

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Modelización con elementos finitos de la inyección
unipolar de carga eléctrica entre dos planos
conductores paralelos e infinitos

Autor: Cristina Chamorro Chamorro

Tutor: Pedro Ángel Vázquez González

Dep. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

**Modelización con elementos finitos de la inyección
unipolar de carga eléctrica entre dos planos
conductores paralelos e infinitos**

Autor:

Cristina Chamorro Chamorro

Tutor:

Pedro Ángel Vázquez González

Profesor titular

Dep. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2016

Trabajo Fin de Grado: Modelización con elementos finitos de la inyección unipolar de carga eléctrica entre dos planos conductores paralelos e infinitos

Autor: Cristina Chamorro Chamorro

Tutor: Pedro Ángel Vázquez González

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Heliodoro González García

Vocales:

Antonio de la Cruz González

Secretario:

Pedro Ángel Vázquez González

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

A mi familia

Agradecimientos

En este trabajo culminan cuatro duros años de estudio, en los que he aprendido mucho, no solo en el ámbito académico. Durante estos años he aprendido que con esfuerzo todo se consigue y que si tienes a las personas adecuadas a tu alrededor, resulta mucho más fácil; por ello, quiero agradecer a todos mis amigos que me han acompañado en estos años de carrera y que me han ayudado cuando más lo he necesitado.

También quiero darles las gracias a mi familia, en especial a mis padres y mi hermana, que siempre me han apoyado, y me han dado fuerzas cuando yo no las tenía y sin los que ahora no estaría terminando este Grado.

No puedo olvidarme de ti, José Manuel, que me has acompañado todo este tiempo y que has sabido animarme y tranquilizarme cuando más estresada me he encontrado.

Por último, a todos mis profesores, no solo de la Universidad, sino también del Instituto y Bachillerato, porque todos ellos han influido, en mayor o menor medida, a que yo esté hoy aquí.

A todos gracias, porque sin vosotros nada de esto habría sido posible.

Cristina Chamorro Chamorro

Sevilla, 2016

La modelización mediante elementos finitos es una herramienta cada vez más utilizada en Ingeniería, ya que sirve de gran ayuda para resolver problemas modelados con ecuaciones de difícil resolución. Aunque comenzó siendo empleada para resolver problemas de estructuras, cada vez se está utilizando en más ramas de la Ingeniería. Un ejemplo es el caso aquí mostrado, en el que se aplica para resolver un problema de movimiento de cargas en el seno de un medio dieléctrico que se encuentra entre dos planos paralelos y conductores.

Así, en este trabajo se estudia el comportamiento de la carga y del campo eléctrico tanto de forma analítica, como por el método de los elementos finitos, gracias al programa *Comsol Multiphysics*; comparando ambas soluciones se determina si los resultados devueltos por dicho programa son correctos o se comenten errores al resolver las ecuaciones.

Los errores pueden aparecer debido a la complejidad de las ecuaciones que se han de resolver, ya que estas tienen comportamiento hiperbólico, y puede que las aproximaciones utilizadas no sean correctas. Por ello, se resolverá el problema por diferentes métodos y se determinará cuál de todos devuelve unos resultados más parecidos a la solución real.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Índice	xiii
Índice de Tablas	xiv
Índice de Figuras	xv
Notación	xviii
1 Introducción	1
2 Elementos finitos	3
2.1 <i>Problema unidimensional</i>	3
2.2 <i>Problema bidimensional</i>	7
2.3 <i>Teorema de los trabajos virtuales</i>	11
2.4 <i>Errores</i>	13
2.5 <i>Problema de campo eléctrico y magnético</i>	13
3 Problema analítico	15
3.1 <i>Problema estacionario sin densidad de corriente</i>	16
3.1.1 Solución para $q=0$	16
3.1.2 Solución para $q=q_0$	17
3.2 <i>Problema con corriente eléctrica</i>	20
3.2.1 Problema estacionario	21
4 Modelización con elementos finitos	27
4.1 <i>Problema estacionario sin densidad de corriente.</i>	27
4.1.1 Densidad de carga nula	32
4.1.2 Densidad de carga constante	33
4.2 <i>Problema con corriente eléctrica</i>	36
4.2.1 Estudio temporal con campo eléctrico constante.	37
4.2.2 Estudio temporal con ecuaciones completas	48
5 Conclusiones	63
Referencias	65

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1. Variables que intervienen en MEF.	4
Tabla 2-2. Variables del problema bidimensional	7
Tabla 2-3. Variables del TTV	12
Tabla 3-1. Parámetros de las ecuaciones	15
Tabla 3-2. Resultado de Es para distintos valores de C	22
Tabla 3-3. Valor de la carga en plano superior	23
Tabla 4-1. Identificación de variables <i>Comsol</i> – analíticas	28
Tabla 4-2. Características de los mallados	31
Tabla 4-3. Valores de las constantes implementadas en <i>Comsol</i> .	38
Tabla 4-4 Distancia en la caída de la carga para $t=0.5$	46
Tabla 4-5. Sobreoscilación y distancia para distintos métodos en $t=0.8$	47
Tabla 4-6. Valores pico – pico para diferentes mallados y Cs.	51
Tabla 4-7. Comparación <i>Do Carmo</i> y <i>Galeão</i> con <i>Codina</i> .	57
Tabla 4-8. Tiempo de resolución de ecuaciones	61

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Esquema del problema a estudiar	1
Figura 2-1. Cargas sobre una barra unidimensional	4
Figura 2-2 División en elementos finitos de una barra unidimensional	5
Figura 2-3 Nodos 1 y 2 (locales) del elemento e_i	6
Figura 2-4 Funciones de forma [7]	9
Figura 3-1. Planteamiento del problema	16
Figura 3-2. Evolución del potencial eléctrico respecto de y	17
Figura 3-3 Evolución del potencial eléctrico cuando q es constante	18
Figura 3-4 Evolución del campo eléctrico cuando q es constante	19
Figura 3-5. Condiciones de contorno	20
Figura 3-6. Evolución del campo eléctrico en régimen estacionario	22
Figura 3-7. Evolución la carga en régimen estacionario	22
Figura 3-8. Campo eléctrico en el caso límite	24
Figura 3-9. Carga en el caso límite	24
Figura 4-1. Geometría de trabajo	27
Figura 4-2. Condición de contorno. Potencial constante	29
Figura 4-3. Condición de contorno. Tierra.	29
Figura 4-4. Densidad de carga espacial	30
Figura 4-5 Malla gruesa	30
Figura 4-6 Malla normal	30
Figura 4-7 Malla fina	31
Figura 4-8 Malla extrafina	31
Figura 4-9 Comparación de potencial eléctrico	32
Figura 4-10 Comparación de campo eléctrico	33
Figura 4-11 Potencial eléctrico para diferentes C	33
Figura 4-12 Campo eléctrico para diferentes C	33
Figura 4-13 Potencial eléctrico para $C=0.1$	34
Figura 4-14 Campo eléctrico para $C=0.1$	34
Figura 4-15 Potencial eléctrico para $C=1$	34
Figura 4-16 Campo eléctrico para $C=1$	34
Figura 4-17 Potencial eléctrico para $C=10$	35
Figura 4-18 Campo eléctrico para $C=10$	35
Figura 4-19 Errores en el potencial	35
Figura 4-20 Configuración de la <i>ecuación de convección y difusión</i>	37

Figura 4-21. Configuración de condiciones de contorno	38
Figura 4-22. Carga para $C=0.1$	39
Figura 4-23. Comparación de mallados $C=0.1$	39
Figura 4-24. Malla adaptada	40
Figura 4-25. Malla adaptada	40
Figura 4-26. Malla adaptada	40
Figura 4-27. Configuración refinamiento de malla	41
Figura 4-28. Representación en altura de la carga para $C=0.1$	41
Figura 4-29. Configuración de <i>transporte de especies diluidos</i>	42
Figura 4-30. Configuración tipo de difusión de viento lateral	43
Figura 4-31. Configuración variable dependiente	43
Figura 4-32. Condición de contorno plano superior	44
Figura 4-33. Condición de contorno plano inferior	44
Figura 4-34. Evolución de la carga $C=0.1$	45
Figura 4-35. Comparación de mallados $C=0.1$	45
Figura 4-36. Representación de la carga en altura $C=0.1$	46
Figura 4-37. Comparación tipos de difusión $C=0.1$	47
Figura 4-38. Carga q para $C=0.1$	49
Figura 4-39. Carga q para $C=1$	49
Figura 4-40. Carga q para $C=2$	50
Figura 4-41. Errores para $C=2$	50
Figura 4-42. Carga q para $C=10$	50
Figura 4-43. Errores para $C=10$	50
Figura 4-44. Comparación de mallados para $C=2$	51
Figura 4-45. Comparación de mallados para $C=10$	51
Figura 4-46. Carga para $C=0.1$	52
Figura 4-47. Carga para $C=1$	52
Figura 4-48. Carga para $C=10$	53
Figura 4-49. Comparación de mallados $C=0.1$	53
Figura 4-50. Comparación de mallados $C=1$	53
Figura 4-51. Comparación de mallados $C=10$	54
Figura 4-52. Evolución de la carga para $C=0.1$	55
Figura 4-53. Evolución de la carga para $C=1$	55
Figura 4-54. Evolución de la carga para $C=10$	55
Figura 4-55. Comparación de mallados $C=0.1$	55
Figura 4-56. Comparación de mallados $C=1$	55
Figura 4-57. Comparación de mallados $C=10$	55
Figura 4-58. Comparación tipos de difusión $C=0.1$	56
Figura 4-59. Comparación tipos de difusión $C=1$	56

Figura 4-60. Comparación tipos de difusión $C=10$	56
Figura 4-61. Comparación de la carga en Comsol y analítico	58
Figura 4-62. Comparación del campo en Comsol y analítico	58
Figura 4-63. Comparación perfiles de carga con resultados para mallas adaptada	59
Figura 4-64. Comparación perfiles de carga con resultados para mallas adaptada	59
Figura 4-65. Comparación perfiles de carga con resultados para mallas gruesas	60
Figura 4-65. Comparación de campo eléctrico en caso límite y $C=0.1$	61
Figura 4-66. Comparación de carga en caso límite y $C=0.1$	61
Figura 4-67. Tiempo de resolución frente al número de elementos de la malla	62

Notación

EHD	Electrohidrodinámica
ϕ	Potencial eléctrico
q	Carga eléctrica
E	Vector de campo eléctrico
ε	Permitividad
k	Movilidad iónica
MEF	Método de los Elementos Finitos
FEM	Finite Element Method
σ	Tensor de esfuerzos
ε	Deformaciones unitarias
u	Desplazamientos
T	Fuerza de superficie
f	Fuerza de volumen
P	Fuerza puntual
E	Módulo de Young
ν	Coefficiente de Poisson
Q	Vector desplazamientos global
N	Función de forma
K	Matriz de rigidez elemental
TTV	Teorema de los trabajos virtuales
(ξ, η)	Coordenadas naturales
(x, y)	Coordenadas cartesianas
J	Jacobiano
∇f	Vector gradiente de un campo escalar f
$\nabla \cdot \vec{f}$	Divergencia del campo vectorial \vec{f}

1 INTRODUCCIÓN

La electrohidrodinámica (EHD) estudia el comportamiento de los fluidos sometidos a la acción de campos eléctricos, por tanto involucra dos grandes disciplinas: la mecánica de fluidos y los campos y corrientes eléctricas. [1]

Para su estudio es necesario conocer y entender correctamente ecuaciones tales como la ecuación de Navier-Stokes, la ecuación de Poisson o la ecuación de transporte de carga. Todas estas ecuaciones se explicarán detalladamente a lo largo de este documento.

Este trabajo se basa en estudiar qué ocurre cuando tenemos dos planos paralelos e infinitos, entre los que existe una diferencia de potencial elevado. Entre estos planos hay un fluido no conductor al que se le inyecta una determinada carga debido a la diferencia de potencial antes mencionada. La carga inyectada por cada electrodo tiene su misma polaridad, por lo que se alejará de él, produciéndose una corriente eléctrica. La fuerza eléctrica que actúa sobre las cargas en el líquido puede llegar a poner éste en movimiento, si el potencial aplicado es lo bastante elevado. En este trabajo nos limitaremos al caso hidrostático, en el que el líquido no se pone en movimiento.

Este problema se esquematiza en la figura 1.1.

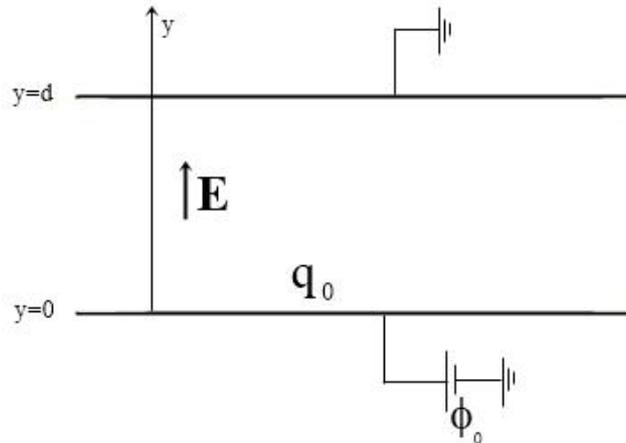


Figura 1-1. Esquema del problema a estudiar

El estudio se ha realizado de forma analítica y mediante modelización por elementos finitos. Para el estudio analítico se han tomado las ecuaciones anteriormente citadas y gracias a una serie de simplificaciones se ha logrado extraer conclusiones que después se han comparado con las obtenidas por el método de los elementos finitos. Para este último estudio se ha utilizado el programa *Comsol Multiphysics*, el cual se detallará a continuación.

La dificultad del problema reside en que las ecuaciones que hay que resolver tienen carácter hiperbólico, por tanto el objetivo de la modelización mediante elementos finitos es estudiar la eficiencia de varios esquemas numéricos para tratar de resolver la ecuación de transporte de la carga.

2 ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico que permite resolver ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno, muy utilizado en el ámbito de la ingeniería, ya que permite resolver problemas de muy diversa índole; desde problemas de esfuerzos de estructuras, hasta problemas de transmisión de calor o, para lo que se usará en este trabajo, problemas de flujo eléctrico. Su eficacia reside en que es capaz de hallar la solución de ecuaciones muy complejas con relativa facilidad, debido a que las variables que aparecen en las ecuaciones se aproximan mediante una serie de valores en puntos concretos (nodos). [10]

En el método de los elementos finitos divide el dominio a estudiar en un conjunto de subdominios (elementos), y en cada uno de esos subdominios, las ecuaciones diferenciales se aproximan por un polinomio. De esta forma, una ecuación compleja queda definida por una serie de polinomios evaluados en diferentes elementos. Hay que tener en cuenta que todos los polinomios deben definirse teniendo en cuenta las condiciones de frontera, es decir, la suma de polinomios en todos los subdominios debe proporcionar una función continua y derivable.

El método de los elementos finitos nació en 1943, cuando Courant modeló problemas de torsión con interpolación lineal en subregiones triangulares. El primero en utilizar el término *elemento finito* fue Clough en 1960. A principios de esta década se empezó a utilizar este método para resolver problemas de diversas áreas: esfuerzos, transferencia de calor, flujo de fluidos etc. A partir de la década de 1970 se incrementaron sus funciones, llegando a resolver problemas no lineales y de grandes deformaciones. [7]

Es importante destacar que el método de elementos finitos resolvía inicialmente problemas de esfuerzos y estructura, por ello, para entender su funcionamiento, nos basaremos en este problema y después lo particularizaremos para el caso de flujo eléctrico.

2.1 Problema unidimensional

Para comenzar el estudio del MEF es conveniente empezar por el estudio más simple de todos; un estudio unidimensional. En la tabla 2-1 se presentan las principales variables que intervendrán en este problema; al ser unidimensional, todas dependen únicamente de la dirección x .

$u_i = u_i(x)$	Desplazamiento del punto i
$\sigma = \sigma(x)$	Esfuerzos
$\varepsilon = \varepsilon(x)$	Deformaciones unitarias
$T = T(x)$	Fuerza de superficie. Es una carga distribuida que actúa sobre la superficie del cuerpo, por ejemplo, la presión. Se mide en N/m^2 .
$f = f(x)$	Fuerza distribuida por unidad de volumen, por ejemplo, el peso por unidad de volumen. Se mide en N/m^3

P_i	Fuerza puntual, actuando en el punto i . Se mide en N.
-------	--

Tabla 2-1. Variables que intervienen en MEF.

Y las principales relaciones entre ellas son:

- Esfuerzo – deformación unitaria:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.1)$$

Donde E es el módulo de Young, o módulo de elasticidad. Se trata de una propiedad del material.

- Deformación unitaria – desplazamiento:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (2.2)$$

Además, en estos problemas, la diferencia de volumen se expresa como el área por la diferencia de longitud: $dV = A dx$.

A la hora de pensar en un problema unidimensional, el caso más sencillo que se nos ocurre es el de una barra. Nos centraremos en resolver este problema, planteado en la figura 2-1.

Se observa que a la hora de plantear el problema se pueden distinguir tres partes:

- Dominio: es el espacio geométrico donde se realizará el estudio. En él están definidas las ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento físico del problema.
- Condiciones de contorno: valores dados en algunos de los nodos que condicionan el comportamiento del problema. En la figura 2-2 la condición de contorno que aparece es que el nodo 1 no se puede desplazar.
- Incógnitas: son las variables desconocidas, que se desean hallar resolviendo el problema. Por lo general se trata de las variables en el resto de nodos, ya que conociéndolas se determinará el comportamiento del sistema continuo.

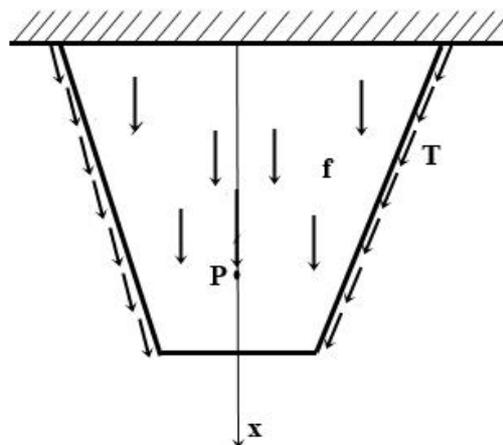


Figura 2-1. Cargas sobre una barra unidimensional

El análisis por elementos finitos implica tres etapas de actividad: preprocesamiento, procesamiento y posprocesamiento. El preprocesamiento implica la preparación de datos, como las coordenadas nodales, la conectividad, las condiciones de frontera y la información sobre cargas y material. La etapa de procesamiento implica la generación y la modificación de la rigidez, así como la solución de ecuaciones que resulta en la evaluación de las variables nodales. En la etapa de posprocesamiento se realiza la presentación de resultados. En general, en esta etapa se calculan y se muestran la configuración deformada, las formas modales, la temperatura o la distribución de esfuerzos. Un análisis completo por elementos finitos es una interacción lógica de las tres etapas.

