Luis Escalona Franco

Dep. Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2014



Trabajo de Fin de Grado
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

**Modelado computacional de la interacción
neumático-terreno de una bicicleta para su
simulación en tiempo real**

Autor:
Jesús Alcocer Tagua

Tutor:
José Luis Escalona Franco
Profesor titular

Dep. de Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2014

Trabajo de Fin de Grado: Modelado computacional de la interacción neumático-terreno de una bicicleta para su simulación en tiempo real.

Autor: Jesús Alcocer Tagua

Tutor: José Luis Escalona Franco

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2014

El Secretario del Tribunal

Resumen

En este trabajo se va a realizar la simulación interactiva en tiempo real de la dinámica de una bicicleta, haciendo énfasis en el modelado del contacto de las ruedas con el terreno, de forma que no tenga que incluirse la simplificación usual de rodadura sin deslizamiento en ambos contactos.

Para el planteamiento de las ecuaciones de movimiento se utiliza la herramienta de cálculo simbólico que incorpora MatLab, de esta manera es viable implementar un algoritmo que las resuelve de forma numérica y permite visualizar la trayectoria generada en tiempo real.

Una vez terminado el planteamiento del modelo, es importante apreciar que es apto para seguir incluyendo un mayor número de efectos aún no considerados y que mejorarían su realismo, por lo se ha elaborado una base sobre la que seguir ampliando en el futuro.

Índice

1.- Introducción	1
1.1 Objetivos	2
2.- Descripción general de neumáticos	3
2.1 Composición típica de neumáticos	4
2.2 Modelos de neumáticos	6
3.- Descripción del modelo	7
3.1 Planteamiento de coordenadas y cinemática	7
3.1.1 Problema de posición y orientación de los sólidos	8
3.1.2 Cinemática de la bicicleta	11
3.2 Ecuaciones de Newton-Euler	14
3.2.1 Matriz de masa	14
3.2.2 Vector de fuerzas generalizadas	15
3.2.3 Planteamiento de las ecuaciones de Newton-Euler	26
3.3 Indentación de los neumáticos	27
3.4 Cuerpo del ciclista en el modelo	32
4.- Teorías de mecánica de contacto	36
4.1 Problemas clásicos de contacto normal y tangencial	36
4.2 Contactos rodantes entre sólidos	38
4.3 Efectos no considerados	40
4.4 Evolución del contacto	42

5.- Comportamiento dinámico de las bicicletas	45
5.1 Efecto giroscópico en las bicicletas	45
5.2 Estabilidad propia de las bicicletas	47
5.3 Los giros en las bicicletas	50
5.4 Posibilidad de mejoras en la geometría	52
6.- Métodos numéricos	54
6.1 Métodos de Taylor	55
6.2 Métodos de Runge-Kutta	56
7.- Simulador de la bicicleta	57
7.1 Descripción de los archivos generados	60
8.- Conclusiones	61
9.- Trabajo futuro	62
Referencias	63

Índice de figuras

Fig 2-1. Composición de neumáticos radial y diagonal	5
Fig 3-1. Coordenadas del modelo de 9 gdl	8
Fig 3-2. Evolución del desplazamiento vertical	20
Fig 3-3. Evolución del ángulo de cabeceo	20
Fig 3-4. Comportamiento tangencial supuesto en los neumáticos	21
Fig 3-5. Elipse de saturación	23
Fig 3-6. Evolución de la velocidad de avance	24
Fig 3-7. Visualización de los parámetros de contacto del neumático	27
Fig 3-8. Distancia a la superficie de contacto del neumático	28
Fig 3-9. Soluciones del sistema planteado	30
Fig 3-10. Visualización del modelo de bicicleta con cuerpo de ciclista	32
Fig 4-1. Distribución de tensiones en un contacto normal [9]	37
Fig 4-2. Deformación circunferencial de los neumáticos [7]	39
Fig 4-3. Contactos rodantes estacionarios [6]	39
Fig 4-4. Distribución de la tensión normal en el contacto rodante [7]	40
Fig 4-5. Ondas circunferenciales en una rueda que viaja a su velocidad crítica [7]	40
Fig 4-6. Evolución de la adherencia con la carga normal [10]	41
Fig 4-7. Efectos de los esfuerzos tangenciales en los neumáticos [7]	43
Fig 4-8. Evolución real de las fuerzas tangenciales con el deslizamiento [6]	44
Fig 5-1. Visualización del efecto giroscópico [4]	45
Fig 5-2. Diagrama de continuación de una bicicleta [23]	47
Fig 5-3. Experimento de la universidad de Delft [15]	52
Fig 7-1. Diagrama del funcionamiento del simulador	57
Fig 7-2. <i>Joystick</i> empleado para la simulación	58
Fig 7-3. Simulador interactivo de la bicicleta	59

1. Introducción

La descripción del movimiento de las bicicletas ha sido motivo de discusión durante años, pero no ha sido hasta hace poco tiempo cuando realmente se ha obtenido un modelo válido que permite comprender el comportamiento que presenta este invento.

Para generar un modelo de bicicleta hay que ser capaz de plantear sus ecuaciones de movimiento, tarea que debido a su complejidad, han tardado en ser deducidas de manera correcta a pesar de los numerosos intentos de diversos científicos.

En 1899 el matemático Francis Whipple, escribió su tesis sobre la dinámica de las bicicletas [1, 12]. Su modelo es conocido como el primero en representar correctamente su movimiento, pero realmente sus ecuaciones contenían un error, que por suerte no se propagaba al linealizarlas alrededor de la posición vertical. Gracias a ello, fue el primero en poder estudiar la estabilidad del sistema de manera satisfactoria.

El modelo matemático de bicicleta que elaboró Whipple, consistía en un sistema compuesto por cuatro sólidos rígidos y tres grados de libertad:

- La rueda trasera.
- El cuadro.
- El manillar.
- La rueda delantera.

En cambio, el modelo físico que se ha implementado en este proyecto tiene notables diferencias con este modelo clásico, ya que este último se basa en fuertes hipótesis sobre su movimiento:

- Las ruedas son consideradas rígidas y su contacto con el suelo es puntual, además se restringe su movimiento a rodadura sin deslizamiento.
- El suelo se considera horizontal, no se admiten pendientes en el terreno.
- El cuerpo del ciclista es rígido y permanece en el plano del cuadro.
- El par correspondiente al pedaleo no considera las oscilaciones que se presentan en él por la desigual aplicación de la fuerza en una pedalada.
- No existen efectos disipativos distintos de la resistencia aerodinámica.

Con estas hipótesis se llegaba a un sistema de ecuaciones diferenciales y algebraicas a resolver en cada instante de tiempo, ya que las coordenadas elegidas para su análisis deben cumplir ciertas restricciones que imponen las hipótesis descritas anteriormente.

1.1 Objetivos

El objetivo principal del proyecto, consiste en crear un modelo de bicicleta que permita describir su movimiento considerando una interacción entre los neumáticos y el terreno más realista que la incluida en el modelo de Whipple, y que a su vez no pierda la capacidad de poder simular el sistema en tiempo real.

Este es el motivo por el que se dejan a un lado las coordenadas generalizadas que emplea el modelo de Whipple, para dar paso a un conjunto de nueve coordenadas relativas sin ningún tipo de restricción algebraica a cumplir.

Para conseguir controlar la bicicleta en tiempo real es necesario según [5, 11]:

- Conocer la posición del sistema en cada instante para ser capaz de enviarle las acciones necesarias de modo que consiga la trayectoria deseada. Con una vista en tercera persona del sistema que puede proporcionar un entorno gráfico se solucionaría este problema.
- Para poder controlar al sistema correctamente, el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que se genera debe poder integrarse conforme el usuario percibe la información del entorno gráfico. De no ser así, el simulador no mostraría un comportamiento real del sistema.

Para darle mayor realismo al simulador, se incorpora también una mejora que requiere una coordenada generalizada más para describir la inclinación relativa del ciclista respecto al cuadro de la bicicleta. De esta manera el control que se puede realizar tiene mayores opciones que el de nueve grados de libertad, proporcionando un comportamiento aún más realista.

2. Descripción general de neumáticos

Los neumáticos fueron inventados en 1845 por el escocés R.W. Thomson, pero se tardó medio siglo en fundar una industria moderna dedicada a fabricarlos gracias al irlandés J.B. Dunlop.

La función más obvia de los neumáticos es soportar el peso de la bicicleta, ya sea estando en la posición vertical o mientras toma una curva y se encuentra inclinada. Además, supone una ayuda para los sistemas de suspensión ya que, por sofisticados que puedan llegar a ser hoy en día, no sería práctico tener ruedas sin neumáticos o cualquier otra forma de amortiguamiento mediante su deformación.

De no ser incorporados, las cargas que se transmitirían a las ruedas serían enormes, por lo que su rotura sería algo habitual. Sin posibilidad de deformación, la rueda estaría sometida a elevadas aceleraciones verticales al encontrarse obstáculos, que provocarían a su vez cargas del orden de toneladas que ninguna rueda puede soportar. Gracias a que las ruedas incorporan neumáticos, las cargas soportadas disminuyen a decenas de kilogramos, además de ayudar a distribuirla sobre una mayor superficie de la carcasa.

Sin los neumáticos, las cargas por impactos que se transmiten a la masa suspendida de la bicicleta serían mucho más elevadas. La velocidad vertical de la rueda sería mucho mayor y por tanto también las fuerzas de amortiguación en el caso de incorporarla.

Todas estas fuerzas de gran magnitud se acabarían transmitiendo al cuadro de la bicicleta y finalmente al conductor, provocando que la marcha sobre el vehículo no sea sencilla ni cómoda.

No obstante, la función más importante de los neumáticos, sin duda es su capacidad de generar acciones tangenciales que permiten dirigir a los vehículos a la posición que deseamos. Por este motivo cada vez tienen mayor importancia los modelos de neumáticos que permiten predecir el momento en el que las acciones que les demandamos los saturan, evitando la pérdida de control en nuestros vehículos y por tanto accidentes.

2.1 Composición típica de neumáticos

En este apartado se muestra cómo la idea de rueda, invento que ha acompañado al hombre en gran parte de su historia, ha evolucionado gracias a la mejora de los materiales y las técnicas de fabricación, hasta llegar a los neumáticos que conocemos hoy en día. Es evidente que en este aparentemente sencillo elemento de nuestros vehículos hay invertida una gran cantidad de conocimiento de diversos campos de la ingeniería.

En general, se puede decir que los neumáticos constan de capas superpuestas formadas por fibras textiles y de acero que se recubren con una capa de goma que lleva en su exterior llamada banda de rodadura.

La cubierta del neumático se puede descomponer, según [3], en:

- Carcasa: parte principal de la cubierta es la encargada de soportar la presión de inflado y las sollicitaciones exteriores. Se compone de tejidos con hilos, muy resistentes a la tracción y embebidos en el caucho. Para sujetar los hilos, hay unos aros de acero en la zona de contacto con la llanta que forman el talón.
- Banda de rodadura: es la única zona de contacto entre el neumático y el suelo, por lo que es la que mayor desgaste sufre. Se compone de caucho sobre el que hay ranuras que conforman el dibujo del neumático e impiden el deslizamiento, a la vez que facilitan la evacuación del agua. De esta manera evitan que se forme una película de agua entre el suelo y la misma, que provocaría perder la capacidad de adherencia de los neumáticos y por tanto la posibilidad de controlar el vehículo.
- Capas de rodamiento: entre la banda de rodadura y la carcasa existen unas capas de cables que absorben los esfuerzos generados por los impactos que recibe la cubierta y protegen la banda de rodadura sin alterar la flexibilidad de la cubierta.
- Hombros: une la banda de rodadura con los flancos del neumático. Su menor espesor, provoca que sea la zona con mayor gradiente de temperatura.
- Flancos: entre los hombros y los talones se encuentra la estructura lateral del neumático. Los flancos resisten la carga vertical y la flexión lateral del neumático al tiempo que colaboran a la suspensión del vehículo absorbiendo parte de las irregularidades del terreno que provocan flexión vertical.
- Talones: mediante un alambre de acero de alta resistencia a la tracción, recubierto de goma y tejido, los talones aseguran y mantienen el tamaño del neumático en régimen de trabajo a la vez que asegura la unión entre llanta y cubierta. Para esto último, se disponen en los talones los denominados refuerzos de talón.

Los neumáticos se montan sobre las llantas, que son estructuras redondas de acero de aleación metálica con la forma adecuada para el acople de los talones. La masa de ambos elementos constituye la mayor parte de la masa no suspendida, de gran importancia en el comportamiento de los vehículos.

Para desarrollar sus funciones de manera satisfactoria, los neumáticos se diseñan con las siguientes características:

- Baja resistencia a la rodadura.
- Resistencia a la fatiga, al desgaste, a la formación de grietas y capacidad para soportar los esfuerzos dinámicos exteriores.
- Adecuada flexibilidad radial, transversal y circunferencial.
- Elevada adherencia sobre pista seca y mojada, tanto longitudinal como transversal.

Según la aplicación, hay varias configuraciones internas disponibles para elegir, permitiendo seleccionar unas características que den el comportamiento adecuado. En la figura 2-1 se observan dos de las configuraciones más habituales de neumáticos.

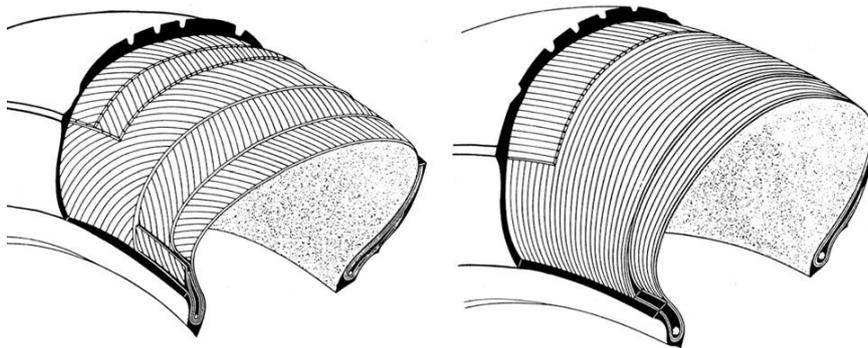


Figura 2-1. Composición de neumáticos radial y diagonal [2]

2.2 Modelos de neumáticos

Las características descritas anteriormente requieren analizar un medio no continuo, no lineal y no homogéneo, por lo que su diseño y modelización matemática son un reto.

No obstante, existen actualmente modelos que explican razonablemente bien los fenómenos asociados a la respuesta de los neumáticos en diferentes situaciones, con vistas a conocer las fuerzas que generan y sus peculiaridades, así como ver los campos de mejora en los diseños de nuevas versiones de neumáticos.

Los modelos de neumáticos para su estudio pueden dividirse en tres categorías:

- Modelos físicos: los modelos físicos son construidos teniendo en cuenta las características estructurales del neumático y las propiedades del material.

Estos modelos no son adecuados para simular la dinámica vehicular donde se requieren tiempos de simulación cortos, pero consiguen describir de manera detallada el comportamiento del neumático.

Incluidos en estos modelos se encuentran los basados en elementos finitos pero presentan un elevado coste de tiempo tanto computacional como de definición previa del modelo.

- Modelos analíticos: los modelos analíticos proporcionan las fuerzas generadas en el neumático mediante la simplificación de ecuaciones físicas.

Dentro de estos modelos se encuentra el modelo de Dugoff. Su inconveniente es que necesitan resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para conocer el comportamiento del neumático en régimen transitorio, lo que resulta una tarea difícil si se quiere incorporar dichos modelos en la formulación para el control de un vehículo.

- Modelos empíricos: describen el comportamiento del neumático mediante expresiones matemáticas que no obedecen a un fenómeno físico, pero permiten obtener las fuerzas de forma precisa sin tener que integrar ecuaciones diferenciales.

Este tipo de modelo es el elegido para la realización de este proyecto. Entre estos modelos destaca el propuesto por Pacejka [2].

3. Descripción del modelo

En este apartado se presenta el modelo físico de la bicicleta, que servirá para poder llevar a cabo el estudio de la interacción neumático terreno, por lo que es indispensable eliminar al menos las dos primeras hipótesis del modelo de Whipple, ya que como es de esperar, conforme se avanza con la bicicleta, tanto el suelo como especialmente el neumático se deforman de manera notable. Además, durante el movimiento del sistema, las ruedas no tienen que permanecer siempre en contacto con el suelo como imponía el modelo de Whipple.

Se verá que, gracias a la capacidad de deformación, aparecen en los neumáticos esfuerzos tangenciales y normales, cuya resultante son las interacciones que forman el objetivo principal de este proyecto, ya que son las encargadas de mover el sistema.

En primer lugar se plantea un modelo de bicicleta que se puede llamar equivalente al de Whipple, que cuenta con nueve grados de libertad en lugar de tres. Gracias a él, se podrá simular el movimiento de la bicicleta bajo las nuevas hipótesis consideradas en su movimiento, que pretenden ser más realistas.

Posteriormente, se ha incluido el cuerpo del ciclista como sólido independiente del cuadro, permitiendo así su inclinación respecto a este, acción que es habitual cuando se conduce una bicicleta y que permite realizar los giros con mayor realismo en el simulador.

3.1 Planteamiento de coordenadas y cinemática del sistema

El modelo que se va a generar cuenta también con cuatro sólidos:

- La rueda trasera.
- El cuadro.
- El manillar.
- La rueda delantera.

Una vez elegidos los sólidos del sistema, hay que realizar una elección correcta de coordenadas que permitan describir su movimiento en tiempo real.

Como era de esperar, es de vital importancia el uso de coordenadas relativas en lugar de coordenadas de referencia, ya que disminuyen en gran medida el número de coordenadas a definir para conocer la posición del mismo, además de no estar relacionadas entre sí por ecuaciones de restricción algebraicas.

