

Análisis de la dinámica de un oscilador electrónico tipo Bonhoeffer-Van der Pol

CARLOS VALLET BURGUILLOS

Tutor: Javier Ros Padilla

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales especialidad
Electrónica

Departamento de Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Sevilla

Noviembre de 2014

Índice general

1. Sistemas dinámicos	5
1.1. Estabilidad y bifurcación	5
1.2. Osciladores electrónicos	7
1.2.1. Osciladores y ciclos límites	7
1.2.2. Circuitos electrónicos no lineales	7
1.2.3. Circuitos electrónicos lineales a trozos	8
1.3. Comportamientos del ciclo límite	8
1.4. Objetivo del proyecto	9
2. Generación de oscilaciones	11
2.1. Descripción del sistema	11
2.2. Análisis del sistema dinámico	13
2.3. Análisis de órbitas periódicas mediante ecuaciones de cierre . .	20
2.3.1. Órbitas periódicas bizonales	20
2.3.2. Órbitas periódicas trizonales	21
3. Oscilador electrónico BVP	25
3.1. Obtención del sistema modelado del oscilador electrónico BVP	25
3.2. Análisis del oscilador electrónico BVP	28
4. Simulaciones	33
4.1. Análisis de los resultados	33

Capítulo 1

Sistemas dinámicos

1.1. Estabilidad y bifurcación

El comportamiento dinámico de muchos procesos físicos o de la ingeniería viene modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales. En general estas ecuaciones son no lineales, y además, dependen de ciertos parámetros que representan los posibles valores de las magnitudes que fijan en cada caso la dinámica del sistema. La elección de los valores concretos de los parámetros del sistema determina los posibles estados de equilibrio del mismo y su modo de respuesta dinámica ante las pequeñas perturbaciones que puedan tener lugar.

Al evolucionar con continuidad los valores de los parámetros van cambiando los posibles estados de equilibrio, que pueden así surgir o desaparecer o simplemente cambiar sus propiedades. En estos términos generales, el análisis del carácter de un punto de equilibrio de un sistema dinámico, es decir, la estabilidad o inestabilidad del sistema en cuestión, se remite a la investigación de la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema linealizado.

En definitiva, es el signo de la parte real de los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema linealizado la que fija la estabilidad, que se produce cuando todos los valores propios tienen parte real negativa. En sistemas dinámicos dependientes de parámetros, el modelo linealizado también cambia al modificarse los valores de los parámetros, pudiendo resultar diferente el carácter de los correspondientes cambios de equilibrio que resultan de una evolución continua de los parámetros del sistema. Los cambios cuali-

tativos del carácter de un determinado punto de equilibrio son el resultado de lo que se denomina bifurcación, siendo las posibilidades de bifurcación muy variadas.

En sistemas dependientes de un sólo parámetro, la pérdida de estabilidad se produce genéricamente mediante dos posibles mecanismos netamente diferenciados. En el primero de ellos sucede que un valor propio real evoluciona con el cambio de los valores del parámetro hacia el semiplano real positivo. Puede demostrarse que, también genéricamente, en este caso se pierde la estabilidad por la confluencia del punto de equilibrio estable con otro inestable. Este fenómeno se denomina por esta razón bifurcación silla-nodo.

La segunda posibilidad aparece cuando la estabilidad se pierde como consecuencia de que un par de valores propios complejos conjugados atraviesan el eje imaginario convirtiéndose el punto de equilibrio en inestable. En este caso, genéricamente se produce lo que se denomina una bifurcación de Hopf.

La característica esencial de la bifurcación de Hopf es que para valores del parámetro cercanos al valor de bifurcación, se produce la aparición de un ciclo límite del sistema en las cercanías del estado de equilibrio. Existen dos posibilidades diferentes de propiedades y consecuencias prácticas muy distintas.

La aparición de oscilaciones periódicas estables en sistemas lineales a trozos es similar a la bifurcación de Hopf para sistemas diferenciables, puesto que el cambio en la estabilidad de un equilibrio implica la aparición de un ciclo límite. Sin embargo, la dependencia de la amplitud del ciclo límite con el parámetro de bifurcación en el caso de sistemas lineales a trozos es distinta de la que se produce para la bifurcación de Hopf.

Con el objetivo de aplicar las herramientas disponibles para sistemas dinámicos diferenciales, los osciladores no lineales son frecuentemente modelados mediante sistemas dinámicos cuyas no linealidades se suponen suficientemente diferenciables. Entre estas herramientas, el Teorema de Bifurcación de Hopf es uno de los más conocidos cuando se quiere dar una explicación a la aparición de oscilaciones periódicas.

De todos modos, aparecen situaciones en las que para conseguir modelos más precisos del mundo real es conveniente utilizar sistemas lineales a trozos. De hecho, los sistemas lineales a trozos son muy comunes en las aplicaciones de la electrónica no lineal y de la teoría de control. Pueden utilizarse por ejemplo, cuando el modelo tiene una región activa frente a otra de corte, o cuando las saturaciones deben ser consideradas en el modelo.

Los modelos lineales a trozos pueden considerarse como la agregación

de varios sistemas lineales diferentes, cada uno de los cuales representa la dinámica del sistema en una región del espacio de fases. Dentro de cada región, la dinámica es muy simple, pero la dinámica global puede ser de gran complejidad y a menudo caótica.

El análisis de la bifurcación de los sistemas lineales a trozos puede ser una difícil tarea puesto que hay una falta de resultados generales para este tipo de sistemas y es necesario tener en cuenta la contribución de cada región del espacio de fase a la dinámica global. En particular, no se pueden aplicar los teoremas de bifurcación de Hopf a estos sistemas debido a su baja diferenciabilidad. De todos modos, los sistemas lineales a trozos pueden presentar bifurcaciones que tienen similitudes (pero también discrepancias) con la bifurcación de Hopf.

1.2. Osciladores electrónicos

1.2.1. Osciladores y ciclos límites

Los osciladores son circuitos electrónicos que pueden presentar oscilaciones de amplitud y periodos fijos sin excitación exterior. Estas oscilaciones se denominan ciclos límites u oscilaciones automantenidas. Un buen oscilador debe presentar al menos dos características para un correcto funcionamiento: 1) Una vez transcurrido el régimen transitorio inicial, los valores de amplitud y periodo de los ciclos límite no deben depender de las condiciones iniciales del sistema.

2) Las oscilaciones han de existir para unos rangos de los parámetros del sistema suficientemente amplios.

Debido a que los sistemas lineales no presentan estas características, cualquier oscilador tiene que ser un sistema no lineal y ser modelado como tal para poder establecer analíticamente la amplitud y el periodo de las oscilaciones. La existencia de al menos un dispositivo no lineal en un circuito convierte a éste en no lineal.

1.2.2. Circuitos electrónicos no lineales

Los circuitos electrónicos no lineales incluyen, además de algunos dispositivos lineales (resistencias, bobinas y condensadores), ciertos dispositivos no lineales usualmente basados en materiales semiconductores (diodos, transis-

tores y amplificadores operaciones principalmente). Mientras que los dispositivos lineales no presentan ninguna dificultad y pueden modelarse mediante ecuaciones algebraicas o diferenciales lineales bien conocidas, para los dispositivos no lineales es necesario establecer unos modelos matemáticos adecuados que describan su funcionamiento de forma suficientemente aproximada.

1.2.3. Circuitos electrónicos lineales a trozos

Una posibilidad muy utilizada es considerar que los dispositivos no lineales presentan varios modos de funcionamiento y establecer para cada uno de ellos un modelo lineal. Así se obtiene para cada dispositivo no lineal un modelo lineal a trozos. Cada modo de funcionamiento está asociado a un rango de las variables utilizadas para describir el comportamiento del circuito, o expresado de otra forma, a cada modo corresponde una región en un espacio de fase.

De esta forma la resolución de un circuito no lineal puede hacerse resolviendo varios circuitos lineales, cada uno de los cuales tiene validez sobre periodos de tiempo que llamamos intervalos. Un intervalo finaliza y comienza el siguiente cuando las variables asociadas a los dispositivos no lineales pasan de un rango de valores a otro, o equivalentemente, cuando el punto representativo del estado del sistema en el espacio de fase pasa de una región a otra. En ese instante decimos que ha cambiado el modo de funcionamiento del circuito.

1.3. Comportamientos del ciclo límite

En sistemas dinámicos dependientes de parámetros, el carácter de los correspondientes puntos de equilibrio (si son estables o no) puede ir cambiando a medida que se realiza una variación continua de los parámetros del sistema. Estos cambios cualitativos del carácter de un determinado punto de equilibrio (cambio de una situación estable a inestable o viceversa) son el resultado de lo que se denomina una bifurcación.

En sistemas diferenciables dependientes de un solo parámetro, la pérdida de estabilidad se produce genéricamente cuando uno de los pares de autovalores complejos conjugados atraviesan el eje imaginario, cambiando la estabilidad del punto de equilibrio. Se produce genéricamente lo que se conoce como bifurcación de Hopf, cuya característica esencial es la aparición

de un ciclo límite del sistema en las cercanías del estado de equilibrio; eso sí, para valores del parámetro cercanos al valor de la bifurcación. Se pueden distinguir dos casos en función del comportamiento de dicho ciclo límite:

a) Bifurcación de Hopf subcrítica. Antes de que el parámetro alcance el valor de la bifurcación, el ciclo límite coexiste con el punto de equilibrio estable, limitando la cuenca de atracción del mismo.

b) Bifurcación de Hopf supercrítica. El ciclo surge una vez traspasado el valor de la bifurcación, constituyendo un atractor que atenúa la inestabilidad del punto de equilibrio, este ciclo límite de pequeña amplitud es el responsable de la aparición de oscilaciones periódicas estables en los osciladores electrónicos autónomos.

El análisis de la bifurcación en sistemas lineales a trozos puede convertirse una tarea difícil, dado que hay una carencia de resultados generales para esta clase de sistemas, y además se debe tener en cuenta la contribución acumulada de cada sección del espacio de fase a la dinámica global.

En particular, el teorema de la bifurcación de Hopf, que explica la aparición de oscilaciones en sistemas diferenciables no es de aplicación en este caso debido a la pérdida de diferenciabilidad, ya no se puede hablar propiamente de bifurcación de Hopf, en este caso, hablaremos de bifurcación Foco Centro Ciclo Límite (FCCL) para sistemas lineales a trozos (no diferenciables).

1.4. Objetivo del proyecto

El objetivo es el modelado matemático de un oscilador electrónico como un sistema dinámico tridimensional y simétrico que presenta una zona lineal entre las fronteras de los planos $x = 1$ y $x = -1$, cuyos extremos son no derivables y otra parte no lineal (saturación del dispositivo) contigua a ambos planos frontera. Analizaremos los diferentes comportamientos que se observan en cuanto a la estabilidad del sistema al variar los parámetros principales de bifurcación, identificando los diferentes casos que se observan y contrastando a través de simulaciones mediante Dynamic Solver los resultados obtenidos. Además, se localizarán aquellos valores de los parámetros de bifurcación que garantizan la eficacia del oscilador electrónico al haber presencia de ciclos límites.

Capítulo 2

Generación de oscilaciones

2.1. Descripción del sistema

El estudio de los ciclos límites de un sistema diferenciable es, después del análisis de soluciones en equilibrio, uno de los problemas más importantes en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos. Diferentes herramientas provenientes de la teoría de bifurcación están disponibles para garantizar la bifurcación y la existencia de ciclos límites en sistemas lineales, sin embargo en este proyecto, trataremos sistemas a trozos lineales no diferenciables, debido a la aplicación a la vida real, en concreto, con osciladores electrónicos.

Consideramos el sistema de la familia de sistemas lineales a trozos escritos en la forma de Luré:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A_R \mathbf{x} + \mathbf{b} \text{sat}(x), \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, la función de saturación viene dada por:

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u > 1, \\ u & \text{if } |u| \leq 1, \\ -1 & \text{if } u < -1. \end{cases}$$

La matriz A_R tendrá la siguiente expresión:

$$A_R = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector está definido por

$$b = \begin{pmatrix} T - t \\ M - m \\ D - d \end{pmatrix},$$

de manera que, para $|x| \leq 1$ la dinámica está gobernada por el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = A_C \mathbf{x} = \begin{pmatrix} T & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

mientras que A_R representa la dinámica del sistema en las zonas externas y A_C la dinámica del sistema en la zona central. El parámetro T representa la traza, M es la suma de los adjuntos de los elementos de la diagonal principal y D es el determinante de la matriz A_C . Análogamente, t representa la traza, m la suma de los adjuntos de los elementos de la diagonal principal y d el determinante de la matriz A_R . Toda la información sobre la dinámica del sistema en la zona lineal central está contenida en los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A_C que satisfacen el polinomio característico de la matriz. El polinomio característico de A_C viene dado por:

$$p_{A_C}(\lambda) = \det(A_C - \lambda I) = \lambda^3 - T\lambda^2 + M\lambda - D. \quad (2.3)$$

Estamos interesados en la generación de oscilaciones automantenidas. Cuando el sistema posee un autovalor real estable (negativo) y dos autovalores complejos conjugados que pasan de estables a inestables, es decir, la parte real de los autovalores complejos pasa de negativa a positiva, se producen oscilaciones periódicas cuya amplitud viene limitada por la saturación existente en el sistema. Equivalentemente, podemos decir que buscamos en que condiciones los dos autovalores complejos de la matriz A_C cruzan el eje imaginario del plano complejo. Sabemos que habrá estabilidad en la zonal central para:

$$T < 0, \quad D < 0, \quad MT - D < 0. \quad (2.4)$$

Se tiene que $A_C = A_R + \mathbf{b}\mathbf{e}_1^T$, donde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, dando como resultado la familia de sistemas llamados en su forma generalizada de Liénard, el cuál, es análogo a la forma canónica desarrollada en la teoría de control. Por tanto, bajo estas condiciones para cada sistema de la forma expuesta, haciendo un cambio de variables obtendríamos lo expuesto en (2.4).