El primer paso que hay que llevar a cabo es la **división del elemento**. Este consiste en dividir la barra que se va a estudiar en un número discreto de elementos. Cada una de estas partes tendrán sección constante, sin embargo, la sección varía de un elemento a otro. En nuestro caso dividiremos la barra en 4 elementos, de sección uniforme. Esto se hace dividiendo la barra en cuatro partes y tomando la sección promedio de cada una de las partes. Esta será la sección del elemento con el que vamos a trabajar. Así mismo, la fuerza de volumen y la fuerza de superficie también se toman como constantes dentro de cada elemento. De esta forma el problema queda planteado como se muestra en la figura 2-2 en la que se observa que si tenemos 4 elementos es necesario tener 5 nodos. En el caso unidimensional, cada elemento tiene dos nodos, pudiendo pertenecer un nodo a más de un elemento.

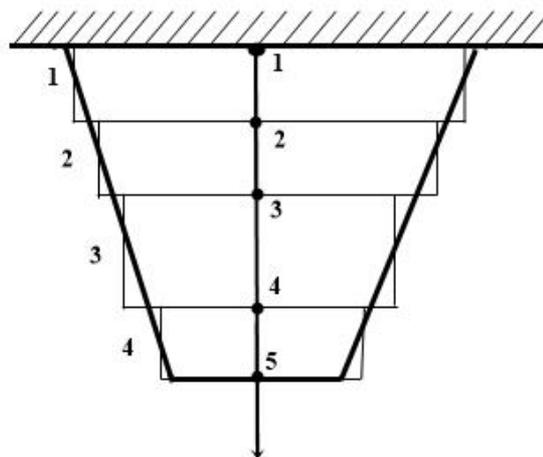


Figura 2-2 División en elementos finitos de una barra unidimensional

Es importante hacer notar que a mayor número de elementos, mejores resultados se obtendrán, ya que serán más parecidos a los reales. Las ecuaciones que describen el comportamiento del medio continuo, también describen el comportamiento de los elementos. Además se define en cada uno de los nodos los grados de libertad del sistema, pasando, así, de un problema en un medio continuo con infinitos grados de libertad, a un sistema con un número de grados de libertad finitos, gobernado por un sistema de ecuaciones. Habrá tantas ecuaciones como nodos existan; en el ejemplo aquí mostrado se tendrían cinco. A la matriz de este sistema de ecuaciones se le conoce como matriz de rigidez del sistema.

Debido a que el método de los elementos finitos está pensado para ser implementado en un ordenador, es muy importante seguir un esquema de numeración.

Anteriormente se ha nombrado el término *grados de libertad (gdl)*, en un problema unidimensional son muy fáciles de determinar, ya que cada nodo puede desplazarse únicamente en dirección x ; por tanto solo se tendrá un grado de libertad en cada nodo.

Llamaremos $\mathbf{Q}=[Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5]^T$ al vector desplazamiento global, que es el vector columna de

los desplazamientos a lo largo de cada grado de libertad. Por su parte, $\mathbf{F}=[F_1, F_2, F_3, F_4, F_5]^T$ es el vector de carga global. Ambos vectores tienen cinco componentes por que se aplican sobre los cinco nodos de nuestro problema. De esta forma, la condición de contorno que ya se nombró anteriormente, e impone que el nodo 1 está fijo, implica que $Q_1=0$.

Otro de los puntos más importantes en el método de los elementos finitos es la *conectividad*. Si cada elemento tiene dos nodos, y hay nodos que pertenecen a más de un elemento, esto implica que el primer nodo del elemento i es el mismo nodo que el segundo del elemento $i-1$. Esto queda más claro si se observa la figura 2-3.

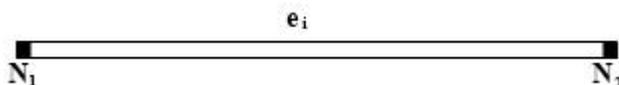


Figura 2-3 Nodos 1 y 2 (locales) del elemento e_i

Una vez determinados todos estos pasos se ha finalizado la construcción del modelo del elemento finito. El siguiente paso es entender en qué consisten las funciones de forma.

Los elementos finitos permiten calcular el desplazamiento en cualquier punto interior del dominio, interpolando su valor a partir de los hallados en los nodos. Para ello es necesario definir la matriz de funciones de interpolación, también conocida como **funciones de forma**, y expresar los desplazamientos cartesianos \mathbf{u} de un punto cualquiera del interior del dominio, en función de los desplazamientos de sus nodos.

En nuestro caso, si llamamos x_1 al nodo 1 local del elemento y x_2 al nodo 2, (figura 2-3) es posible definir el sistema de coordenadas natural como: $\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1$. Así, se tiene que las coordenadas ya no dependen de los ejes cartesianos, sino que se definen a partir de la variable ξ . De esta forma, las coordenadas de los nodos son $\left\{ \begin{array}{l} \text{nodo 1: } \xi = -1 \\ \text{nodo 2: } \xi = 1 \end{array} \right\}$.

Una vez se tienen las coordenadas naturales, el campo de desplazamientos en el interior del elemento puede ser interpolado por una distribución lineal. Para ello se introducen las funciones de forma:

$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad (2.3)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad (2.4)$$

Se puede comprobar que $N_1(\xi = -1) = 1$ y $N_2(\xi = 1) = 1$, por tanto se puede determinar que los desplazamientos en el interior del elemento se pueden escribir como

$$\mathbf{u} = N_1 q_1 + N_2 q_2 \quad (2.5)$$

Donde, como se expresó anteriormente, q_1 y q_2 son los desplazamientos de los nodos 1 y 2 respectivamente. Añadir que \mathbf{u} varía linealmente entre los nodos 1 y 2; por tanto, cuanto más cercanos sean estos nodos (lo que implica que más pequeños serán los elementos y por tanto mayor número de elementos habrá) más similares serán los desplazamientos reales a los definidos por \mathbf{u} .

Es fácil darse cuenta de que la transformación de x en ξ puede escribirse en términos de N_1 y N_2

como: $x = N_1x_1 + N_2x_2$. Así se observa que tanto u como x se han interpolado utilizando las mismas funciones de forma N_1 y N_2 . A esto se le conoce como formulación *isoparamétrica*.

A pesar de que se han utilizado funciones de forma lineales, es preciso indicar que estas pueden tomar cualquier otra expresión.

La relación deformación unitaria – desplazamiento que se expresaba en la ecuación (2.2), se puede convertir, gracias a la regla de la cadena, en

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(\frac{-1}{2} q_1 + \frac{1}{2} q_2 \right) \cdot \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right) = \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \quad (2.6)$$

Si se quiere escribir la ecuación (2.6) De forma matricial, se obtiene $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}$, donde \mathbf{B} es una matriz (1x2) llamada matriz de deformación unitaria – desplazamiento del elemento. Con ello el esfuerzo queda como $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{q}$. Así se ha conseguido expresar los desplazamientos, la deformación unitaria y los esfuerzos en función de los desplazamientos y giro de los nodos.

2.2 Problema bidimensional

En el caso en que tenemos un problema bidimensional, las variables ya no dependen solo de la componente x , sino que tienen además una componente en y [8]. Además, en el problema unidimensional solo existía un grado de libertad; en este caso se tienen tres, ya que aparecen desplazamientos en dos direcciones(x, y), además de un giro en torno al eje z . De esta forma las variables que intervienen ahora en el problema son:

Vector desplazamientos	$\mathbf{u} = [u, v]^T$	u, v son las componentes x, y del vector \mathbf{u}
Vector esfuerzos	$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$	σ_x, σ_y son los esfuerzos normales y τ_{xy} es el esfuerzo cortante
Vector deformaciones unitarias	$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$	$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ son las deformaciones unitarias normales y γ_{xy} es la deformación angular unitaria cortante
Fuerza distribuida	$\mathbf{f} = [f_x, f_y]^T$	f_x, f_y son las componentes x, y del vector \mathbf{f}
Fuerza de contorno	$\mathbf{T} = [T_x, T_y]^T$	T_x, T_y son las componentes x, y del vector \mathbf{T}
Volumen elemental	$dV = t dA$	t es el espesor a lo largo de la dirección z

Tabla 2-2. Variables del problema bidimensional

Las relaciones deformaciones unitarias – desplazamientos y esfuerzos – deformaciones unitarias, vienen dadas por las mismas ecuaciones que en el apartado anterior, pero teniendo en cuenta que ya no se trata de un sistema unidimensional, sino que ahora hay un mayor número de variables. De esta forma se tiene:

- Relación deformación unitaria – desplazamientos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^T \quad (2.7)$$

- Relación esfuerzo – deformaciones unitarias:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.8)$$

donde \mathbf{D} viene dado por la matriz $\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1/2-\nu \end{bmatrix}$, siendo ν el

coeficiente de Poisson.

En el caso bidimensional hay múltiples formas de discretizar el dominio que se va a estudiar. El programa que se va a utilizar en el presente trabajo para obtener resultados por el método de los elementos finitos, discretiza la superficie utilizando triángulos de deformación unitaria constante; por ello este es el tipo de discretización que se va a explicar en esta sección.

Al realizar la discretización en triángulos es preciso evitar razones de aspecto grandes (la razón de aspecto es la razón entre las dimensiones características máxima y mínima). Los mejores elementos son los que tienen ángulos en los vértices entre 30 y 120°. Además, en las zonas del dominio donde los esfuerzos cambian de forma brusca, como cortes o salientes, es necesario disminuir el tamaño de los elementos en esa área para que puedan captar mejor las variaciones del esfuerzo. Los triángulos de deformación unitaria constante dan esfuerzos constantes sobre los elementos, por ello, elementos menores devuelven mejores estimaciones del esfuerzo.

A continuación hay que determinar las tres funciones de forma (una por cada nodo) de cada elemento. Teniendo en cuenta lo explicado en el apartado anterior, resulta evidente que la función de forma N_1 tiene que ser igual a 1 en el nodo 1 y anularse en los nodos 2 y 3. Las funciones de forma N_2 y N_3 se realizarán de la misma forma. Así, las tres funciones de forma representan tres superficies como las mostradas en la figura 2-4

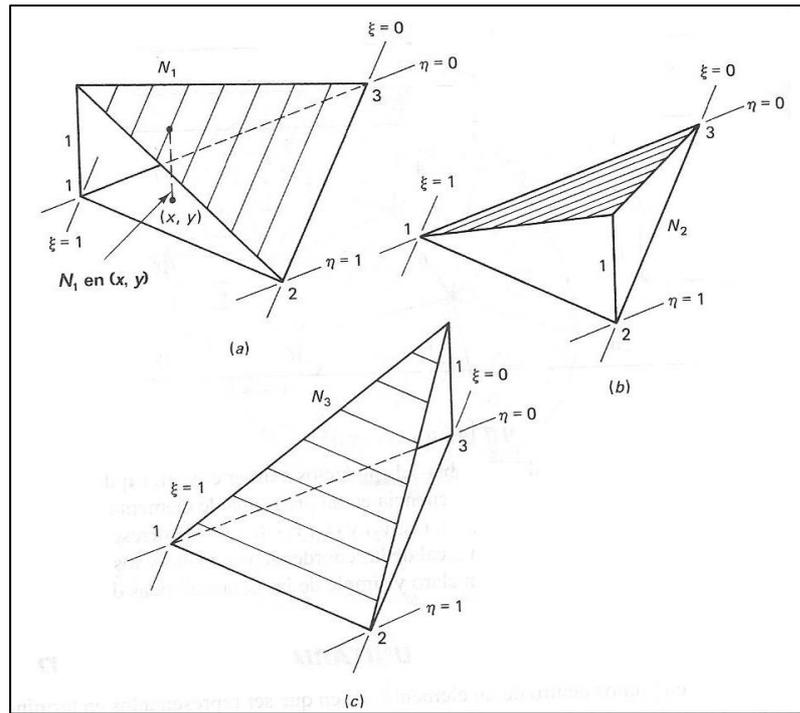


Figura 2-4 Funciones de forma [7]

Se tiene que $N_1 + N_2 + N_3 = 1$ en cada uno de los nodos. Así mismo, se demuestra que esta relación se cumple para cualquier punto del dominio. Esto indica que N_1, N_2, N_3 no son linealmente independientes y por tanto se pueden expresar en coordenadas naturales como:

$$N_1 = \xi \quad N_2 = \eta \quad N_3 = 1 - \xi - \eta$$

De nuevo se va a utilizar una representación isoparamétrica, ya que es la más utilizada en estos casos. Los desplazamientos dentro de un elemento se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5 \\ v &= N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6 \end{aligned} \quad (2.9)$$

siendo $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$ los desplazamientos en las direcciones x, y de cada uno de los nodos que forman el triángulo.

Como se ha comentado, estamos utilizando una representación isoparamétrica, eso implica que

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) se pueden expresar en función de las coordenadas naturales como

$$u = (q_1 - q_5)\xi + (q_3 - q_5)\eta + q_5 \quad (2.11)$$

$$v = (q_2 - q_6)\xi + (q_4 - q_6)\eta + q_6$$

$$x = (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta + x_3 \quad (2.12)$$

$$y = (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta + y_3$$

Para obtener la deformación unitaria, es necesario derivar los desplazamientos respecto de x, y . Para

ello se puede usar la regla de la cadena y se tiene que
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \text{De las misma forma}$$

es posible obtener $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ y $\frac{\partial v}{\partial \eta}$.

Si ponemos en forma matricial las relaciones arriba expresadas se llega a:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Donde la matriz 2x2 que aparece es el **Jacobiano** de la transformación.

Si queremos obtener las relaciones en el otro sentido se tendría

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Cambiando simplemente u por v se obtienen una expresión similar para esa componente del desplazamiento.

Aplicando la relación entre deformación unitaria y desplazamiento y la ecuación (2.13) es posible obtener

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{Bmatrix} (y_2 - y_3)(q_1 - q_5) - (y_1 - y_3)(q_3 - q_5) \\ (x_1 - x_3)(q_4 - q_6) - (x_2 - x_3)(q_2 - q_6) \\ (x_1 - x_3)(q_3 - q_5) - (x_2 - x_3)(q_1 - q_5) + (y_2 - y_3)(q_2 - q_6) - (y_1 - y_3)(q_4 - q_6) \end{Bmatrix}$$

Simplificando el sistema de ecuaciones que aparece se puede llegar a

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{Bmatrix} (y_2 - y_3)q_1 + (y_3 - y_1)q_3 + (y_1 - y_2)q_5 \\ (x_3 - x_2)q_2 + (x_1 - x_3)q_4 + (x_2 - x_1)q_6 \\ (x_2 - x_3)q_1 + (y_2 - y_3)q_2 + (x_1 - x_3)q_3 + (y_3 - y_1)q_4 + (y_2 - y_1)q_5 + (y_1 - y_2)q_6 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Este sistema se puede escribir de forma matricial: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ donde \mathbf{B} es una matriz (3x6) que relaciona las tres deformaciones unitarias con los seis desplazamientos posibles en los nodos.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

De esta forma, la matriz \mathbf{B} es una matriz de constantes, dependientes solo de las posiciones de los nodos de los elementos.

Para encontrar la matriz de esfuerzos, solo es necesario relacionarla con la matriz de deformaciones unitarias.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q} \quad (2.16)$$

Siendo \mathbf{D} y \mathbf{B} matrices comentadas con anterioridad, y \mathbf{q} el vector de desplazamientos nodales.

2.3 Teorema de los trabajos virtuales

Una vez se tiene los valores de \mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$, solo falta relacionarlos con las fuerzas que se ejercen sobre el dominio estudiado. Para ello se hará uso del Teorema de los Trabajos Virtuales (TTV).

El teorema de los trabajos virtuales es un método utilizado en resistencia de materiales para el cálculo de desplazamientos reales en estructuras isostáticas. Su implementación en dos dimensiones se representa, en forma matricial, por

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{*T} \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^{*T} \mathbf{T} d\Gamma \quad (2.17)$$

Las variables $\boldsymbol{\varepsilon}^{*T}$ y $\boldsymbol{\sigma}$, son vectores (3x1) y \mathbf{u}^{*T} , \mathbf{F} , \mathbf{u}^{*T} , \mathbf{T} lo son (2x1).

$\boldsymbol{\sigma}$ es la matriz de esfuerzos ocasionados por las fuerzas externas \mathbf{F}, \mathbf{T} , por su parte, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^*$ son las deformaciones originadas por una perturbación $\delta \mathbf{u}^*$. Además, Ω se refiere al volumen, mientras que Γ se refiere a las integrales en área. En nuestro caso, dado que estamos con una implementación en dos dimensiones, tenemos que la integral en volumen es en realidad una integral en área, multiplicada por el espesor en z ; de la misma forma, la integral en área se vuelve una integral de línea.

$$\text{Como se tiene que } \boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

Se llama \mathbf{L} a la matriz de derivadas parciales.

De la misma forma, para obtener el vector de esfuerzos es $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}$, donde \mathbf{D} es la matriz formada por coeficientes de Poisson y el módulo de Young, que ya se expuso en el apartado 2.2.

Si sustituimos todas estas relaciones en la ecuación (2.17) se obtiene

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u}^*)^T \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^{*T} \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^{*T} \mathbf{T} d\Gamma . \quad (2.18)$$

A continuación se aplican las relaciones que se han visto con anterioridad, y se introducen las funciones de forma, llegando finalmente a las relaciones de los desplazamientos, las deformaciones unitarias y los esfuerzos con los desplazamientos de los nodos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}=\mathbf{N}\mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\mathbf{q} \\ \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q} \end{array} \right\}$$

Si añadimos estas relaciones a la ecuación (2.18), se obtiene finalmente, para cada elemento,

$$\delta\mathbf{q}^{*T} \left(\mathbf{q} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega \right) = \delta\mathbf{q}^{*T} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{T} d\Gamma \right) \quad (2.19)$$

Esta ecuación debe cumplirse para cualquier perturbación $\delta\mathbf{q}^{*T}$.