La desventaja de estas coordenadas está en el tiempo que hay que emplear en su elección, puesto que si se eligiera una configuración de coordenadas de referencia de forma sistemática, no se podría resolver en tiempo real.

3.1.1 Problema de posición y orientación de los sólidos

Se necesitan nueve coordenadas independientes para conocer la posición de los sólidos definidos en cualquier instante, mostrados junto con la geometría de la bicicleta en la figura 3-1.

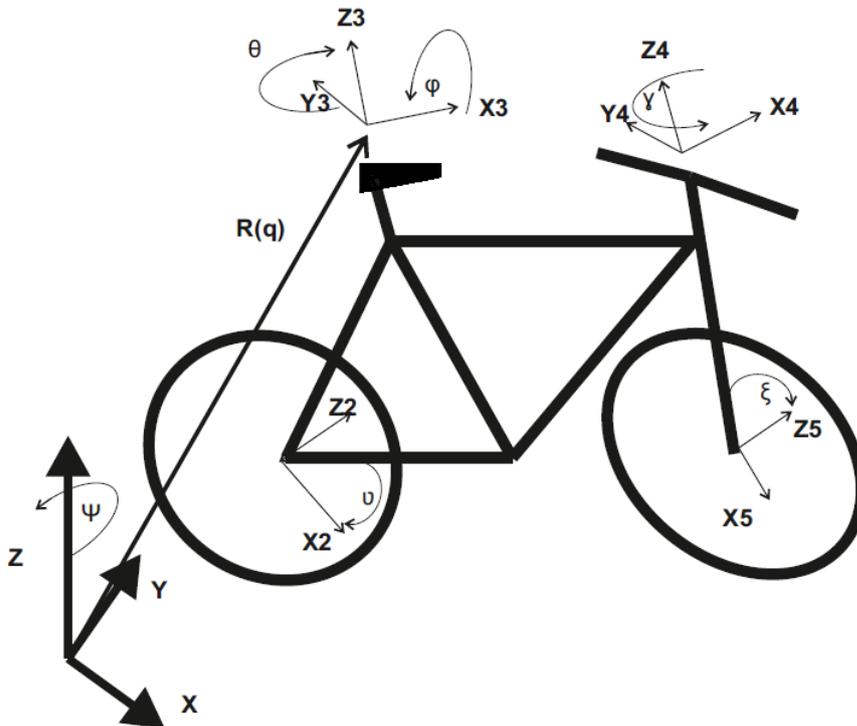


Figura 3-1. Coordenadas del modelo de 9 gdl

A diferencia del modelo de Whipple, que se apoya en el conocimiento de la posición del punto de contacto de la rueda trasera, este modelo lo hace en el sillín de la bicicleta gracias a las 3 primeras coordenadas elegidas. Así se evita tener que restringir el movimiento de la bicicleta al plano horizontal.

Gracias a las matrices de giro que van a generarse, se pueden tener las coordenadas de un punto que pertenece a un sólido cualquiera al conocer su posición en locales.

Un punto importante del modelo es la definición de un parámetro angular extra (β), que no es un grado de libertad del sistema, pero es la clave para la definición del giro del manillar γ , ya que como se puede observar en cualquier bicicleta, este eje de giro tiene cierta inclinación en el plano de la rueda delantera.

Este ángulo β es una constante en cada bicicleta, por lo que no presenta evolución temporal con el movimiento a pesar de influir de manera notable en él. Como se verá más adelante, la existencia de este ángulo toma importancia en la estabilidad propia de las bicicletas.

Estas nueve coordenadas definidas no están sujetas a ninguna restricción, ya que como se dijo anteriormente, se elimina tanto la condición de movimiento exclusivo por el plano horizontal como también la rodadura sin deslizamiento.

Tampoco se impondrán restricciones de movilidad, sino que se aplicará un par de pedaleo tal y como hacemos en la realidad, que proporcionará cierta velocidad en el sistema al resolver la dinámica del mecanismo.

Esto lo hace más realista pero menos eficiente computacionalmente que el modelo de Whipple, ya que hay nueve coordenadas por conocer en cada instante en lugar de las tres independientes en el otro, por lo que posteriormente habrá que elegir los métodos numéricos adecuados que permitan la resolución en tiempo real.

A continuación se exponen las coordenadas elegidas para describir la posición y orientación de la bicicleta:

- Las coordenadas R_{x_3} y R_{y_3} fijan la posición de un punto del cuadro en el plano $\langle X Y \rangle$ del sistema global de referencia.
- Es necesaria una coordenada extra (R_{z_3}), que fija la altura de dicho punto del cuadro, ya que en este modelo no se restringen los movimientos del mecanismo al plano horizontal como se indicó anteriormente.
- El ángulo de guiñada (ψ) que forma el eje x_3 del cuadro con el eje X del sistema global de referencia.
- El ángulo de vuelco (φ), que forma el eje z_3 del cuadro con el eje Z del sistema global de referencia.
- El ángulo de cabeceo (θ), es el que forma el eje y_3 del cuadro con el sistema de referencia global.

- Para el ángulo de giro del manillar (γ), se necesita hacer uso de un sólido intermedio entre el cuadro y el mismo, ya que como se puede apreciar, no se realiza su montaje perpendicular al suelo, sino que se les da un cierto ángulo de avance, β , que facilita la estabilidad del sistema.

El sólido intermedio mencionado, forma un ángulo β entorno al eje y_3 del cuadro, de esta manera se define a γ como el ángulo que forma el eje y_4 del manillar con el eje y del sólido intermedio.

- El ángulo de giro de la rueda delantera, ξ .
- El ángulo de giro de la rueda trasera, υ .

Con las tres primeras coordenadas, se ha fijado la posición del cuadro en el espacio. Las tres siguientes coordenadas son los ángulos de Euler del cuadro que permiten conocer la orientación en cualquier instante. Pese a que estos ángulos pueden presentar posiciones singulares, se ha evitado el uso de los parámetros de Euler ya que habría sido necesario añadir una ecuación algebraica que resolver en cada instante de tiempo, lo que iría en contra de la simulación en tiempo real que se pretende.

La séptima coordenada es la única necesaria para definir la posición y orientación del sólido 4 (manillar). Gracias al uso de coordenadas relativas, sólo es necesario definir el único movimiento distinto que tiene este sólido respecto al cuadro.

Las dos últimas coordenadas pertenecen a sólidos distintos, cuya posición y orientación global se define también con una coordenada extra, ya que se vuelven a apoyar en el hecho de que ya está fijada la posición del cuadro y que sólo tienen un movimiento permitido respecto a él.

Finalmente, las coordenadas generalizadas descritas se pueden agrupar en el vector:

$$\mathbf{q} = [R_{x3} R_{y3} R_{z3} \Psi \varphi \Theta \gamma \xi \upsilon]^T \quad (3.1)$$

También será de utilidad la derivada temporal de este vector, llamado vector de velocidades generalizadas:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{R}_{x3} \dot{R}_{y3} \dot{R}_{z3} \dot{\Psi} \dot{\varphi} \dot{\Theta} \dot{\gamma} \dot{\xi} \dot{\upsilon}]^T \quad (3.2)$$

Las matrices de giro de los distintos sistemas de referencia con respecto al sistema global de coordenadas se forman con los unitarios del sistema de coordenadas local respecto al global. De esta forma permiten conocer en coordenadas globales un vector cuyas componentes se conocen en coordenadas locales.

En el sistema bajo análisis se necesitan las siguientes matrices de rotación simples, que permitirán formar las matrices de rotación de cada sólido:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_\psi &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_\nu &= \begin{bmatrix} \cos \nu & 0 & \sin \nu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \nu & 0 & \cos \nu \end{bmatrix} & \mathbf{A}_\beta &= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_\xi &= \begin{bmatrix} \cos \xi & 0 & \sin \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \xi & 0 & \cos \xi \end{bmatrix} & \mathbf{A}_\phi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \sin \phi \end{bmatrix} & \mathbf{A}_\gamma &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_\theta &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Con estas matrices de rotación simple la matriz de giro del sólido 3 (el cuadro) sería:

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\phi \mathbf{A}_\theta \tag{3.4}$$

Y el sentido físico de las componentes es que sus columnas son los ejes del sistema de referencia 3 (cuadro) respecto al sistema global.

De la misma forma, la matriz de giro del sólido 2 (rueda trasera) queda:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^3 \mathbf{A}_\nu \tag{3.5}$$

La matriz de giro del sólido 4 (manillar) sería:

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3 \mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\gamma \tag{3.6}$$

Finalmente, la matriz de giro del sólido 5 (rueda delantera):

$$\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^4 \mathbf{A}_\xi \tag{3.7}$$

Conviene recordar que la multiplicación de matrices no es conmutativa, por lo que no obtendríamos un resultado correcto si realizamos los giros sucesivos (productos matriciales) en otro orden distinto al indicado.

3.1.2 Cinemática de la bicicleta

Una vez posicionados y orientados todos los sólidos del sistema, se puede abordar el problema de las velocidades angulares de cada uno de los sólidos en el espacio. Hay que tener en cuenta que la velocidad angular de un cuerpo no se puede obtener con la derivada temporal de los tres ángulos que orientan al sólido.

Desde ahora, el superíndice de los vectores y matrices indican el sólido al que pertenecen y la presencia de una línea horizontal en la parte superior significa que están referidos a un sistema de referencia local de coordenadas.

Se va a demostrar que la velocidad angular en locales, $\bar{\mathbf{w}}$, o en globales, \mathbf{w} , de cada sólido se podrá expresar mediante el uso de unas matrices de transformación.

Para obtener el vector de velocidad angular de un sólido, se necesita definir la matriz antisimétrica, cuyas componentes coinciden con las del vector buscado, ya que no es posible obtener la velocidad angular de los sólidos como la derivada de los tres ángulos elegidos para definir su orientación.

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Siendo \mathbf{A} la matriz de giro asociada al sólido en cuestión.

Entonces se definen las matrices \mathbf{G} de forma que sean el jacobiano del vector velocidad angular respecto de la derivada temporal del vector de coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad \bar{\mathbf{G}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (3.9)$$

De esta manera, se puede concluir que, en general, la velocidad angular de cualquier sólido se obtiene a partir de una matriz de transformación que depende de las coordenadas generalizadas aplicada sobre la derivada temporal del vector de coordenadas generalizadas.

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{G}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad \bar{\mathbf{w}}_i = \bar{\mathbf{G}}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.10)$$

Se observa cómo la velocidad angular de un sólido está relacionada de forma lineal con las velocidades generalizadas del sistema.

En cuanto a la velocidad de traslación de un punto del sólido, en concreto del centro de gravedad, por las simplificaciones que permite realizar de la dinámica, se usa el jacobiano del vector de posición de los centros de gravedad en globales respecto a las coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{H}^i = \frac{\partial \mathbf{r}_g^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (3.11)$$

Siendo los vectores de posición de los centros de gravedad (en el sistema de referencia global) de cada sólido:

$$\mathbf{r}_g^i(\mathbf{q}) = \mathbf{r}^i(\mathbf{q}) + \mathbf{A}^i(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{r}}_g^i \quad (3.12)$$

De esta manera, la velocidad del centro de gravedad de cada sólido se expresa:

$$\mathbf{v}_g^i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.13)$$

Se puede observar cómo todas las velocidades del sistema son lineales respecto de las velocidades generalizadas, variando la proporcionalidad en función de la posición del mismo.

Las matrices de transformación cinemática \mathbf{L} y \mathbf{l} se pueden formar en este momento y serán de utilidad para conseguir proyectar las ecuaciones de Newton-Euler a las coordenadas generalizadas descritas, es decir, son de utilidad para poder escribir a estas ecuaciones en términos de las derivadas primera y segunda de las coordenadas generalizadas, en lugar de estar en términos de las aceleraciones de los centros de gravedad y de las aceleraciones angulares.

Para tener la aceleración de los centros de gravedad a partir de \mathbf{q} y sus derivadas temporales habría que volver a derivar la expresión (3.13), quedando:

$$\mathbf{a}_g^i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{h}^i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}^i(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \quad (3.14)$$

De la misma manera ocurre con las aceleraciones angulares:

$$\boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{g}^i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}^i(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \quad (3.15)$$

Estando definidas las matrices \mathbf{g}^i y \mathbf{h}^i por: $\mathbf{h}^i = \frac{\partial(\mathbf{H}^i\dot{\mathbf{q}})}{\partial\dot{\mathbf{q}}}$ $\mathbf{g}^i = \frac{\partial\bar{\mathbf{w}}_i}{\partial\dot{\mathbf{q}}}$ (3.16)

De esta manera, las matrices de transformación cinemática quedan:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{H}^2\mathbf{T} \mathbf{H}^3\mathbf{T} \mathbf{H}^4\mathbf{T} \mathbf{H}^5\mathbf{T} \mathbf{G}^2\mathbf{T} \mathbf{G}^3\mathbf{T} \mathbf{G}^4\mathbf{T} \mathbf{G}^5\mathbf{T}]^T \quad (3.17)$$

$$\mathbf{l} = [\mathbf{h}^2\mathbf{T} \mathbf{h}^3\mathbf{T} \mathbf{h}^4\mathbf{T} \mathbf{h}^5\mathbf{T} \mathbf{g}^2\mathbf{T} \mathbf{g}^3\mathbf{T} \mathbf{g}^4\mathbf{T} \mathbf{g}^5\mathbf{T}]^T \quad (3.18)$$

3.2 Ecuaciones de Newton-Euler

El último paso para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema es plantear sus características dinámicas y las fuerzas a las que está sometido.

En primer lugar se va a desarrollar la forma en la que se obtiene la matriz de masa del sistema, para posteriormente formar el vector de fuerzas generalizadas y así tener las ecuaciones de Newton-Euler de la bicicleta. Con ellas se finaliza el modelo que se está creando para generar el movimiento de las bicicletas en tiempo real.

3.2.1 Matriz de masa

Cada sólido tiene asociada unas componentes en la matriz por su propia masa, que se expresa con:

$$\widehat{\mathbf{M}}^i = \begin{bmatrix} m^i & 0 & 0 \\ 0 & m^i & 0 \\ 0 & 0 & m^i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Igualmente, cada sólido tiene su matriz de inercia, que en general son de forma:

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} I_x^i & I_{xy}^i & I_{xz}^i \\ I_{yx}^i & I_y^i & I_{yz}^i \\ I_{zx}^i & I_{zy}^i & I_z^i \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Combinando a estas matrices, se puede obtener una matriz de masa para el sistema completo:

$$\mathbf{MM} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{M}}^i & \dots & \widehat{\mathbf{0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\mathbf{0}} & \dots & \mathbf{I}_i \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Con vistas a la simulación en tiempo real, no se integran las ecuaciones del movimiento con ella, ya que como se dijo anteriormente, hay que escribir las ecuaciones del movimiento en término de las coordenadas generalizadas y sus derivadas, por lo que la matriz de masa que se presentará es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{MM} \mathbf{L} \quad (3.22)$$

Los tensores de inercia toman las formas simplificadas por las características geométricas de sus sólidos de simetría:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} I_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_5 = \begin{bmatrix} I_{5x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{5y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{5z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} I_{3x} & 0 & I_{3zx} \\ 0 & I_{3y} & 0 \\ I_{3zx} & 0 & I_{3z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} I_{4x} & 0 & I_{4zx} \\ 0 & I_{4y} & 0 \\ I_{4zx} & 0 & I_{4z} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3.2.2 Vector de fuerzas generalizadas

A continuación se va a describir cómo se ha formado el vector de fuerzas generalizadas, \mathbf{Q} , siendo necesario primero conocer el módulo de las fuerzas implicadas y posteriormente dónde y cómo se aplican:

- Vector de fuerzas de inercia proporcionales a la velocidad, $\mathbf{Q}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

$$\text{En cada sólido se tiene: } \mathbf{F}_v^i = [0 \ 0 \ 0 \ -\bar{\mathbf{w}}_i \times \mathbf{I}_i \bar{\mathbf{w}}_i]^T \quad (3.25)$$

Agrupándolos en el mismo vector de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.26)$$

$$\mathbf{b} = [-\bar{\mathbf{w}}_2 \times \mathbf{I}_2 \bar{\mathbf{w}}_2 \quad -\bar{\mathbf{w}}_3 \times \mathbf{I}_3 \bar{\mathbf{w}}_3 \quad -\bar{\mathbf{w}}_4 \times \mathbf{I}_4 \bar{\mathbf{w}}_4 \quad -\bar{\mathbf{w}}_5 \times \mathbf{I}_5 \bar{\mathbf{w}}_5]^T \quad (3.27)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}_v = [\mathbf{a}^T \ \mathbf{b}^T]^T \quad (3.28)$$

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{L}^T(\mathbf{Q}\mathbf{Q}_v - \mathbf{M}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) \quad (3.29)$$

- Vector de fuerzas generalizadas de gravedad, $\mathbf{Q}_{grav}(\mathbf{q})$:

Sobre cada sólido actúa en su centro de gravedad el peso:

$$\mathbf{F}_g^i = [0 \ 0 \ -m^i g]^T \quad (3.30)$$

Se puede formar un vector que agrupe a todas las fuerzas que ejerce la gravedad sobre cada sólido:

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{grav} = [\mathbf{F}_g^2 \ \mathbf{F}_g^3 \ \mathbf{F}_g^4 \ \mathbf{F}_g^5]^T \quad (3.31)$$

Aplicando la matriz de transformación cinemática sobre el vector obtenido, se tiene el vector de fuerzas generalizadas de gravedad que se buscaba en principio:

$$\mathbf{Q}_{grav} = \mathbf{L}^T \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{grav} \quad (3.32)$$

- Vector de fuerzas generalizadas aerodinámicas, $\mathbf{Q}_{aero}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

La fuerza aerodinámica considerada intenta aproximar la resistencia al avance que presenta un sólido en movimiento cuando se encuentra inmerso en un fluido.

En este caso, se considera que el sólido 3 (cuadro) es el que opone la mayor parte de la resistencia, siendo la del resto de los sólidos definidos despreciables respecto a ella.