Considerando una estructura general de los autovalores para realizar el análisis dinámico, introducimos ε como el parámetro de bifurcación tal que los tres autovalores de la matriz A_C son $\lambda(\varepsilon)$ para autovalores reales y $\sigma(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$ para autovalores con parte real y compleja. Los parámetros λ , σ , ω tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\lambda(\varepsilon) &= \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \sigma(\varepsilon) &= \sigma_1\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \omega(\varepsilon) &= \omega_0 + \omega_1\varepsilon + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde se asumirá siempre $\omega_0 > 0$. Además, asumiremos que σ_1 y λ_1 no se anulan. Usando las expresiones anteriores resultan las siguientes expresiones para T , M y D :

$$\begin{aligned}T(\varepsilon) &= \lambda(\varepsilon) + 2\sigma(\varepsilon), \\ M(\varepsilon) &= \sigma^2(\varepsilon) + \omega^2(\varepsilon) + 2\lambda(\varepsilon)\sigma(\varepsilon), \\ D(\varepsilon) &= \lambda(\varepsilon)[\sigma^2(\varepsilon) + \omega^2(\varepsilon)],\end{aligned}\tag{2.6}$$

de donde tenemos que:

$$\begin{aligned}T_0 &= T(0) = \lambda_0, \\ M_0 &= M(0) = \omega_0^2, \\ D_0 &= D(0) = \lambda_0\omega_0^2.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Sabemos que ante las siguientes transformaciones no se verá afectado el sistema propuesto, conservándose invariante:

$$(x, y, z, \tau, t, m, d, \varepsilon) \longrightarrow (x, -y, z, -\tau, -t, m, -d, -\varepsilon)\tag{2.8}$$

Esta propiedad simétrica es útil para simplificar el análisis de este tipo de sistemas.

2.2. Análisis del sistema dinámico

Asumimos en lo que sigue $\lambda_0 = 0$, es decir que al pasar ε por 0, tanto el autovalor real como la parte real del par complejo conjugado se anulan. Analizamos primero el número de equilibrios que puede presentar nuestro sistema. Si nos fijamos en la tercera ecuación del sistema, es decir, $\dot{z} = dx + (D - d)\text{sat}(x)$, vemos que los equilibrios deben cumplir la condición

$dx + (D - d) \text{sat}(x) = 0$. Si $d = D \neq 0$, entonces la única solución es $x = 0$. Si $D - d \neq 0$, podemos dividir por esta expresión y escribir:

$$\frac{d}{d - D}x = \text{sat}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{D}{d}}x = \text{sat}(x),$$

Si d y D tienen signos distintos ($D/d < 0$), la fracción $0 < \frac{1}{1 - \frac{D}{d}} < 1$, signo de que hay tres soluciones, en concreto $x = 0$ y $x = \pm(1 - \frac{D}{d})$, con $|x| > 1$. Si d y D tienen el mismo signo ($D/d > 0$), $1 - \frac{D}{d} < 1$ y puede ocurrir que:

- a) $0 < 1 - \frac{D}{d} < 1$,
- b) $0 < 1 - \frac{D}{d} = 0$,
- c) $1 - \frac{D}{d} < 0$.

En los tres casos es fácil ver que sólo hay equilibrio si $x = 0$. Finalmente si $D = 0$ (que es lo que ocurre cuando $\varepsilon = 0$) queda la condición $d[x - \text{sat}(x)] = 0$, por tanto, todo valor de $x \in [-1, 1]$ serviría como solución.

Para ε pequeño en valor absoluto, se denota que el signo de D es igual al signo de $\lambda_1 \varepsilon$, por tanto, se desprenden las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $d\lambda_1 \varepsilon > 0$ el único punto de equilibrio es el origen.
- (b) Si $d\lambda_1 \varepsilon < 0$ el equilibrio está en el origen y los dos puntos

$$\mathbf{x}_\varepsilon^+ = \left(1 - \frac{D(\varepsilon)}{d}, T(\varepsilon) - t \frac{D(\varepsilon)}{d}, M(\varepsilon) - m \frac{D(\varepsilon)}{d} \right)^T, \quad \mathbf{x}_\varepsilon^- = -\mathbf{x}_\varepsilon^+.$$

- (c) Si $\varepsilon = 0$ todos los puntos del siguiente segmento son equilibrios del sistema.

$$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z)^T = \mu(1, 0, \omega_0^2)^T, |\mu| \leq 1\}$$

Si además $d \neq 0$, el segmento contendría todos los puntos del equilibrio.

A partir de la conclusión c) vemos que para $\varepsilon = 0$ se produce lo que se denomina *bifurcación pitchfork degenerada*, que se observa en la figura 2.1:

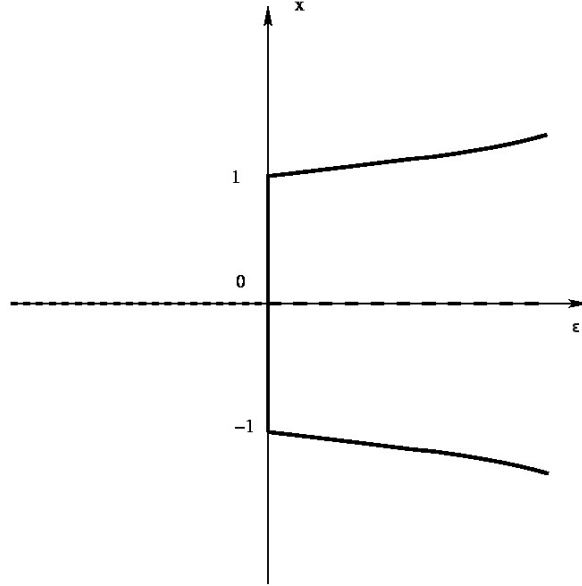


Figura 2.1: *El diagrama de bifurcación del equilibrio del sistema dibujado cuando $d > 0$. Solo hemos dibujado la coordenada x del equilibrio de puntos.*

Nótese que para $d\lambda_1\varepsilon < 0$ los puntos $\mathbf{x}_\varepsilon^\pm$ son puntos de equilibrio del campo de vectores correspondientes a $|x| > 1$ pero estos puntos están fuera de sus correspondientes zonas. Estos puntos no constituyen un equilibrio real, aunque organizan la dinámica en las regiones externas. Estos puntos de equilibrio son comúnmente llamados *puntos de equilibrio virtual*.

Para estudiar la existencia de órbitas periódicas en este tipo de sistemas, comenzaremos considerando la zona central del sistema con $\varepsilon = 0$. En este caso, una computación directa muestra que la solución de nuestro sistema a estudiar partiendo de un punto arbitrario tal como $(x_0, y_0, z_0)^T$ para $\tau = 0$ viene dado por la solución:

$$\mathbf{x}(\tau) = \exp(A_C\tau) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_0^2} \begin{pmatrix} \omega_0^2 \cos \omega_0\tau & -\omega_0 \sin \omega_0\tau & 1 - \cos \tau \\ \omega_0^3 \sin \omega_0\tau & \omega_0^2 \cos \omega_0\tau & -\omega_0 \sin \omega_0\tau \\ 0 & 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Si $|x_0| < 1$ la correspondiente órbita es un arco de la siguiente elipse:

$$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \frac{\left(x(\tau) - \frac{z_0}{\omega_0^2}\right)^2}{\left(x_0 - \frac{z_0}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{y_0^2}{\omega_0^2}} + \frac{y^2(\tau)}{\omega_0^2 \left(x_0 - \frac{z_0}{\omega_0^2}\right)^2 + y_0^2} = 1, z(\tau) = z_0\}, \quad (2.10)$$

pasando por el punto inicial. Para algunos puntos iniciales se obtienen elipses completas en la región $|x| \leq 1$ y por tanto tendremos que $-\omega_0^2 < z_0 < \omega_0^2$.

Por tanto, las soluciones obtenidas en (2.9) que están contenidas para todo τ en la zona central son órbitas periódicas del sistema que tienen la forma de dos conos que comparten la elipse $\omega^2 x^2 + y^2 \leq \omega^2$.

La estructura de las órbitas periódicas es independiente de los valores de t , m y d . Para $\varepsilon \neq 0$ y pequeño, tenemos que la mayoría de estas órbitas periódicas desaparecerán pero algunas de ellas podrían llegar a dar a lugar a ciclos límites.

A continuación en la figura 2.2 se muestra la estructura de las órbitas periódicas en la zona central:

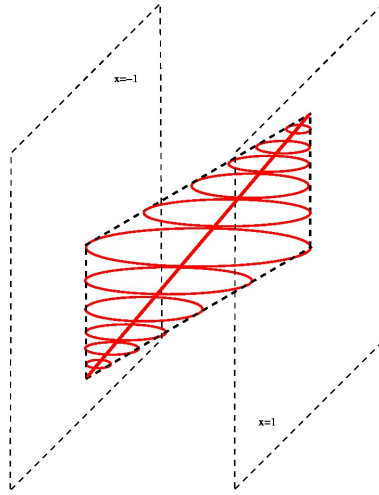


Figura 2.2: Estructura de las órbitas periódicas $\varepsilon = 0$ en la zona central. Los dos conos están completamente foliados por órbitas periódicas alrededor del segmento de puntos en equilibrio. $\{(x, 0, x\omega^2)^T : |x| \leq 1\}$.

Como es bien sabido, un sistema lineal no puede tener ciclos límites. Por eso, los ciclos límites han de cruzar los planos frontera $x = 1$ o $x = -1$. Para algunos valores de parámetros existe un ciclo límite en dos zonas a la vez que se denominan ciclos límites bizonales. Análogamente, podemos hablar de ciclos límites trizonales cuando se cruzan ambos planos frontera simultáneamente. Debido a la simetría del campo de vectores con respecto al origen, los ciclos límites no simétricos deben aparecer en parejas, esto es, cuando un ciclo límite no simétrico existe debe existir por tanto su simétrico correspondiente.

Resumen de los resultados principales conocidos

A continuación se detallan los resultados ya conocidos, cuyo desarrollo puede encontrarse en [3]

Ciclos límites trizonales

Se considera el sistema bajo las siguientes condiciones análogas a la bifurcación de *Hopf*:

Se supone para $\varepsilon = 0$, $\lambda_0 \neq 0$ y $\sigma_1 \neq 0$ de manera que se tiene que $MT - D = 0$. Introducimos por conveniencia el parámetro $\delta = d - t\omega_0^2 + \lambda_0(\omega_0^2 - m) \neq 0$, cuyo signo caracteriza el tipo de bifurcación que tiene lugar. Bajo estas condiciones el sistema sufre una bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite (FCCL), a partir de la configuración de las órbitas periódicas que existen en la zona central para $\varepsilon = 0$, un ciclo límite aparece para $\delta\sigma_1\varepsilon > 0$ siendo $|\varepsilon|$ lo suficientemente pequeño. El ciclo límite tiene como periodo:

$$P = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{2\pi}{\omega_0^3\delta} [\lambda_0\sigma_1(t\omega_0^2 - d) + \omega_0^2\sigma_1(\omega_0^2 - m) - \omega_0\omega_1\delta]\varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}),$$

y su amplitud en x definida como $\max\{x\} - \min\{x\}$ viene dada por:

$$A = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi\sigma_1(\omega_0^2 + \lambda_0^2)}{2\delta} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon^{4/3}).$$

En particular, si $\lambda_0 < 0$ y $\delta > 0$, tendremos que el ciclo límite bifurca para $\sigma_1\varepsilon > 0$ y la correspondiente órbita es asintóticamente estable.

Si ahora consideramos el sistema bajo las condiciones: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $\sigma_1 \neq 0$, es decir, en las condiciones análogas a la bifurcación *Hopf-zero*, sigue bifurcando un ciclo límite aunque ahora los esquemas se simplifican algo. En particular para $\varepsilon = 0$ tenemos que $\delta = d - t\omega_0^2 \neq 0$

Este ciclo es simétrico con respecto al origen y bifurca desde la elipse $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \omega^2 x^2 + y^2 = \omega^2, z = 0\}$.

Así, el ciclo límite tiene ahora el siguiente periodo:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} + 2\pi \left(\frac{\omega_0 \sigma_1 (\omega^2 - m) - \omega_1 \delta}{\omega_0^2 \delta} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}),$$

y su amplitud en x definida como $\max\{x\} - \min\{x\}$ viene dada por:

$$A = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi \sigma_1 \omega_0^2}{2\delta} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon^{4/3}).$$

Además, el ciclo límite que bifurca es estable si y solo si $t < 0$, $d < 0$ y $\delta > 0$. Usando la propiedad de invariancia podemos añadir una nueva afirmación diciendo que el ciclo límite que bifurca es completamente inestable (los dos exponentes característicos tienen parte real positiva) si y solo si $t > 0$, $\delta < 0$ y $d > 0$.