Finalmente se obtiene que

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}=\mathbf{f}+\mathbf{t} \quad (2.20)$$

Donde las variables que aparecen son

$\mathbf{k}=\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega$	Matriz de rigidez elemental.
\mathbf{q}	Variables nodales
$\mathbf{f}=\mathbf{N}^T \mathbf{F}$	Fuerza de volumen repartida en los nodos
$\mathbf{t}=\mathbf{N}^T \mathbf{T}$	Fuerza de contorno en los nodos

Tabla 2-3. Variables del TTV

Con todo esto, conocidas las condiciones de contorno, es posible determinar el vector \mathbf{q} , y una vez conocido este, se pueden determinar los desplazamientos, las deformaciones unitarias y los esfuerzos.

2.4 Errores

El método de los elementos finitos, como cualquier método aproximado de resolución de problemas, comete errores. Los tipos de errores que pueden aparecer son:

- Error de discretización: el método de los elementos finitos aproxima ecuaciones diferenciales complejas por polinomios, por tanto, en esta aproximación se están cometiendo errores.
- Error de aproximación de la geometría. Al utilizar una discretización triangular aparece la dificultad – sobre todo si vamos a resolver el problema en una superficie curva – de rellenar todo el dominio con dichos triángulos. Esto se puede mejorar si ponemos elementos más pequeños en las zonas que no quedan bien cubiertas, o ponemos elementos con un lado curvo.
- Error en el cálculo de las integrales del elemento. A la hora de calcular la matriz de rigidez elemental, es necesario realizar la inversa del Jacobiano. Si la transformación tiene algún punto singular, es posible que dicha inversa no pueda realizarse o devuelva bastantes errores.
- Error en la resolución del sistema de ecuaciones. Es posible que pequeñas variaciones en \mathbf{k} o \mathbf{f} den lugar a grandes variaciones de \mathbf{q} . Esto es un problema debido a que los programas de cálculo consideran un número finito de dígitos, por tanto pueden aparecer errores de truncamiento o redondeo.

Por tanto, a la hora de obtener soluciones hay que saber diferenciar los errores de las soluciones bien obtenidas.

2.5 Problema de campo eléctrico y magnético

En el área de la ingeniería eléctrica existen diversos problemas interesantes que implican campos escalares y vectoriales, en dos y tres dimensiones. Se planteará como resolver el problema que se presentó en la figura 1-1 mediante el método de los elementos finitos.

Si tenemos un medio isótropo y dieléctrico, con permitividad ε , densidad volumétrica de carga q y potencial eléctrico ϕ , se debe satisfacer la ecuación de Poisson, la cual se explicará detalladamente en los próximos apartados.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{-q}{\varepsilon}$$

Con las condiciones de contorno $\left\{ \begin{array}{l} \phi(y=0) = \phi_0 \\ \phi(y=d) = 0 \end{array} \right\}$.

Para poder resolver el problema se dividirá el dominio de estudio en subdominios triangulares y se referirán las variables del problema a las coordenadas naturales, tal y como se hizo en el problema de

esfuerzos. De esta forma queda

$$\phi = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 \quad (2.21)$$

Siendo $N = [\xi, \eta, 1 - \xi - \eta]^T$, $\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]^T$ las definidas en la figura 2-4.

Si utilizamos una representación isoparamétrica, las variables x, y quedan definidas en función de las funciones de forma como se muestra en las ecuaciones (2.22)

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

De esta forma, las derivadas de ϕ en función de las coordenadas naturales quedan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por lo tanto, se obtiene la relación en el otro sentido como se muestra en (2.24)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Que finalmente se pueden expresar como

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Donde \mathbf{J} representa el Jacobiano de la transformación, (x_i, y_i) son las coordenadas del punto i

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\phi$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \phi^T \mathbf{B}^T \mathbf{B}\phi \quad (2.26)$$

De esta forma se puede implementar el método de los elementos finitos en el problema de potencial eléctrico.

3 PROBLEMA ANALÍTICO

El problema analítico se basa en resolver tres ecuaciones fundamentales: la ecuación de Poisson para el potencial eléctrico, la definición de campo eléctrico a partir de potencial eléctrico y la ecuación de transporte de la carga. En este trabajo nos centramos en el caso hidrostático, por tanto se toma en todo momento el fluido en reposo. Con esto, las ecuaciones aquí nombradas son las que aparecen en (3.1) a (3.3) respectivamente.

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q}{\varepsilon} \quad (3.1)$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (qk\vec{E}) = 0 \quad (3.3)$$

Los parámetros que aparecen en estas ecuaciones son:

Símbolo	Nombre variable	Descripción
q	Densidad volumétrica de carga eléctrica	
k	Movilidad iónica	Es la capacidad de las partículas con carga eléctrica de moverse a través de un medio en reposo debido a la actuación de un campo eléctrico. De este modo se tiene que $\vec{u}_i = k\vec{E}$ siendo \vec{u}_i la velocidad del ión cuando el fluido está en reposo.
\vec{E}	Campo eléctrico	Campo que describe la interacción entre cuerpos y sistemas con propiedades de naturaleza eléctrica.
ϕ	Potencial eléctrico	Es el trabajo que debe realizar una fuerza externa para traer una carga positiva unitaria q desde el punto de referencia hasta el punto considerado en contra de la fuerza eléctrica, a velocidad constante.
ε	Permitividad	Es una constante física que describe la polarización de un medio ante la acción de un campo eléctrico

Tabla 3-1. Parámetros de las ecuaciones

Debido a la complejidad de este problema, se realizarán una serie de simplificaciones hasta, finalmente poder resolver el problema completo.

3.1 Problema estacionario sin densidad de corriente

En primer lugar se resolverá el problema estacionario sin densidad de corriente. La ecuación de Navier-Stokes se anula y solo se tendrá en cuenta las ecuaciones de Poisson y la de campo eléctrico. Para encontrar la solución buscada es necesario determinar las condiciones de contorno. En nuestro caso, como se observa en la figura 3-1, tenemos uno de los planos conectado a tierra y el otro conectado a un potencial ϕ_0 constante. La distancia entre los planos es d y se despreciarán los efectos de borde ya que los planos se considerarán infinitos.

Para resolver este problema es interesante destacar que se trata de un problema bidimensional, por tanto las ecuaciones (3.1) y (3.2) se pueden simplificar como se muestra en (3.4) y (3.5) respectivamente.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{q}{\epsilon} \quad (3.4)$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.5)$$

Y las condiciones de contorno quedan de la forma:

$$\begin{aligned} \phi(y=0) &= \phi_0 \\ \phi(y=d) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

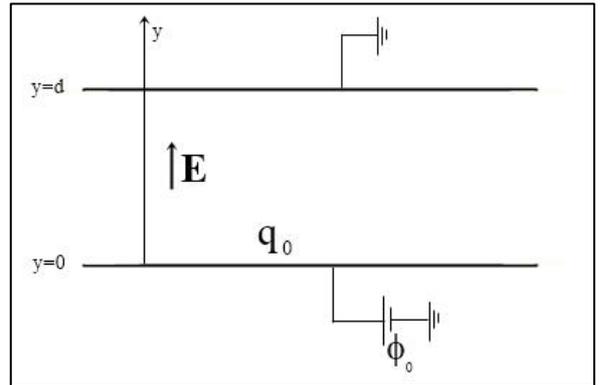


Figura 3-1. Planteamiento del problema

Es posible resolver la ecuación (3.4) sujeta a las condiciones de contorno (3.6). Para ello es necesario tener en cuenta que q depende de y , y según como sea tal dependencia se obtendrán diferentes soluciones. A continuación se muestran algunas de las posibilidades.

3.1.1 Solución para $q=0$

Esta se trata de la solución más sencilla, ya que la ecuación (3.4) se convierte en $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$; por tanto ϕ depende linealmente de y . Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, la solución buscada es la que se muestra en (3.7).

$$\phi(y) = \phi_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right) \quad (3.7)$$

Para poder representar esta solución y que no dependa de las magnitudes ϕ_0 ni d resulta conveniente adimensionalizar las ecuaciones y obtener la solución adimensionalizada, ya que, lo que nos interesa es encontrar de qué forma varía ϕ con y , sin importar, de momento, las magnitudes antes citadas.

Para adimensionalizar las ecuaciones utilizaremos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{y}{d} \\ \bar{\phi} &= \frac{\phi}{\phi_0} \\ \bar{q} &= \frac{q}{q_0}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Con esto la ecuación (3.4) adimensionalizada se muestra en (3.9) y las condiciones de contorno pasan a ser las mostradas en (3.10).

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} = -\bar{q} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(\bar{y} = 0) &= 1 \\ \bar{\phi}(\bar{y} = 1) &= 0\end{aligned}\quad (3.10)$$

Dado que en este apartado se tiene $q=0$, la ecuación que queremos resolver es $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} = 0$, que sujeta a las condiciones de contorno (3.10) da como resultado la función mostrada en (3.11)

$$\bar{\phi} = 1 - \bar{y} \quad (3.11)$$

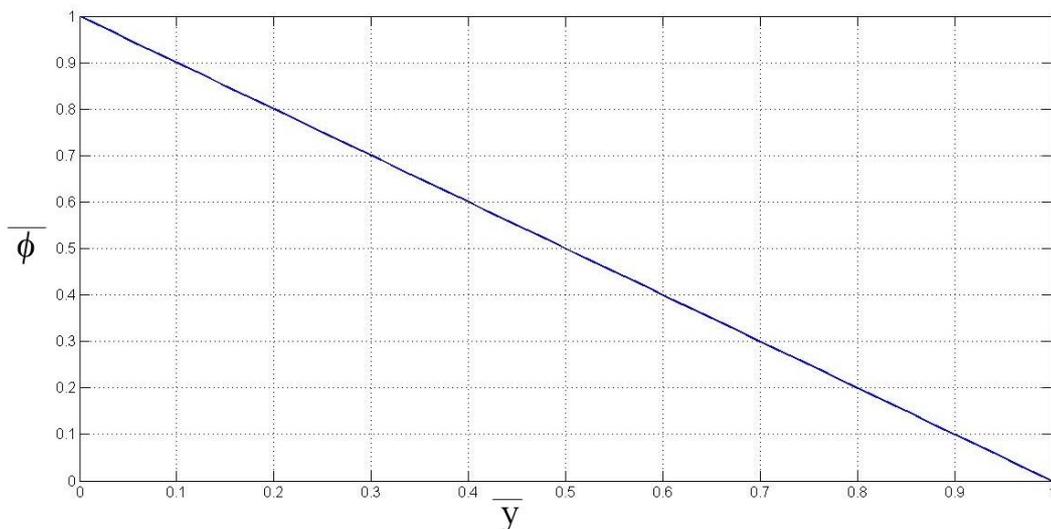


Figura 3-2. Evolución del potencial eléctrico respecto de y

En la figura se observa fácilmente que se trata de una dependencia lineal y que cumple perfectamente con las condiciones de contorno.

Observando las ecuaciones (3.5) y (3.9) es fácil determinar que para el caso $q=0$, se tiene un campo eléctrico \bar{E} constante e igual a 1 ($\bar{E} = 1$).

3.1.2 Solución para $q=q_0$

Si aumentamos un poco la dificultad pasamos de tener densidad volumétrica de carga nula a tenerla

constante. Como se vio en el apartado anterior es conveniente adimensionalizar las ecuaciones para obtener resultados más fáciles de interpretar y representar, por tanto vamos a realizar el estudio resolviendo de nuevo la ecuación (3.9) sujeta a las condiciones de contorno (3.10). En este caso se tiene que la carga es constante, por lo que la ecuación caracterizada para este apartado queda

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} = -C \quad (3.12)$$

Aparece en esta nueva fórmula un nuevo parámetro, C, que será de vital importancia en lo que sigue, ya que, según el valor que se le proporcione nuestro sistema evolucionará de una u otra forma. Este nuevo parámetro aparece al hacer la adimensionalización y es el resultado de la multiplicación de una serie de magnitudes: $C = \frac{q_0 \cdot d^2}{\varepsilon \cdot \phi_0}$. Si tenemos en cuenta que tanto d como ϕ_0 son parámetros

fijados al inicio del estudio, y que ε es una constante, los diferentes valores que se den a C estarán directamente relacionados con los valores que tendrá q_0 en cada estudio.

Llegados a este punto se va a resolver la ecuación (3.12) sujeta a las condiciones de contorno (3.10). En este caso la dependencia pasa de ser lineal a ser cuadrática, llegándose fácilmente a la relación (3.13).

$$\bar{\phi}(\bar{y}) = -C \frac{\bar{y}^2}{2} + \left(\frac{C}{2} - 1\right) \bar{y} + 1 \quad (3.13)$$

Como se adelantó anteriormente, en la función (3.13) se ve claramente que el comportamiento de $\bar{\phi}$ depende fundamentalmente del valor que tenga C. Esto también se observa en la figura 3-3.

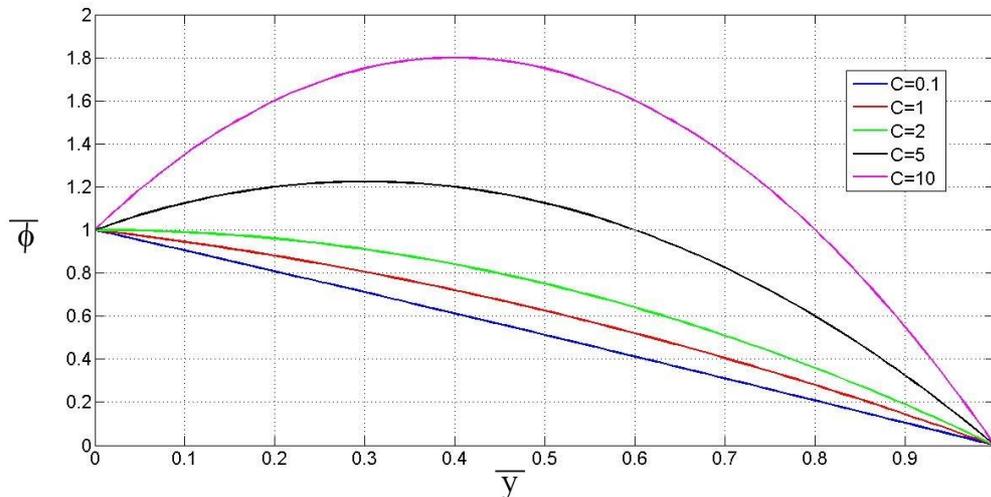


Figura 3-3 Evolución del potencial eléctrico cuando q es constante

Para valores pequeños de C, ϕ es prácticamente lineal con y , a medida que C aumenta el comportamiento se vuelve más parabólico, pero, como es natural, cumpliendo siempre con las condiciones de contorno, es decir, pasando todas las curvas por los puntos $\left\{ \begin{array}{l} \bar{y} = 0 \quad \bar{\phi} = 1 \\ \bar{y} = 1 \quad \bar{\phi} = 0 \end{array} \right\}$.

A continuación se estudia cómo se distribuye el campo eléctrico. Se puede obtener su distribución a partir de las ecuaciones (3.5) y (3.13) y el resultado obtenido es:

$$\bar{E}(\bar{y}) = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial(-C \frac{\bar{y}^2}{2} + (\frac{C}{2}-1)\bar{y}+1)}{\partial \bar{y}} = C \cdot \bar{y} - \frac{C}{2} + 1 \quad (3.14)$$

Es obvio que el campo eléctrico varía con y de forma lineal, tal y como se representa en la figura 3-4 para diferentes valores de C .

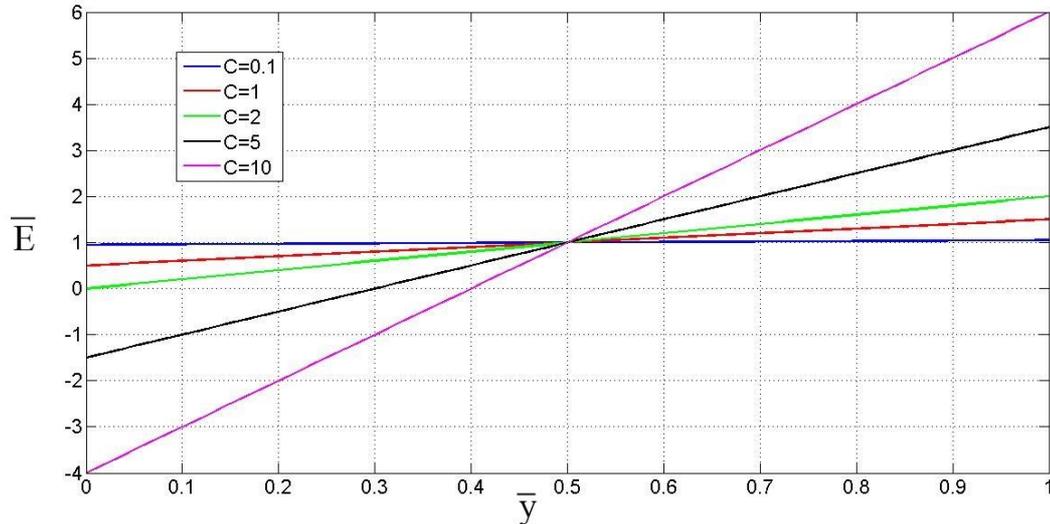


Figura 3-4 Evolución del campo eléctrico cuando q es constante

Como se puede observar en la figura superior cuanto mayor es el valor de C , mayor diferencia de campo eléctrico hay entre los planos. Todas las rectas pasan por el punto $\{\bar{y} = 0.5, \bar{E}=1\}$, es decir, en el punto medio entre los planos el campo eléctrico adimensional será igual a la unidad, independientemente del valor de C . Para poder comprender correctamente el significado de este valor es necesario determinar cómo se ha realizado la adimensionalización de E .

Si se sigue la misma lógica que con el resto de adimensionalizaciones ya realizadas se tendría que $\bar{E} = \frac{E}{E_0}$, pero en este caso no sabemos qué significado físico tiene E_0 en nuestro problema; para determinararlo se hace uso de la ecuación (3.5) y se sustituye cada parámetro dimensional por el adimensional, de forma que aparecerán varias constantes: $\bar{E} \cdot E_0 = -\frac{\delta \bar{\phi} \cdot \phi_0}{\delta \bar{y} \cdot d}$.

Teniendo en cuenta que en (3.14) se ha tomado que $\bar{E} = -\frac{\delta \bar{\phi}}{\delta \bar{y}}$, es obvio que $E_0 = \frac{\phi_0}{d}$. De esta forma se ha encontrado el significado físico de la constante E_0 .

Con todo esto, el hecho de que las rectas pasen por el punto $\{\bar{y} = 0.5, \bar{E}=1\}$, significa que el campo eléctrico en el punto medio entre los planos es igual a $E_0 = \frac{\phi_0}{d}$, independientemente del valor de C .