El tamaño, la forma y la velocidad del sistema son los parámetros que afectan en mayor medida a la resistencia y a la sustentación aerodinámica, que cobran mayor importancia conforme aumenta la velocidad de avance.

De todas las fuerzas implicadas en el movimiento de la bicicleta, la resistencia aerodinámica es la que consume mayor cantidad de la potencia introducida en el sistema. La responsable de la existencia de esta fuerza es la viscosidad del aire. Sin ella, cualquier cuerpo, por roma que fuera su geometría, podría moverse en el fluido a cualquier velocidad sin sufrir resistencia aerodinámica.

La existencia de viscosidad provoca un cambio en la distribución de presiones en torno al sistema, la cual tiene una resultante neta que proporciona la resistencia al avance del sólido.

Este es el modo mediante el cual la viscosidad causa la mayor parte de la resistencia aerodinámica, que recibe el nombre de resistencia de presión. Además de ella, existe otro término de menor magnitud que es la resistencia de viscosidad, que sería la fuerza tangencial necesaria para provocar que las capas de fluido adyacentes a los sólidos se muevan entre sí.

Para el modelo que se está construyendo, se supone que la fuerza de resistencia aerodinámica causada al avanzar la bicicleta en el aire actúa en el centro de gravedad del cuadro y se aproximará su módulo mediante:

$$\mathbf{F}_{\text{aero}} = C_v \mathbf{v}_g^3 \mathbf{v}_g^3 \quad (3.33)$$

A partir del jacobiano del vector de posición del centro de gravedad del cuadro, que ya se ha definido anteriormente, \mathbf{H}^3 , junto con el principio de las potencias virtuales y recordando la ecuación 3.13, se puede concluir que el vector de fuerzas generalizadas por la aerodinámica es:

$$\mathbf{Q}_{\text{aero}} = -c_v (\mathbf{v}_g^3 \mathbf{v}_g^3)^{1/2} \mathbf{H}^3 \mathbf{v}_g^3 \quad (3.34)$$

El hecho de considerar la resistencia aerodinámica como una fuerza externa aplicada en el centro de gravedad del sólido 3, provocará un momento de cabeceo que hará que la rueda delantera tenga menor área de contacto.

Este cambio en la distribución de pesos, de ocurrir a alta velocidad, podría conllevar problemas al solicitar elevadas fuerzas tangenciales a los neumáticos, puesto que como se verá posteriormente, para conseguir mejor agarre neto es conveniente tener ambas ruedas cargadas y además lo más igualadas posible debido a la dependencia de la capacidad de adherencia de los neumáticos con la carga vertical.

Si la delantera cede carga a la trasera, en principio no hay ganancia neta, pero en realidad, la rueda que más se carga no adhiere tanto como la pérdida que sufre la menos cargada, por lo que existe pérdida de capacidad de generar fuerzas tangenciales en el contacto.

Hay que remarcar que el módulo de las fuerzas aerodinámicas considerado es una aproximación, ya que la obtención de la resistencia al avance de una bicicleta es un problema de gran complejidad debido a la geometría de los sólidos implicados.

Además, al cambiar esta resistencia con la velocidad y orientación de los sólidos, el hecho de conseguir modelarla de forma más realista se escapa del objetivo de este proyecto, sin contar con la limitación que debe estar presente siempre, que es poder resolver la dinámica del modelo en tiempo real.

Para poder modelar la interacción bicicleta-aire de modo más realista, habría que recurrir a la experimentación y a programas de mecánica de fluidos computacional que permitan resolver el problema con mejor aproximación que la descrita aquí.

- Vector de fuerzas generalizadas de contacto, $\mathbf{Q}_{con}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

Este vector de fuerzas se puede considerar el núcleo del presente proyecto, como se había descrito al comienzo de este apartado. En este modelo, que intenta ser más realista que el de Whipple, se han suprimido las restricciones de contacto, por ello hay que introducir este vector que simulará las acciones que el suelo ejerce sobre la bicicleta durante su movimiento.

Para conseguirlo, es recomendable separar el problema de contacto de dos sólidos en parte normal y tangencial [17].

La parte normal es la que impide que los cuerpos presenten cada vez mayor indentación. Su formulación se ha tomado de la teoría de Hertz, además de incorporarle una componente disipativa para disminuir progresivamente las oscilaciones verticales que se presenten en su movimiento.

Por tanto, el módulo de la fuerza normal está formado por dos componentes:

$$f_n = K_n \delta \quad (3.35)$$

$$f_{disip} = c v_{indent} \delta \quad (3.36)$$

Se tiene así en cada rueda:

$$\mathbf{F}_{nor} = (f_n + f_{disip}) \mathbf{n}_k \quad (3.37)$$

Siendo δ la indentación del neumático, K_n , la constante de rigidez vertical del mismo y \mathbf{n}_k un vector que siempre tiene la dirección del eje Z en globales.

La forma en que se obtiene la indentación para cada rueda en cada instante se explicará en otro apartado, para no perder de vista el objetivo final de este, que es la obtención de la matriz de masa y el vector de fuerzas generalizadas.

La forma en que se obtiene la indentación para cada rueda en cada instante, se explicará en otro apartado, para no perder de vista el objetivo final de éste, que es la obtención de la matriz de masa y el vector de fuerzas generalizadas.

En la rueda trasera, el vector de posición del punto de contacto en globales se denotará como \mathbf{r}_p^2 . Sus componentes se pueden obtener gracias a la posición del centro de gravedad de la rueda en globales y un vector de posición en locales que apunta en cada instante de tiempo al punto de contacto, de forma que:

$$\mathbf{r}_p^2 = \mathbf{r}_g^2 + \mathbf{A}_2 \overline{\mathbf{r}}_p^2 \quad (3.38)$$

Definiendo el jacobiano del punto de contacto de la rueda trasera:

$$\mathbf{H}_p^2 = \frac{\partial \mathbf{r}_p^2}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.39)$$

El vector de fuerzas generalizadas por el contacto normal en la rueda trasera, tendría la siguiente expresión obtenida nuevamente del principio de las potencias virtuales:

$$\mathbf{Q}_{nor}^2 = \mathbf{H}_p^{2T} \mathbf{F}_{nor}^2 \quad (3.40)$$

De la misma forma, en la rueda delantera hay que definir el vector de posición del punto de contacto en globales, para poder definir el jacobiano correspondiente:

$$\mathbf{r}_p^5 = \mathbf{r}_g^5 + \mathbf{A}_5 \overline{\mathbf{r}}_p^5 \quad (3.41)$$

$$\mathbf{H}_p^5 = \frac{\partial \mathbf{r}_p^5}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.42)$$

Para generar al vector de fuerzas generalizadas por contacto normal en la rueda delantera con la aplicación del principio de las potencias virtuales:

$$\mathbf{Q}_{nor}^5 = \mathbf{H}_p^{5T} \mathbf{F}_{nor}^5 \quad (3.43)$$

Con esto, el problema de contacto normal de los sólidos estaría listo para la simulación gracias al vector de fuerzas generalizadas de contacto normal, que es el encargado de mostrar en el sistema las acciones que evitan la indentación con el terreno al estar en contacto:

$$\mathbf{Q}_{nor} = \mathbf{Q}_{nor}^2 + \mathbf{Q}_{nor}^5 \quad (3.44)$$

Esta parte de las fuerzas externas generalizadas es la que impide al sistema caer indefinidamente por la acción de la gravedad, además de proporcionar una componente disipativa que atenúa las irregularidades causadas por la dinámica o por las características del terreno.

En este punto ya se puede realizar la primera simulación de la que podemos sacar conclusiones sobre comportamiento del sistema debido a la incorporación de neumáticos con posibilidad de deformación.

En la **figura 3-2** que se presenta, se observa la evolución de la tercera coordenada generalizada elegida, R_{z3} , desde un valor inicial que coincide con la altura de la bicicleta y por tanto sin indentación en ningún neumático, hasta que el sistema alcanza su posición de equilibrio estático, ya que por ahora, no se han incluido fuerzas tangenciales que permitan al sistema avanzar.

Se observa cómo el valor de la coordenada comienza aumentando, lo que en principio puede llevar a confusión, ya que el sistema tiende a buscar una posición con una indentación tal, que suponga un equilibrio de fuerzas y momentos.

Para aclarar este aumento inicial de la coordenada hay que recurrir a la evolución del ángulo de cabeceo del sistema, Θ , en el tiempo, que se presenta en la **figura 3-3**.

En este caso, la variable comienza en valor nulo, ya que como se dijo, la bicicleta se encuentra inicialmente acariciando el suelo sin indentación en ningún neumático y por tanto está posicionada de forma horizontal.

A continuación la variable toma valores negativos, lo que indica que el sistema empieza a oscilar bajando la rueda trasera, debido a que el centro de gravedad del sistema completo se encuentra más cerca del eje trasero que del delantero.

Esta sería la razón por la que inicialmente la coordenada que muestra el desplazamiento vertical comienza aumentando.

Además, en ambas figuras se puede apreciar que en pocos ciclos de carga y descarga, los neumáticos consiguen disipar la energía potencial que tenía el sistema inicialmente para llegar a la posición de equilibrio estático, que obviamente tiene un ángulo de cabeceo negativo por la ya mencionada posición del centro de gravedad global del sistema.

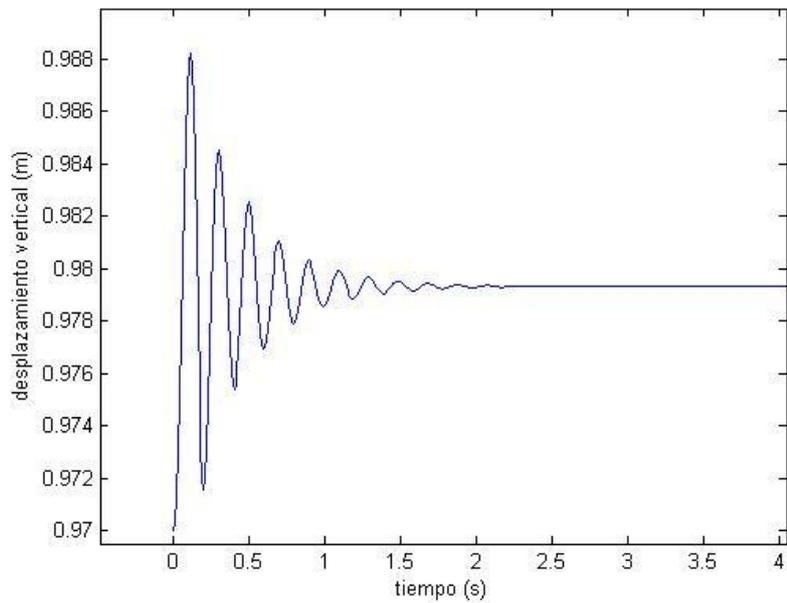


Figura 3-2. Evolución del desplazamiento vertical

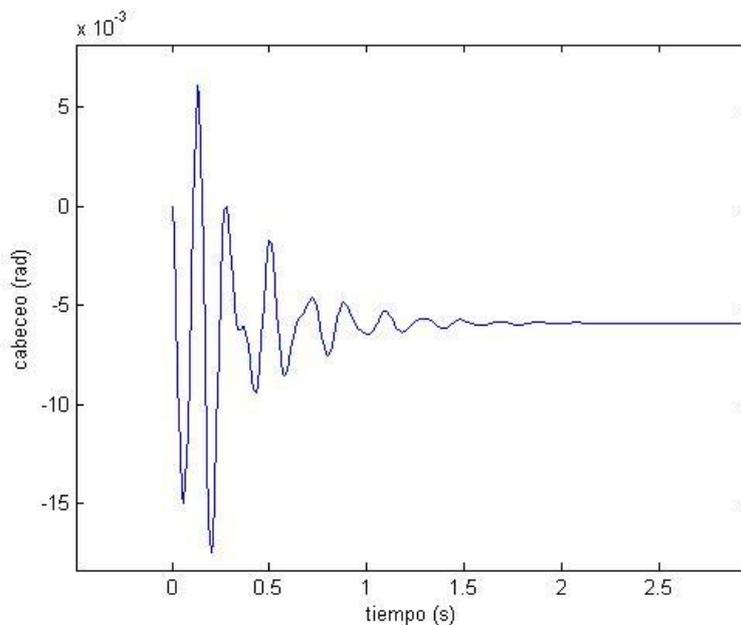


Figura 3-3. Evolución del ángulo de cabeceo

Estos resultados contrastan con los que se obtendrían de suponer neumáticos totalmente rígidos, ya que de ser así, antes las condiciones iniciales dadas, el sistema se encontraría en equilibrio estático.

En la realidad, esta componente disipativa se genera prácticamente en su totalidad (suponiendo que la bicicleta no tiene amortiguación incorporada) por la histéresis de los neumáticos al variar la carga que soportan. Para disponer de un amortiguamiento más preciso, habría que incluir el amortiguamiento estructural del cuadro y del manillar.

A continuación se va a abordar la parte tangencial de las fuerzas de contacto entre las ruedas y el suelo. Esta componente de las fuerzas de contacto es la responsable de acciones como los giros o de la capacidad de tracción y frenado en la bicicleta.

El modelo que se va a implementar representa que el módulo de la fuerza tangencial que se puede generar entre dos cuerpos tiene un máximo admisible en un deslizamiento concreto, es decir, es un comportamiento lineal con saturación.

Posteriormente, se sabe que puede disminuir, pero no se considera este efecto aquí, de esta manera es más sencillo de resolver computacionalmente en cada instante de tiempo. Además se evita tener que realizar numerosos experimentos en un tipo concreto de neumático para la validación del modelo.

En este modelo, el valor máximo se presenta en una valor del deslizamiento de 0.1, a partir de ahí el neumático satura y no admite acciones más agresivas.

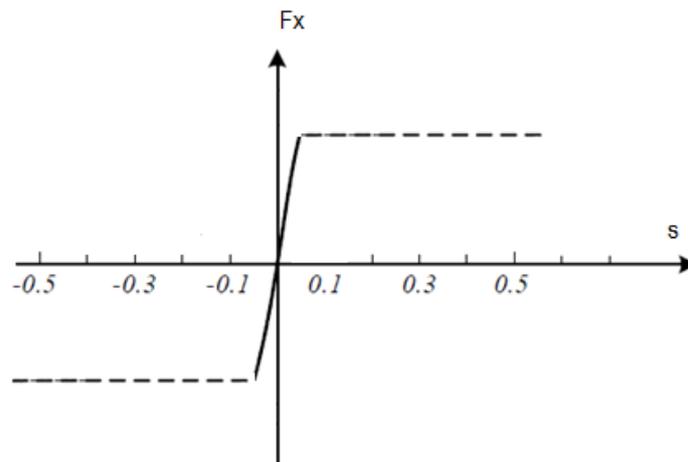


Figura 3-4. Comportamiento tangencial supuesto en los neumáticos

Para obtener el módulo de estas fuerzas, hay que definir unas magnitudes nuevas que representan la diferencia de velocidad de los sólidos implicados en el contacto y el terreno:

- Deslizamiento longitudinal:

Se define como:
$$\frac{-b'v_{slip}}{bv_c} = \sigma \quad (3.45)$$

Con este parámetro se compara en cada momento la velocidad del punto de contacto respecto a la del centro de gravedad de la rueda correspondiente, proyectadas sobre el vector binormal (dirección de avance del neumático).

La velocidad del punto de contacto se obtiene con: $\mathbf{v}_{\text{slip}}^i = \mathbf{H}_p^i \dot{\mathbf{q}}$ (3.46)

La velocidad del centro de gravedad con: $\mathbf{v}_g^i = \mathbf{H}^i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ (3.13)

Se verá próximamente cómo este parámetro es indispensable para crear un modelo de la interacción entre el neumático y el terreno más realista, puesto que el módulo de las fuerzas longitudinales depende de él.

Comparándolo con la restricción de rodadura sin deslizamiento de las ruedas, allí se obtendría en cada instante un valor nulo del deslizamiento longitudinal, ya que la restricción genera la fuerza necesaria en el contacto para que \mathbf{v}_{slip} sea nula siempre y pueda así cumplir dicha restricción.

- Deslizamiento angular:

Se define como: $\chi = -\sin^{-1} \left[\mathbf{n}_k' \left(\mathbf{b} \wedge \frac{\mathbf{v}_c - (\mathbf{n}_k' \mathbf{v}_c) \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_c - (\mathbf{n}_k' \mathbf{v}_c) \mathbf{n}_k|} \right) \right]$ (3.48)

Las fuerzas laterales en los neumáticos ocurren fundamentalmente por la presencia de cierto deslizamiento angular en ellos y en el terreno, es decir, por la presencia de cierta velocidad lateral no nula en el contacto.

Este parámetro que se ha definido es el encargado de cuantificar cómo está de deformado el campo de velocidad en el contacto con el suelo respecto del ideal, ya que las fuerzas de contacto surgen para oponerse a esa velocidad relativa.

Debido a que, como se explicó en la introducción, los neumáticos están formados por diversas capas no uniformes y que además contienen materiales anisótropos, si se quiere crear un modelo factible de neumáticos para el tiempo real hay que llevar a cabo ciertas simplificaciones.

Teniendo ya definidas estas variables, el módulo de las fuerzas longitudinales se considera dado por las siguientes ecuaciones:

$$F_x = \begin{cases} \mu_x \frac{|F_n|}{\sigma_c} \sigma & \sigma \leq \sigma_c \\ \mu_x |F_n| & \sigma > \sigma_c \end{cases} \quad (3.49)$$

Siendo σ_c el valor crítico del deslizamiento longitudinal a partir del cual saturan las fuerzas longitudinales.

El módulo de las fuerzas laterales en el neumático se describe matemáticamente con las siguientes expresiones:

$$F_y = \begin{cases} \mu_y \frac{|F_n|}{\chi_c} \chi & \chi \leq \chi_c \\ \mu_y |F_n| & \chi > \chi_c \end{cases} \quad (3.50)$$

Siendo ahora χ_c el valor crítico del deslizamiento angular para el cual saturan las fuerzas laterales del neumático.