Ciclos límites bizonales

A la hora de analizar las posibles bifurcaciones bizonales, debido a la simetría presente, es claro que los ciclos límites bizonales siempre existen en parejas, cruzando cada uno de ellos los planos fronteras establecidos $x = 1$ y $x = -1$, respectivamente. Por ello, basta estudiar el ciclo límite que aparece cruzando el plano $x = 1$, definiendo el siguiente sistema auxiliar:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_R \mathbf{x} + \mathbf{b}, & \text{si } x \geq 1, \\ A_C \mathbf{x}, & \text{si } x < 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Este sistema solo tendría dos zonas de linealidad. De acuerdo con esto, sólo los ciclos límites contenidos dentro de la región $x \in [-1, \infty)$ corresponderán a ciclos límites del sistema original, representando a uno de los miembros de la pareja.

El equilibrio del sistema está en el origen en la zona con $x < 1$ y $\mathbf{x}_\varepsilon^+$ en la zona con $x \geq 1$. De una forma análoga al análisis hecho para las órbitas periódicas del ciclo límite trizonal, podemos considerar el sistema con $\varepsilon = 0$. Por tanto, cada solución en la zona con $x < 1$ empieza desde un punto arbitrario $(x_0, y_0, z_0)^T$ para $\tau = 0$ viene dada por (2.9), y su correspondiente órbita es un arco de una elipse con la expresión dada en (2.10).

Ahora, si esta elipse está completamente contenida en la región $x < 1$ por tanto tenemos $z_0 < \omega^2$. Esta familia de elipses están completamente contenidas en la región $x < 1$ las cuales generan un cono ilimitado de órbitas periódicas.

Nótese que este cono ilimitado puede ser obtenido prolongando la parte superior de la figura 2. En este caso, solo las órbitas periódicas del sistema verifican $|x| \leq 1$ corresponderán a órbitas periódicas del sistema a estudiar.

Como hemos visto, un ciclo límite del sistema puede aparecer para $\varepsilon \neq 0$ desde una órbita periódica de la frontera del cono, la cual es una elipse horizontal con centro en $(z/\omega^2, 0, z)^T$ y x -semieje $1 - z/\omega^2$. Por tanto, cuando $|\varepsilon|$ es lo suficientemente pequeño y $0 < z < \omega^2$, podemos asegurar que la primera coordenada de los puntos del ciclo límite bifurcado está en el rango $x \in (-1, \infty)$ y consecuentemente ese ciclo límite del sistema bizonal es también un ciclo límite para el sistema trizonal.

Además, la simetría del sistema obliga a la presencia de un ciclo límite simétrico, ahora apareciendo en la región $x \in (-\infty, 1)$. De ahí se deduce que la bifurcación mostrada conlleva la aparición de un par de ciclos límites para el sistema, cada uno bifurcando desde la frontera de uno de los dos conos de la figura 2.2.

Sintetizamos nuestros resultados:

Con $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $\delta = d - t\omega_0^2 \neq 0$, $\sigma_1 \neq 0$, $d\sigma_1 - \lambda_1\delta \neq 0$ y $0 < \hat{z} = \frac{d\sigma_1\omega_0^2}{d\sigma_1 - \lambda_1\delta} < \omega_0^2$:

El sistema presenta un ciclo límite bizonal para $\varepsilon = 0$. Por tanto, existe un par de ciclos límites para $\delta\sigma_1\varepsilon > 0$ siendo $|\varepsilon|$ lo suficientemente pequeño. Su periodo presenta la siguiente expresión:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2\pi[\omega_0\sigma_1(\omega_0^2 - m) - \omega_1\delta]}{\delta\omega_0^2}\varepsilon + O(\varepsilon^{5/3}),$$

y su amplitud tendría la siguiente expresión:

$$A = \frac{2\lambda_1\delta}{\lambda_1\delta - d\sigma_1} - \frac{2(3\pi)^{2/3}\sigma_1^{2/3}d\lambda_1\sigma_1\omega_0^2[2t(\omega_0^2 - m) - 3\delta]}{5\omega^{2/3}\delta^{2/3}(\lambda_1\delta - d\sigma_1)^2}\varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon).$$

El ciclo límite será estable si y solo si $t < 0$ y $\lambda_1\sigma_1 < 0$, o $t = 0$ y $d\sigma_1(2\sigma_1 + \lambda_1) < 0$.

2.3. Análisis de órbitas periódicas mediante ecuaciones de cierre

2.3.1. Órbitas periódicas bizonales

Asumimos la existencia de una órbita periódica que intersecta la frontera $x = 1$ en dos puntos que tienen la siguiente expresión:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Como se muestra en la figura 2.3, se representan los puntos X_0 y X_1 del ciclo límite bizonal y sus tiempos de vuelo en la parte izquierda (τ_C) y derecha (τ_R) al plano frontera $x = 1$.

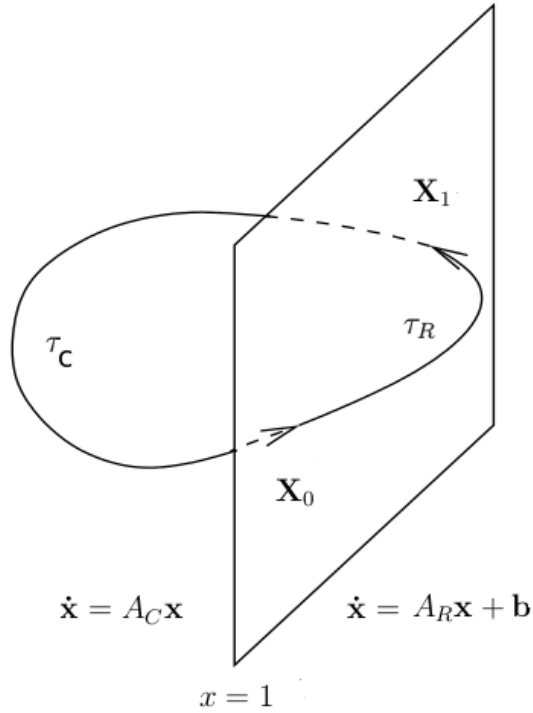


Figura 2.3: Ciclo límite bizonal en el plano frontera $x = 1$

Definido el sistema como (2.11), procedemos a hallar la solución desde

2.3. ANÁLISIS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS MEDIANTE ECUACIONES DE CIERRE21

X_1 directamente mediante:

$$x(\tau) = e^{A_C \tau} X_1. \quad (2.12)$$

Por tanto, se tiene que:

$$X_0 = e^{A_C \tau_C} X_1. \quad (2.13)$$

Cuando el sistema (2.11) es compatible y X_R es una solución de $A_R x + b = 0$, y por tanto, equilibrio del sistema en la zona R podemos transformar el sistema (2.11) en un sistema homogéneo mediante una translación para solucionarlo y posteriormente deshacer la translación. La solución tiene la siguiente forma:

$$x(\tau) = X_R + e^{A_R \tau} [X_0 - X_R]. \quad (2.14)$$

De forma que para el tiempo de vuelo τ_R se tiene

$$X_1 = X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R). \quad (2.15)$$

Por consiguiente, tenemos el sistema

$$\begin{cases} X_0 = e^{A_C \tau_C} X_1, \\ X_1 = X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R), \end{cases}$$

donde se tienen dos ecuaciones vectoriales de tres componentes teniendo como incógnitas τ_C , τ_R , y_0 , z_0 , y_1 , z_1 .

2.3.2. Órbitas periódicas trizionales

Asumimos la existencia de una órbita periódica que intersecta los planos frontera $x = -1$ y $x = 1$ en cuatro puntos que tienen la siguiente expresión:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Como se muestra en la figura 2.4, se representan los puntos X_0 , X_1 , X_2 y X_3 del ciclo límite trizonal y sus tiempos de vuelo en la parte central (τ_C), en la parte izquierda (τ_L) y en la parte derecha (τ_R).

La simetría de la órbita periódica trizonal del sistema implica que:

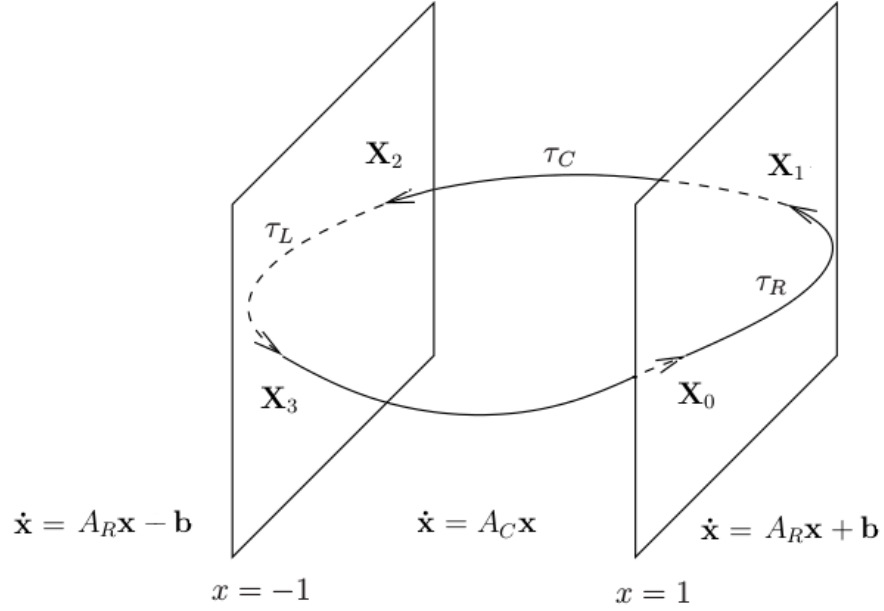


Figura 2.4: Ciclo límite trizonal en los planos frontera $x = -1$ y $x = 1$

$$X_2 = -X_0 \quad y \quad X_3 = -X_1,$$

por tanto, el estudio de la trayectoria entre X_0 y X_2 es suficiente para determinar por completo la órbita. En la zona central tenemos que $\dot{\mathbf{x}} = A_C \mathbf{x}$. Tomando como punto inicial X_0 tenemos como solución en la zona derecha:

$$x(\tau) = X_R + e^{A_R \tau} (X_0 - X_R). \quad (2.16)$$

El punto X_1 de la trayectoria donde $\tau = \tau_R$ satisface que

$$X_1 = X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R), \quad (2.17)$$

proporcionando la primera ecuación de cierre del ciclo límite trizonal. En la parte central tenemos que $\dot{\mathbf{x}} = A_C \mathbf{x}$. Tomando como punto inicial X_1 tenemos como solución:

2.3. ANÁLISIS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS MEDIANTE ECUACIONES DE CIERRE23

$$x(\tau) = e^{A_C \tau} X_1, \quad (2.18)$$

Para el punto X_2 donde $\tau = \tau_C$ tenemos que

$$X_2 = e^{A_C \tau_C} X_1. \quad (2.19)$$

Sabemos que $X_2 = -X_0$, por tanto, sustituyendo en 2.19 tenemos que

$$X_0 = -e^{A_C \tau_C} X_1. \quad (2.20)$$

La ecuación 2.20 proporciona la segunda ecuación de cierre para el ciclo límite trizonal, por consiguiente, tenemos el sistema no lineal

$$\begin{cases} X_1 = X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R), \\ X_0 = -e^{A_C \tau_C} X_1, \end{cases}$$

donde se tienen dos ecuaciones vectoriales de tres componentes teniendo como incógnitas τ_C , τ_R , y_0 , z_0 , y_1 , z_1 .

Capítulo 3

Oscilador electrónico BVP

3.1. Obtención del sistema modelado del oscilador electrónico BVP

Para la aplicación de los resultados teóricos de los capítulos anteriores, consideramos el oscilador electrónico de Bonhoeffler-Van der Pol, que consta de dos condensadores (C_1 y C_2 de igual capacitancia C), una inductancia (L), una resistencia (r) y una conductancia no lineal (g), como se muestra en la figura 3.1:

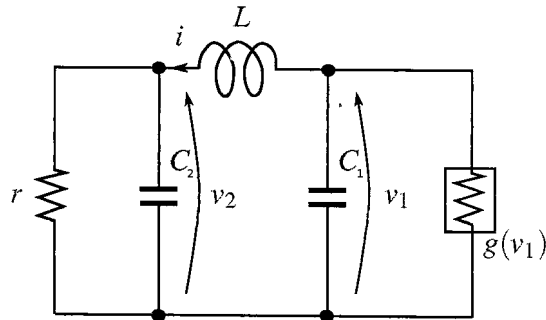


Figura 3.1: Esquema electrónico del oscilador BVP

La dinámica del oscilador viene definida por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = -i - g(v_1), \quad C_2 \frac{dv_2}{dt} = i - \frac{v_2}{r}, \quad L \frac{di}{dt} = v_1 - v_2,$$

donde v_1 y v_2 son las tensiones referidas a los condensadores C_1 y C_2 respectivamente, i es la corriente que circula por la inductancia L . La característica tensión-corriente $v - i$ del elemento no lineal resistivo se puede escribir como: $g(v) = -av - b \text{sat}(cv)$, donde $a, b, c > 0$, donde hemos utilizado la versión lineal a trozos considerada en [2]

Tras hacer una serie de operaciones, se llega a su forma normalizada resultando:

$$\begin{cases} \dot{x} = -z + \alpha x + \text{sat}(\beta x), \\ \dot{y} = z - \gamma y, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases}$$

El punto representa la derivada con respecto al nuevo tiempo τ , donde

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \alpha = a\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \beta = bc\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$x = \frac{v_1}{b}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad y = \frac{v_2}{b}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad z = \frac{i}{b}.$$