También es interesante destacar que el campo eléctrico cambia de polaridad para valores suficientemente grandes de C . En la figura 3-4 este hecho se observa para $C=5$ y $C=10$, ya que para valores pequeños de y se tiene campo eléctrico negativo, y a medida que y aumenta el campo eléctrico crece llegando a hacerse positivo

3.2 Problema con corriente eléctrica

En este apartado se va a realizar el estudio del problema teniendo en cuenta la densidad de corriente eléctrica, es decir, se van a resolver las ecuaciones (3.1) – (3.3). Para ello el primer paso es adimensionalizar dichas ecuaciones, ya que como se ha podido comprobar en los apartados anteriores resulta de gran utilidad a la hora de extraer conclusiones y poder hacer representaciones gráficas.

Las variables ϕ , y , q y \bar{E} se volverán a adimensionalizar como se ha hecho en el apartado 3.1, el resto de variables se adimensionalizarán de forma que simplifiquen las ecuaciones lo máximo posible. De esta forma las ecuaciones (3.1) – (3.3) se convierten en las ecuaciones (3.15) – (3.17)

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{q} \cdot \bar{E}) = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} = -\bar{q} \quad (3.16)$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} \quad (3.17)$$

Para obtener estas ecuaciones se ha tenido en cuenta las siguientes adimensionalizaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi} = \frac{\phi}{\phi_0} \\ \bar{E} = \frac{E}{E_0} = \frac{E}{\phi_0/d} \\ \bar{y} = \frac{y}{d} \\ \bar{t} = \frac{t}{t_0} = \frac{t}{d/k \cdot E_0} \\ \bar{q} = \frac{q}{q_0} \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

Una vez que se ha planteado el nuevo problema es necesario determinar las condiciones de contorno para poder encontrar la solución buscada. En este caso el problema se ha convertido en el mostrado en la figura 3-5, en ella todos los parámetros que aparecen están ya adimensionalizados.

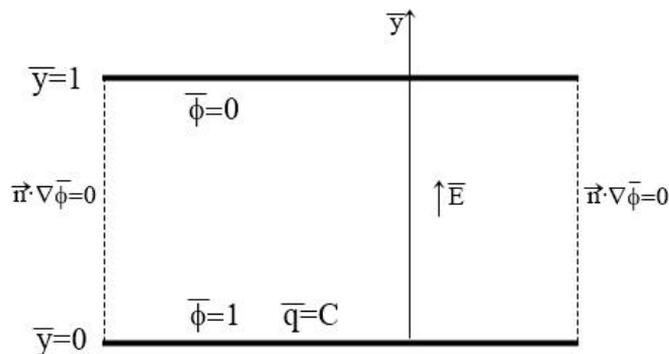


Figura 3-5. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno en los planos son las mismas que en el problema de la figura 3-1. Sin embargo aquí aparecen dos condiciones de contorno nuevas, que vienen a significar que el campo eléctrico es paralelo al eje y , no teniendo componente perpendicular a este.

Con todo esto se procede a resolver el problema planteado en las ecuaciones (3.15) – (3.17), pero este problema es imposible de resolver de manera analítica, por tanto se deja para el estudio por elementos finitos y se resolverá de forma analítica el problema estacionario.

3.2.1 Problema estacionario

Si observamos las ecuaciones (3.16) y (3.17) comprobamos que se pueden unir, convirtiéndose en una sola y simplificando el problema al resolver dos ecuaciones diferenciales en lugar de tres.

Así, el problema que hay que resolver se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} &= \bar{q} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{q} \cdot \bar{E}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sujeto a las condiciones de contorno $\left\{ \begin{array}{l} \bar{q}(\bar{y} = 0) = C \\ \bar{E}(\bar{y} = 0) = E_s \end{array} \right\}$.

E_s es un valor de momento desconocido que trataremos de determinar una vez se haya encontrado las ecuaciones que relacionan E y q con y .

De la segunda ecuación de (3.19) se obtiene que $\bar{q} \cdot \bar{E} = C \cdot E_s$ y, por tanto, $\bar{q}(\bar{E}) = \frac{C \cdot E_s}{\bar{E}}$. Si esta relación la sustituimos en la primera de las ecuaciones de (3.19) se alcanza que

$$\begin{aligned} \bar{E}(\bar{y}) &= E_s \sqrt{\frac{2C}{E_s} \bar{y} + 1} \\ q(y) &= \frac{C}{\sqrt{\frac{2C}{E_s} \bar{y} + 1}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como se adelantó al introducir las condiciones de contorno, una vez que hemos conseguido las funciones que relacionan nuestras variables de interés con y , se procede a determinar el valor de E_s ; para ello se hace uso de la condición $\int_0^1 \bar{E} d\bar{y} = 1$. Esta se obtiene de que \bar{E} es paralelo al eje y .

Si a la primera ecuación de (3.20) le aplicamos esta condición obtendremos el valor de E_s que hace que se cumpla. Esto no tiene complicación debido a que se trata de la integral de una raíz cuadrada, la cual es fácil de realizar. Además ayudándonos de programas como *Matlab* se puede resolver aún con mayor facilidad y obtener gráficas con el comportamiento de E y q .

$$\int_0^1 E dy = \int_0^1 (E_s \sqrt{\frac{2Cy}{E_s} + 1}) dy = \frac{E_s^2}{3C} \left[\left(2 \frac{C}{E_s} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right] = 1 \quad (3.21)$$

Resolviendo la ecuación para distintos valores de C se han obtenido los siguientes resultados:

	C=0.1	C=1	C=2	C=5	C=10
E_s	0.9516	0.6334	0.4385	0.2125	0.1107

Tabla 3-2. Resultado de E_s para distintos valores de C

Para C pequeño el valor de E_s es prácticamente la unidad; a medida de C aumenta se obtienen valores de E_s cada vez más próximos a 0.

Si representamos las funciones (3.20) para los valores de C y E_s de la tabla 3-2 se obtienen las curvas de las figuras 3-6 y 3-7.

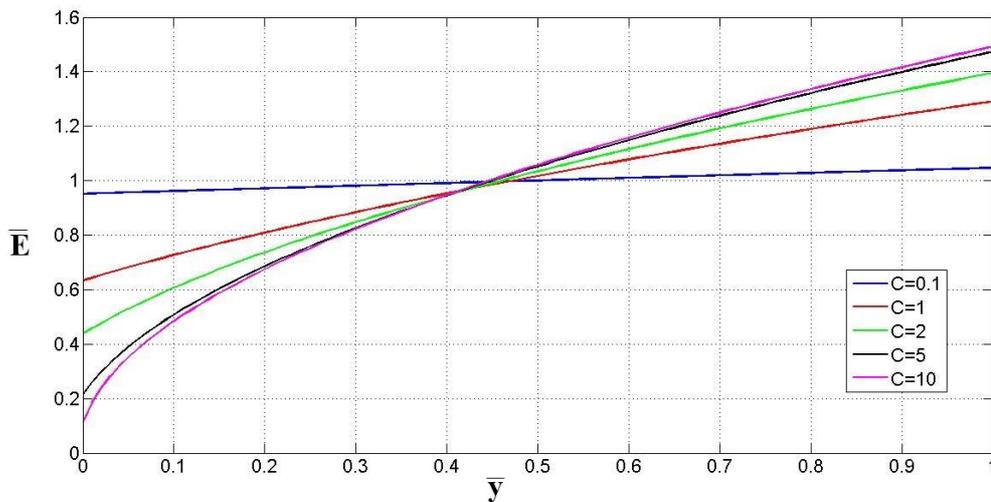


Figura 3-6. Evolución del campo eléctrico en régimen estacionario

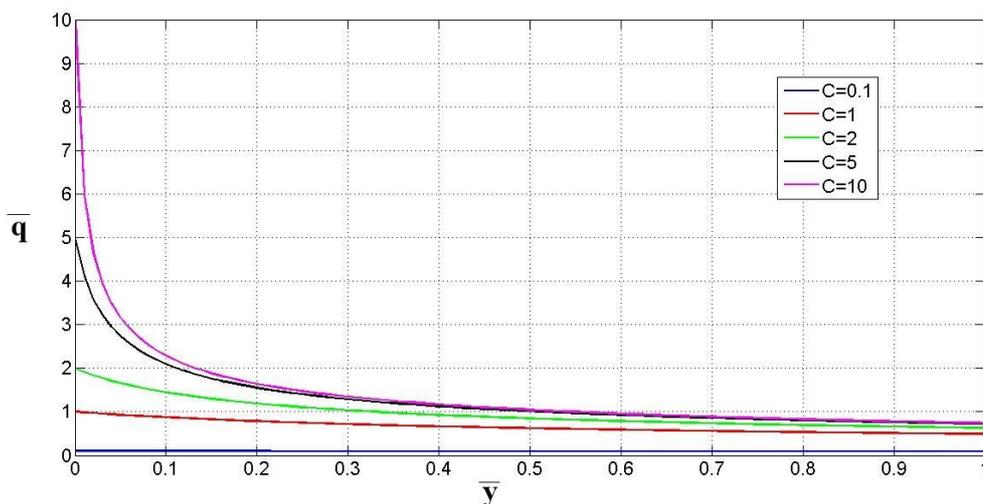


Figura 3-7. Evolución la carga en régimen estacionario

En la figura 3-6 se aprecia que el campo eléctrico es creciente. Para C pequeña se tiene que el campo eléctrico es prácticamente constante y a medida que C aumenta, lo hace también la pendiente de E. Para C=5 y C=10 las curvas son prácticamente coincidentes, esto se debe a que el valor de E_s es muy pequeño en comparación con el valor de C y en la primera ecuación de (3.20) el valor del campo eléctrico apenas depende de C.

En la figura 3-7 se observa que el comportamiento de q sí depende en mayor medida del parámetro C . De hecho, el valor de $q(y=0)=C$, tal y como determina una de las condiciones de contorno impuestas para resolver el problema. Estas curvas son decrecientes, disminuyendo por tanto la carga a medida que nos alejamos del plano inferior y nos acercamos al superior.

El valor de la carga en el plano superior es muy similar para todos los valores de C , excepto para $C=0.1$. En la tabla 3-3 se muestran estos valores.

	C=0.1	C=1	C=2	C=5	C=10
$\bar{q}(\bar{y} = 1)$	0.0909	0.4904	0.6286	0.7213	0.7421

Tabla 3-3. Valor de la carga en plano superior

Se puede ver claramente que de nuevo los resultados para $C=5$ y $C=10$ son muy similares, de hecho la diferencia entre ellos no llega al 3%. A medida que C disminuye las diferencias se hacen más grande, siendo la diferencia entre $C=10$ y $C=1$ casi de un 34%. Por último, la diferencia entre $C=0.1$ y $C=10$ llega a ser del 87.7%, mostrando una vez más la importancia del parámetro C , ya que de su valor depende en gran medida el comportamiento del sistema.

3.2.1.1 Límites

Por último vamos a calcular los valores que toma Es en los límites en que C es muy pequeño y muy grande. Para ello se hace uso de desarrollos en serie de Taylor, tomando como función

$$f(C) = \frac{Es^2}{3} \left[\left(2\frac{C}{Es} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right] - C. \text{ Esta se obtuvo en (1.24) al integrar el campo eléctrico en } y.$$

Haciendo el desarrollo de Taylor en torno al punto $C=0$ se obtiene:

$$f'(C) = Es \left(\frac{2C}{Es} + 1 \right)^{1/2} - 1; \quad f'(0) = (Es - 1)$$

$$f(C) \approx (Es - 1)C = 0; \quad Es = 1$$

De esta forma se comprueba que cuando C es muy pequeño, Es tiende a ser la unidad como se aprecia en la tabla 3-1.

En la figuras 3-8 y 3-9 se representan tanto la carga como el campo eléctrico, en el caso $C=0.1$, que se toma como referencia de un valor pequeño de C para hacer el estudio, y las funciones que se obtienen al realizar un desarrollo en serie de Taylor de las ecuaciones (3.20), teniendo en cuenta que $Es=1$.

Así, estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \bar{E}(\bar{y}) &= \sqrt{2C\bar{y} + 1} & \bar{E}(0) &= 1 \\ \bar{E}'(\bar{y}) &= \frac{C}{\sqrt{2C\bar{y} + 1}} & \bar{E}'(0) &= C \\ \bar{E}(\bar{y}) &\approx 1 + C\bar{y} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}(\bar{y}) &= \frac{C}{\sqrt{2C\bar{y}+1}} & q(0) &= C \\ \bar{q}'(\bar{y}) &= \frac{-C^2}{(2C\bar{y}+1)^{3/2}} & \bar{q}'(0) &= -C^2 \\ \bar{q}(\bar{y}) &\approx C(1-C\bar{y}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

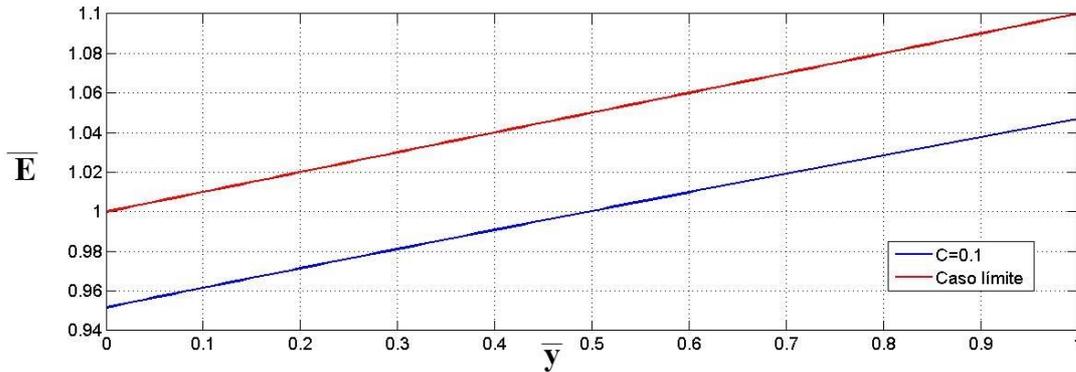


Figura 3-8. Campo eléctrico en el caso límite

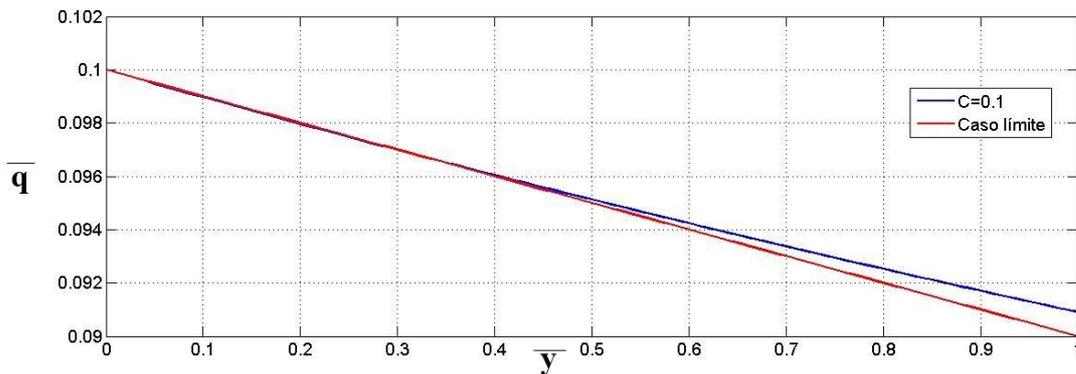


Figura 3-9. Carga en el caso límite

En la figura 3-8 se observa que las curvas son prácticamente paralelas y la gran diferencia entre ellas se encuentra en la condición de contorno en $\bar{y} = 0$, ya que en este punto el campo eléctrico debe ser igual a E_s . En el caso desarrollado anteriormente para $C=0.1$ se tenía que $E_s=0.9516$, mientras que en el caso límite se ha tomado $E_s=1$. De esta forma, la mayor diferencia entre las curvas se produce justo en el plano superior, siendo esta diferencia de un 4.83%, error asumible. Por tanto, se concluye, que para el campo eléctrico, tomar un valor de $C=0.1$ se aproxima bastante bien a un caso límite con C muy pequeña.

En la figura 3-9 se comprueba que las curvas para el caso $C=0.1$ y para el caso límite son realmente parecidas, ya que son prácticamente coincidentes hasta llegar a $\bar{y} = 0.6$, punto en el cual comienzan a divergir. Por ello, el punto en el que aparecen mayores diferencias entre dichas curvas vuelve a ser el plano superior. De esta forma, el máximo error que se produce es de un 0.99%, error prácticamente despreciable.

Por todo esto, se puede afirmar que cuando se ha tomado el valor de $C=0.1$ como un valor límite de C pequeño no se han cometido grandes errores.

Para poder realizar el desarrollo de Taylor cuando C tiende a infinito nos encontramos con el problema de que no se puede hacer un desarrollo de Taylor en torno a ese punto.

Si volvemos a la función $f(C) = \frac{Es^2}{3C} \left[\left(2 \frac{C}{Es} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right] - 1$, teniendo en cuenta que C toma valores muy grandes, sumar 1 dentro del paréntesis se puede despreciar.

$$f(C) = \frac{Es^2}{3C} \left[\left(2 \frac{C}{Es} \right)^{3/2} - 1 \right] - 1$$

A continuación también se pueden despreciar el 1 que resta dentro de los corchetes. De esta forma la función con la que vamos a trabajar quedaría

$$f(C) = \frac{Es^2}{3C} \left(2 \frac{C}{Es} \right)^{3/2} - 1$$

Si introducimos las variables C y Es dentro de los paréntesis, y sacamos el 2, el resultado es

$$f(C) = \frac{2^{3/2}}{3} \left(\frac{C \cdot Es^{4/3}}{Es \cdot C^{2/3}} \right)^{3/2} - 1$$

Multiplicando y simplificando los parámetros que aparecen, queda finalmente la función

$$f(C) = \frac{2^{3/2}}{3} (C^{1/3} \cdot Es^{1/3})^{3/2} - 1 = \frac{2^{3/2}}{3} (C \cdot Es)^{1/2} - 1$$

Teniendo en cuenta que la función $f(C)$ tiene que ser igual a cero, se puede despejar el valor de Es .

$$Es = \frac{9}{8C}$$

Como se está resolviendo el valor de Es para valores muy altos de C , se puede decir que $Es=0$, y por tanto se comprueba que el valor que aparece en la tabla 3-2 es correcto.

4 MODELIZACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS

A continuación se van a resolver los problemas planteados en la sección anterior pero en lugar de buscar una solución analítica se resolverán usando el método de los elementos finitos; para ello nos ayudamos del programa *Comsol Multiphysics*.

En primer lugar se resolverá el problema sin densidad de corriente y posteriormente el problema planteado en las ecuaciones (3.1) – (3.3).