El vector de fuerzas tangenciales se define a partir estos módulos obtenidos, sabiendo la dirección en la que actúa cada componente:

$$\mathbf{F}_{tag} = F_x \mathbf{b} + F_y (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) \quad (3.51)$$

El vector binormal, \mathbf{b} , tiene la dirección y sentido del neumático. El vector normal, \mathbf{n} , es perpendicular al terreno, por lo que su producto vectorial da como resultado un vector perpendicular a ellos, indicando que la resultante tangencial del neumático actúa en la dirección del mismo y en la perpendicular a ella y a la normal del terreno.

En el modelo de fuerzas tangenciales de contacto también se ha incorporado una elipse de saturación para representar las limitaciones que tienen los neumáticos cuando se les solicitan acciones tangenciales combinadas, porque como se puede esperar, el neumático no puede responder de igual manera que cuando se les piden de forma independiente.

Este concepto se representa matemáticamente con la siguiente inecuación [22]:

$$\left(\frac{F_x^{sat}}{\mu_x}\right)^2 + \left(\frac{F_y^{sat}}{\mu_y}\right)^2 \leq F_n^2 \quad (3.52)$$

Siendo: $F_x^{sat} = \frac{|F_n|}{f_{roz}} F_x$, $F_y^{sat} = \frac{|F_n|}{f_{roz}} F_y$ y $f_{roz} = \sqrt{\left(\frac{F_x}{\mu_x}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{\mu_y}\right)^2}$ (3.53)

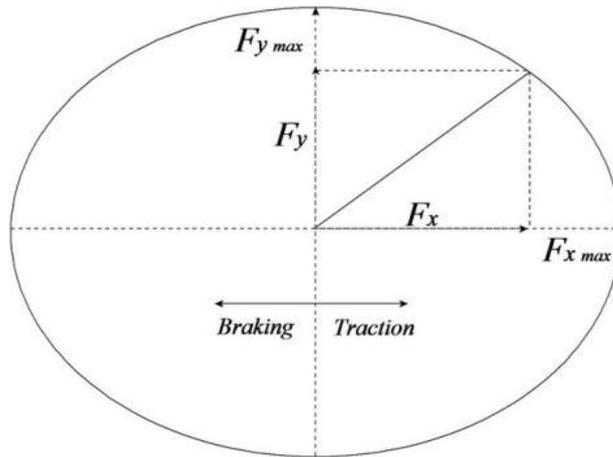


Figura 3-5. Elipse de saturación [7]

Para terminar con las fuerzas tangenciales en el contacto, nuevamente se aplica el principio de las potencias virtuales, se obtiene el vector de fuerzas generalizadas tangenciales en cada rueda, sabiendo que la parte tangencial también actúa en el punto de contacto del neumático:

$$\mathbf{Q}_{\text{tag}}^2 = \mathbf{H}_p^{2T} \mathbf{F}_{\text{tag}}^2 \quad \mathbf{Q}_{\text{tag}}^5 = \mathbf{H}_p^{5T} \mathbf{F}_{\text{tag}}^5 \quad (3.54)$$

Agrupándolos se obtiene el vector de fuerzas generalizadas de fuerzas tangenciales de contacto:

$$\mathbf{Q}_{\text{tag}} = \mathbf{Q}_{\text{tag}}^2 + \mathbf{Q}_{\text{tag}}^5 \quad (3.55)$$

En este momento se puede generar el vector de fuerzas generalizadas de contacto al completo, formado por la parte normal y tangencial obtenidas anteriormente:

$$\mathbf{Q}_{\text{con}} = \mathbf{Q}_{\text{nor}} + \mathbf{Q}_{\text{tag}} \quad (3.56)$$

Este vector de fuerzas generalizadas representa tanto las acciones normales que el terreno ejerce sobre los neumáticos que evitan su indentación, como también las fuerzas tangenciales que se generan en el contacto opuestas al movimiento relativo de los neumáticos sobre el terreno y que generan por tanto el movimiento del sistema.

Una vez que se ha conseguido implementar un modelo de fuerzas tangenciales en el contacto, se puede realizar una simulación en el sistema que muestre cómo ante una velocidad de avance inicial dada, el sistema pierde energía debido a que aún no hay ninguna potencia introducida en él, pero las fuerzas de contacto y aerodinámicas sí están consumiendo la energía disponible inicialmente.

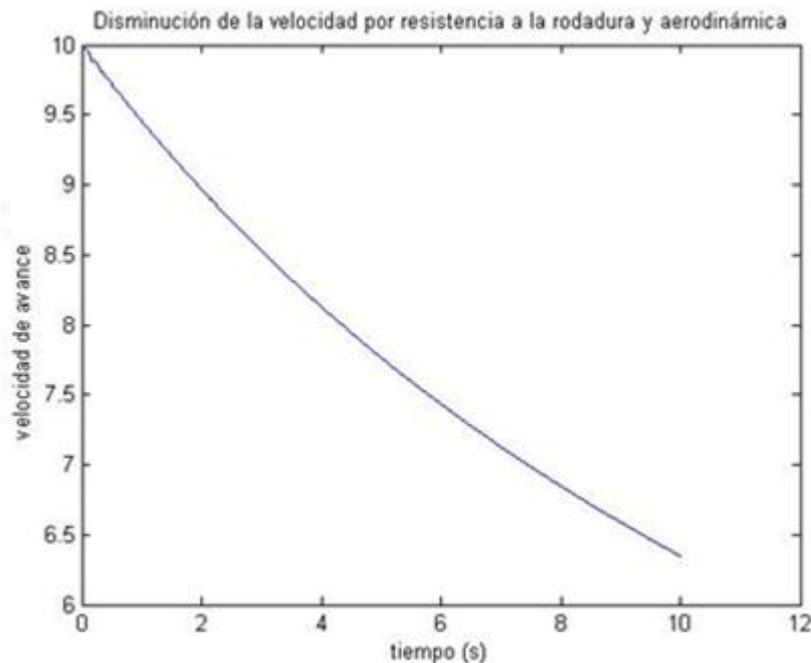


Figura 3-6. Evolución de la velocidad de avance

- Vector de fuerzas generalizadas aplicadas por el usuario, $\mathbf{Q}_{us}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

Por último, hay que implementar en el simulador unas fuerzas que realicen las acciones que ejerce el ciclista sobre el sistema. Se considera en este modelo que se pueden aplicar fuerzas externas por el usuario en los pedales y también en el manillar.

El par de pedaleo se aplica en la rueda trasera, por lo que las fuerzas generalizadas que introducen en el sistema quedan de la siguiente manera, gracias a la aplicación del principio de potencias virtuales nuevamente:

$$\mathbf{Q}_{ped} = \mathbf{G}_2(\mathbf{q})^T \mathbf{M}_{ped} \quad (3.57)$$

En cambio el par en el manillar, al realizarse en el sólido 4:

$$\mathbf{Q}_{man} = \mathbf{G}_4(\mathbf{q})^T \mathbf{M}_{man} \quad (3.58)$$

Conviene mencionar aquí, que la energía del sistema se introduce mediante los momentos de pedaleo y giro del manillar que se han definido anteriormente, además se puede afirmar que el término más importante es el de pedaleo.

Pero realmente no son ellos los que hacen que el sistema avance en la trayectoria que deseamos, se podría decir que son unas acciones intermedias sometidas a la voluntad del ciclista que “activan” las fuerzas de contacto tangencial con el terreno, dado que estas surgen como oposición al movimiento relativo de los sólidos, generando así fuerzas tangenciales en el contacto que son las que hacen avanzar al sistema.

Estos pares se deben introducir en tiempo real para que sea procesado por el ordenador y pueda considerar las acciones que el usuario decide introducir en el sistema para resolver las ecuaciones del movimiento, generando así la trayectoria deseada.

Finalmente, recopilando todos los vectores de fuerzas generalizadas, el vector buscado es la suma de todos ellos:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{grav} + \mathbf{Q}_{con} + \mathbf{Q}_{aero} + \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_{us} \quad (3.59)$$

3.2.3 Planteamiento de las ecuaciones de Newton-Euler

Con los resultados obtenidos hasta este momento se puede obtener en cada instante de tiempo la matriz de masa y el vector de fuerzas generalizadas que actúa sobre el sistema, pudiendo plantear así las ecuaciones del movimiento buscadas (ecuaciones de Newton-Euler), que en este caso son un sistema de nueve ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden de la forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (3.60)$$

La complejidad de las matrices y vectores que intervienen junto con su dependencia de los vectores ' \mathbf{q} ' y ' $\dot{\mathbf{q}}$ ' y del tiempo es tal, que para hallarlas es conveniente evitar hacerlo numéricamente, puesto que obtenerlas en cada paso de tiempo sería altamente ineficiente, por lo que es preciso el uso de la herramienta de cálculo simbólico que incluye el programa MatLab.

En el programa de cálculo simbólico se obtienen las matrices y vectores que aparecen en las ecuaciones del sistema. Simplemente se definen dichas matrices y vectores como variables simbólicas y se calculan escribiendo en el programa las ecuaciones que se han presentado anteriormente.

Una vez definidas las ecuaciones del sistema, el siguiente paso es implementar un código adecuado en MatLab para generar la simulación en tiempo real a partir de estas ecuaciones.

3.3 Indentación de los neumáticos

Como se ha ido mencionando en apartados anteriores, en este modelo de la bicicleta se evita el uso del método de las restricciones para los neumáticos con vistas a generar un modelo más realista. Por este motivo, ya no hay que imponer ninguna ecuación algebraica a las coordenadas generalizadas del sistema.

En lugar del método de las restricciones, se va a implementar un método elástico simplificado, que no introduce ninguna ecuación algebraica que resolver en cada paso de tiempo. Se va a comenzar explicando, por tanto, el método elástico general, para analizar luego cuáles han sido las simplificaciones realizadas y su motivo:

Para comenzar, hay que encontrar la manera de describir la posición de un punto cualquiera de la banda de rodadura del neumático. Al poder considerarlos como curvas en el espacio, es necesario el uso de dos parámetros nuevos por cada rueda:

- El primero de ellos traslacional, s_w^1 .
- El segundo angular, s_w^2 .

Gracias a ellos, se puede conocer la posición de cualquier punto, en particular del punto de contacto de una circunferencia, que vienen a ser las figuras planas presentes en los neumáticos al ser cortados por un plano vertical paralelo al plano de la rueda.

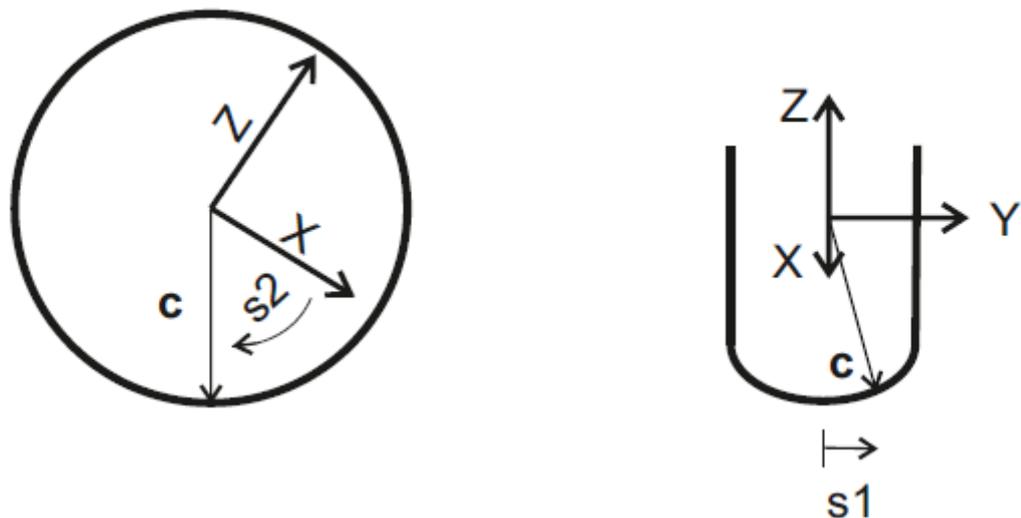


Figura 3-7. Visualización de los parámetros de contacto del neumático

Para el caso que nos ocupa, interesa conocer el vector de posición del punto de contacto en el sistema de referencia local de cada rueda como función de los dos parámetros definidos anteriormente:

Sabiendo que los puntos que conforman una elipse cumplen:

$$\left(\frac{r_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_y}{b}\right)^2 = 1 \quad (3.61)$$

Se obtiene fácilmente que el valor del radio efectivo en el contacto viene descrito por la siguiente expresión:

$$r(s_1^i) = R + b\sqrt{1 - \left(\frac{s_1^i}{a}\right)^2} \quad (3.62)$$

Donde la magnitud “R” es la distancia desde el centro del neumático hasta la zona donde comienza la elipse del neumático, como se puede apreciar en la figura 3-8.

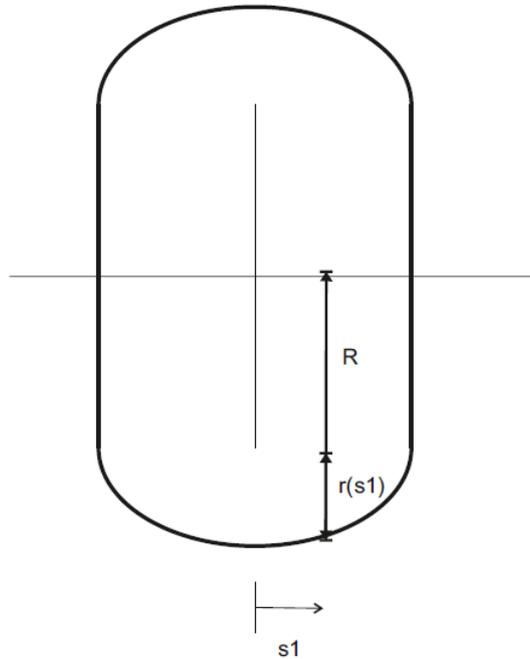


Figura 3-8. Distancia a la superficie de contacto del neumático

Aquí se ha supuesto que la zona de contacto del neumático tiene geometría elíptica dada por los parámetros a y b . Por tanto se puede conocer ya el vector de posición del punto de contacto en locales desde el sistema de referencia local de cada rueda:

$$\overline{\mathbf{u}}_p^i = [r\cos(s_2^i), s_1^i, r\sin(s_2^i)] \quad (3.63)$$

De esta forma en globales, la posición del punto de contacto sería una función de las coordenadas generalizadas y de los dos parámetros de contacto:

$$\mathbf{R}^p = \mathbf{R}^p(\mathbf{q}, s_w^1, s_w^2) = \mathbf{R}(\mathbf{q}) + \mathbf{A}^i(\mathbf{q})\overline{\mathbf{u}}_p^i(s_1^i, s_2^i) \quad (3.64)$$

Es conveniente explicar ahora el motivo por el que se menciona el punto de contacto, cuando en realidad sabemos que hay un área de contacto entre el suelo y los neumáticos.

El motivo es que el método elástico que se va a implementar proporciona la posición de los puntos con mayor indentación de dos sólidos en contacto, a partir de cuatro ecuaciones algebraicas no lineales que dependen de los cuatro parámetros de las ruedas.

Para generar las cuatro ecuaciones, se parte de la definición de la distancia de dos puntos arbitrarios que pertenecen cada uno a una curva tridimensional distinta:

$$|\mathbf{PQ}| = f(s_1^1, s_1^2, s_j^1, s_j^2) = \left| \mathbf{R}_i + A_i \bar{\mathbf{r}}_P^i(s_1^1, s_1^2) - \mathbf{R}_j + A_j \bar{\mathbf{r}}_Q^j(s_j^1, s_j^2) \right| \quad (3.65)$$

Para facilitar la obtención de las derivadas de esta función, dado que se necesitará su jacobiano, es conveniente trabajar con el cuadrado de ella, quedando las derivadas de la nueva función más sencillas:

$$|\mathbf{PQ}|^2 = \mathbf{R}_{PQ}^T \mathbf{R}_{PQ} = g(s_1^1, s_1^2, s_j^1, s_j^2) \quad (3.66)$$

Conviene recordar que la definición de los vectores tangentes a un punto de una curva espacial son:

$$\mathbf{t}_1^w = \frac{\partial \mathbf{R}^P}{\partial s_1^w} \quad \mathbf{t}_2^w = \frac{\partial \mathbf{R}^P}{\partial s_2^w} \quad (3.67)$$

Obteniendo cuatro ecuaciones que proporcionan los parámetros buscados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial s_1^1} &= -2\mathbf{t}_1^i{}^T \mathbf{r}_{PQ} = 0 & \frac{\partial g}{\partial s_1^2} &= -2\mathbf{t}_1^i{}^T \mathbf{r}_{PQ} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial s_j^1} &= -2\mathbf{t}_1^j{}^T \mathbf{r}_{PQ} = 0 & \frac{\partial g}{\partial s_j^2} &= -2\mathbf{t}_1^j{}^T \mathbf{r}_{PQ} = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

De la resolución de este problema de optimización, se obtienen los valores de los parámetros s_1^1 , s_1^2 , s_j^1 , s_j^2 que crean indentación máxima y mínima. De todas las soluciones posibles, sólo hay una que nos interesa, que es en general como la presentada en la figura 3-10.