Haciendo el cambio de variables $X = \beta x$ se tiene que $\dot{X} = \beta \dot{x} = \alpha X - \beta z + \beta \text{sat}(X)$, obteniéndose el sistema en la forma de Luré:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & -\gamma & 1 \\ 1/\beta & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{sat}(\mathbf{e}_1^T \mathbf{x}),$$

y X será renombrada a x , por comodidad en la notación. Por ello, se puede expresar en la forma (2.1) y por tanto, se podrá aplicar el mismo análisis del capítulo 2 y sus correspondientes resultados. Efectivamente, con un cambio lineal de las variables dadas por la matriz

$$P = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ \gamma^2 - 1 & \gamma & 1 \\ \gamma & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos escribir el sistema en su forma de Liénard como

3.1. OBTENCIÓN DEL SISTEMA MODELADO DEL OSCILADOR ELECTRÓNICO BVP27

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & -1 & 0 \\ 2 - \alpha\gamma & 0 & -1 \\ \alpha - \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta\gamma \\ \beta \end{pmatrix} \text{sat}(x),$$

donde quedan claramente reflejados los invariantes lineales de las matrices de cada zona T , M , D y t , m , d , con los valores siguientes:

$$\begin{aligned} T &= \alpha + \beta - \gamma, & t &= \alpha - \gamma, \\ M &= 2 - \gamma(\alpha + \beta), & m &= 2 - \alpha\gamma, \\ D &= \alpha + \beta - \gamma, & d &= \alpha - \gamma, \end{aligned} \quad (3.1)$$

De (3.1) se desprende que T y D son exactamente iguales, lo que implica que debe cumplirse una condición extra para los autovalores. Por consiguiente, teniendo en cuenta la estructura de T y D dadas en (2.6), se debe imponer para todos los valores de ε :

$$T(\varepsilon) - D(\varepsilon) = \lambda_0(1 - \omega_0^2) + (\lambda_1 - \lambda_1\omega_0^2 + 2\sigma_1 - 2\lambda_0\omega_1\omega_0)\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (3.2)$$

Tomamos $\gamma(\varepsilon)$ como único parámetro de bifurcación, dejando fijos α y β . Nótese que esta elección es la más realista pues equivale a variar r en el circuito, lo que se puede hacer fácilmente con un potenciómetro (resistencia variable) En vista de las bifurcaciones analizadas en el capítulo 2 que tienen lugar con $\varepsilon = 0$, necesitamos que se cumpla primero: $\lambda_0(1 - \omega_0^2) = 0$. Si asumimos que $\lambda_0 \neq 0$ se llega a las siguientes condiciones

$$\omega_0 = 1 \quad y \quad \sigma_1 = \lambda_0\omega_1.$$

Por consiguiente, $M(0) = \omega_0^2 = 1$, y se tiene para el parámetro de bifurcación $\gamma(\varepsilon)$ la condición de $\gamma(0) = \gamma_0$, con:

$$M(0) = 1 = 2 - \gamma_0(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \gamma_0 = \frac{1}{\alpha + \beta}$$

Igualando las expresiones de T en (3.1) y (2.6) y usando (2.5) se tiene

$$T(0) = \alpha + \beta - \gamma_0 = \lambda_0 + 2\sigma(0) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \lambda_0 + \gamma_0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{1}{\lambda_0 + \gamma_0} \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{1 - \gamma_0^2}{\gamma_0}$$

Por tanto, si $\lambda_0 \neq 0$, se ha de cumplir que $\gamma_0 \neq 1$. De (3.1) con $\gamma_0 = \frac{1}{\alpha + \beta}$ se tiene:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{\gamma_0} - \gamma, \\ M = 2 - \frac{\gamma}{\gamma_0}, \\ D = \frac{1}{\gamma_0} - \gamma. \end{cases} \quad (3.3)$$

De (2.5) despreciando los términos de segundo orden, se tiene:

$$\begin{cases} T = \lambda_0 + \lambda_1 + 2\sigma_1\varepsilon, \\ M = 1 + 2\omega_1\varepsilon + 2\lambda_0\sigma_1\varepsilon, \\ D = \lambda_0 + 2\omega_1\varepsilon\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon. \end{cases} \quad (3.4)$$

Igualando las expresiones de T , M y D en (3.3) y (3.4), sabiendo que $\lambda_0 = \frac{1 - \gamma_0^2}{\gamma_0}$ y definiendo que $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon$ resolvemos el sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas (λ_1 , σ_1 y ω_1), obteniendo

$$\lambda_1 = -\gamma_0^4 \frac{1 + \gamma_0^2}{1 + \gamma_0^6}, \quad \sigma_1 = \frac{\gamma_0^4 - 1}{2(1 + \gamma_0^6)} \quad \text{y} \quad \omega_1 = -\frac{\gamma_0(1 + \gamma_0^2)}{2(1 + \gamma_0^6)}.$$

Si $\lambda_0 = 0$, se tiene que $\gamma_0 = \alpha + \beta$, por tanto, su valor crítico ($T = M = D = 0$) es:

$$2 = \gamma(\alpha + \beta) \Leftrightarrow 2 = (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2 = \gamma_0^2 \Leftrightarrow \gamma_0 = \sqrt{2}$$

3.2. Análisis del oscilador electrónico BVP

Asumimos en lo que sigue $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, analizando primeramente el caso $\lambda_0 = 0$, correspondiente a la bifurcación *Hopf-zero del origen*, que implica $1 \neq \gamma_0 = \alpha + \beta < \sqrt{2}$. Si nos fijamos en la tercera ecuación, es decir, $\dot{z} = (\alpha - \gamma)x + \beta \text{sat}(x)$, vemos que los equilibrios deben cumplir la condición $(\alpha - \gamma)x + \beta \text{sat}(x) = 0$. Si $\gamma - \alpha < \beta$ o análogamente $\gamma < \gamma_0$:

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta}x = \text{sat}(x)$$

Es facil ver que puede haber una o tres soluciones, en concreto, $x = 0$ y $x = \pm \frac{\beta}{\gamma - \alpha}$, con $|x| > 1$. Si $\gamma - \alpha > \beta$ o análogamente $\gamma > \gamma_0$ solo hay equilibrio si $x = 0$. Si $\gamma - \alpha = \beta$ o análogamente $\gamma = \gamma_0$, todo valor de $x \in [-1, 1]$ serviría como solución. Si $\alpha < \gamma < \gamma_0 = \alpha + \beta$ entonces hay tres equilibrios, uno de ellos en el origen y los otros dos en las zonas externas:

$$X_{L,R} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\beta}{\alpha - \gamma} \\ 0 \\ \pm \frac{\beta(2 - \gamma^2)}{\alpha - \gamma} \end{pmatrix}$$

Del análisis realizado en [4], se desprenden las siguientes afirmaciones:

- (a) Para $\gamma > \gamma_0$, el origen es el único equilibrio del sistema. Además si $\gamma\gamma_0 < 1$, el origen es asintóticamente estable.
- (b) Para $\gamma = \gamma_0$, el sistema experimenta una bifurcación propia de los sistemas lineales a trozos de los sistemas diferenciables, análoga a la bifurcación *Hopf-zero*.
- (c) Para $\gamma < \gamma_0$ y suficientemente pequeño en valor absoluto, aparecen tres ciclos límites simultaneamente (uno de ellos es trizonal y otros dos son bizonales) acompañados conjuntamente de dos puntos de equilibrio adicionales. Si $\gamma_0 < 1$, el ciclo límite producido por la bifurcación trizonal es estable mientras el ciclo límite de la bifurcación bizonal sea inestable. Si $1 < \gamma_0 < \sqrt{2}$, el ciclo límite producido por la bifurcación trizonal es inestable mientras el ciclo límite de la bifurcación bizonal es estable. Los puntos de equilibrio que bifurcan serán estables para el primer caso ($\gamma_0 < 1$) siempre y cuando $\gamma_0 < 1$. Para el segundo caso ($1 < \gamma_0 < \sqrt{2}$) los puntos de equilibrio serán estables siempre y cuando $\gamma_0 < 1/\alpha$.

Si asumimos que $0 < \omega_0 \neq 1$ teniendo que $\lambda_0 = 0$, se obtiene de la expresión (3.2) que $\sigma_1 = \frac{\lambda_1}{2}(\omega_0^2 - 1)$. Sabemos que $0 < \gamma_0 = \alpha + \beta < \sqrt{2}$, con el requisito extra de que $\alpha + \beta \neq 1$. Por otro lado, si asumimos que $\omega_0 = 1$ y $\sigma_1 = 0$, sustituyendo para $M(0)$:

$$M(0) = \omega_0^2 = 2 - \gamma_0(\alpha + \beta) = 2 - \gamma_0^2$$

Por tanto, cuando $\gamma_0 < 1$ tenemos que $\omega_0 > 1$ y viceversa. Para $\varepsilon = 0$, t y d , sustituyendo en (3.1), quedan de la siguiente forma:

$$t = d = -\beta.$$

El parámetro δ queda de la siguiente forma:

$$\delta = d - t\omega_0^2 + \lambda_0(\omega_0^2 - m) = \beta(\omega_0^2 - 1).$$

De (3.1) con $\gamma_0 = \alpha + \beta$ se tiene:

$$\begin{cases} T = \gamma_0 - \gamma, \\ M = 2 - \gamma\gamma_0, \\ D = \gamma_0 - \gamma. \end{cases} \quad (3.5)$$

De (2.5) con $\gamma_0 = \alpha + \beta$, despreciando los términos de segundo orden, se tiene:

$$\begin{cases} T = \lambda_1\varepsilon + 2\sigma_1\varepsilon, \\ M = \omega_0^2 + 2\omega_0\omega_1\varepsilon, \\ D = \lambda_1\varepsilon\omega_0^2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Igualando las expresiones de T , M y D en (3.5) y (3.6), sabiendo que $\gamma_0 = \alpha + \beta$ y definiendo que $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon$ resolvemos el sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas (λ_1 , σ_1 y ω_1), obteniendo

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\omega_0^2}, \quad \sigma_1 = \frac{1 - \omega_0^2}{2\omega_0^2} \quad \text{y} \quad \omega_1 = -\frac{\gamma_0}{2\omega_0}.$$

Se considera ahora el caso $\lambda_0 \neq 0$, correspondiente a la bifurcación Foco Centro Ciclo Límite (FCCL), que implica $\gamma_0 = \frac{1}{\alpha + \beta}$. De este segundo análisis, análogo al primero que se hizo con $\lambda_0 = 0$, se desprenden las siguientes afirmaciones:

- (a) Para $\gamma = \gamma_0$ se produce una bifurcación Foco Centro Ciclo Límite (FCCL).
- (b) Para $\gamma > \gamma_0$ y suficientemente pequeño aparece un ciclo límite. En particular, si $\alpha + \beta < 1$, por tanto, $\gamma_0 > 1$, y el ciclo límite es asintóticamente estable.
- (c) Para $\gamma < \gamma_0$ el origen es el único equilibrio.

En la figura 3.2, se muestra el plano $\gamma = \alpha + \beta$ donde tiene lugar la bifurcación *Hopf-zero del origen* y la superficie $\gamma = \frac{1}{\alpha + \beta}$ donde tiene lugar la bifurcación Foco Centro Ciclo límite (FCCL). La recta roja tiene la expresión $\gamma = \alpha + \beta = \sqrt{2}$, obtenida para cuando $T = M = D = 0$.

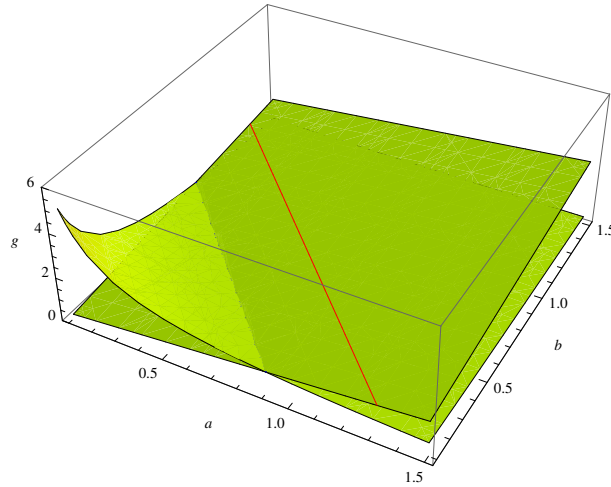


Figura 3.2: Bifurcaciones *Hopf-zero del origen* y *FCCL* correspondientes a la superficie $\gamma = \alpha + \beta$ y plano $\gamma = \frac{1}{\alpha + \beta}$ respectivamente.

Adicionalmente a las bifurcaciones anteriores, en el oscilador de BVP se dan las condiciones de existencia de la bifurcación de *Hopf de las zonas externas* cuando $mt - d = 0$ y $m > 0$ en las zonas externas, ver [4]. Es decir,

$$(2 - \alpha\gamma)(\alpha - \gamma) - (\alpha - \gamma) = (\alpha - \gamma)(1 - \alpha\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma_{Hz_{ext}} = \frac{1}{\alpha}$$

Capítulo 4

Simulaciones

4.1. Análisis de los resultados

A la vista de la figura 3.2 con las superficies de bifurcación correspondientes a la bifurcación FCCL y *Hopf-Zero del origen* trazamos el siguiente esquema para la simulación de las diversas zonas del sistema:

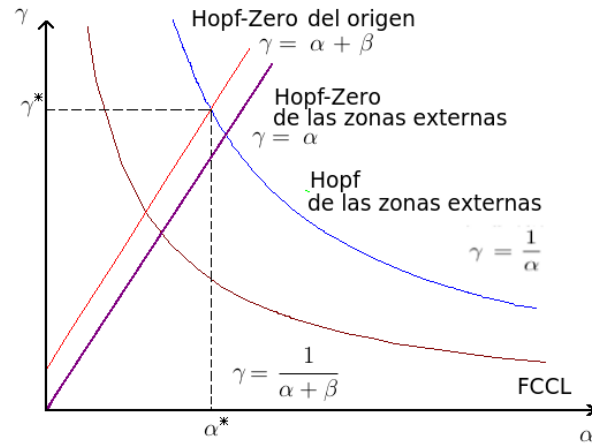


Figura 4.1: Zonas del sistema para los distintos valores de γ según α y β .