4.1 Problema estacionario sin densidad de corriente.

Al abrir *Comsol* hay que elegir la física en la que se realizará el estudio. En nuestro caso elegimos *Electroestática*. También se decide el tipo de estudio, que en este primer apartado será estacionario.

Una vez escogidas la física y el estudio hay que determinar la geometría con la que vamos a trabajar; por simplicidad se tomará un cuadrado de lado unidad y centraremos el estudio en la línea media de este para despreciar así los efectos de borde. Ver figura 4-1.

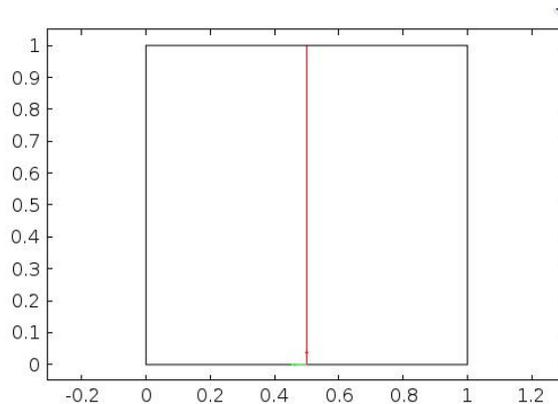


Figura 4-1. Geometría de trabajo

A continuación se configura el estudio electrostático. Para ello se determinan las ecuaciones y condiciones de contorno. La ecuación más importante es la *Conservación de la carga eléctrica*.

Las ecuaciones que aparecen son $\left\{ \begin{array}{l} E = -\nabla V \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r E) = \rho_v \end{array} \right\}$ que se identifican con las ecuaciones (3.1) y

(3.2) del capítulo 3.

Debido a que *Comsol* nombra a las variables de forma distinta a como se ha hecho a lo largo de este documento, en la tabla 4-1 se ha identificado cada una de las variables de interés con su nombre y la letra con la que se nombra en este texto y en el programa.

Nombre variable	Símbolo en <i>Comsol</i>	Símbolo en documento
Potencial eléctrico	V	ϕ
Permitividad	$\varepsilon_0 \varepsilon_r$ ¹	ε
Densidad de carga espacial	ρ_v	q

Tabla 4-1. Identificación de variables *Comsol* – analíticas

Hay que mencionar que las ecuaciones que se resolvieron finalmente en el problema analítico no son las (3.1) y (3.2); sino estas adimensionalizadas.

Con todo esto, las ecuaciones (3.1) y (3.2), para que se puedan comparar con las de *Comsol* deben agruparse y adimensionalizarse quedando las ecuaciones (4.1) y (4.2), en las que $\bar{\nabla}$ simboliza el operador gradiente adimensionalizado.

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} \bar{\phi} \quad (4.1)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \bar{q} \quad (4.2)$$

Para poder introducir estas ecuaciones en *Comsol* queda claro que la primera de ellas no debe sufrir cambios mientras que en la segunda hay que realizar dos modificaciones importantes:

- Por un lado debe desaparecer el término de la permitividad; esto se consigue dando a la permitividad relativa el valor inverso de la permitividad del vacío, así al multiplicarse su resultado será la unidad y se anularán. $\varepsilon_r = \frac{1}{\varepsilon_0} = 8.854 \cdot 10^{-12}$
- Por otra parte, la importancia del parámetro C se verá reflejada en la densidad de carga espacial ρ_v , ya que será esta quien tome los valores de C a la hora de realizar los diferentes análisis. Esta densidad de carga espacial hay que añadirla a la física electrostática ya que no aparece por defecto.

En el apartado de electrostática también es necesario añadir las condiciones de contorno que aparecían en la figura 3-5, es decir, tierra en el plano superior y un potencial en el inferior. Como estamos con el problema adimensionalizado a este potencial le damos valor unidad. Estas condiciones de contorno se muestran en las figuras 4-2 y 4-3 tal y como aparecen en *Comsol*.

En la figura 4-4 se establece, por último, la condición de contorno de la densidad de carga. En el apartado donde aparece *densidad de carga espacial* se impone la condición de contorno oportuna para cada estudio.

¹ La permitividad se expresa como la multiplicación de la permitividad relativa del material por la permitividad del vacío.

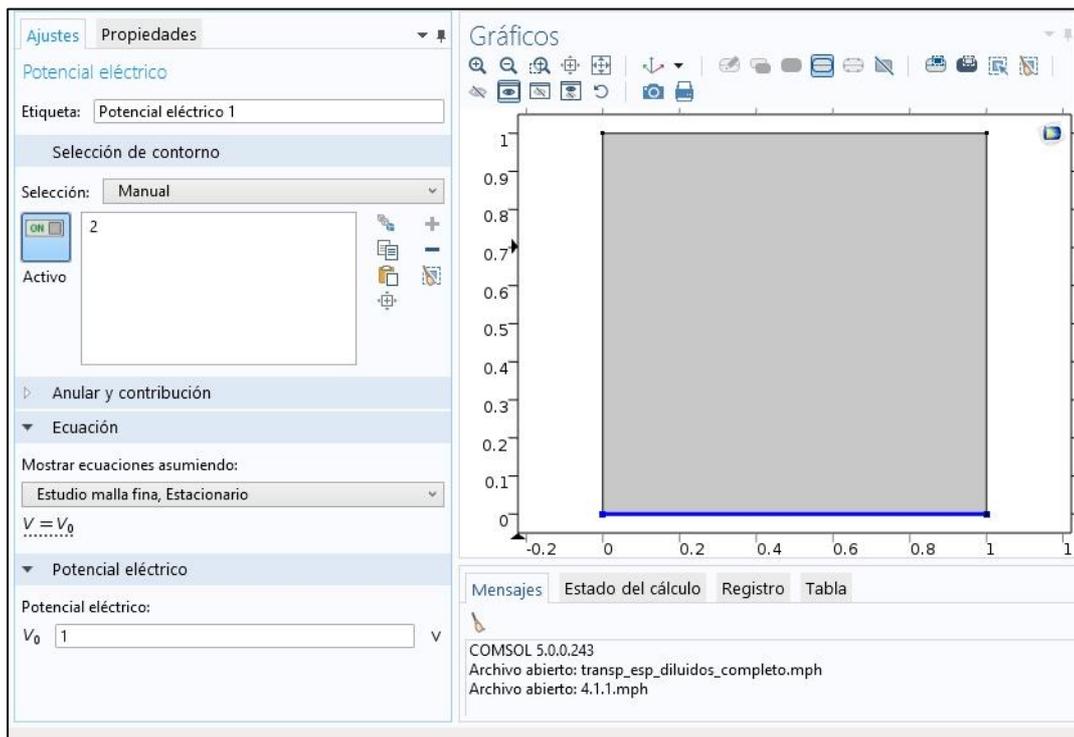


Figura 4-2 Condición de contorno. Potencial constante

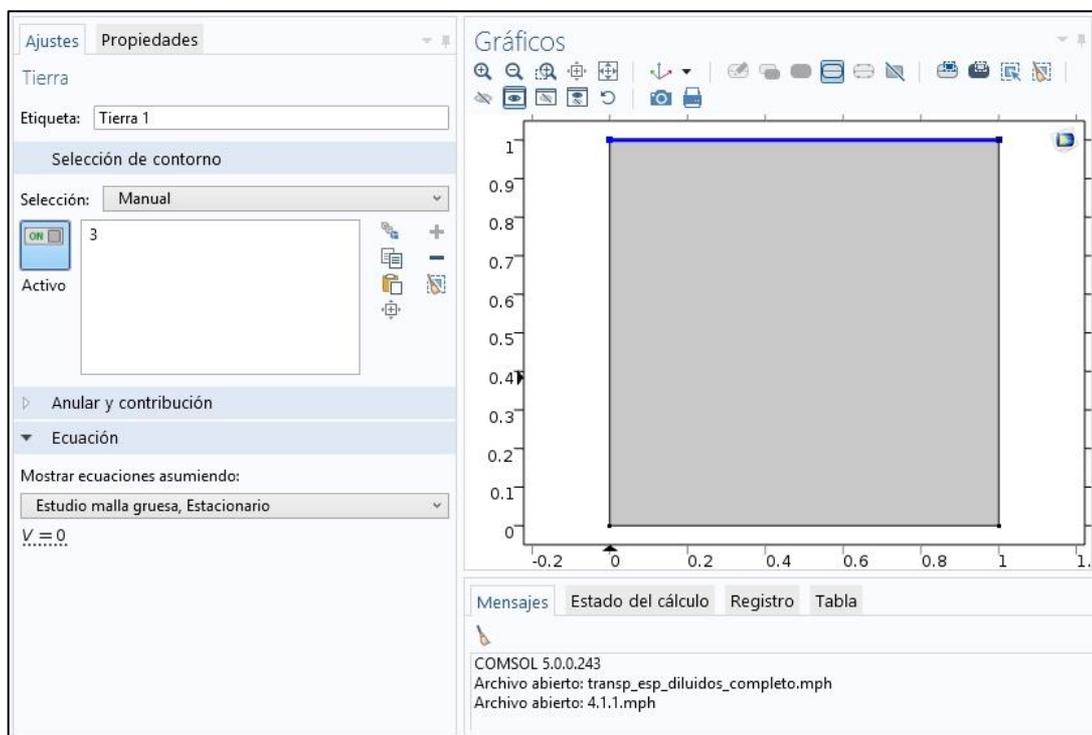


Figura 4-3. Condición de contorno. Tierra

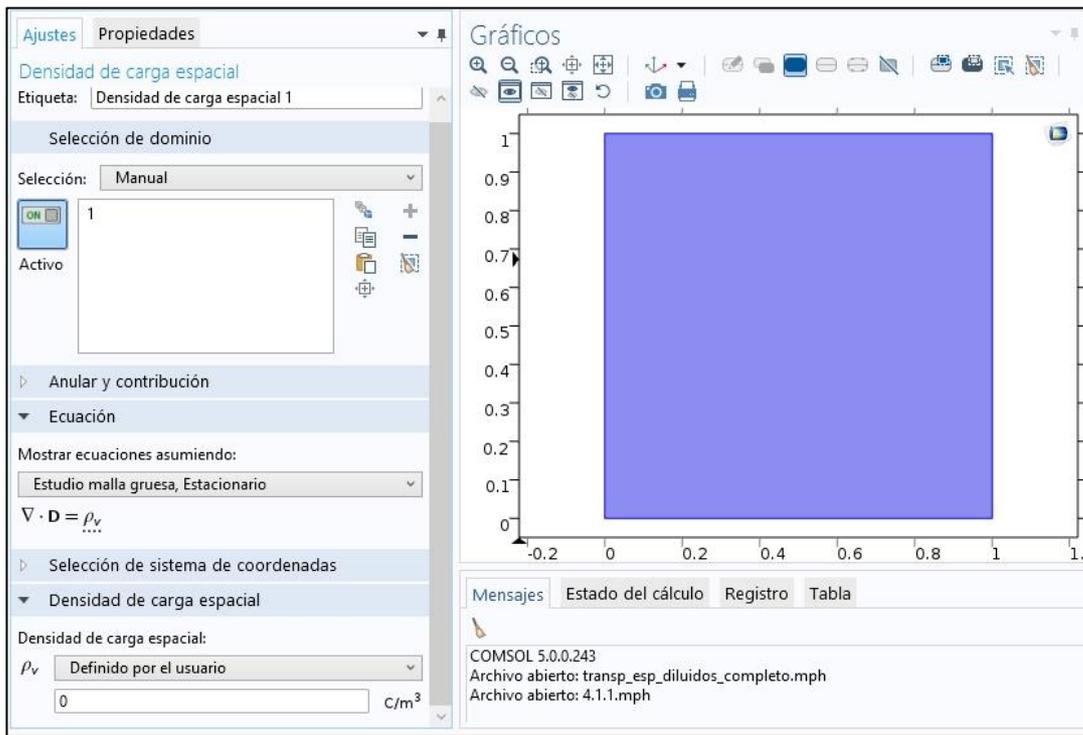


Figura 4-4. Densidad de carga espacial

Por último hay que realizar uno de los pasos más importantes cuando se está llevando a cabo un estudio por el método de los elementos finitos. Hay que determinar el **mallado** con el que se va a discretizar la geometría estudiada. Este paso es tan importante porque dependiendo del grosor que tome la malla se obtendrá resultados más o menos ajustados a la realidad. Por lo general cuanto más fino sea dicho mallado más se ajustarán los resultados a los reales pero más complicado será resolver el problema ya que se añaden más nodos y más se tarda en resolverlo. Por tanto hay que tomar una solución de compromiso entre el tiempo que tarda en realizarse el estudio y la fiabilidad de los resultados obtenidos. En las figuras 4-5, 4-6, 4-7 y 4-8 se muestran los 4 mallados que se van a utilizar a lo largo del estudio para representar la importancia de este.

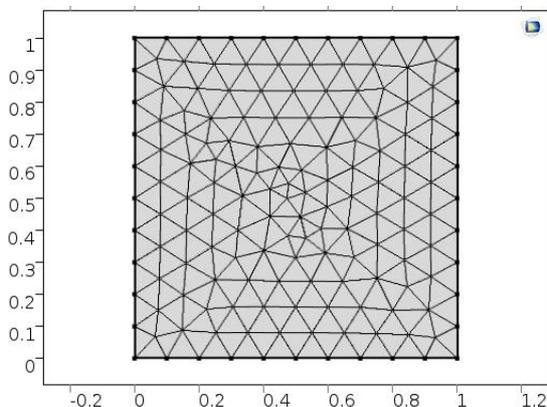


Figura 4-5 Malla gruesa

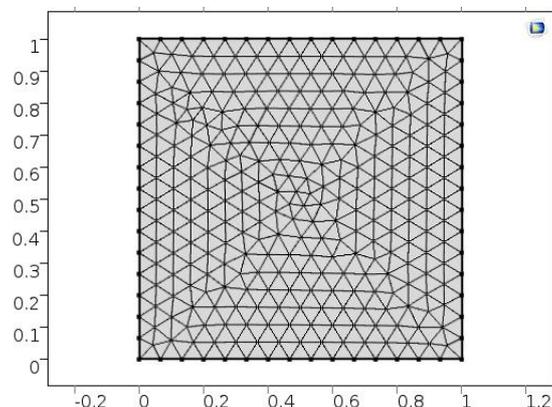


Figura 4-6 Malla normal

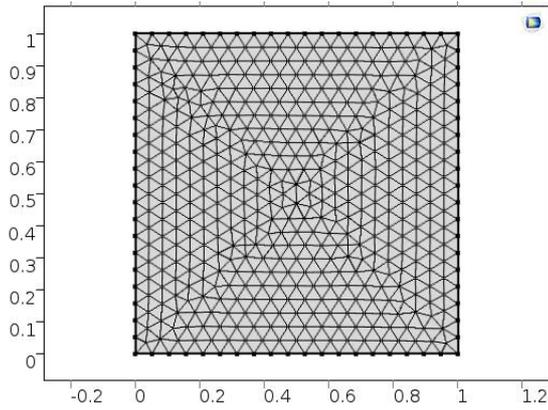


Figura 4-7 Malla fina

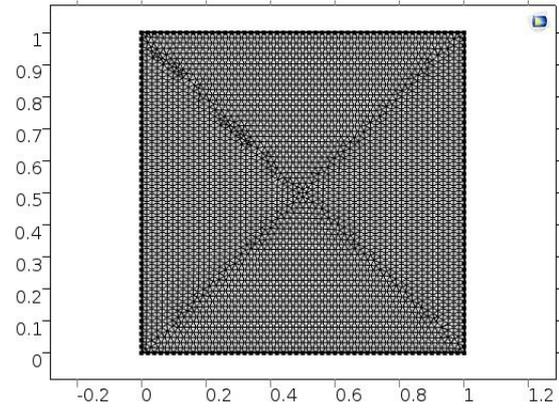


Figura 4-8 Malla extrafina

Las principales propiedades de cada una de estas mallas se presentan en la tabla 4-2

	Número de elementos de dominio	Número de elementos de contorno	Tamaño
Malla gruesa	268	40	0.032
Malla normal	578	60	0.022
Malla fina	928	76	0.018
Malla extrafina	6282	200	0.007

Tabla 4-2. Características de los mallados

Para determinar el tamaño típico de cada uno de los triángulos que forman la malla se ha procedido como se explica a continuación:

- Teniendo en cuenta que la superficie en la que estamos trabajando es un cuadrado de lado unidad, su superficie también es igual a la unidad.
- Partiendo de la hipótesis de que los elementos de dominio y de contorno tienen la misma superficie, lo cual no es una hipótesis muy fuerte ya que observando las figuras 4-5 a 4-8 se comprueba que tienen tamaños similares, se determina el número total de elementos de la malla y se obtiene la superficie que ocupa cada uno de estos elementos. Por ejemplo, para el caso de la malla gruesa se tiene que la superficie de cada triángulo sería

$$S_i = \frac{1}{268 + 40} = 3.24 \cdot 10^{-3}$$

- Por último, una vez que tenemos la superficie de cada elemento se toma como indicador del tamaño el radio que tendría un círculo con superficie la anteriormente calculada. Siguiendo

$$\text{con el ejemplo de la malla gruesa se tiene } R = \sqrt{\frac{3.24 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0.032$$

Procediendo de este modo con todas las mallas se ha rellenado la columna del tamaño en la tabla 4-2. Como es lógico, cuanto más fina es la malla, mayor número de elementos tanto en el dominio como el contorno y menor tamaño de los elementos.

Para finalizar se realiza el estudio y se obtienen los resultados que se comentan en los próximos apartados.

4.1.1 Densidad de carga nula

De nuevo vamos a empezar el estudio con el caso más simple de todos. Este se particulariza simplemente especificando que la densidad de carga espacial es igual a 0. Esto se hace, como ya se ha comentado, en el apartado de electrostática.

En la figura 4-9 se representan los resultados obtenidos directamente en *Comsol* para diferentes mallados y se compara también con el resultado analítico.

Se puede observar que todas las rectas son coincidentes. Esto se debe a que el mallado no ha influido en el resultado final obtenido ya que al ser una solución tan simple, con un mallado grueso es suficiente para obtener los resultados que más se ajustan a la realidad. Esto también se comprueba representando el resultado analítico que se consiguió anteriormente y comprobando que también coincide completamente con el resto de rectas obtenidas. Por tanto se puede decir que para un problema tan simple como el que aquí se plantea no es necesario realizar mallados muy finos para obtener resultados muy similares a la realidad. Conforme se vaya aumentando la complejidad del problema se irá demostrando que esto no siempre es así y elegir bien el mallado es fundamental para alcanzar resultados que se ajusten a la realidad.