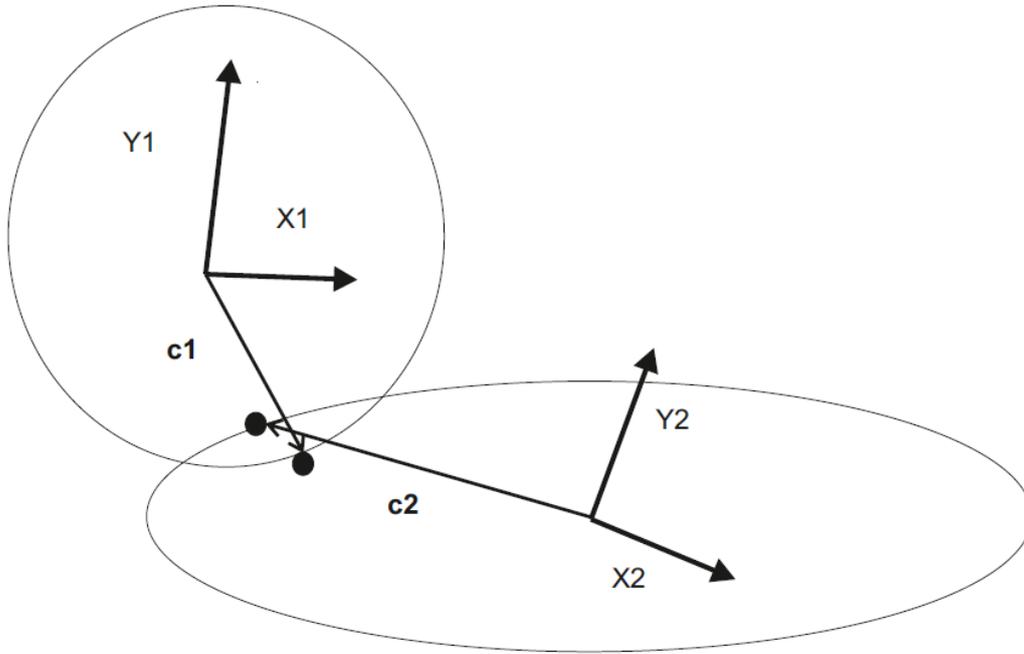


Figura 3-9. Soluciones del sistema planteado

Por este motivo se puede realizar la búsqueda de los cuatro parámetros con las siguientes ecuaciones, que evitan las soluciones no deseadas:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_1^i \mathbf{r}_{PQ} &= 0 & \mathbf{t}_2^j \mathbf{r}_{PQ} &= 0 \\
 \mathbf{t}_1^j \mathbf{r}_{PQ} &= 0 & \mathbf{t}_2^i \mathbf{r}_{PQ} &= 0
 \end{aligned}$$

(3.69)

En este punto ya se conocen los cuatro parámetros que dan la posición de los puntos de contacto de cada rueda, que quedan agrupados en el vector \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} = [s_i^1, s_i^2, s_j^1, s_j^2]$$

El problema que presenta este método, es que es muy costoso computacionalmente tener que resolver en cada paso de tiempo las cuatro ecuaciones algebraicas no lineales con Newton-Raphson, por lo que se ha implementado una simplificación del método elástico, que es más restrictivo sobre las geometrías de las curvas implicadas en el contacto.

Si el suelo se considera plano, se puede aproximar la búsqueda del punto de mayor indentación buscando cuando la componente vertical del vector del punto de contacto en globales es mínima respecto a ambos parámetros de contacto.

Se deduce que los parámetros del contacto que se buscaban quedan:

$$s_1 = \frac{aR'}{\sqrt{(R') + \frac{b}{a}}} \quad s_2 = \text{atan} \frac{A_{33}}{A_{31}} \quad (3.70)$$

Como se dijo, esta aproximación exige que el terreno sea plano, pero si la curvatura del mismo es suave, se puede aproximar la superficie que forma con planos tangentes al punto de contacto. Gracias a esto, se puede conseguir que con la simplificación realizada para resolver en tiempo real se puedan obtener movimientos de la bicicleta en terrenos irregulares.

Este método simplificado del método elástico general obtiene una aproximación de los parámetros de contacto, por lo que también puede ser útil para proporcionar una estimación inicial adecuada en el caso del resolver las ecuaciones no lineales descritas anteriormente. Pero no se ha conseguido ejecutar una simulación en tiempo real, a pesar de reducir el tiempo de computación en cada instante de manera apreciable.

Por este motivo y para evitar errores numéricos, se ha implementado el siguiente método para obtener los parámetros de los contactos de los neumáticos con el terreno, que necesita que el suelo sea plano.

Su deducción se basa en suponer que el punto de mayor indentación que va a presentar cada neumático respecto del terreno se encuentra perpendicular a ambos sólidos.

De esta manera se puede obtener de una manera sencilla el parámetro angular que indica la posición de dicho punto de contacto como sigue:

$$\begin{aligned} s_2 &= -\pi/2 + \theta + \xi \text{ en el contacto delantero} \\ s_2 &= -\pi/2 + \theta + \upsilon \text{ en el trasero} \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.4 Cuerpo del ciclista en el modelo

Hasta este momento se ha descrito cómo se ha obtenido el modelo físico para describir el movimiento de la bicicleta, con el que se pueden realizar simulaciones y comparar con ellas que los resultados del análisis de estabilidad del modelo de Whipple.

Posteriormente, se decidió incorporar al modelo un grado de libertad adicional, que modelaría la inclinación que realiza el cuerpo del ciclista respecto al cuadro para tomar giros de una forma más suave. Ya que al combinar los efectos del giro del manillar con la inclinación del cuerpo, se podrá controlar la trayectoria de una forma más realista.

Se mostrarán a continuación los cambios que son necesarios en el modelo ya expuesto, que no incluía al ciclista, para poder tenerlo en cuenta en el movimiento:

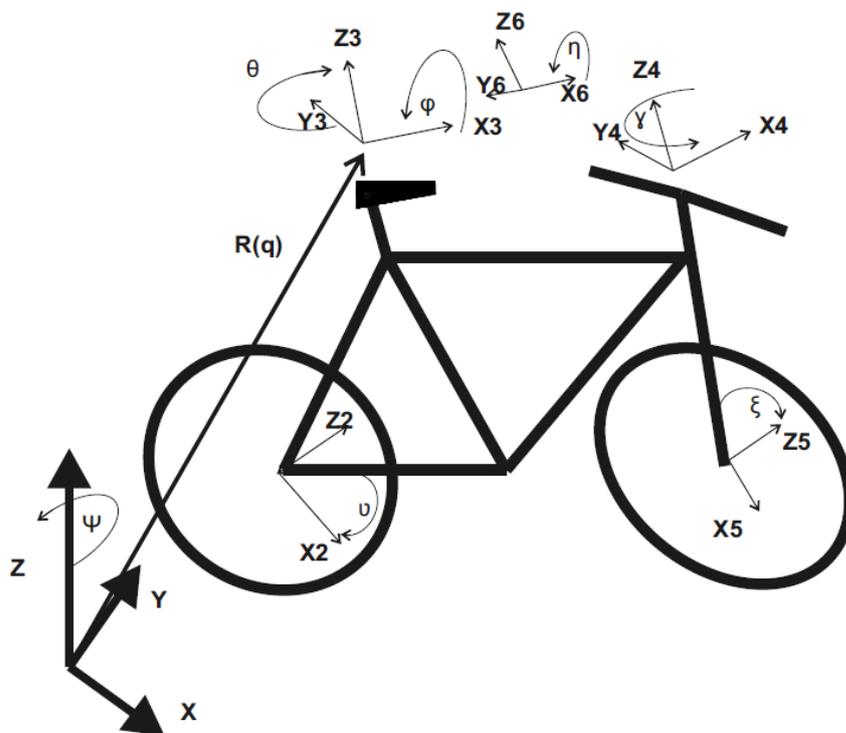


Figura 3-10. Visualización del modelo de bicicleta con cuerpo de ciclista

Ahora el vector de coordenadas generalizadas tiene diez componentes, que son:

$$\mathbf{q} = [R_{x3} \ R_{y3} \ R_{z3} \ \Psi \ \varphi \ \Theta \ \gamma \ \xi \ v \ \eta]^T$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [R'_{x3} \ R'_{y3} \ R'_{z3} \ \dot{\Psi} \ \dot{\varphi} \ \dot{\Theta} \ \dot{\gamma} \ \dot{\xi} \ \dot{v} \ \dot{\eta}]^T$$

(3.72)

La matriz de giro asociada a la nueva coordenada generalizada introducida se puede formar sabiendo que hay que girar sobre el eje x del sólido 3 (cuadro) una cantidad η :

$$\mathbf{A}_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & -\sin \eta \\ 0 & \sin \eta & \sin \eta \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

De esta manera, la matriz de giro del sólido 6 (cuerpo ciclista) viene dada por:

$$\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_\eta \quad (3.74)$$

Pudiendo formar ahora la matriz antisimétrica para el nuevo sólido para obtener las componentes de la velocidad angular del nuevo sólido incluido:

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_6 = \mathbf{A}_6^T \dot{\mathbf{A}}_6 = \begin{bmatrix} 0 & -w_{6z} & w_{6y} \\ w_{6z} & 0 & -w_{6x} \\ -w_{6y} & w_{6x} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_6 = [w_{6x} \ w_{6y} \ w_{6z}] \quad (3.75)$$

Definiendo nuevamente las matrices G, se podrá expresar la velocidad angular del sólido como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_6 &= \frac{\partial \mathbf{w}_6}{\partial \dot{\mathbf{q}}} & \overline{\mathbf{G}}_6 &= \frac{\partial \overline{\mathbf{w}}_6}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \mathbf{w}_6 &= \mathbf{G}_6(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} & \overline{\mathbf{w}}_6 &= \overline{\mathbf{G}}_6(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Para la velocidad de traslación del centro de gravedad del nuevo sólido incorporado, hay que definir el jacobiano del vector de posición del centro de gravedad del nuevo sólido:

$$\mathbf{H}^6 = \frac{\partial \mathbf{r}_g^6}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.77)$$

Siendo los vectores de posición de los centros de gravedad (en el sistema de referencia global) de cada sólido:

$$\mathbf{r}_g^6(\mathbf{q}) = \mathbf{r}^6(\mathbf{q}) + \mathbf{A}^6(\mathbf{q}) \overline{\mathbf{r}}_g^6 \quad (3.78)$$

De esta manera, la velocidad del centro de gravedad del ciclista queda:

$$\mathbf{v}_g^6(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{H}^6(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.79)$$

Las matrices de transformación cinemática tienen ahora términos adicionales:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= [\mathbf{H}^{2T} \ \mathbf{H}^{3T} \ \mathbf{H}^{4T} \ \mathbf{H}^{5T} \ \mathbf{G}^{2T} \ \mathbf{G}^{3T} \ \mathbf{G}^{4T} \ \mathbf{G}^{5T} \ \mathbf{G}^{6T}]^T \\ \mathbf{l} &= [\mathbf{h}^{2T} \ \mathbf{h}^{3T} \ \mathbf{h}^{4T} \ \mathbf{h}^{5T} \ \mathbf{g}^{2T} \ \mathbf{g}^{3T} \ \mathbf{g}^{4T} \ \mathbf{g}^{5T} \ \mathbf{g}^{6T}]^T \end{aligned} \quad (3.80)$$

Estando las nuevas matrices definidas por: $\mathbf{h}^6 = \frac{\partial(H^6\dot{\mathbf{q}})}{\partial\dot{\mathbf{q}}}$ y $\mathbf{g}^6 = \frac{\partial\bar{w}_6}{\partial\mathbf{q}}$ (3.81)

A la matriz de masa que se formó para una bicicleta sin considerar al conductor como un sólido extra, hay que añadirle los siguientes términos para considerarlo:

$$\widehat{\mathbf{M}}^6 = \begin{bmatrix} m^6 & 0 & 0 \\ 0 & m^6 & 0 \\ 0 & 0 & m^6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_6 = \begin{bmatrix} I_{6x} & 0 & I_{6zx} \\ 0 & I_{6y} & 0 \\ I_{6zx} & 0 & I_{6z} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Volviendo a combinar a estas matrices, se puede obtener una matriz de masa para el sistema completo, incorporando al cuerpo del ciclista:

$$\mathbf{MM} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{M}}^1 & \dots & \widehat{\mathbf{0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\mathbf{0}} & \dots & \mathbf{I}_i \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Volviendo a transformar la matriz de masa obtenida para que las ecuaciones del movimiento estén expresadas en términos de las coordenadas generalizadas y sus derivadas, se obtiene la siguiente matriz de masa final:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{MM} \mathbf{L} \quad (3.84)$$

- Vector de fuerzas generalizadas de gravedad, $\mathbf{Q}_{grav}(\mathbf{q})$:

Agrupando a todas las fuerzas que ejerce la gravedad sobre cada sólido:

$$\mathbf{Q}_{grav} = [\mathbf{F}_g^2 \ \mathbf{F}_g^3 \ \mathbf{F}_g^4 \ \mathbf{F}_g^5 \ \mathbf{F}_g^6]^T \quad (3.85)$$

Aplicando la matriz de transformación cinemática se obtiene el vector de fuerzas generalizadas de gravedad que será incluido en las ecuaciones del movimiento:

$$\mathbf{Q}_{grav} = \mathbf{L}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{grav} \quad (3.86)$$

- Vector de fuerzas generalizadas aerodinámicas, $\mathbf{Q}_{aero}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

En este caso, se considera que el sólido 6 (ciclista) es el que opone la mayor parte de la resistencia, siendo la del resto de los sólidos definidos despreciables respecto a ella. De esta manera, se supone que la fuerza resultante por la depresión que causa al avanzar la bicicleta actúa en el centro de gravedad del cuerpo del ciclista.

$$\mathbf{Q}_{aero} = -c_v(\mathbf{v}_g^{6T} \mathbf{v}_g^6)^{1/2} \mathbf{H}^6 \mathbf{v}_g^6 \quad (3.87)$$

- Vector de fuerzas de inercia proporcionales a la velocidad, $\mathbf{Q}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

Agrupándolos en el mismo vector las implicadas en cada sólido:

$$\mathbf{a} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{b} = [-\bar{\mathbf{w}}_2 \times \mathbf{I}_2 \bar{\mathbf{w}}_2 \quad -\bar{\mathbf{w}}_3 \times \mathbf{I}_3 \bar{\mathbf{w}}_3 \quad -\bar{\mathbf{w}}_4 \times \mathbf{I}_4 \bar{\mathbf{w}}_4 \quad -\bar{\mathbf{w}}_5 \times \mathbf{I}_5 \bar{\mathbf{w}}_5 \quad -\bar{\mathbf{w}}_6 \times \mathbf{I}_6 \bar{\mathbf{w}}_6]^T$$

(3.88)

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}_v = [\mathbf{a}^T \ \mathbf{b}^T]^T \quad (3.89)$$

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{L}^T(\mathbf{Q}\mathbf{Q}_v - \mathbf{M}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}) \quad (3.90)$$

Una vez planteado el modelo que se ha creado para resolver la dinámica de las bicicletas en tiempo real, conviene señalar que no hay ninguna hipótesis que impida describir con este mismo modelo el movimiento de una motocicleta, simplemente cambiando los parámetros del sistema por unos adecuados.

Por tanto, se puede afirmar que los resultados que se van a obtener referidos a una bicicleta, por ser el objetivo de este proyecto, se pueden extrapolar al comportamiento de una motocicleta haciendo las correcciones necesarias de ciertos parámetros.

4 Teorías de mecánica de contacto

En este apartado se van a describir distintos modelos de contacto obtenidos de [8, 9], que se pueden implementar en el simulador para visualizar la evolución de la geometría de los contactos a causa del movimiento de la bicicleta.

Hay que tener presente, que el problema de la interacción entre dos sólidos presenta una complejidad elevada, más aún en el caso de los neumáticos, ya que además están rodando y las leyes de comportamiento de sus materiales son de tipo anisótropas.

Por tanto, los resultados obtenidos en el capítulo anterior en lo relativo al contacto X son simplificaciones de la realidad que admiten solución en tiempo real en el simulador. Lo mismo ocurre en el modelo expuesto de simulación del contacto al final de este apartado.

Con la suficiente potencia de cálculo, se podría haber incluido cualquiera de las teorías que se describen a continuación que, obviamente, son más realistas que las que se pueden simular en tiempo real.

4.1 Problemas clásicos de contacto normal y tangencial

La obtención de la deformación de un sólido elástico en cuya superficie actúa una fuerza es más sencilla que la solución de los problemas de contacto, ya que en estos no se conoce ni la distribución de tensiones ni el área de contacto con la que comenzar.

Las soluciones clásicas de Hertz (contacto no adhesivo) y de Johnson, Kendall y Roberts (contacto adhesivo) usan soluciones conocidas para empezar a formular resoluciones de los problemas de contacto.

El problema de contacto normal (sin adhesión) entre sólidos elásticos con curvatura suave fue resuelto en 1882 por Hertz. Medio siglo después, Bradley presentó la solución para el contacto normal y adhesivo entre una esfera y un plano rígidos. Posteriormente, no fue hasta 1971 cuando Johnson, Kendall y Roberts (Teoría JKR) llegaron a la resolución del problema de contacto normal adhesivo entre sólidos elásticos con cualquier geometría.

En 1975, Derjaguin, Müller y Toporov publicaron una teoría adhesiva alternativa a la JKR que se conoce como Teoría DMT. Después de intensos debates, en 1976, Tabor pudo afirmar que ambas teorías son correctas y que son casos particulares del problema general de contacto.

Para cuerpos totalmente rígidos, la teoría de Bradley es válida, pero si los cuerpos son pequeños y esferas rígidas, se puede aplicar la teoría DMT. Si se quiere modelar el contacto normal adhesivo de esferas de mayores dimensiones y flexibles, hay que recurrir a la teoría JKR. En la actualidad, es la teoría JKR la que se sigue usando para describir los contactos adhesivos.

En realidad, incluso en problemas de contacto normal, se genera cierta tensión tangencial si se tiene en cuenta que entre los sólidos las superficies no son perfectas y existe cierta fricción. El motivo es que si dos sólidos presentan propiedades elásticas distintas y están en contacto, existirán desplazamientos relativos en el contacto en dirección tangencial por la deformación de los sólidos.