Procedemos a simular los puntos 1, 2, 3 que muestra la figura 4.2, que se encuentran dentro de las condiciones del primer análisis en a), b) y c) del apartado 3.2:

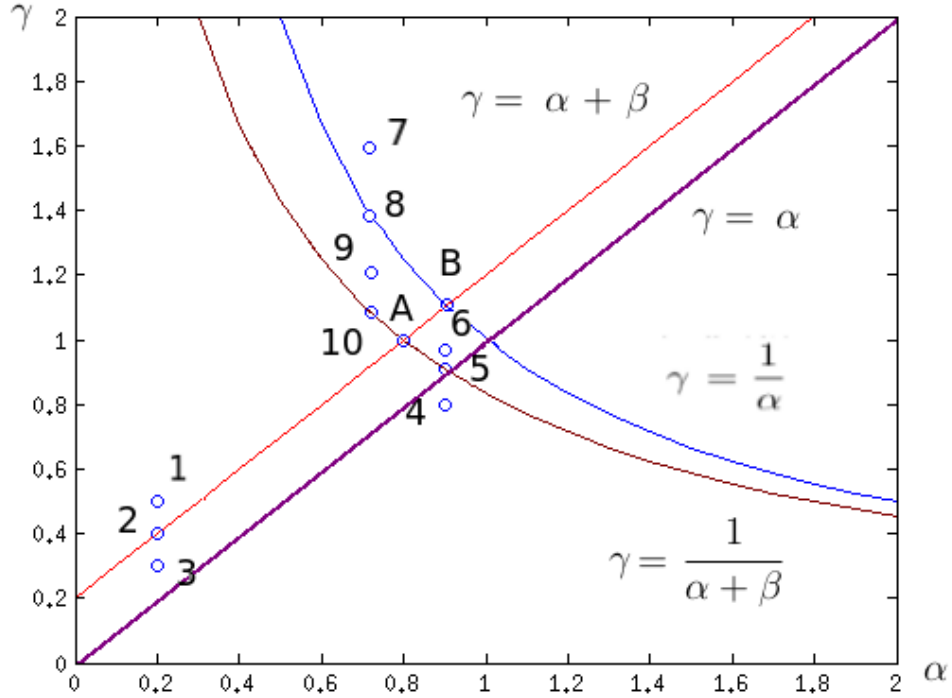


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación del sistema BVP para $\beta = 0,2$.

Sobre la curva del origen $\gamma = \alpha + \beta$ se produce una bifurcación *Hopf-zero del origen* de los lineales a trozos. El sistema experimenta sobre el punto 2 dicha bifurcación. En el punto 1, el origen es el único equilibrio del sistema, pasando por el punto 2 situado en la *Hopf-zero del origen* hasta llegar al punto 3 donde aparecen tres ciclos límites.

Sobre la curva del origen $\gamma = \frac{1}{\alpha + \beta}$ se produce una bifurcación Foco Centro Ciclo Límite (FCCL), de forma que para valores de γ mayores que el valor crítico de bifurcación, es decir, por encima de la curva aparece un ciclo límite.

Sobre la curva del origen $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ se produce una bifurcación *Hopf de*

las zonas externas. El uso de esta denominación se debe a que en la franja $\alpha < \gamma < \alpha + \beta$ hay tres equilibrios: el origen más un equilibrio en cada zona externa. Fuera de esta franja sólo hay un equilibrio en el origen y sobre la curva de bifurcación $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ se puede dar la bifurcación *Hopf del infinito*, incluida también en la nomenclatura *Hopf de las zonas externas*. Se han simulado los puntos 7, 8 y 9, de tal forma que para el punto 7 no aparece ciclo límite alguno y disminuyendo el valor crítico de bifurcación aparecen ciclos límites de gran amplitud pero finitos.

Procedemos a calcular los puntos *A* y *B* de la figura 4.2, para posteriormente ser simulados. El punto *A* se obtiene de:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{\alpha + \beta} \\ \lambda = \alpha + \beta \end{array} \right\}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{1}{\alpha + \beta} = \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 - \beta = 1 - 0,2 = 0,8 \rightarrow \gamma = 1$$

En el punto *A* se cruzan las curvas de bifurcación de *Hopf-zero del origen* y Foco Centro Ciclo Límite (FCCL), siendo la degeneración mayor por lo que no se estudia dicho punto. El punto *B* se obtiene de:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{\alpha} \\ \lambda = \alpha + \beta \end{array} \right\}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{\alpha} - \alpha \rightarrow \alpha = 0,9049875; \gamma = 1,104987638$$

En el punto *B* se cruzan las curvas de bifurcación de *Hopf-zero del origen* y *Hopf de las zonas externas*, siendo la degeneración mayor por lo que no se estudia dicho punto.

En el apartado a) del primer análisis de la sección 3.2, tenemos la condición $\gamma > \alpha + \beta$. El punto 1 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,5$ cumple la condición. Por tanto, el origen es el único equilibrio del sistema. Además $\gamma_0\gamma = 0,5(0,2 + 0,2) < 1$, de forma que el origen es asintóticamente estable. Simulando mediante Dynamic Solver se obtiene la siguiente vista en 3D de las órbitas que describe el sistema:

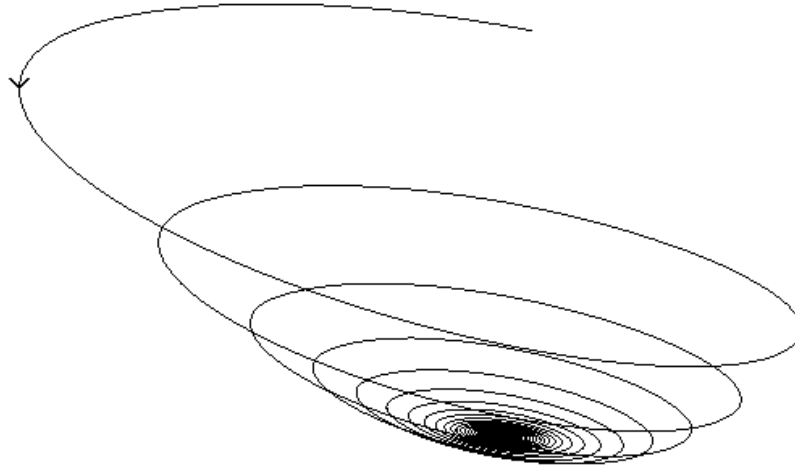


Figura 4.3: Vista 3D del punto 1 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,5$.

Como era de esperar por los resultados obtenidos del primer análisis en el apartado a) de la sección 3.2, el origen es el único equilibrio del sistema.

Se muestra de forma clara en la simulación sobre el plano $x - y$, donde en lo que sigue, las rectas rojas representan los planos frontera $x = -1$ y $x = 1$:

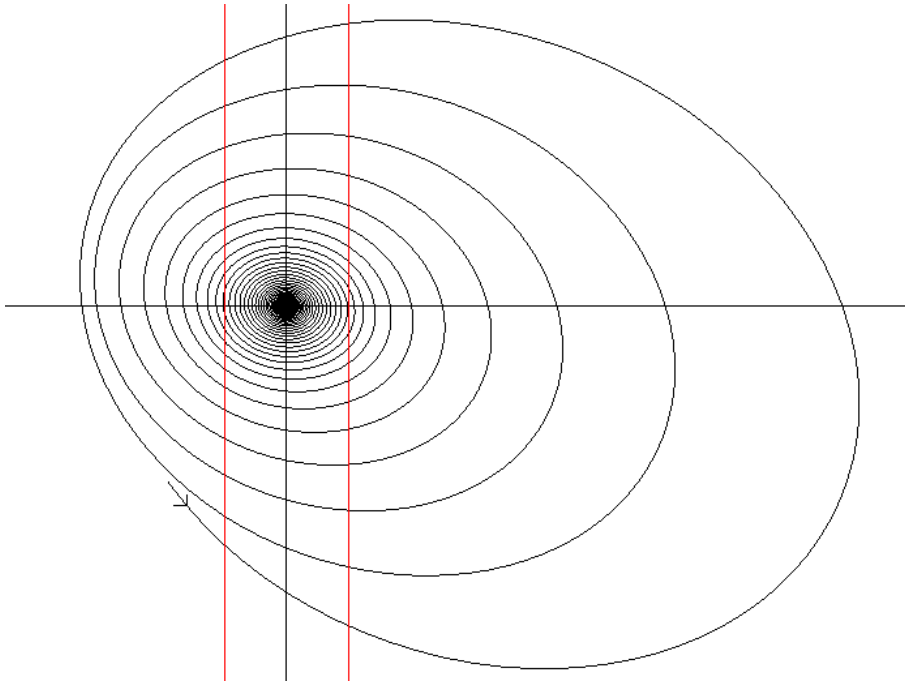


Figura 4.4: Plano $x - y$ del punto 1 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,5$.

La figura 4.4 muestra el equilibrio estable del origen.

En el apartado b) del primer análisis de la sección 3.2 tenemos la condición $\gamma = \alpha + \beta$. El punto 2 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,4$ cumple la condición. Simulando mediante Dynamic Solver se obtiene la siguiente vista en 3D de las órbitas que describe el sistema:

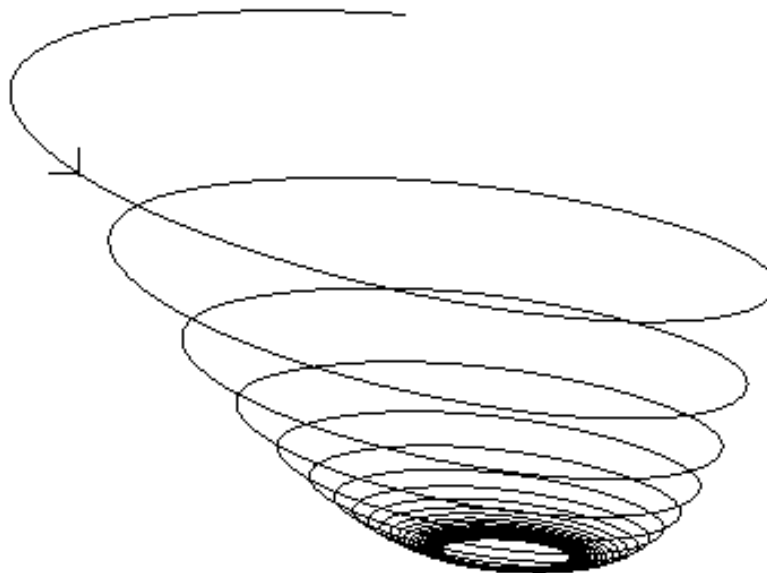


Figura 4.5: Vista 3D del punto 2 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,4$.

Para estos valores el sistema experimenta una bifurcación análoga a la bifurcación *Hopf-zero*. En la figura 4.5 aparece la trayectoria hacia la órbita periódica más externa de unos de los centros existentes en el doble cono foliado de órbitas periódicas, ver figura 2.2.

La simulación sobre el plano $x - y$ para $z = 0$ que se obtiene muestra que la órbita periódica más externa del centro lineal existente para el valor crítico de la bifurcación *Hopf-zero del origen* es atractiva.

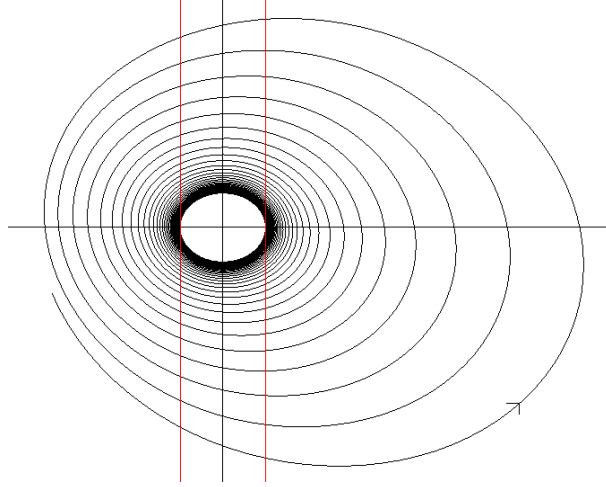


Figura 4.6: Plano $x - y$ del punto 2 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,4$.

La figura 4.7 muestra el centro lineal que aparece en $z = 0$ entre las fronteras $x = -1$ y $x = 1$:

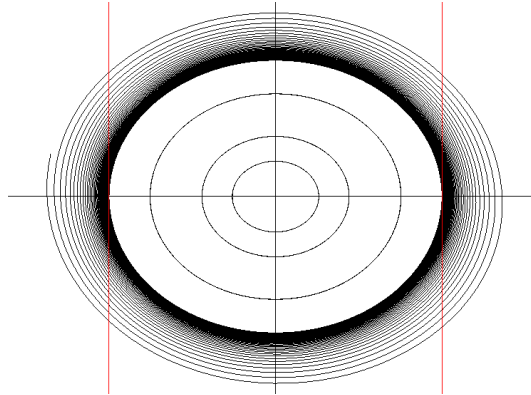


Figura 4.7: Centro lineal restringido de la zona central C.