Por su parte, el campo eléctrico, como ya se vio en la resolución analítica, para este caso es constante e igual a la unidad, por tanto todas las rectas vuelven a coincidir en una misma y tampoco es necesario realizar un mallado fino para obtener buenos resultados.

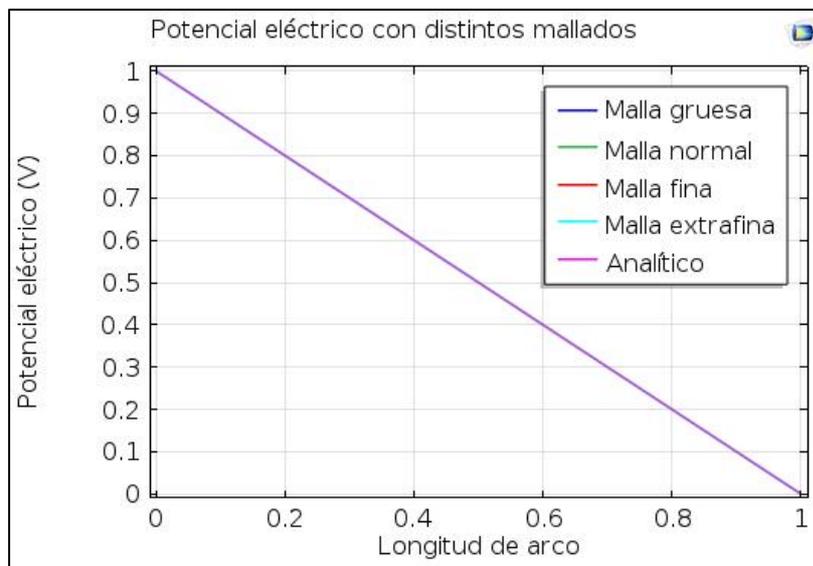


Figura 4-9 Comparación de potencial eléctrico

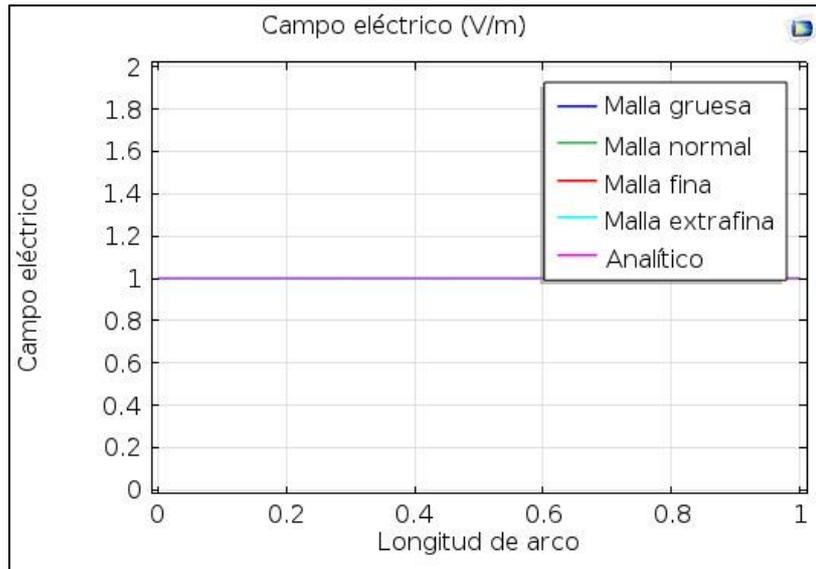


Figura 4-10 Comparación de campo eléctrico

4.1.2 Densidad de carga constante

A continuación se va a estudiar cómo cambian tanto el potencial como el campo eléctrico en el caso en que se tiene una densidad de carga espacial constante. Se comprueba que los resultados alcanzados son muy similares a los obtenidos en el caso analítico, ya que cuando se tiene una C pequeña el comportamiento es muy similar al caso en que la densidad de carga espacial es nula, y a medida que C aumenta se van obteniendo resultados que cada vez difieren más de este. Esto se observa en las figuras 4-11 y 4-12.

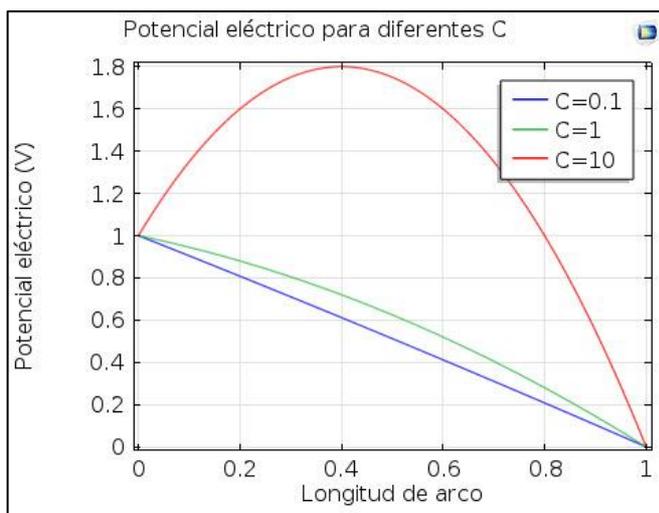


Figura 4-11 Potencial eléctrico para diferentes C

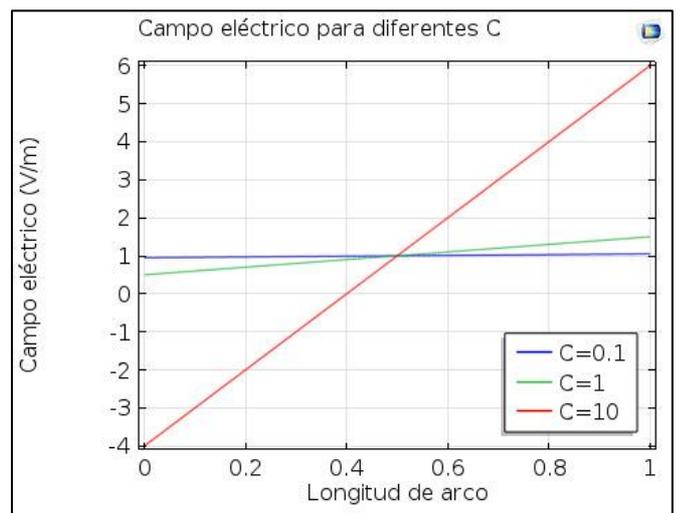


Figura 4-12 Campo eléctrico para diferentes C

En la figura 4-12 se observa que el campo eléctrico en el punto medio entre los planos es igual a la unidad independientemente del valor de C , como ocurría también en el caso analítico. Además para valores grandes de C vuelve a comprobarse que existe un cambio de polaridad del campo eléctrico, ya que es negativo en la zona inferior y positivo en la superior.

En cuanto a la figura 4-11 se puede decir que en el punto $y=0.4$, el potencial eléctrico para $C=10$ tiene un máximo y si comparamos este punto con su respectivo para $C=0.1$ se tiene que la diferencia entre ambos es del 67%.

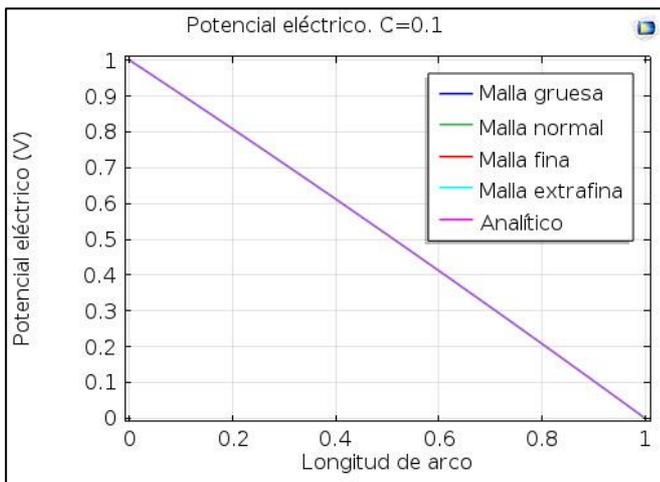


Figura 4-13 Potencial eléctrico para $C=0.1$

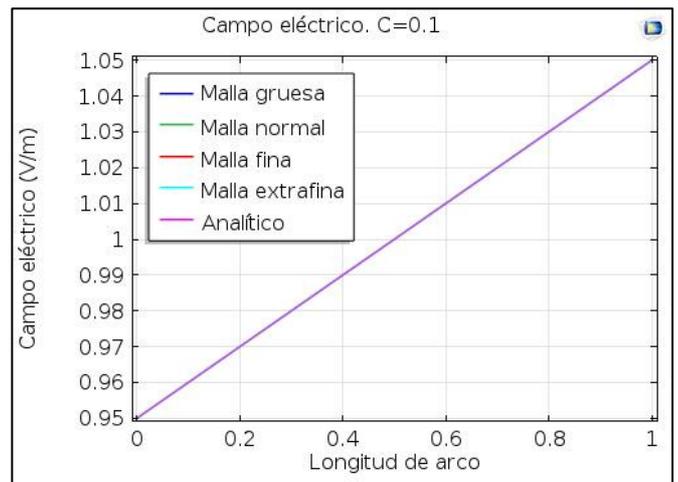


Figura 4-14 Campo eléctrico para $C=0.1$

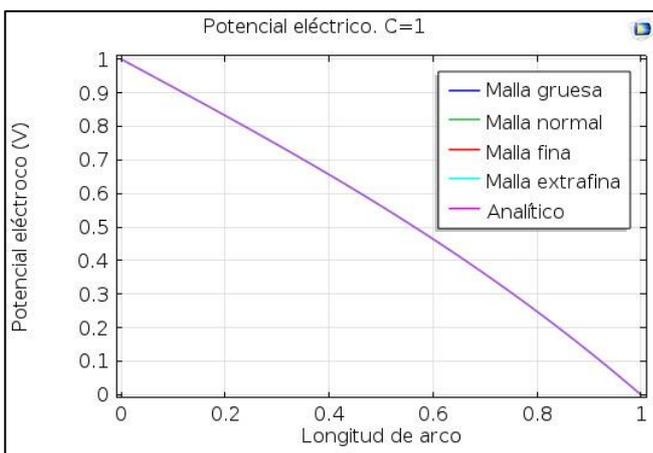


Figura 4-15 Potencial eléctrico para $C=1$

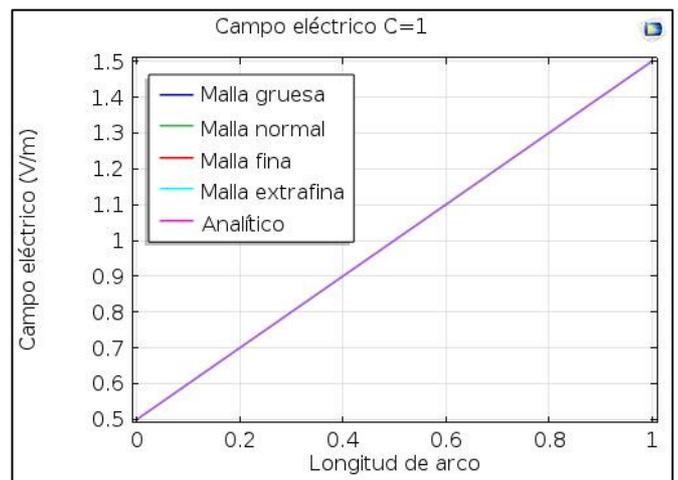


Figura 4-16 Campo eléctrico para $C=1$

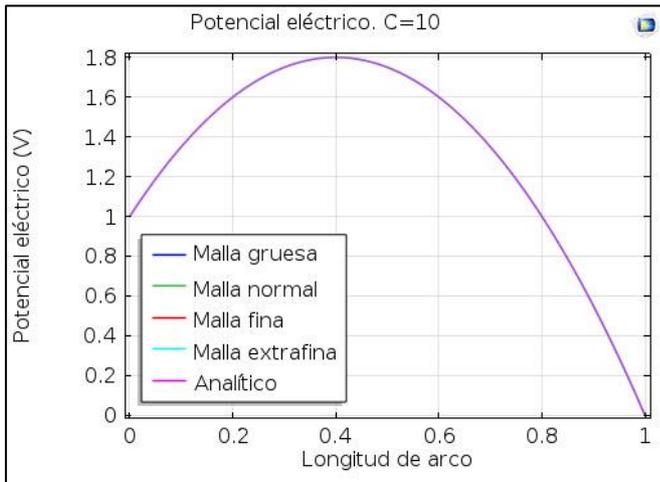


Figura 4-17 Potencial eléctrico para C=10

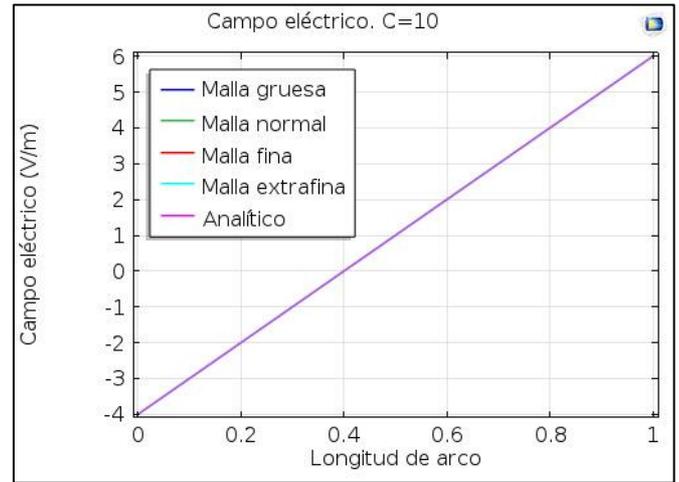


Figura 4-18 Campo eléctrico para C=10

En las figuras 4-13 a 4-18 se ve claramente que los resultados no cambian con el tipo de mallado ya que las curvas que aparecen en todos los estudios son coincidentes. También se ha representado en todas las gráficas el resultado analítico, que como se puede apreciar, a primera vista, también coincide; por tanto se puede decir que el estudio realizado en *Comsol* es correcto, ya que los resultados son los esperados.

Sin embargo, para confirmar estas afirmaciones se han exportado los datos de *Comsol* a *Matlab*, programa en el que resulta más fácil estudiar los datos obtenidos. Se han exportado los datos extraídos de *Comsol* en el estudio realizado con C=10 y las mallas gruesa y extrafina. Si se hace la diferencia entre estos datos se observa que las diferencias son del orden de 10^{-16} que es el error con que trabaja *Matlab*. En definitiva, una vez comparados los datos tanto del potencial como del campo eléctrico se puede concluir que no existen diferencias en los resultados obtenidos para un mallado extrafino y otro grueso.

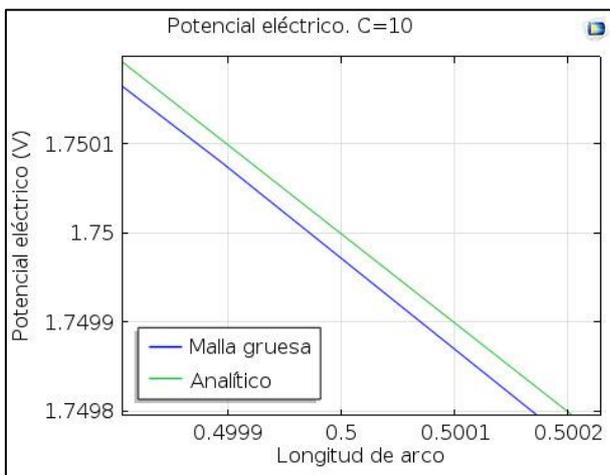


Figura 4-19 Errores en el potencial

Como última comprobación se han comparado estos datos de *Comsol* con los datos analíticos obtenidos con las ecuaciones (3.13) y (3.14). En este caso al hacer la diferencia entre los datos se tiene que estas son del orden de 10^{-5} , valor significativamente pequeño, pero no del orden de error de *Matlab*, lo que significa que existen pequeños errores entre los resultados analíticos y los obtenidos en *Comsol* aunque estos sean prácticamente despreciables. La mayor diferencia en los datos se obtiene en el punto $y=0.4999$, en la que con la malla gruesa se tiene que $\phi = 1.750079$ y analíticamente se tiene $\phi = 1.750105$ y se representan en la figura 4.19. Se puede contemplar que, efectivamente, las diferencias aunque existen son muy pequeñas y se puede deber a pequeños errores de *Comsol* al realizar el estudio.

Finalmente, hay que añadir que aunque al representar el campo eléctrico en las figuras 4-14, 4-16 y 4-18 puede parecer que tiene magnitudes similares para todos los valores de C, esto no es así ya que el eje de ordenadas de cada figura se ha adaptado para que se vea con un tamaño correcto cada una de ellas. Así para un valor de C=0.1 se tiene que el campo eléctrico varía entre 0.95 y 1.05, mientras que para C=10 las variaciones van desde -4 hasta 6.

4.2 Problema con corriente eléctrica

A continuación se van a resolver mediante el método de los elementos finitos las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17). Para ello una vez planteado el problema, tal y como se hizo en el apartado anterior – creada la geometría, configurada la electrostática y creados los mallados – es necesario añadir una nueva física a nuestro problema, ya que ahora se va a estudiar también el transporte y en *Comsol* esto no aparece en la parte de *Electrostática*.

Lo primero es decidir qué física vamos a añadir. Se va a realizar el estudio con dos alternativas y se va a decidir cuál es la mejor de ellas.

Estas dos alternativas son:

1. En el apartado de *matemáticas* el subapartado *ecuaciones diferenciales clásicas* y, dentro de este, se elige *ecuación de convección y difusión*.
2. En el apartado de *transporte de especies químicas* se elige el subapartado *transporte de especies diluidas*.

Así mismo también se resolverá dos tipos de problemas distintos: uno en el que el campo eléctrico sea constante y otro en el que no lo sea.

Por tanto, las ecuaciones que se van a resolver son las mostradas en (4.3) sujetas a las condiciones de contorno (4.4). La última condición de contorno se refiere a que el campo eléctrico paralelo al eje y.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{q} \bar{E}) &= 0 \\ \nabla^2 \bar{\phi} &= -\bar{q} \\ \bar{E} &= -\nabla \bar{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(y=0) &= 1 \\ \phi(y=1) &= 0 \\ q(y=0) &= C \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0,1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

4.2.1 Estudio temporal con campo eléctrico constante.

Si $\nabla^2 \bar{\phi} = 0$, esto implica que $\bar{E} = cte$ y, por tanto, $\nabla \cdot \bar{E} = 0$.