Una muestra de este fenómeno es que al realizar ciclos de carga normal en estos cuerpos, aparecería una región con forma de anillo que se habría desgastado en cada uno, este fenómeno se conoce como *fretting*.

En la figura 4-1 se aprecia el campo de tensiones al cargar de forma normal un sólido con distribución de presión uniforme, la solución a este problema se puede modelar gracias a la aportación de Hertz.



Figura 4-1. Distribución de tensiones en un contacto normal [9]

4.2 Contactos rodantes entre sólidos

El siguiente paso para avanzar en el estudio de los problemas de contacto consiste en considerar que las superficies de contacto pertenecen a sólidos que se desplazan como sólido rígido uno sobre el otro, los llamados contactos rodantes. Este tipo de contacto es el que realmente tiene lugar en la interacción neumático-terreno y tiene innumerables aplicaciones técnicas, no sólo para ruedas, también para elementos de máquinas como rodamientos, engranajes, etc.

Reynolds investigó los contactos rodantes en 1876 y concluyó mediante sus investigaciones que en ellos existe una parte del área de contacto que permanece adherida y la otra presenta deslizamiento.

Este deslizamiento parcial que ocurre en el área de contacto conlleva que las superficies se desgasten, a pesar de que no se esté dando el caso de deslizamiento total de las superficies.

Con elevados momentos aplicados sobre el sólido, el dominio de deslizamiento se expande hasta que finalmente toda el área de contacto desliza. Desde este momento, la velocidad de traslación de la rueda deja de estar relacionada de forma lineal con la velocidad angular de la misma.

Realmente, el deslizamiento del área de contacto no es la única causa de la diferencia de velocidad mencionada, dado que para momentos aplicados de escasa magnitud apenas hay región de deslizamiento en el área de contacto, pero sí existe cierta diferencia de velocidades entre la de traslación y de rotación, que es proporcional al momento. En ese momento, la región de deslizamiento ocupa el área de contacto completa del neumático. Esta relación fue descubierta por Carter en 1916. El motivo se debe a las deformaciones elásticas que presentan las ruedas en su movimiento.

Conforme un arco diferencial de la rueda sale de la región de contacto, su velocidad aumenta ya que esa región está traccionada, en cambio, cuando está llegando al área de contacto, se comprime debido a la presencia de la zona de adherencia en la huella y por tanto su velocidad disminuye.

Para poder analizar correctamente el campo de velocidades del neumático conforme interacciona con el terreno, habría que considerar que el neumático tiene capacidad de deformación circunferencial, obteniendo así unas deformadas durante el movimiento como la mostrada en la figura 4-2.

- Teoría de Carter: contactos rodantes estacionarios

El contacto en movimiento bidimensional de un cilindro sobre un plano fue resuelto en 1926 por Carter. Cuando un elemento va a entrar en el área de contacto ya está deformado y permanecerá así hasta que abandone la zona de contacto con adherencia, ya que en esa zona no existen desplazamientos relativos en el material.

Cuando se carga tangencialmente un contacto, ocurre en general deslizamiento parcial, incluso cuando el deslizamiento macroscópico aún no ha ocurrido.

En la figura 4-3, se ve como la parte trasera del contacto alcanza la tensión tangencial para la cual se producen deslizamientos relativos entre los sólidos, debido a que la capacidad de adherencia ha llegado a su límite, mientras que la parte delantera sigue proporcionando adherencia.

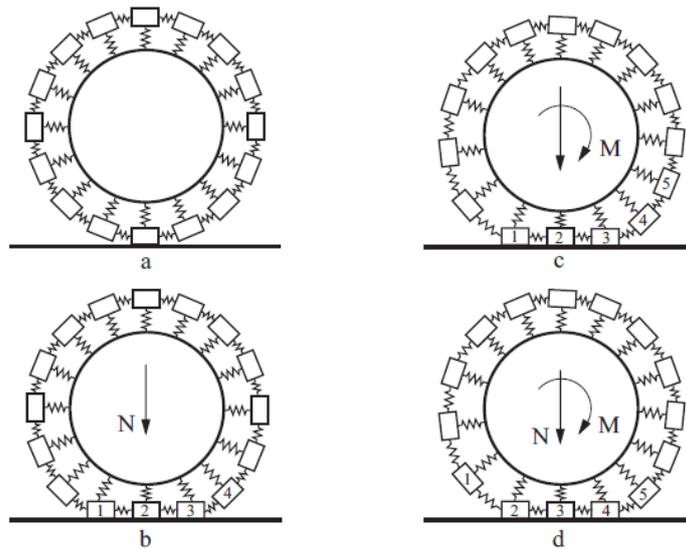


Figura 4-2. Deformación circunferencial de los neumáticos [7]

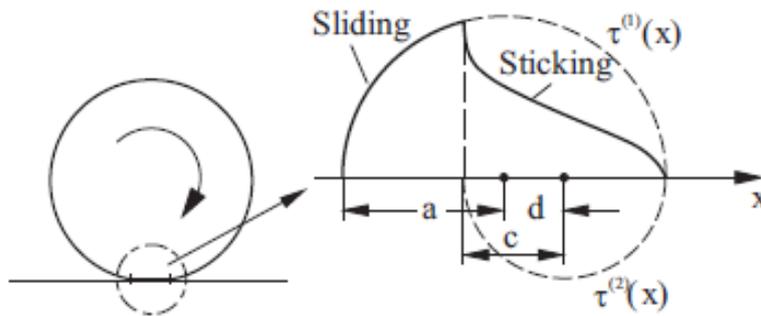


Figura 4-3. Contactos rodantes estacionarios [6]

4.3 Efectos no considerados en el contacto

A continuación, se describen algunos de los efectos que se producen debidos al contacto con el terreno de los neumáticos que no ha sido posible incluir en el modelo debido a las simplificaciones realizadas para admitir la simulación en tiempo real.

- En las tensiones normales, se tendría una distribución aproximada como la de la figura siguiente, en la que se puede ver como su resultante se opone al movimiento, dando lugar a la conocida resistencia a la rodadura.

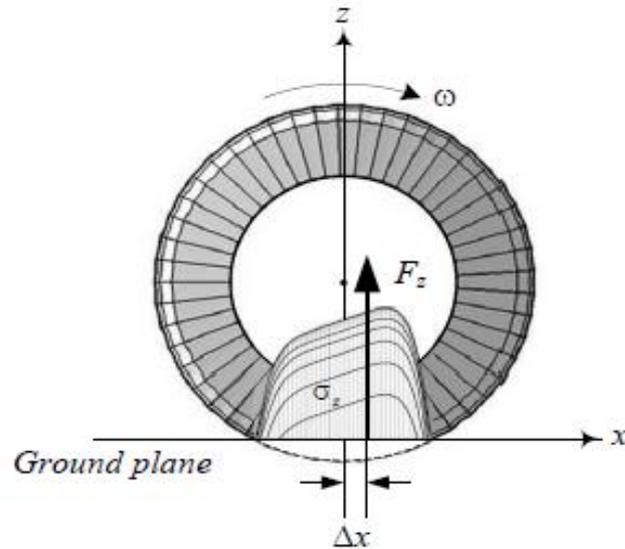


Figura 4-4. Distribución de la tensión normal en el contacto rodante [7]

- Existe una velocidad crítica del neumático en la que aparecen ondas circunferenciales y se dificulta el avance. La longitud de onda es próxima a la longitud de la huella del contacto y se suelen provocar sobrecalentamientos que dan lugar a fallos en el neumático en poco tiempo.

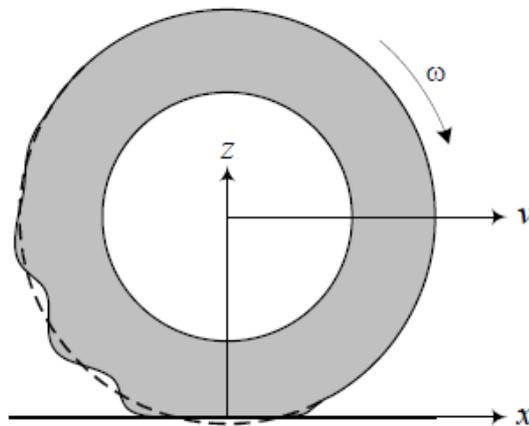


Figura 4-5. Ondas circunferenciales en una rueda que viaja a su velocidad crítica [7]

En condiciones de impactos o cuando las cargas y descargas de un elemento diferencial que llega a la zona de contacto para abandonarlo a alta velocidad, hay efectos dinámicos que pueden cobrar importancia. En el caso de contactos rodantes, la inercia de los elementos de material que fluyen hacia la región deformada puede cambiar el campo de tensiones del neumático de forma apreciable.

Esto hace que sea necesario incorporar la inercia de los elementos en la mecánica de sólidos deformables y de este desarrollo nacen conceptos comunes en mecánica, concretamente en vibraciones. Especial importancia tiene el efecto de la existencia de resonancia de contacto, en la que se dan grandes vibraciones en los neumáticos debido a la amplificación dinámica que genera este tipo de cargas alternas.

- Dependencia de la adherencia con la carga normal

En realidad, la capacidad de adherencia entre dos cuerpos no es lineal con la carga normal que soportan, su comportamiento se asemeja más a una curva con pendiente decreciente.

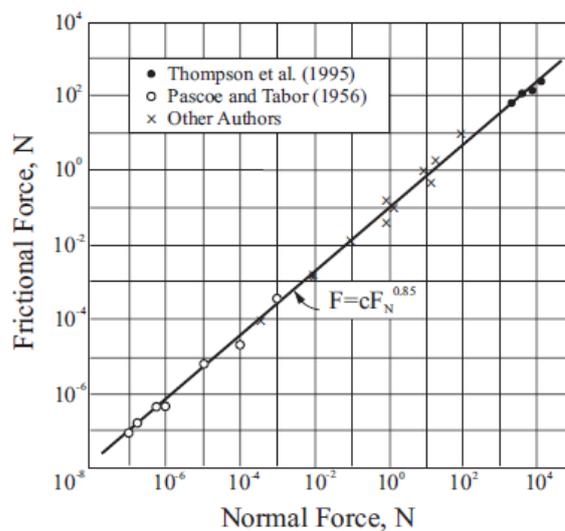


Figura 4-6. Evolución de la adherencia con la carga normal [10]

- Efectos térmicos en el contacto

En el contacto entre cuerpos con fricción, se disipa cierta cantidad de energía. Como el área de contacto real es una parte del total, el calor disipado en este tipo de contactos no es homogéneo. La temperatura local se incrementa, pudiendo llegar a alcanzar valores que influyen a las propiedades del material, además de provocar una expansión que cambie las condiciones de contacto.

Este tipo de acoplamiento entre el área de contacto real, la generación de calor y la distribución de temperaturas, pueden generar, bajo ciertas condiciones, inestabilidades termo-mecánicas en el contacto, que afectan al comportamiento del neumático.

4.4 Evolución del contacto

Con los resultados generados en el apartado 3 sobre el movimiento de las bicicletas y la aplicación de alguna de las teorías de contacto expuestas anteriormente, se puede simular en tiempo real la evolución de los parámetros de contacto, como las dimensiones de la huella de contacto.

De las teorías anteriormente expuestas, se simulará, a modo de ejemplo la más clásica de todas, ya que gracias a la aportación de Hertz, se conoce la solución analítica, por lo que es sencilla de implementar.

Sólo hay que proporcionar las fuerzas normales que soporta cada neumático para conocer el área de contacto aparente que presentan en cada instante gracias a la aplicación directa de los resultados obtenidos por Hertz.

En los resultados que se van a presentar, se asumen las siguientes hipótesis:

- Los neumáticos tienen sección elíptica en la zona de contacto habitual
- Régimen elástico

Una vez que se conoce la posición de la bicicleta, se puede conocer la indentación que presentan sus neumáticos con respecto al suelo. De esta manera se podía obtener la fuerza normal que ejerce el suelo hacia el contacto, que no es más que la resultante de las presiones en la zona de contacto.

Es necesario conocer además el módulo de Young y el coeficiente de Poisson de los sólidos implicados en el contacto, además de los vectores tangente y normal junto con la curvatura en el punto de contacto.

Hay que recordar, que en este modelo de la bicicleta, se aplicarán todas las fuerzas de contacto en el punto de contacto (máxima indentación) obtenido, ya que se está aplicando para resolver la dinámica del vehículo hipótesis de sólido rígido.

De no realizar dicha hipótesis, aparecerían en las ecuaciones de movimiento términos adicionales que eliminarían la capacidad que tiene el modelo de poderse resolver en tiempo real.

Según la teoría de Hertz, el área de contacto tiene forma elíptica, cuyos semiejes se obtienen gracias a los parámetros elásticos de los sólidos implicados, con la curvatura de las superficies implicadas y con la carga normal soportada:

$$K_1 = \frac{1-v_j^2}{\pi E_j} \quad K_2 = \frac{1-v_k^2}{\pi E_k} \quad K_3 = 0.5 * (\kappa_{k1} + \kappa_{k2} + \kappa_{j1} + \kappa_{kj})$$

(4.1)

Se puede llegar a las expresiones de los semiejes de la elipse de buscados:

$$a_{\text{elip}} = \left| m_{\text{thet}} \sqrt[3]{\frac{3\pi F_n (K_1 + K_2)}{4K_3}} \right| \quad b_{\text{elip}} = \left| n_{\text{thet}} \sqrt[3]{\frac{3\pi F_n (K_1 + K_2)}{4K_3}} \right| \quad (4.2)$$

Conocidos estos semiejes en cada neumático en cada instante, se puede generar un gráfico en tiempo real que muestre la evolución de la huella que los neumáticos poseen en su contacto con el suelo.

Al ser un contacto rodante, en realidad las fuerzas tangenciales que se generan modifican la huella de contacto de los neumáticos, generando unas deformadas como la que se muestra a continuación:

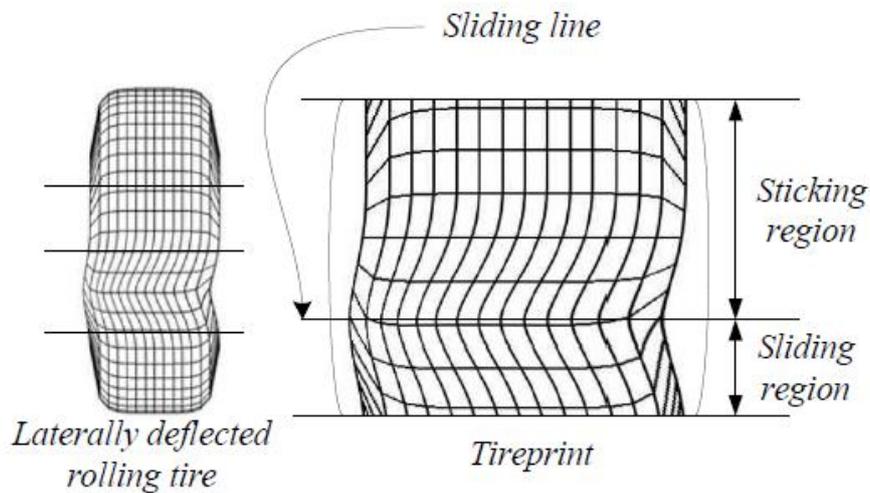


Figura 4-7. Efectos de los esfuerzos tangenciales en los neumáticos [7]

Para valores del deslizamiento longitudinal menores de 0.1 típicos de conducciones habituales, se puede considerar la relación entre él y la fuerza longitudinal generada lineal, pero posteriormente la curva es no lineal y habría que cambiar la curva por otra de mayor complejidad, para la que habría que determinar experimentalmente su comportamiento.

Este es el motivo por el que la huella de contacto que se presenta en la realidad difiere de la que proporciona el modelo de Hertz que se ha implementado en tiempo real.

Probablemente, el modelo más conocido para representar el comportamiento de los neumáticos es el modelo de Pacejka, que es un modelo empírico. Pese a ello, una vez seleccionados correctamente los parámetros para un neumático, expresa su comportamiento de manera satisfactoria.

La evolución que siguen estas fuerzas con el deslizamiento depende de las propiedades elásticas y de rigidez de los neumáticos, además de las características del terreno por el que se circula. El comportamiento real que presentan se asemeja al presentado en la figura 4-8.

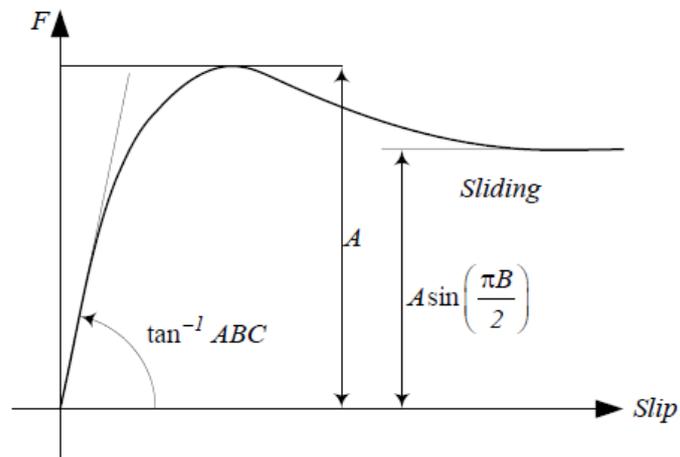


Figura 4-8. Evolución real de las fuerzas tangenciales con el deslizamiento [6]

De poder modelar con mayor exactitud esta parte del simulador, se obtendrían resultados de la huella de contacto deformada debido a la presencia de fuerzas tangenciales en el contacto durante el movimiento.

5. Comportamiento dinámico de la bicicleta

En este apartado, previo al uso del simulador interactivo, se pretenden dar unas nociones acerca del comportamiento de las bicicletas durante su movimiento y los motivos físicos que hay detrás.