En la figura 4.8 se muestran diversas órbitas periódicas pertenecientes al doble cono (ver figura 2.2). Se han dibujado varias órbitas de los centros existentes para diferentes valores de z .

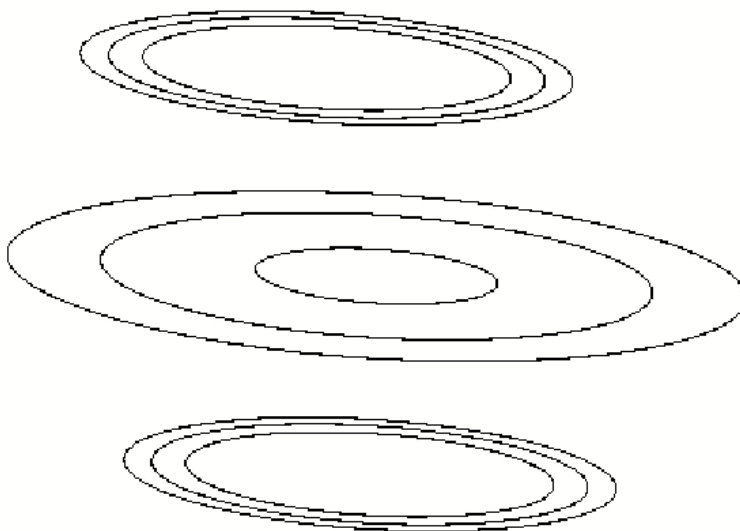


Figura 4.8: Plano $x - y$ del punto 2 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,3$.

En el apartado c) del primer análisis de la sección 3.2 tenemos la condición $\gamma < \alpha + \beta$. El punto 3 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,3$ cumple esta condición y la condición añadida de que $\gamma_0 < 1$. Por tanto, son generados tres ciclos límites en la bifurcación *Hopf-zero del origen* de la zona central, uno de ellos trizonal estable y dos bizonales inestables. Simulando mediante Dynamic Solver se obtiene la siguiente vista en 3D de las órbitas que describe el sistema:

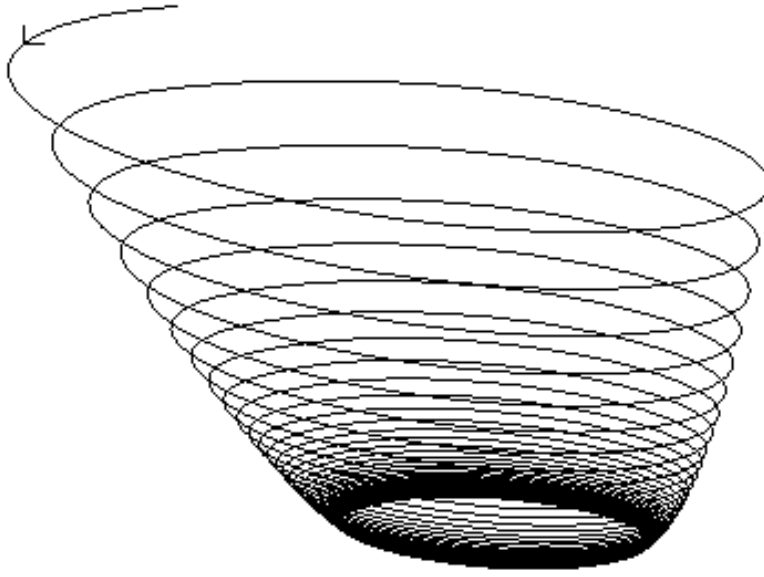


Figura 4.9: Vista 3D del punto 3 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,3$.

Por los resultados obtenidos del primer análisis en el apartado c) de la sección 3.2, se muestra la aparición de un único ciclo límite trizonal.

Se muestra de forma clara en la simulación sobre el plano $x - y$:

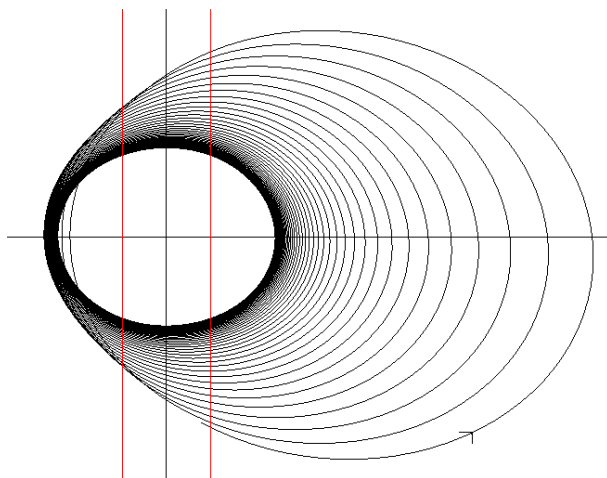


Figura 4.10: Plano $x - y$ del punto 3 de coordenadas $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,3$.

La figura 4.10 muestra un equilibrio estable. Sabemos por el primer análisis en c) de la sección 3.2, que el ciclo límite trizonal es el ciclo que se muestra estable, apareciendo además dos ciclos límites bizonales inestables que no aparecen reflejados en simulación por ser de tipo silla, es decir, tener variedades estables e inestables simultáneamente. Haciendo zoom sobre el ciclo límite trizonal en simulación:

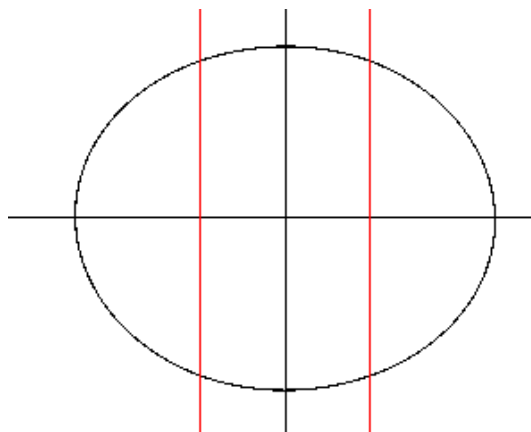


Figura 4.11: Zoom sobre el ciclo límite trizonal del punto 3.

Para la localización de los ciclos bizonales inestables usamos un método de continuación con parametrización natural de paso constante implementado en *Mathematica*, partiendo del punto 2 hasta el punto 3. Para el inicio de la continuación hemos hecho uso de los desarrollos en serie correspondientes a la bifurcación *Hopf-zero* publicados en [3], tenemos que y_0 , z_0 , τ_R y τ_C para ciclos límites bizonales tienen la siguiente expresión:

$$y_0 = \frac{2(3\pi)^{2/3}\varepsilon^{1/3}\lambda_1\omega_0^2 \left[\frac{-\sigma_1}{\omega_0(-d + t\omega_0^2)} \right]^{2/3} (-d + t\omega_0^2 t)}{d\lambda_1 - d\sigma_1 - t\lambda_1\omega_0^2} + O(\varepsilon^{2/3}).$$

$$z_0 = \frac{d(3\pi)^{2/3}\lambda_1\sigma_1\omega_0^4 \left[\frac{-\sigma_1\varepsilon}{\omega_0(-d + t\omega_0^2)} \right]^{2/3} (-3d - 2m + t\omega_0^2 t)}{5[d\lambda_1 - d\sigma_1 - t\lambda_1\omega_0^2]^2} + O(\varepsilon).$$

$$\tau_C = \frac{2\pi}{\omega_0} - 2(3\pi)^{1/3} \left[\frac{\varepsilon\sigma_1}{\omega_0(-d + t\omega_0^2)} \right]^{2/3} + O(\varepsilon).$$

$$\tau_R = 2(3\pi)^{1/3} \left[\frac{\varepsilon\sigma_1}{\omega_0(d - t\omega_0^2)} \right]^{1/3} + \frac{2\pi\varepsilon\sigma_1(-6dm + dt^2 + 9d\omega_0^2 + 12mt\omega_0^2 - t^3\omega_0^2 - 15t\omega_0^4)}{15(d - t\omega_0^2)(d\omega_0 - t\omega_0^3)} + O(\varepsilon^{4/3}).$$

A partir de las expresiones anteriores y teniendo en cuenta que $\varepsilon = \gamma - \gamma_0$ tomamos unos valores iniciales cercanos a los de la órbita periódica más externa del centro para $\gamma = \gamma_0$ (es decir $\varepsilon = 0$) que son $y_0 = 0$, $z_0 = \hat{z}$, $\tau_C = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $\tau_R = 0$. Desplazándonos por los diferentes valores del parámetro de bifurcación γ desde γ_0 hasta llegar al punto 2, utilizamos el método de Newton para resolver las ecuaciones de cierre para ir determinando numéricamente los valores de y_0 , z_0 , τ_R y τ_C correspondientes a cada valor de γ . Una vez determinados dichos valores para el punto 2, $\gamma = 0,4$, integramos el sistema en cada zona lineal, es decir, obteniendo los ciclos límites de la figura 4.12.

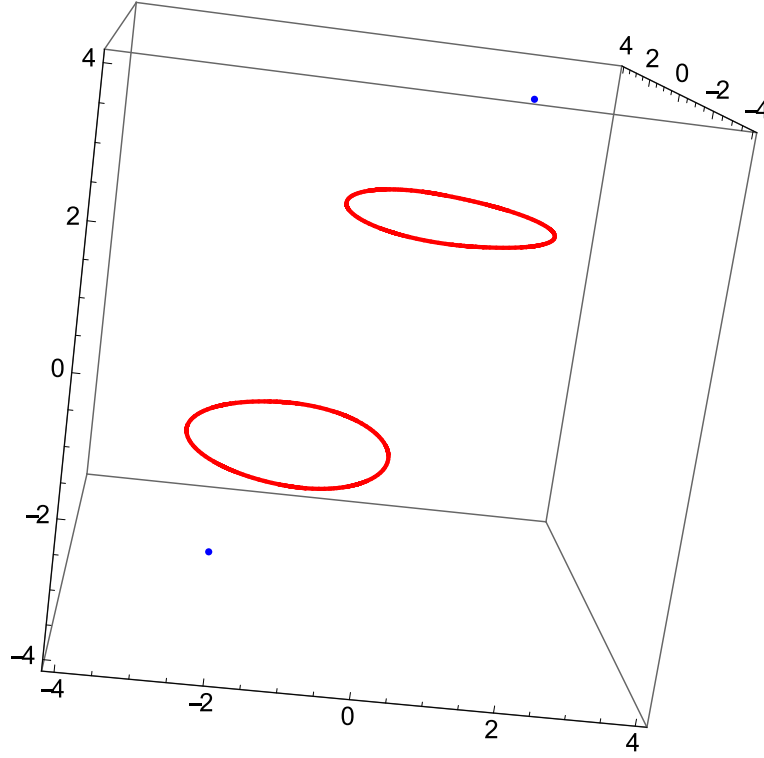


Figura 4.12: Ciclos límites bizonales y puntos de equilibrio del punto 3.

Para la localización del ciclo trizonal estable usamos de nuevo continuación con parametrización natural, partiendo del punto 2 hasta el punto 3. Haciendo uso de los desarrollos en serie correspondientes a la bifurcación *Hopf-zero* publicados en [1], tenemos que y_0 , z_0 , τ_R y τ_C para ciclos límites trizonales tienen la siguiente expresión:

$$y_0 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{1/3} \omega_0^2 \left[\frac{\varepsilon \sigma_1(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^3[d - m\lambda_0 + \omega_0^2(-t + \lambda_0)]} \right]^{2/3} + O(\varepsilon).$$

$$z_0 = 2\omega_0[d - m\lambda_0 + (t - \lambda_0)\omega_0^2]\varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}).$$

$$\tau_C = \frac{\pi}{\omega_0} - 2^{2/3}(3\pi)^{1/3} \left[\frac{\varepsilon \sigma_1(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^3[d - m\lambda_0 + \omega_0^2(-t + \lambda_0)]} \right]^{2/3} + O(\varepsilon^{4/3}).$$

$$\tau_R = 2^{2/3}(3\pi)^{1/3} \left[\frac{\varepsilon \varepsilon \sigma_1 (\lambda_0^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^3 [d - m\lambda_0 + \omega_0^2(-t + \lambda_0)]} \right]^{2/3} + O(\varepsilon).$$

A partir de las expresiones anteriores y teniendo en cuenta que $\varepsilon = \gamma - \gamma_0$ tomamos unos valores iniciales cercanos a los de la órbita periódica más externa del centro para $\gamma = \gamma_0$ (es decir $\varepsilon = 0$) y $\hat{z} = \frac{\omega_0^2}{3}$ que son $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\tau_C = \frac{\pi}{\omega_0}$, $\tau_R = 0$. Desplazándonos por los diferentes valores del parámetro de bifurcación γ hasta llegar al punto 2, utilizamos las ecuaciones de cierre para ir determinando numéricamente los valores de y_0 , z_0 , τ_R y τ_C correspondientes a cada valor de γ . Una vez determinados dichos valores para el punto 2, $\gamma = 0,4$, integramos el sistema en cada zona lineal, es decir, obteniendo los ciclos límites de la figura 4.13.