En la primera ecuación de (4.3) se tiene que $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{q} \bar{E}) = 0$, desarrollando el segundo término se

llega a $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{E} \cdot (\nabla \bar{q}) + \bar{q} (\nabla \cdot \bar{E}) = 0$ y, como el gradiente del campo es nulo, se obtiene la ecuación final (4.5). Físicamente este problema equivale a suponer que C es muy pequeño. En este límite la carga espacial es tan pequeña que el campo eléctrico no se ve afectado por ella.

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{E} \cdot \nabla \bar{q} = 0 \quad (4.5)$$

Esta nueva ecuación hay que añadirla a *Comsol* y lo haremos en las dos físicas que se nombraron con anterioridad.

Además en el apartado de *Electrostática* es necesario poner que la densidad de carga espacial es 0, simbolizando que el gradiente del campo eléctrico es nulo.

4.2.1.1 Ecuación de convección y difusión.

Una vez se tiene configurado correctamente la geometría, el mallado y la electrostática se añade una nueva física para poder añadir la ecuación del transporte de Navier-Stokes. En este caso añadiremos la ecuación de convección y difusión que se encuentra en el apartado *Matemáticas*.

Una vez abierta esta nueva física hay que establecer que la variable dependiente será q , tal y como se muestra en la figura 4-20.

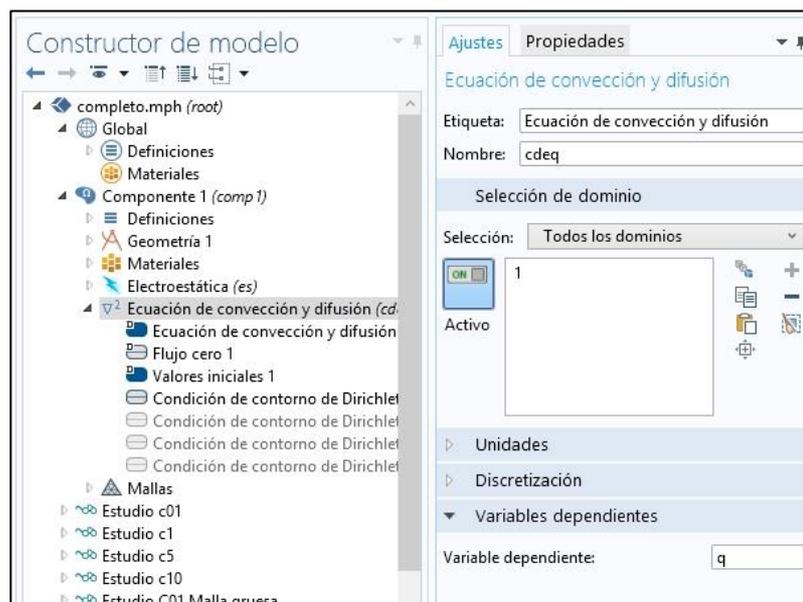


Figura 4-20 Configuración de la *ecuación de convección y difusión*

La ecuación que implementa este apartado es la mostrada en (4.5) en la que da , c , β y f son constantes que hay que determinar.

$$da \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla q) + \beta \cdot \nabla q = f \quad (4.6)$$

Si comparamos la ecuación que implementa *Comsol* con la que nosotros queremos añadir es fácil darse cuenta de qué valores deben tomar da y f . Para ver más fácilmente los valores que corresponden a c y b es conveniente modificar la ecuación (4.5) para que se parezca más a la aquí mostrada. Para ello hacemos uso de la relación entre potencial y campo eléctrico y cambiamos la ecuación (4.5) por (4.6) y de esta forma es más claro ver que las constantes deben tomar los valores que aparecen en la tabla 4-3.

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} - \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \bar{q} = 0 \quad (4.7)$$

Constante	da	c	β	f
Valor	1	0	$\nabla \bar{\phi}^2$	0

Tabla 4-3. Valores de las constantes implementadas en *Comsol*.

Finalmente se toman valores iniciales de q y su derivada nulos y se añade la condición de contorno de Dirichlet. En esta se impone que en el plano inferior haya una densidad de carga espacial constante. Se impondrá el valor de $C=0.1$, ya que es el único valor de C en que la aproximación de campo eléctrico constante tiene sentido.

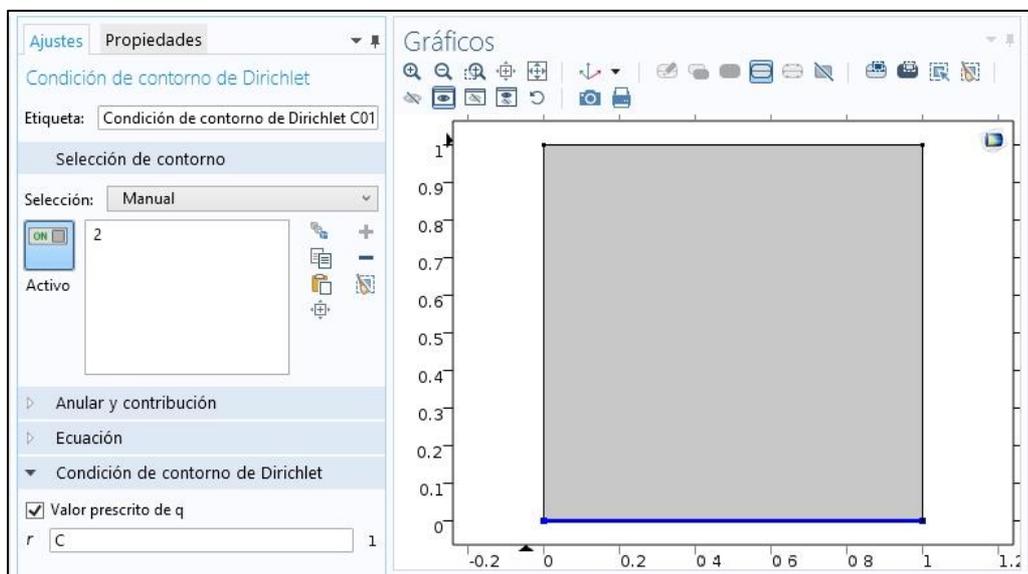


Figura 4-21. Configuración de condiciones de contorno

² Recordemos que en *Comsol* al potencial se le llama V . En el apartado que permite rellenar el valor de β hay dos recuadros para que se añada su valor en dirección x y dirección y ; por tanto lo que hay que escribir en esos recuadros es $-V_x$ y $-V_y$, donde los subíndices x e y simbolizan las derivadas parciales en esas direcciones.

Los resultados obtenidos se muestran en las imágenes a continuación:

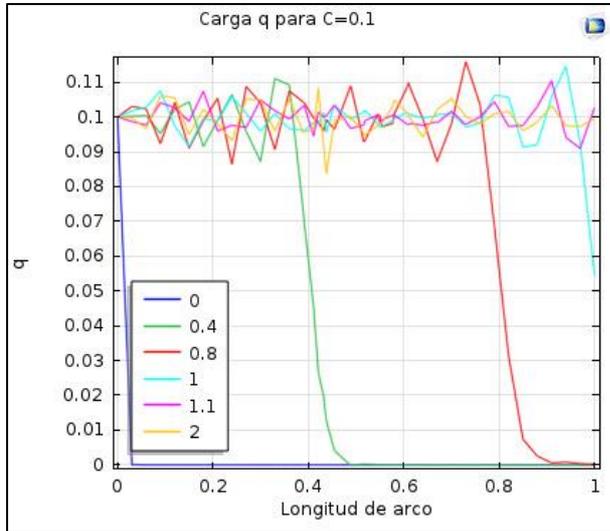


Figura 4-22. Carga para C=0.1

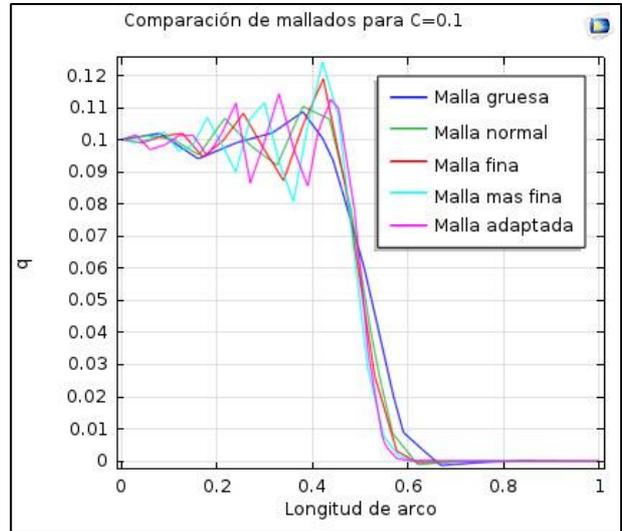


Figura 4-23. Comparación de mallados C=0.1

En la primera figura se ha representado la carga q para distintos valores del tiempo. En ella se ve que la carga va avanzando desde el plano inferior hasta llegar al superior. En el momento en que el tiempo adimensional es igual a 1, se ha alcanzado el régimen estacionario. Teniendo en cuenta la adimensionalización que se ha realizado, esto quiere decir que se llega al régimen estacionario

$$\text{cuando } t = \frac{d}{k \cdot E_0}.$$

En la otra figura se ha hecho una comparación de los resultados obtenidos al utilizar diferentes tipos de mallas. En este caso se han utilizado 5 mallados diferentes; los 4 ya conocidos que aparecen en las figuras 4-5 a 4-8 y uno que no se había utilizado hasta el momento. Se trata de un mallado adaptativo que, dependiendo de las necesidades del estudio en cada momento, va adaptando la malla para conseguir los mejores resultados posibles.

Algunas de las mallas que crea este mallado adaptativo son las que se muestran en las figuras 4-24, 4-25 y 4-26

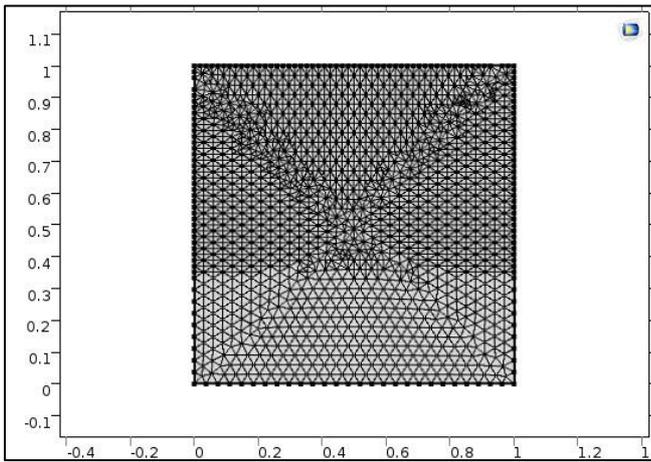


Figura 4-24. Malla adaptada

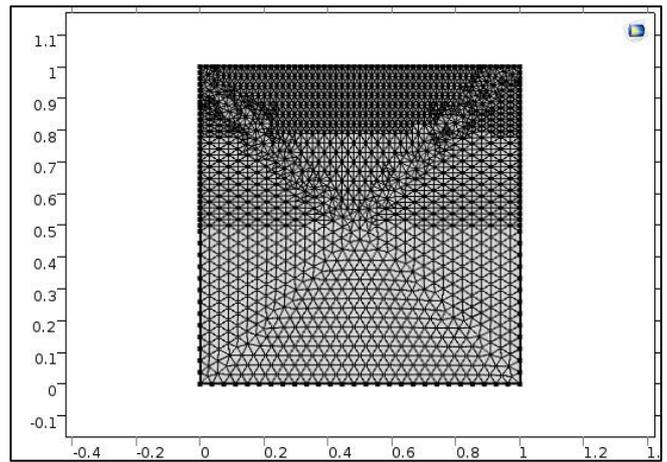


Figura 4-25. Malla adaptada

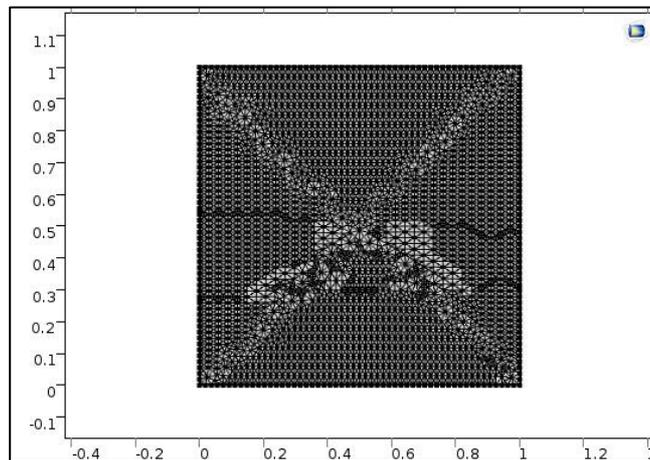


Figura 4-26. Malla adaptada

Como se puede observar el mallado va cambiando dependiendo de las necesidades. En las zonas donde se producen cambios más bruscos se realiza un mallado más fino y en las zonas en las que no hay cambios importantes el mallado es más grueso.

Los cambios se producen en distintas zonas dependiendo de la magnitud que se esté evaluando. Por defecto, al crear el mallado adaptativo *Comsol* toma como magnitud de referencia para hacer dicho mallado el potencial eléctrico; pero este no tiene tantos cambios como la carga, que es lo que aquí se está estudiando, por tanto es necesario cambiar la magnitud de referencia para que los resultados se adapten mejor al estudio que se quiere realizar.

Esto se hace siguiendo los pasos que se muestran en la figura 4-27. En el apartado de *indicador del error* donde aparece qx y qy , originalmente aparecían Vx y Vy , estos son los valores que se han tenido que cambiar.

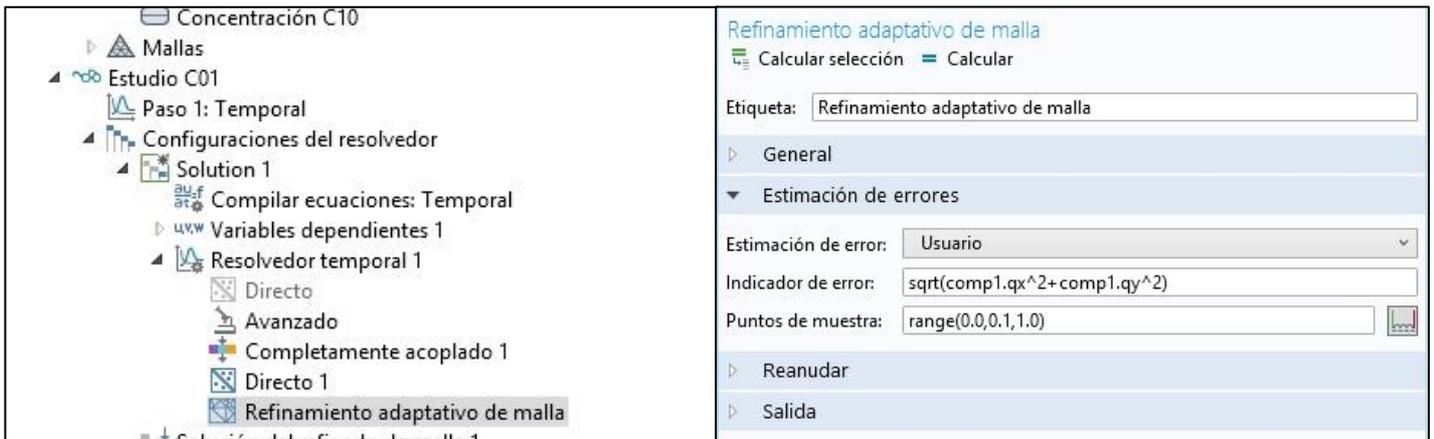
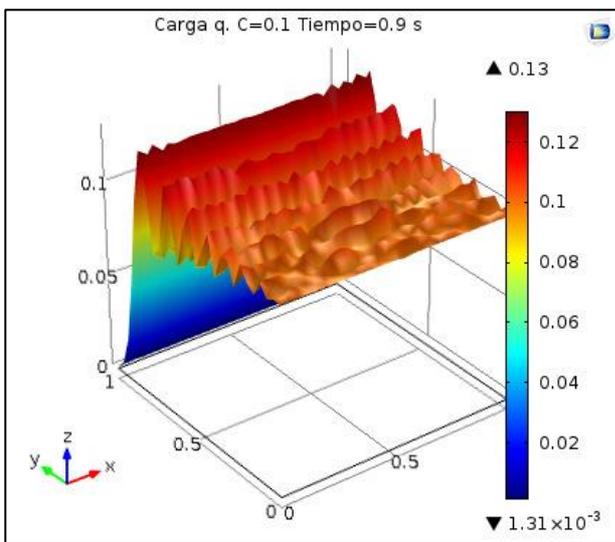


Figura 4-27. Configuración refinamiento de malla

Si se observa las imágenes de comparación de mallados se puede ver claramente como a medida que el mallado se va haciendo más fino se crean nuevos puntos en los que se evalúan las funciones, lo que hace que los resultados sean más fieles a la realidad ya que las zonas en la que la solución es aproximada por el programa son menores y los puntos en los que los resultados son realmente evaluados aumentan.

Por último, hay que señalar que con ninguno de los mallados se han obtenido buenos resultados ya que aparecen grandes fluctuaciones en la zona en que la carga es igual a C . Esto señala que este tipo de estudio no es el adecuado para conseguir un buen resultado que se ajuste a la realidad. Además se obtiene otro comportamiento que no se ajusta a la realidad; en las imágenes se observa que la carga llega a ser nula en algunos momentos, lo cual es imposible físicamente.



La figura 4-28 se ha obtenido con el mallado adaptado y aun así aparecen grandes fluctuaciones. La zona en la que la $q=0.1$ debería ser suave, pero se observa claramente que no es así, confirmando una vez más que esta física no es adecuada para realizar este estudio.

Estas oscilaciones son debidas al carácter hiperbólico de las ecuaciones y a que la física elegida para resolverlas no es capaz de hacerlo de forma correcta debido a su complejidad. Es necesario buscar otra física que resuelva mejor este tipo de problemas.

Figura 4-28. Representación en altura de la carga para $C=0.1$

4.2.1.2 Transporte de especies diluidas

En este caso la física que se añade además de la *Electrostática* es la llamada *Transporte de especies diluidas*. Para configurar este módulo en primer lugar hay que elegir el mecanismo de transporte que se va a utilizar. En nuestro caso se elige la *migración en campo eléctrico*. En el apartado de estabilización consistente hay que elegir el *tipo de difusión de viento lateral para el flujo libre* en el que las dos posibilidades son: *Do carmo* y *Galeño* [2] y *Codina* [3]. Se realizarán dos estudios, uno con cada tipo para comparar los resultados obtenidos. Por último se elige la variable dependiente que vuelve a ser q .