De esta manera, el tiempo de aprendizaje para conseguir simular de manera satisfactoria el sistema se reduce, ya que de la misma manera que hay que aprender a manejarlas en la vida real, hay que asumir aquí también que las acciones para conseguir un determinado movimiento, no son tan inmediatas como puede parecer inicialmente.

5.1 Efecto giroscópico en las bicicletas

Es un efecto dinámico 3D que tiene gran importancia en las bicicletas como consecuencia de la conservación del momento cinético, como se verá a continuación.

Los sólidos al rotar sin estar bajo efecto de algún par, están sometidos a la conservación de momento cinético, es decir, tienen un eje de rotación estable, o lo que es lo mismo, tienen tendencia a mantener su plano de rotación.

De la misma forma que en el caso lineal en el que hay que aplicar una fuerza para cambiar la cantidad de movimiento, en el caso de las rotaciones, para conseguir cambios en el momento cinético hay que aplicar un par de fuerzas, (un momento externo), para conseguirlo.

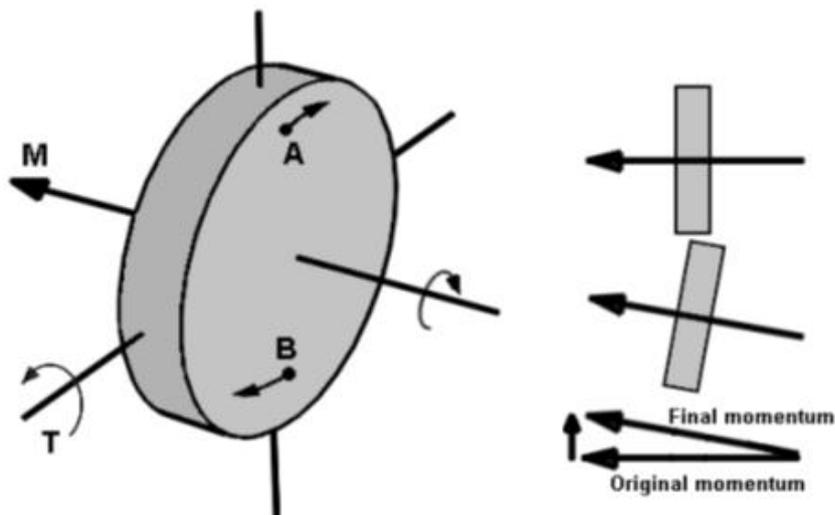


Figura 5-1. Visualización del efecto giroscópico [4]

De esta manera, el par de fuerzas genera un cambio en la cantidad de movimiento de las partículas como el que se muestra arriba. El sólido obtiene una velocidad angular inicial en torno a su eje de rotación. Este par en torno a un eje horizontal, da cierta velocidad en el eje vertical, que generará unas reacciones peculiares.

Las reacciones giroscópicas y la precesión surgen de esta relación entre el par que actúa en un eje y la velocidad angular de otro eje perpendicular al primero. Ambas son perpendiculares al eje de rotación del sólido.

Si se aplica un par a uno de los dos ejes mencionados, el sólido generará una velocidad angular en torno al tercero para asegurar que se conserva el momento cinético, este efecto es conocido como precesión giroscópica.

De ocurrir al contrario, si el sólido presenta precesión en un eje, se puede afirmar que se está aplicando un par giroscópico alrededor del tercero. En una bicicleta, esto significa que al inclinarse en un giro, habrá una velocidad de inclinación lateral que debe ir acompañada de un par en la dirección.

Estos efectos giroscópicos son directamente proporcionales al momento cinético del sólido que rota. En el caso de las bicicletas que se está considerando, ni la inercia de las ruedas ni la velocidad a la que giran son lo suficientemente elevadas como para que estos efectos manifiesten una magnitud elevada.

Estas relaciones que se establecen por efectos giroscópicos tienen gran importancia en los giros de las bicicletas y de su comportamiento en general.

A velocidades típicas, solo movemos la dirección unos grados, por lo que la velocidad angular en el manillar no es elevada y por tanto el acoplamiento giroscópico en inclinación lateral no cobra demasiada importancia. No obstante, durante el proceso de inclinación la velocidad angular de inclinación del cuadro sí toma valores significativos, por lo que el acoplamiento entre esta velocidad y el par giroscópico en la dirección son importantes.

Otro aspecto que considerar para analizar el ángulo de inclinación lateral de una bicicleta al tomar una curva es que todo el sistema está sujeto a una velocidad en guiñada igual a la velocidad angular de la bicicleta alrededor del centro instantáneo de rotación.

Según el ángulo de inclinación de la bicicleta, habrá una componente de esta velocidad en guiñada en torno a un eje vertical de la bicicleta, que debe ser compensado por un par actuando hacia la parte externa del giro. Esto se soluciona incrementando el ángulo de inclinación lateral de la bicicleta, aunque en la práctica solo se requieren aumentos del orden de 1 grado a máxima velocidad de paso por curva.

5.2 Estabilidad propia de las bicicletas

Un aspecto que es importante comprender acerca del comportamiento de las bicicletas, es que pueden llegar a presentar estabilidad propia en un rango de velocidades, es decir, conservar su posición vertical ante perturbaciones externas sin la influencia de una persona.

Para poder estudiar la estabilidad de la bicicleta, es necesario linealizar el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales obtenido, (3.60), alrededor de la posición de equilibrio vertical del sistema, que lo convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

De esta manera, se puede analizar la capacidad disponible del sistema para atenuar las perturbaciones que se produzcan en esa posición y por tanto de ser estable [1, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 23].

Para una bicicleta típica, si se hace un estudio analítico de estabilidad en torno a la posición 'recta' se observa que esta solo es estable para un estrecho rango de velocidades en torno a 5m/s.

Asimismo para velocidades superiores a 6.8m/s la parte real de uno de los autovalores aumenta lentamente hasta volverse positiva, teniéndose un comportamiento inestable pero fácil de compensar por parte del ciclista debido a que su valor es pequeño.

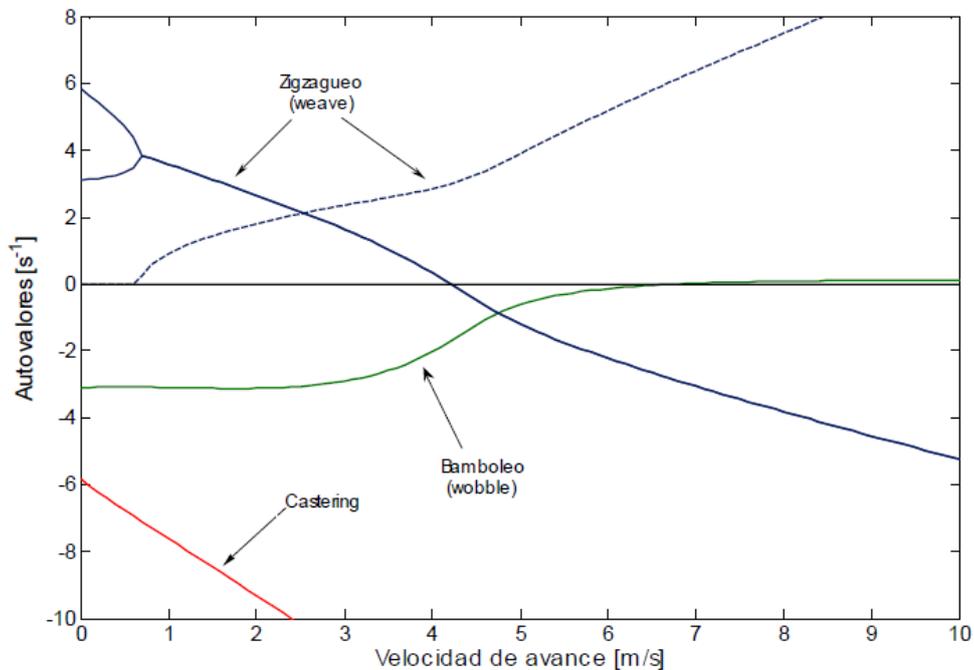


Figura 5-2. Diagrama de continuación de una bicicleta que muestra su estabilidad [23]

Esto coincide con la experiencia práctica: a bajas velocidades es necesaria una especial atención por parte del conductor para mantener estable el vehículo, mientras que a altas velocidades, este control se realiza con gran facilidad.

Al realizar el análisis de estabilidad de este modelo, se pueden identificar tres modos de vibración en el movimiento, asociados a los autovalores representados en la gráfica anterior. Éstos pueden ser nombrados, según [4], como:

- **Zigzaguo:** modo de vibración que se manifiesta con oscilaciones del manillar, típico a bajas velocidades.

El modo de zigzaguo es un movimiento oscilatorio mediante el cual el manillar gira describiendo un movimiento sinusoidal alrededor de la dirección de avance, con un ligero desfase con el ángulo de inclinación del cuadro.

El avance es un parámetro de la bicicleta que influye positivamente en la estabilidad del sistema al realizar giros, pero a la vez puede ser la causa de este tipo de comportamiento oscilatorio inestable.

Ocurre si la rueda delantera es desplazada por una irregularidad del terreno, ya que el par que se crea por el efecto del avance tiene tal magnitud, que llega a sobrepasar al necesario para dejar el manillar donde estaba inicialmente. Por este motivo el manillar vuelve a alejarse de su posición inicial y el proceso comienza de nuevo.

- **Bamboleo:** típico de altas velocidades, dominado por oscilaciones violentas y acopladas en guiñada e inclinación del cuadro y la rueda trasera entorno al eje del manillar.

El modo de bamboleo se corresponde con un autovalor real dominado por la inclinación de la rueda trasera y el cuadro. Si este modo es inestable, la bicicleta describe un movimiento que incrementa la inclinación de forma oscilatoria, hasta que finalmente cae. Es una forma mucho más compleja de inestabilidad, porque hay mayores acoplamientos entre los grados de libertad de movimiento.

En el zigzaguo también hay cierto grado de acoplamiento entre los grados de libertad, ya que una oscilación crearía una velocidad angular en la dirección de cierta magnitud, que junto con los efectos giroscópicos produce momentos en inclinación. Por suerte, como la inercia en inclinación es bastante alta, la respuesta de estos pares es pequeña a la frecuencia natural de zigzaguo, por lo que se puede afirmar que el zigzaguo es principalmente una inestabilidad de la dirección.

- **Castering:** último modo que se obtiene de este modelo, dominado por amplitudes elevadas en el giro del manillar. Es el único estable a cualquier rango de velocidad.

A velocidades suficientemente altas, los modos que principalmente definen el movimiento de una bicicleta son los dos primeros, zigzagueo y bamboleo. En cambio, el modo de *castering* apenas interviene el movimiento ya que de ser excitado, desaparece rápidamente porque su autovalor posee una parte real negativa y de alto valor absoluto.

A velocidades superiores a la crítica, en la que se vuelven a tener autovalores con parte real positiva, las bicicletas pueden seguir siendo controladas gracias a las acciones de control que ejerce el ciclista sobre ellas.

Lo normal es que al circular a velocidades habituales, no se den estas inestabilidades en la práctica, pero siempre cabe la posibilidad de que ocurran al cambiar las condiciones de operación a otras más agresivas o incluso si existe cierto desgaste o falta de ajuste en componentes críticos, como en los rodamientos de la dirección.

A baja velocidad, la capacidad de balance de la bicicleta depende de la habilidad de cada persona, debido a que el sistema aún no presenta estabilidad propia, pero a mayor velocidad existe un mecanismo propio de la bicicleta que asegura su estabilidad.

Para comprender lo que sucede en ellas, conviene revisar las propiedades de los giróscopos que se han descrito, ya que las ruedas al girar provocan este efecto de forma automática en el sistema.

En el momento que la bicicleta empieza a caer, por ejemplo hacia la izquierda por acción de alguna perturbación, la precesión giroscópica hace que la rueda delantera gire hacia la izquierda, además el avance de la rueda delantera generado por β también facilita el giro hacia la izquierda. Esto hace que la bicicleta tome una trayectoria curva hacia la izquierda, por lo que la inercia del mecanismo a seguir en línea recta contrarresta la tendencia a seguir inclinándose hacia la izquierda debido al peso que actúa sobre el sistema. De esta manera el sistema vuelve a la posición vertical y las reacciones giroscópicas se invierten, tendiendo a restaurar el giro del manillar hacia la posición rectilínea.

En esta explicación sólo se ha considerado el efecto de la rueda delantera, pero en la trasera también actúan fuerzas giroscópicas, aunque es mucho más difícil girar la rueda trasera de forma independiente, ya que la bicicleta completa debe realizar un movimiento de guiñada, en lugar de sólo girar rueda delantera y manillar. Por este motivo, la rueda trasera no realiza gran aportación al balance automático de la bicicleta.

5.3 Los giros en las bicicletas

El siguiente problema que tratar para realizar un buen uso del simulador son los giros. Para su análisis y saber cómo realizarlos en el simulador interesa dividirlos en dos fases, según [4]. Es conveniente comenzar por la más sencilla:

- Mantenimiento de giros

No es posible tener una trayectoria curva con una bicicleta en posición vertical, ya que la propia inercia del sistema haría que este acabase cayendo hacia el exterior de la curva. Por eso hay que inclinar la bicicleta hacia el interior, para que el propio peso de la máquina compense la tendencia a caer hacia el exterior. El equilibrio se alcanza cuando el ángulo de inclinación es tal que los dos momentos alcanzan el mismo valor, obviamente a mayor velocidad de paso por curva y menor radio de giro será necesaria una mayor inclinación del sistema.

- Inicio de los giros

Lo más interesante de los giros es la forma en que se comienzan a realizar, ya que, como se ha visto, una bicicleta que se mueve a una cierta velocidad tiene tendencia propia a permanecer vertical, de ahí surge la pregunta de si hay que girar el manillar o inclinarse primero.

Si se girase el manillar en la dirección deseada, la inercia y el efecto giroscópico harían que el sistema se moviera justo de forma contraria a como pretendemos. Por este motivo, si inicialmente aplicamos un momento contrario hacia la dirección que queremos tomar, provoca que el sistema se incline de forma favorable al camino que pretendemos seguir.

Hay tres efectos principales:

- Un giro hacia la derecha provoca que el sistema se incline hacia la izquierda por su propia inercia, siendo esta la mejor forma para inclinar al sistema hacia donde queremos.
- Esta acción en la dirección, produce cierta tendencia a inclinar el sistema hacia la izquierda por la precesión giroscópica, pero es un efecto de escasa magnitud si las ruedas están en contacto con el suelo como se verá más adelante.
- La gravedad aumentará la inclinación que comienza la precesión giroscópica en los primeros instantes, pero pierde importancia conforme las fuerzas tangenciales del neumático crecen y equilibran al momento gravitacional, dejando así a la bicicleta en equilibrio con cierto ángulo de inclinación.

El efecto del avance, también ayuda a hacer que el sistema tome curvas conforme el ángulo de inclinación lateral aumenta. Una vez que se consigue el ángulo de inclinación correcto, comienza el proceso que mantiene la inclinación que ya se ha descrito, haciendo que la bicicleta se mantenga en el camino elegido.

El término contra-manillar, conocido como *counter-steering* en las referencias, es una acción que la mayoría de los ciclistas realizan inconscientemente. Pero no explica cómo se puede tomar curvas sin manos, es decir, sin ejercer ningún momento sobre el manillar.

Cualquiera que intente cambiar de dirección sin manos, se dará cuenta que hay menor capacidad de control sobre el sistema, ya que el mecanismo de giro que se produce por el efecto del contra-manillar produce mayor respuesta y un control más exacto. Esta forma de control de la trayectoria, también requiere inclinar inicialmente el cuerpo hacia el lado contrario al que se desea girar.

Hay dos posibles métodos para iniciar un giro, en ambos nuestras acciones van en contra de lo que podría considerarse natural. Por este motivo es necesario un periodo de aprendizaje para conseguir asumir la dinámica de la bicicleta y así realizar estas acciones no intuitivas de forma automática

Cuando aprendemos a montar en bicicleta, la mayoría de nosotros mostramos un comportamiento parecido al zigzagueo hasta que el subconsciente se da cuenta que la forma de hacerlo correctamente es actuando inicialmente de forma contraria a lo que queremos conseguir.

En la práctica, combinamos ambos métodos de control de forma subconsciente. La proporción de giros del manillar y movimiento del cuerpo respecto a la bicicleta depende del estilo de conducción de cada ciclista, pero también en la velocidad a la que se circula y en las características de la propia bicicleta.

En el caso de la bicicleta mostrada anteriormente, la masa del manillar es menor que la del eje trasero, por lo que cuando intenta caer en conjunto, la parte de menor masa lo hace más rápido. Esto muestra la importancia que tiene en el comportamiento dinámico de las bicicletas la distribución de la masa en el eje delantero.

Se puede afirmar que una condición necesaria para la estabilidad es tener al menos un factor que acople el giro del manillar con la inclinación del cuadro. Estos términos surgen de la combinación de avance, momento cinético para efecto giroscópico, inclinación del manillar, localización de centros de masa de los sólidos y los tensores de inercia de la parte delantera y trasera de la bicicleta.

A través del ajuste de estos parámetros de diseño se puede hacer que una bicicleta sea aún más estable. Esto hace pensar que el proceso de evolución de la geometría de las bicicletas aún no ha llegado a su fin, ya que siguen quedando posibilidades de mejora abiertas en términos de diseño de su geometría.

Conforme se consiga sintetizar el tipo de acoplamiento que presentan estos parámetros dentro de las ecuaciones del movimiento, se podrán realizar análisis paramétricos para crear nuevas geometrías de bicicleta que muestren un comportamiento específico, según sea su aplicación final.

La comprensión de estos fenómenos para las bicicletas permitirá mejorar de igual manera la geometría de las motocicletas, ya que su comportamiento sólo se diferencia por parámetros. Una motocicleta se puede ver como una bicicleta de mayores dimensiones que incorpora un motor para introducir energía en el sistema.