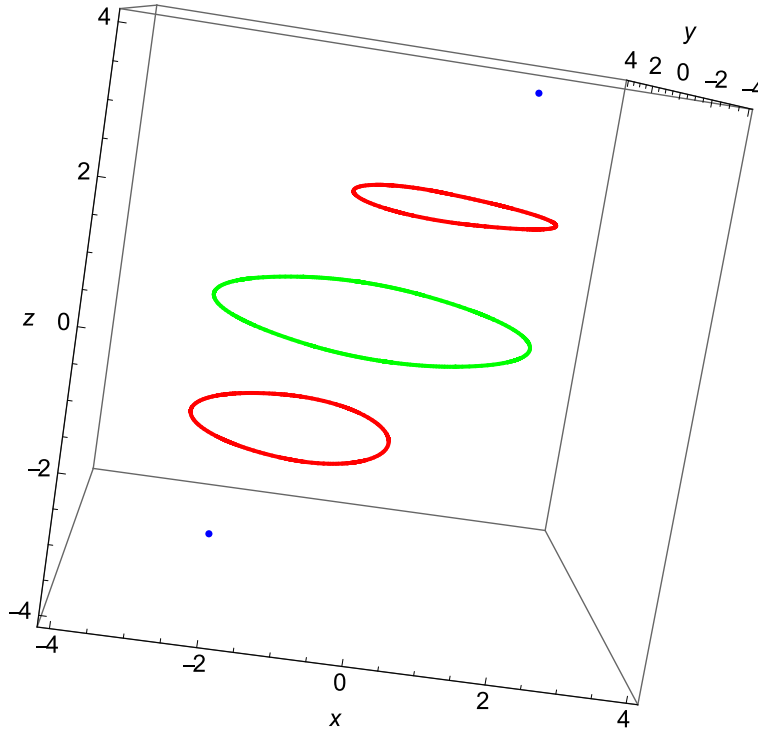


Figura 4.13: Ciclo límite trizonal, ciclos límites bizonales y puntos de equilibrio del punto 3.

Para el punto 4 de coordenadas $\alpha = 0,9$ y $\gamma = 0,8$, se cumple la condición $\gamma < \gamma_0$ ($0,8 < 1,1$) del segundo análisis en c) de la sección 3.2 , que determina que el origen es el único equilibrio del sistema. Se obtiene la siguiente vista en 3D simulando con el tiempo hacia atrás, que corresponde a la dinámica de foco inestable en el origen.

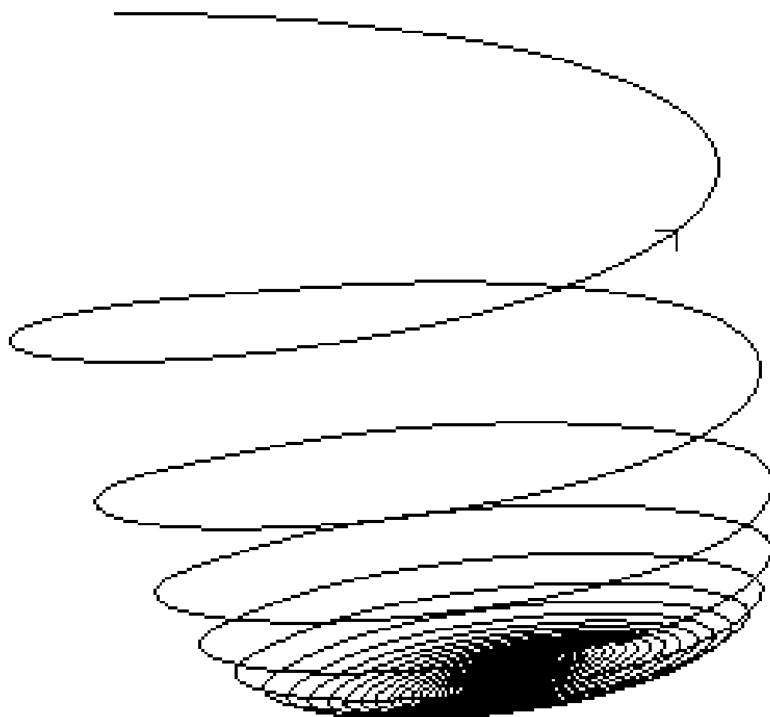


Figura 4.14: Vista 3D del punto 4 de coordenadas $\alpha = 0,9$ y $\gamma = 0,8$.

Para el punto 5 de coordenadas $\alpha = 0,9$ y $\gamma = 0,909091$, correspondiente al valor crítico de la bifurcación Foco Centro Ciclo Límite (FCCL), enunciado en el apartado a) del segundo análisis de la sección 3.2. Se obtiene en simulación:

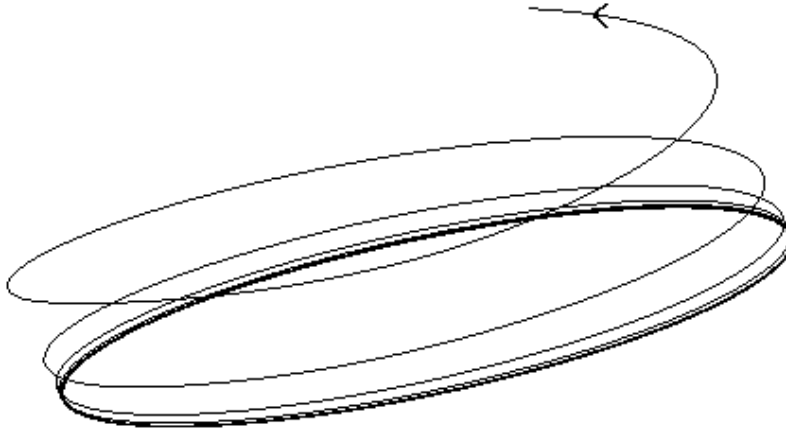


Figura 4.15: Vista 3D del punto 5 de coordenadas $\alpha = 0,9$ y $\gamma = 0,909091$.

Para este punto, el equilibrio es inestable formándose un centro entre los planos frontera $x = -1$ y $x = 1$, como se observa en simulación con el tiempo hacia atrás sobre el plano $x - y$:

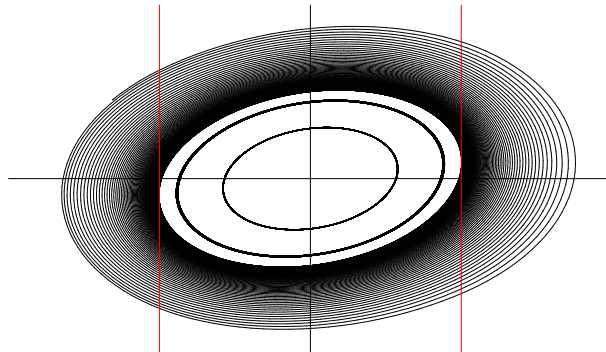


Figura 4.16: Plano $x - y$ del punto 5 de coordenadas $\alpha = 0,9$ y $\gamma = 0,909$.

Comenzamos la continuación partiendo del punto 5 aumentando γ . Haciendo uso de los desarrollos en serie correspondientes a la bifurcación Foco Centro Ciclo Límite (FCCL) publicados en [1], tenemos que y_0 , z_0 , τ_R y τ_C para ciclos límites trizionales tienen la siguiente expresión:

$$y_0 = \lambda_0 - \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{1/3} \omega_0^2 \left[\frac{\varepsilon \sigma_1(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^3[d - m\lambda_0 + \omega_0^2(-t + \lambda_0)]} \right]^{1/3} + O(\varepsilon).$$

$$z_0 = -\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{1/3} \omega_0^2 \left[\frac{\varepsilon \sigma_1(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^3[d - m\lambda_0 + \omega_0^2(-t + \lambda_0)]} \right]^{1/3} + O(\varepsilon^{4/3}).$$

$$\tau_C = \frac{\pi}{\omega_0} - 2^{2/3}(3\pi)^{1/3} \left[\frac{\varepsilon \sigma_1(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^3[d - m\lambda_0 + \omega_0^2(-t + \lambda_0)]} \right]^{1/3} + O(\varepsilon^{4/3}).$$

$$\tau_R = 2^{2/3}(3\pi)^{1/3} \left[\frac{\varepsilon \sigma_1(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^3[d - m\lambda_0 + \omega_0^2(-t + \lambda_0)]} \right]^{1/3} + O(\varepsilon).$$

A partir de las expresiones anteriores y teniendo en cuenta que $\varepsilon = \gamma - \gamma_0$ tomamos unos valores iniciales cercanos a los de la órbita periódica más externa del centro para $\gamma = \gamma_0$ (es decir $\varepsilon = 0$) y $\hat{z} = \frac{d\sigma_1\omega_0^2}{d\sigma_1 - \lambda_1\delta}$, con $\delta = \lambda_0(\omega_0^2 - m)$, que son $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\tau_C = \frac{\pi}{\omega_0}$, $\tau_R = 0$. Utilizamos el método de Newton para resolver las ecuaciones de cierre para ir determinando numéricamente los valores de y_0 , z_0 , τ_R y τ_C correspondientes a cada valor de γ . Aplicamos de nuevo la continuación con parametrización natural implementada en *Mathematica* aumentando el valor de γ desde 0.909091. Al llegar al valor $\gamma = 0,9724$ la convergencia del método de Newton falla y la continuación no puede seguir. Esto nos lleva a emplear un método de continuación más potente, como es el de pseudo longitud de arco con predicción de tangente. El código utilizado está implementado en Maple por el profesor y tutor del proyecto Javier Ros. Se realizó de nuevo la continuación partiendo del punto 5 con este programa llegando hasta $\gamma = 0,9724$ a partir de donde disminuye su valor, produciéndose lo que se denomina pliegue. La continuación siguió hasta valores cercanos a $\gamma = 0,9$. Como ejemplo damos el último punto de la continuación:

$\tau_c = 1,1128 * 10^{-5}$, $z_0 = -0,05455$, $y_0 = -179725,3$, $\tau_R = 2,87988$, $\gamma = 0,90001$,

donde se aprecia el tamaño de y_0 denotando un ciclo límite de gran amplitud. Calculando para este último punto la matriz A_R :

$$t = \alpha - \gamma = 0,000001 = d; m = 2 - \alpha\gamma = 1,19.$$

Comprobamos que sus autovalores son $0 \pm 1,09087i$ y 0 , es decir, los correspondientes a una bifurcación *Hopf-zero de las zonas externas* que produce un ciclo límite de gran amplitud.

Con esto se ha logrado continuar el ciclo límite desde su nacimiento en la bifurcación FCCL hasta su muerte en una bifurcación *Hopf del infinito*.

En las figuras 4.17 y 4.18 se ilustra la continuación desde el punto 5 (FCCL) hasta *Hopf de las zonas externas*.

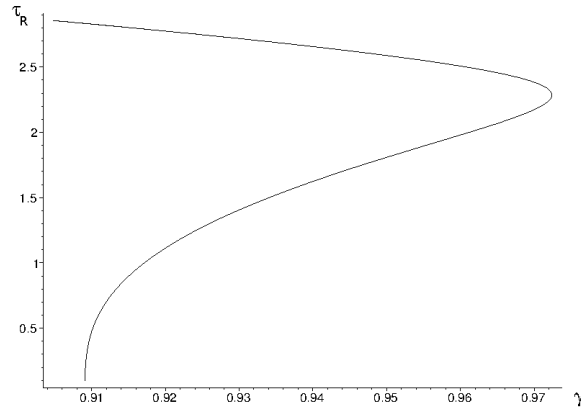


Figura 4.17: Continuación del punto 5: τ_R frente a γ .

En la figura 4.18 se aprecia como la amplitud del ciclo límite aumenta hasta infinito.

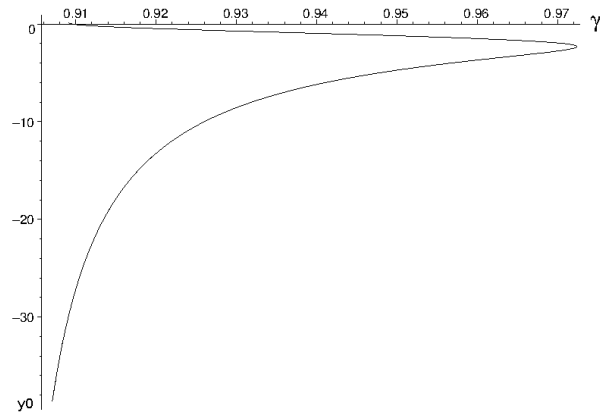


Figura 4.18: Continuación del punto 5: y_0 frente a γ .

Se han dibujado mediante *Mathematica* varios puntos de continuación obtenidos a partir de la continuación que se implementó en Maple:

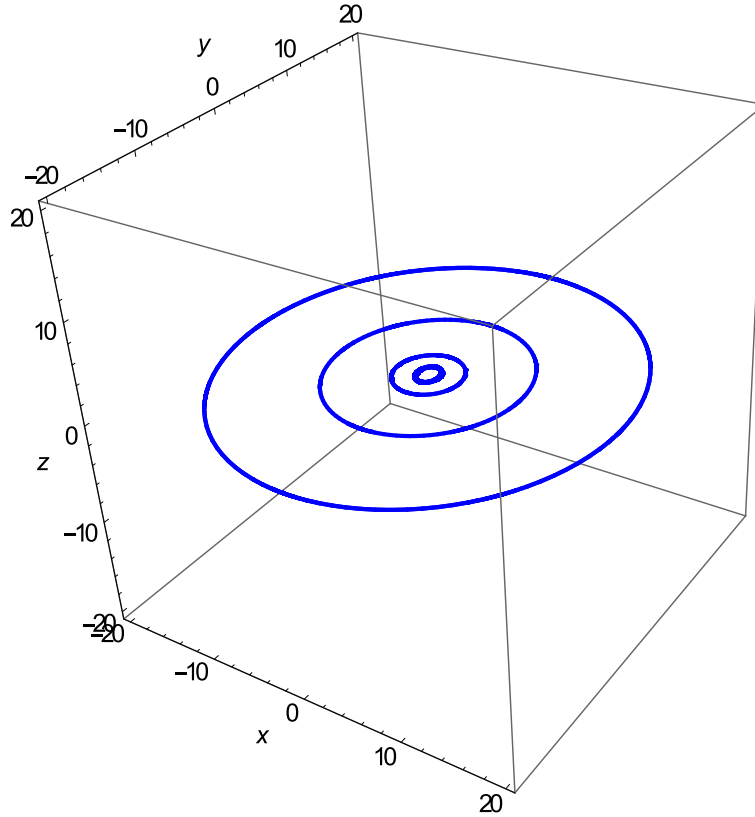


Figura 4.19: Vista 3D de los ciclos límites para distintos valores de γ de la continuación del punto 5.

En la figura 4.19 el ciclo límite de tamaño más pequeño corresponde a la órbita periódica más externa del centro lineal existente en el punto 5.

Procedemos a simular ahora los puntos 7, 8, 9 que muestra la figura 4.2, donde el sistema experimenta una bifurcación *Hopf en las zonas externas*, que en este caso es *Hopf del infinito*. En el punto 7, de coordenadas $\alpha = 0,7$ y $\gamma = 1,6$, simulando se obtiene:

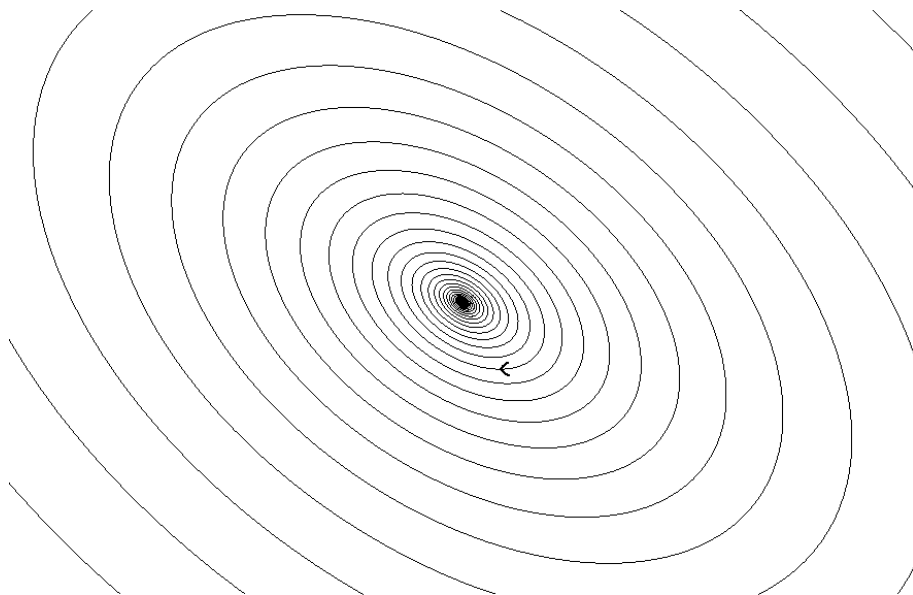


Figura 4.20: Vista 3D del punto 7 de coordenadas $\alpha = 0,7$ y $\gamma = 1,6$.

Como se observa en simulación, no aparece ningún ciclo límite, por tanto, las trayectorias del sistema tienden al infinito.

En el punto 8, de coordenadas $\alpha = 0,7$ y $\gamma = 1,4$, simulando se obtiene:

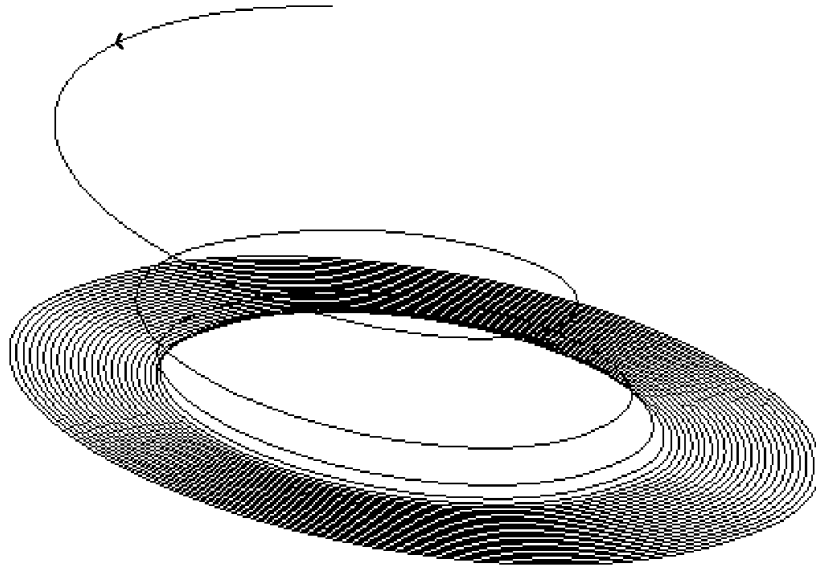


Figura 4.21: Vista 3D del punto 8 de coordenadas $\alpha = 0,7$ y $\gamma = 1,4$.

Como se observa en simulación, las trayectorias del sistema alcanzan un ciclo límite de gran amplitud pero finita, que se encuentra cercano a la órbita periódica del infinito que existe para $\gamma_{H_e} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,7} = 1,42857$.

En el punto 9, de coordenadas $\alpha = 0,7$ y $\gamma = 1,2$, simulando se obtiene:

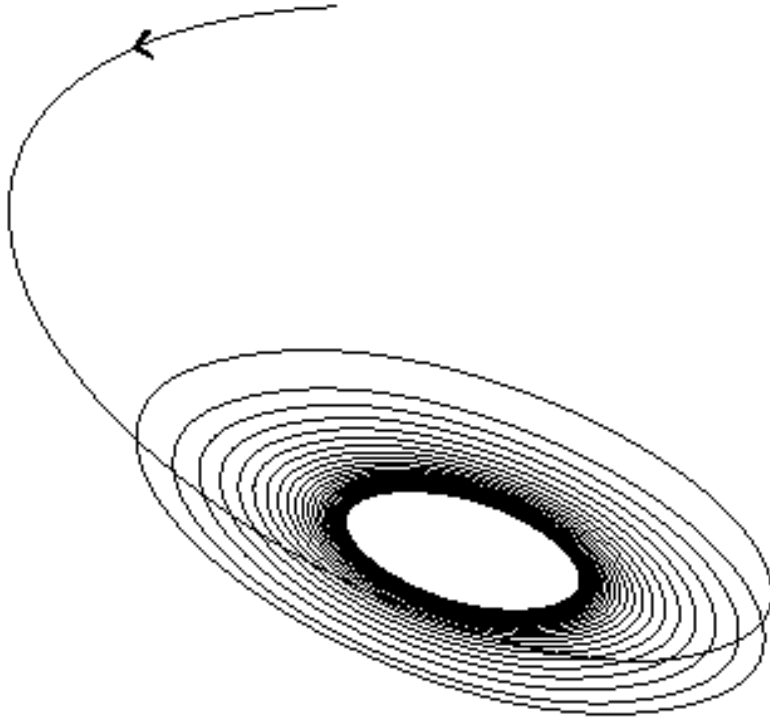


Figura 4.22: Vista 3D del punto 9 de coordenadas $\alpha = 0,7$ y $\gamma = 1,2$.

Se tiene un equilibrio estable y se observa un ciclo límite trizonal:

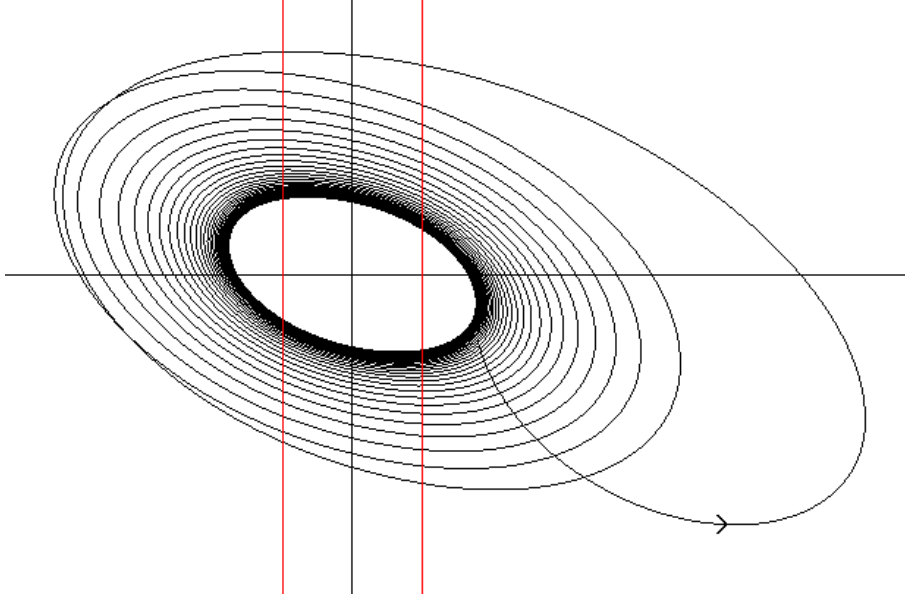


Figura 4.23: Plano $x - y$ del punto 9 de coordenadas $\alpha = 0,7$ y $\gamma = 1,2$.

El ciclo límite trizonal bifurca de la órbita periódica del infinito y ha reducido su tamaño al alejarse del valor crítico de la bifurcación $\gamma_{H_e} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,7} = 1,42857$. Para completar la información anterior se utilizó el código de continuación de pseudo longitud de arco en Maple para continuar el ciclo límite generado por la bifurcación Foco Centro Ciclo Límite (FCCL) en el punto 10 ($\alpha = 0,7$, $\gamma = 0,9$) hasta llegar a la bifurcación de *Hopf del infinito* ($\gamma = \frac{1}{0,7}$).

En las figuras 4.24 y 4.25 se ilustra la continuación del punto 10 desde la bifurcación Foco Centro Ciclo Límite (FCCL) hasta la bifurcación *Hopf-zero* de las zonas externas.

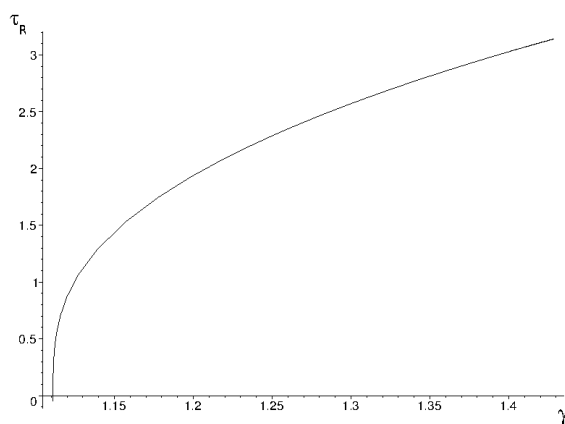


Figura 4.24: Continuación del punto 10: τ_R frente a γ .

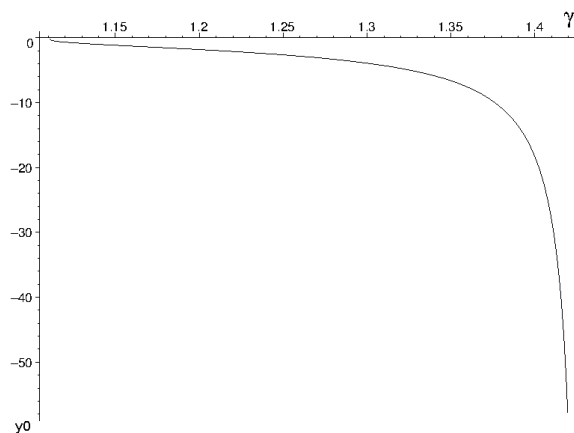


Figura 4.25: Continuación del punto 10: y_0 frente a γ .

En la figura 4.25 se aprecia como la amplitud del ciclo límite aumenta hasta infinito.

Bibliografía

- [1] E. Freire, E. Ponce, and J. Ros. A new methodology for limit cycle bifurcation from infinity in n-dimensional symmetric piecewise linear control systems. *A Preprints Volume 1st IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems*, 4:Chaos'06*. 237. 242, 2006.
- [2] Y. Nishiuchi, T. Ueta, and H. Kawakami. Stable torus and its bifurcation phenomena in a simple three-dimensional autonomous circuit. *Chaos, Solitons and Fractals*, 27:941–951, 2006.
- [3] E. Ponce, J. Ros, and E. Vela. Unfolding the fold-hopf bifurcation in piecewise linear continuous differential systems with symmetry. *Nonlinear Phenomena 250, 34 46*, 4:451–475, 2013.
- [4] E. Ponce, J. Ros, and E. Vela. A unified approach to piecewise linear hopf and hopf-pitchfork bifurcations. *Springer*, 4:Chapter 3, 2013.