Visto así, todos los aspectos que se consigan conocer acerca del comportamiento de las bicicletas y los parámetros que influyen en ello, se pueden extrapolar de forma directa al mundo de las motocicletas. Por este motivo son de gran ayuda los simuladores como el presentado en este proyecto, ya que facilitan el análisis paramétrico para comprobar sus repercusiones en el movimiento.

6. Métodos numéricos

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden obtenido de las ecuaciones de Newton-Euler y así poder generar el movimiento, no es factible encontrar una solución analítica con la que tener la evolución continua del vector \mathbf{q} en el tiempo.

Por este motivo es necesario implementar un método numérico lo suficientemente preciso para que los errores que se acumulen en el tiempo no hagan que el sistema se vuelva inestable, a la vez que sea capaz de resolver la dinámica del sistema en tiempo real.

Con los métodos numéricos se discretiza el tiempo en una serie de instantes t_1, t_2, \dots, t_j separados por un Δt que en general se considera constante. De esta manera, al ejecutar el método, se obtiene una solución aproximada al problema inicial en los instantes discretos definidos.

Se tiene que resolver un problema del tipo: $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ (6.1)

Para obtener el vector \mathbf{q} en el tiempo, se necesitan además unas condiciones iniciales al sistema, que vienen dadas con los vectores:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t_0) &= \mathbf{q}_0 = [0 \ 0 \ h \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \dot{\mathbf{q}}(t_0) &= \dot{\mathbf{q}}_0 = [v \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v/R \ v/R]\end{aligned}\quad (6.2)$$

Siendo h la altura de la bicicleta, impuesta así para tener indentación nula en el instante inicial y V es la velocidad de avance inicial al sistema, estando ambas ruedas rodando sin deslizar en el instante inicial como se observa en las dos últimas componentes de $\dot{\mathbf{q}}_0$, donde R es el radio de las ruedas.

El sistema nueve ecuaciones de segundo orden descrito, se puede transformar en uno de 18 ecuaciones de primer orden definiendo una nueva variable: $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{s}$

Con la que se tendría que: $\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ (6.3)

Definiendo el vector $\mathbf{y}^T = [\mathbf{q}^T, \mathbf{s}^T]$, se tiene que: $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ (6.4)

A continuación se van a describir distintos métodos numéricos de uso general tomados de la bibliografía [8], hasta llegar al que cumple las especificaciones necesarias para este proyecto.

6.1 Métodos de series de Taylor

Una primera aproximación a la solución discreta del sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es suponer que \mathbf{f} es lo suficientemente diferenciable respecto al vector \mathbf{y} y respecto a t como para desarrollar a $\mathbf{y}(t)$ en serie de Taylor:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \Delta t \mathbf{y}^I(t_0) + \frac{\Delta t^2 \mathbf{y}^{II}(t_0)}{2!} + \dots \quad (6.5)$$

La derivada temporal total de \mathbf{y} se ha expresado con el superíndice I, se pueden tener derivando \mathbf{f} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^I &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}^{II} &= \mathbf{f}^I = \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_y \mathbf{f} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Así se puede escribir al sistema de ecuaciones en función de \mathbf{f} y sus derivadas.

La dificultad de obtener las derivadas de alto orden de \mathbf{f} , hace que no sea un método recomendable excepto para aproximaciones de bajo orden.

Una aproximación es el método de Euler, que proporciona una aproximación de la solución en el paso $n+1$ a partir de la solución en el paso n :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (6.7)$$

La precisión es un aspecto importante a la hora de seleccionar un método para integrar las ecuaciones del movimiento. El método de Euler es simple y fácil de implementar, pero da resultados poco precisos y requiere pasos de tiempo bajos, con el posible error de que los errores de redondeo se vuelvan importantes.

La estabilidad es otro de los aspectos importantes a considerar para la elección del integrador. Se puede definir como la propiedad de un método de integración para mantener a los errores acotados conforme se avanza en los pasos de tiempo. De esta manera, un método inestable hace que los errores crezcan exponencialmente, generando que en pocos pasos de tiempo las soluciones encontradas carezcan de sentido.

Conviene señalar que la estabilidad no sólo depende del método de integración elegido, ya que también está condicionada por el tipo de problema a resolver.

6.2 Métodos de Runge-Kutta

El método de Euler descrito anteriormente no es útil por su baja precisión y los métodos de Taylor de mayor orden tienen la dificultad de obtener las derivadas de $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

Evitan tener que generar derivadas de alto orden a cambio de evaluar la función $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ en un número dado de puntos y proporcionan buena precisión como Taylor. El orden del método indica la cantidad de evaluaciones que realiza el algoritmo y por tanto da una idea de lo preciso que será el resultado.

- Uno de los más usados de este tipo es el llamado método de Runge-Kutta de cuarto orden, que requiere cuatro evaluaciones de la función por instante de tiempo:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad (6.8)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (6.9)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{K}_1\right) \quad (6.10)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{K}_2\right) \quad (6.11)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{f}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \Delta t\mathbf{K}_3) \quad (6.12)$$

Este método es explícito, ya que todos los \mathbf{K}_i dependen de valores previos ya calculados. De lo contrario, sería un método implícito y sería necesario un proceso iterativo en cada paso de tiempo para resolver unas ecuaciones no lineales y así llegar a \mathbf{y}_{n+1} .

- Otro algoritmo de este tipo muy usado, es el método explícito de Runge-Kutta de segundo orden. Este método también es conocido como el método de Euler mejorado o método de Heun y su algoritmo es el siguiente:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (6.14)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{f}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \Delta t\mathbf{K}_1) \quad (6.15)$$

En cada paso de tiempo se necesitan dos evaluaciones de funciones, que en el problema que hemos planteado implica obtener la solución de las ecuaciones del movimiento para tener las aceleraciones dos veces en cada paso de tiempo.

De los métodos elegidos, es el que nos proporciona la capacidad de resolver el problema en tiempo real a la vez que no genera diferencias numéricas apreciables en la precisión con respecto a los otros métodos descritos.

7. Simulación de la bicicleta

Gran parte del trabajo realizado en este proyecto se ha empleado en la implementación en MatLab del código adecuado que permite plantear, resolver y mostrar los resultados de las ecuaciones del movimiento del modelo que se describe en el apartado 3.

Para ello, es necesario generar una serie de funciones para estructurar el código y facilitar su comprensión. Algunas de estas funciones se han tenido que crear haciendo uso de la herramienta de cálculo simbólico que proporciona MatLab, de esta manera se evita realizar de forma manual y con posibilidad de error las operaciones necesarias para la obtención, por ejemplo, de las velocidades angulares de los sólidos o de los jacobianos.

No obstante, las funciones generadas con esa herramienta no son totalmente válidas, ya que hay que modificarlas para que permitan recibir las variables que nos interesen en cada caso, además de leer los parámetros fijos de una estructura ya predefinida.

Haciendo uso del simulador descrito podemos analizar el comportamiento de la bicicleta en algunos casos característicos, como los giros descritos en el apartado 5, de esta manera se ponen de manifiesto las capacidades dinámicas de este invento.

De forma general, el algoritmo que se ha implementado se puede condensar en el esquema incluido en la figura 7-1.



Figura 7-1 Diagrama del funcionamiento del simulador

Al iniciar la simulación, el programa carga automáticamente las condiciones iniciales del movimiento y los parámetros que definen la configuración de la bicicleta a simular. Lógicamente, el sistema tiene una velocidad inicial para facilitar el manejo, ya que se sitúa en la zona estable del mecanismo.

Posteriormente comienza el planteamiento y resolución de la dinámica del sistema, habiendo antes resuelto la cinemática. En esta parte del código es donde entran en funcionamiento todas las funciones secundarias que se han ido creando, con el objetivo final de generar las ecuaciones de Newton-Euler de la bicicleta.

A continuación se detallan las funciones necesarias para este objetivo:

- Ecuaciones del movimiento de la bicicleta
 - Fuerza Q contacto
 - Fuerza Q aerodinámica
 - Fuerza Q gravitatoria
 - Fuerza Q proporcional al cuadrado de la velocidad
 - Matriz de Masa
 - Funciones generadas para resolver la cinemática por la herramienta de cálculo simbólico de MatLab, como: \mathbf{A}^i , \mathbf{G}^i , \mathbf{H}^i ...

De forma paralela al procesamiento de estas funciones, es necesario recibir en tiempo real los fuerzas que el usuario quiere realizar en el sistema. Para ello, es necesario disponer de un dispositivo que permita la entrada de datos al programa, en este caso se utiliza un *joystick*.



Figura 7-2. *Joystick* empleado para la simulación

Gracias a él, se puede controlar la trayectoria con las acciones adecuadas en:

- Velocidad de avance.
- Ángulo del manillar.
- Ángulo de vuelco del cuadro.
- Ángulo del ciclista.

En este momento, las ecuaciones del movimiento cuentan con todos sus términos, por lo que hay que ejecutar la función que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

Como ya se adelantó en el capítulo 6, el algoritmo elegido para esta tarea es un método de Runge-Kutta de segundo orden. Con él se obtienen el valor de las coordenadas generalizadas elegidas para este modelo de bicicleta y así poder posicionar y orientar cualquier sólido del sistema en función del tiempo.

Por último, es necesario disponer de un algoritmo que represente un gráfico de los movimientos que realiza la bicicleta. Se ha optado por representarlas en el mismo programa MatLab haciendo uso de una serie de funciones incorporadas que permiten actualizar la posición del sistema en cada instante discreto, generando así la secuencia del movimiento de la bicicleta.

De esta manera, conforme el usuario percibe los resultados del movimiento en tiempo real, es capaz de realizar las acciones necesarias para llevar al sistema a la posición que desee. Para ello, no hay que olvidar las nociones sobre el comportamiento dinámico de las bicicletas que se presentaron en el apartado 5.

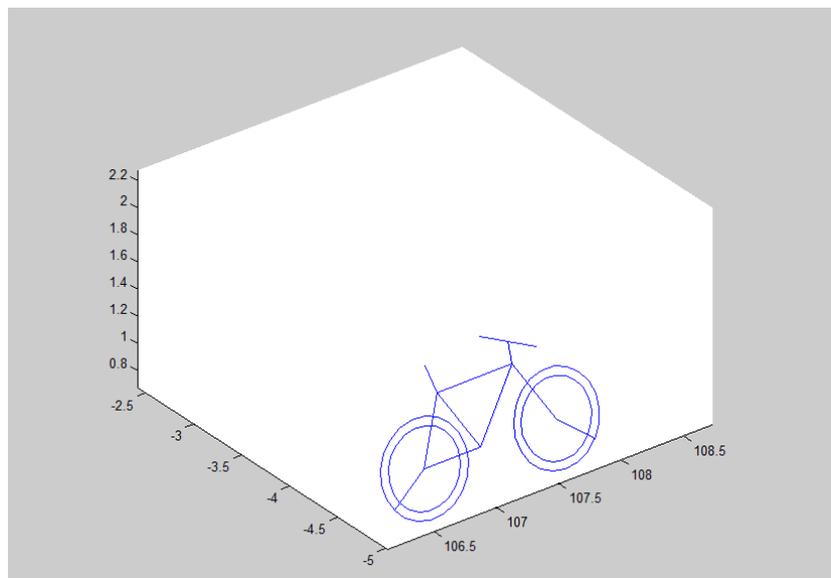


Figura 7-3 Simulador interactivo de la bicicleta

7.1 Descripción de los archivos

Como resultado de plantear el problema en MatLab para su resolución, se obtienen una serie de archivos que permiten simular el movimiento de la bicicleta con distintas hipótesis de partida, además de contar con otros archivos cuyos algoritmos permiten obtener el diagrama de continuación para analizar la estabilidad del sistema.

Debido a la importancia de estos archivos, se proporciona una descripción de los mismos y la manera en que se han organizado.

Hay dos clases de archivos que se han generado para las simulaciones:

- Archivos .m: Contienen el código de los programas de MatLab.
- Archivos .txt: Descripción del objetivo de cada versión del simulador.

En cada versión del simulador, se ha ordenado cada función generada según sea su objetivo dentro del global, de esta manera no se pierde el sentido físico del proyecto. Las subcarpetas en las que se organizan las funciones son:

- Cinemática.
- Ecuaciones de Newton-Euler.
- Geometría de superficies.
- Métodos numéricos.
- Otros: archivos auxiliares o de menor importancia dentro del proyecto.

Para hacer funcionar la simulación, el usuario debe ejecutar en MATLAB el archivo 'Principal.m', tras lo cual se iniciará la escena en tiempo real siempre que se tenga conectado un joystick para la entrada de datos.

La simulación comienza con una velocidad de avance inicial que facilita el manejo de la bicicleta siempre que se inicien los giros usando el efecto contra-manillar y girando el manillar hacia la dirección que se inclina el cuadro para salir de las curvas.

Es posible comprobar que el sistema responde a estas acciones tal como se describió en el capítulo 5, por lo que se puede afirmar que el simulador genera un comportamiento adecuado de la bicicleta bajo estudio.

8. Conclusiones

Durante el desarrollo de este proyecto se aprecia cómo para la resolución de la dinámica de este sistema mecánico de la manera más real posible, surge la necesidad de resolver problemas que son núcleos de diversos campos de la ingeniería, ya sea la aerodinámica, el tratamiento de los neumáticos como medio continuo para conocer la distribución de esfuerzos y de temperatura, las deformaciones del cuadro, etc.

Dado que para estudiar cada uno de esos problemas de forma detallada se necesita recurrir a un elevado número de horas de experimentación en el laboratorio y de validación de modelos, se recurre a simplificaciones que permiten que el modelo de la bicicleta se pueda resolver en tiempo real.

De forma paralela, se muestran las capacidades dinámicas que presenta la bicicleta a partir del simulador que se ha generado. Puede apreciarse cómo la bicicleta muestra un comportamiento realista ante las acciones del conductor.

En la actualidad, es necesario el uso de las simulaciones para la comprensión de la dinámica de sistemas de las cuales no se conocen soluciones analíticas. De esta manera se pueden hacer evolucionar a los ingenios de una manera más rápida que la basada en la experiencia, ya que se puede apreciar la importancia relativa de los distintos términos de forma paramétrica. Queda patente la importancia que tiene hoy en día un simulador para el análisis y diseño de sistemas mecánicos nuevos o la mejora de los ya conocidos.

Se ha creado un modelo físico que describe el movimiento de las bicicletas que pretende ser la base para incluir mejoras en otros aspectos que no se restringen a la interacción con el suelo, ni a su simulación en tiempo real. Por lo que es una base sólida sobre la que poder seguir trabajando en el futuro.

Por último, y probablemente el aspecto más importante que se muestra en este proyecto, es que el análisis del comportamiento de un sistema aparentemente sencillo puede contener una gran riqueza dinámica que no se aprecia hasta que realmente se plantea y se intenta resolver el problema.

9. Trabajo futuro

- Añadir desgaste en tiempo real del neumático.
- Resolver los parámetros de contacto con geometría del terreno no plano en tiempo real.
- Incorporación de suspensión en el modelo.
- Mejora de la aerodinámica del modelo por otra más completa que tenga en cuenta los cambios que se producen en la distribución de presiones en el entorno del sistema con la posición y la velocidad.
- Estudio de los efectos térmicos en el contacto para evaluar su repercusión en la generación de las fuerzas de contacto.
- Validación experimental del modelo realizado.
- Analizar las cargas en los neumáticos durante el paso por curva para poder dar un punto de partida para dimensionar los sistemas de suspensión y el chasis de una motocicleta.
- Análisis de las vibraciones del cuadro durante el movimiento.
- Mejora del entorno gráfico.

Referencias

- [1] Whipple, F. J. W. "The stability of the motion of a bicycle". The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.
- [2] Pacejka, H., Bakker, E. and Linder, "A new tire model with application in vehicle dynamics studies" SAE transactions.
- [3] Hans B. Pacejka, "Tyre and vehicle dynamics".
- [4] Foale T., "Motorcycle Handling Chassis Design Manual".
- [5] Cossalter V., Lot, R., "A motorcycle multi-body model for real time simulations based on the natural coordinates approach".
- [6] R. Rajesh, "Vehicle dynamics and control".
- [7] R. N. Jazar. "Vehicle dynamics: Theory and applications".
- [8] J.Jalon and E.Bayo, "kinematic and dynamic simulation of multibody systems -the real time challenge-".
- [9] K.L. Johnson , "Contact mechanics".
- [10] V. Popov "Contact Mechanics and Friction".
- [11] Escalona, J.L. y Recuero, A. M. "A bicycle model for education in multibody dynamics and real-time Interactive simulation".
- [12] Escalona, J.L. "Dinámica de una bicicleta".
- [13] K.J. Åström. "Bicycles dynamics and control: Adapted bicycles for education and research".

- [14] M. Cain, C. Perkins .“Steady-state handling characteristics of a bicycle”.
- [15] A. L.Schwab, J. D. G. Kooijman y J. P. Meijaard “Some recent developments in bicycle dynamics and Control”.
- [16] Sharp, R. S. “The stability and control of motorcycles”. Journal of Mechanical Engineering Science.
- [17] R. Lot. “A motorcycle tire model for dynamic simulations”.
- [18] J.H. van den Ouden. “Inventory of bicycle motion for the design of a bicycle simulator”.
- [19] E. H. Jones, David. “The stability of the bicycle”. Physics Today.
- [20] Kooijman, J. D. G.; Meijaard, J. P.; Papadopoulos, Jim M.; Ruina, Andy y Schwab, A. L. “A Bicycle Can Be Self-Stable Without Gyroscopic or Caster Effects”. Science.
- [21] Koenen, C. “The dynamic behaviour of a motorcycle when running straight ahead and when cornering”. PhD tesis, Universidad Tecnológica de Delft.
- [22] Zhu; Dopico; Sandu. “Software for modeling, sensitivity analysis, and optimization of multibody systems at virginia tech”.
- [23] Recuero A.M. “Estudio analítico y experimental de la dinámica propia de una bicicleta”.