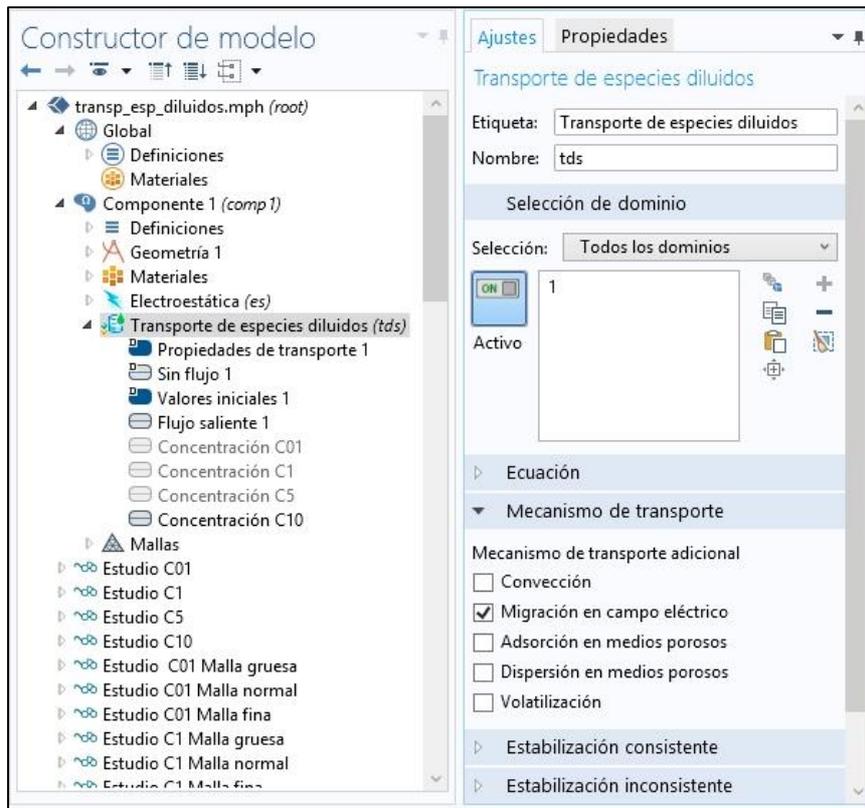


Figura 4-29. Configuración de *transporte de especies diluidas*

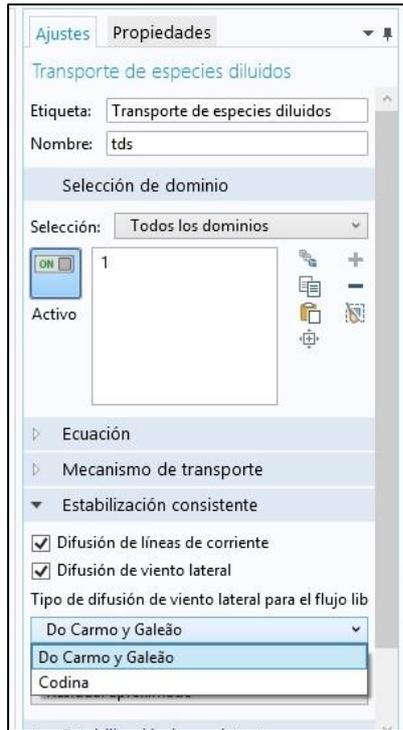


Figura 4-30. Configuración tipo de difusión de viento lateral

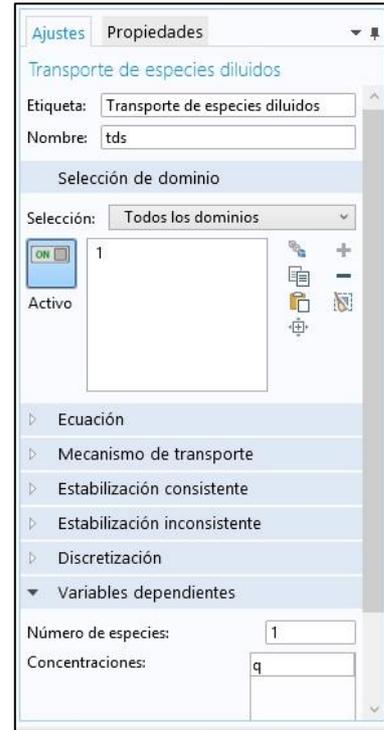


Figura 4-31. Configuración variable dependiente

Con todo esto la ecuación que nos aparece es

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (-D_q \nabla q_i - z_q u_{m,q} F c_q \nabla V) = R_q \quad (4.8)$$

En la que las constantes que hay que determinar son $\left\{ \begin{matrix} D_q \\ u_{m,q} \\ z_q \end{matrix} \right\}$. Estas se determinan comparando la

ecuación (4.8) con la ecuación (4.2).

Se comprueba fácilmente que D_q tiene que ser igual a cero, pero si le asignamos este valor el programa devuelve errores, por tanto se le da un valor lo suficientemente pequeño para hacer que este término no influya en la resolución de la ecuación pero sin llegar a ser cero. Por ejemplo se ha hecho con el valor $D_q = 10^{-9}$.

Los valores asignados a las otras dos constantes son $u_{m,q} = 1$ y $z_q = 1/96485$, donde el número 96485 se corresponde con la constante de Faraday. Se comprueba que asignando estos valores en la ecuación (4.8) se comporta como la ecuación (4.2).

Como valor inicial se pone que q es nula y en el plano superior se establece una condición de contorno de flujo saliente ($-\vec{n} \cdot \nabla q = 0$). Por último en el plano inferior la condición de contorno se corresponde con una concentración a la que le daremos el valor característico $C=0.1$, porque como se explicó anteriormente, al estar en un problema con el campo eléctrico constante, es el único valor de C que tiene sentido físico estudiar.

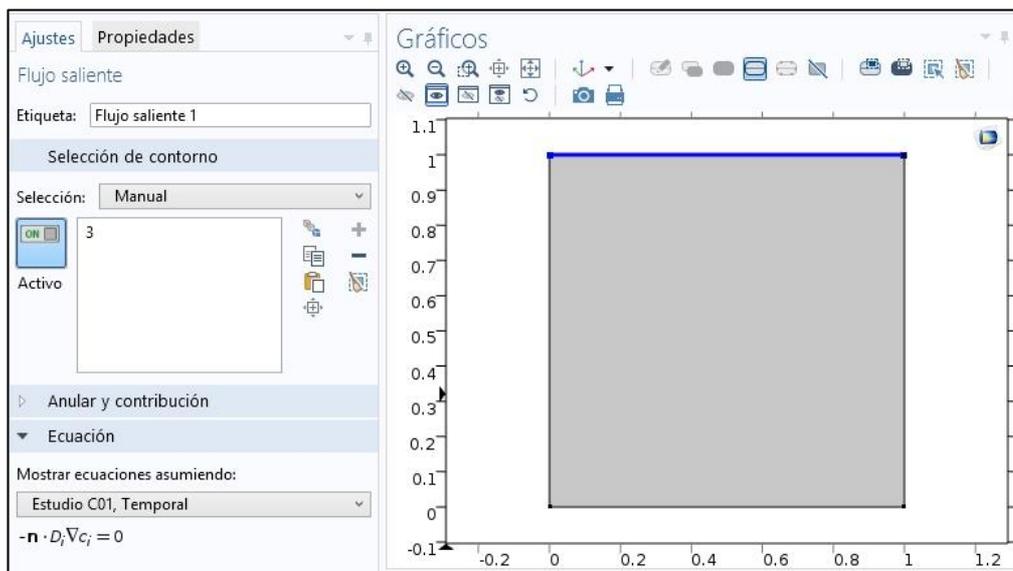


Figura 4-32. Condición de contorno plano superior

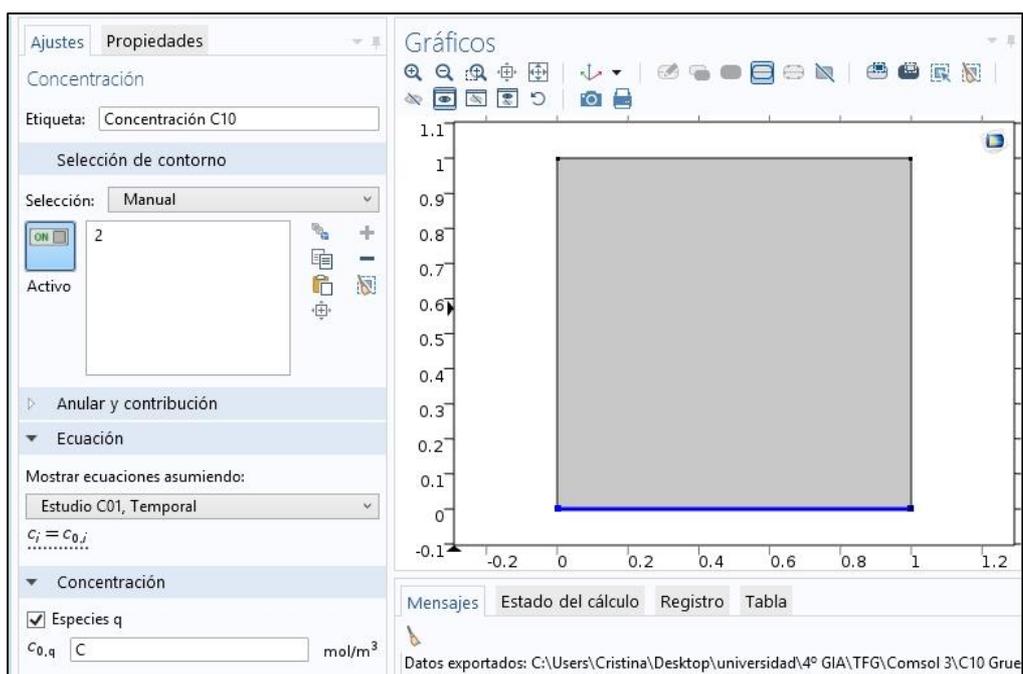


Figura 4-33. Condición de contorno plano inferior

4.2.1.2.1 Do Carmo y Galeão

En el caso que el tipo de difusión de viento lateral es Do Carmo y Galeão se obtienen los resultados que se representan en la figura 4-34

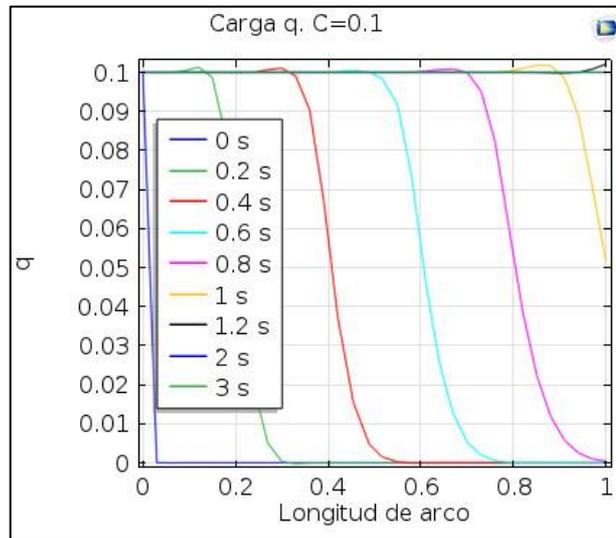


Figura 4-34. Evolución de la carga $C=0.1$

En esta figura se ve como esta física representa los valores de manera más suave a la anteriormente utilizada. Hay una pequeña sobreoscilación que se corrige rápidamente y al llegar al régimen estacionario las curvas se vuelven completamente suaves. De nuevo al régimen estacionario se llega cuando el tiempo adimensional es igual a la unidad.

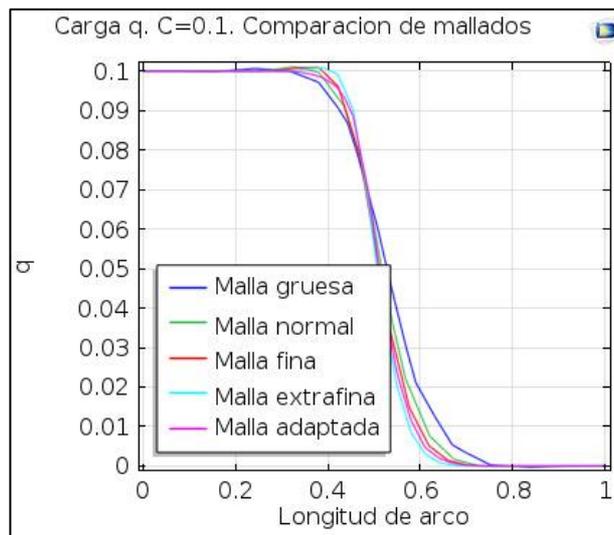


Figura 4-35. Comparación de mallas $C=0.1$

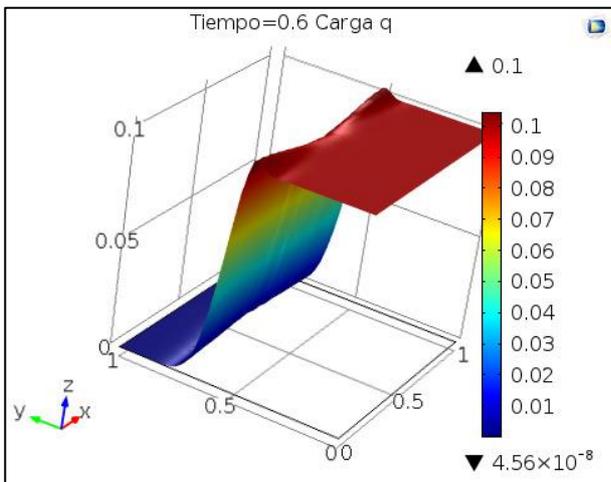
Si nos centramos en la figura de comparación de mallados se observa mucho mejor la importancia de este. Con la malla gruesa el número de puntos evaluados es demasiado pequeño para seguir correctamente la caída de carga y se aleja mucho de lo ideal que es una caída completamente vertical. A medida que el mallado es más fino dicha caída se vuelve cada vez más vertical, mejorándose aún más con la malla adaptada.

En la tabla 4-4 aparece la distancia que se recorre en el eje y desde que la carga deja de valer el correspondiente C en cada caso hasta que vale 0.

	Malla gruesa	Malla normal	Malla fina	Malla extrafina	Malla adaptada
C=0.1	0.63	0.52	0.49	0.43	0.4

Tabla 4-4 Distancia en la caída de la carga para $t=0.5$

Se puede observar que a medida que la malla se hace más fina las caídas son más verticales y que a medida que C aumenta también lo hace la distancia que se recorre en dicha caída, excepto para los casos de mallado extrafino y adaptado con $C=10$ que mejoran los casos con $C=0.1$ y $C=1$.



Comparando la figura 4-36 con la figura 4-28 se comprueba que con la física de *transporte de especies diluidas* el movimiento de la carga es mucho más suave que con la *ecuación de convección y difusión*. Por tanto este método de resolución se considera mejor y más fiel a la realidad.

Figura 4-36. Representación de la carga en altura $C=0.1$

4.2.1.2.2 Codina

A continuación se comparan los resultados con el tipo de difusión de viento lateral *Do Carmo y Galeão*, con el *Codina*. En la figura 4-37 se puede comprobar que los resultados son diferentes al utilizar un tipo de difusión u otro. De este modo, cuando se hace el estudio con *Codina* se observa que tiene una mayor sobreoscilación; sin embargo, las caídas son más verticales que cuando se utiliza *Do Carmo y Galeão*. Así no es posible establecer cuál de los dos métodos es mejor, ya que cada uno presenta sus ventajas e inconvenientes y dependiendo de dónde se necesite una mayor precisión será necesario utilizar un método de resolución u otro.

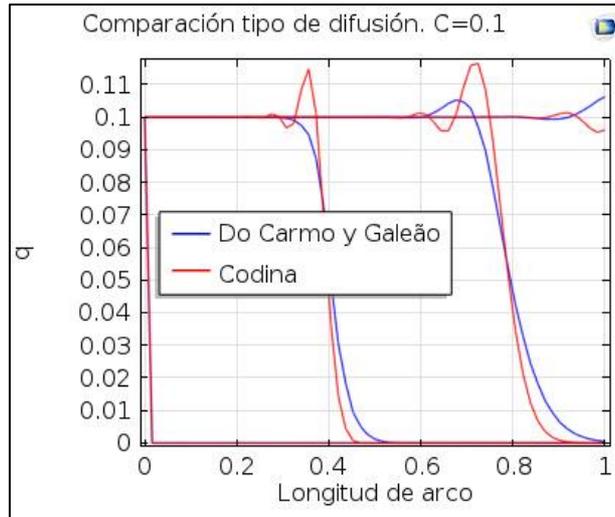


Figura 4-37. Comparación tipos de difusión C=0.1

En la tabla 4-5 aparecen los datos más característicos de estos métodos, comparándose así la sobreoscilación con cada uno de ellos y la distancia que se recorre en la caída.

Tanto en las imágenes como en la tabla se toman los datos con el mallado adaptativo, que en todos los casos es el más fiel a la realidad.

Del mismo modo, los datos que aparecen en la tabla son los tomados para $t=0.8$ que es la segunda de las curvas que aparece en la figura 4-37.

	<i>Do Carmo y Galeão</i>		<i>Codina</i>	
	Sobreoscilación	Distancia	Sobreoscilación	Distancia
C=0.1	5%	0.29	16%	0.2

Tabla 4-5. Sobreoscilación y distancia para distintos métodos en $t=0.8$

Gracias a la tabla 4-5 se vuelve a comprobar que el método *Do Carmo y Galeão* es adecuado si se necesita hacer un estudio con poca sobreoscilación, mientras el *Codina* es el adecuado para caídas más verticales.

4.2.2 Estudio temporal con ecuaciones completas

Por último se va a realizar el estudio en el que se resolverá por completo las ecuaciones de Navier-Stokes y de Poisson. En este apartado la única simplificación que se va a realizar es la de tomar el fluido en reposo, por lo que $\bar{u} = 0$.

Si recordamos las ecuaciones adimensionalizadas que queremos resolver son:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{t}} + \nabla \cdot (\bar{q} \bar{E}) = 0$$

$$\nabla^2 \bar{\phi} = -\bar{q}$$

$$\bar{E} = -\nabla \bar{\phi}$$

Sujetas a las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{array}{l} \phi(y=0) = 1 \\ \phi(y=1) = 0 \\ q(y=0) = C \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0,1} = 0 \end{array} \right\}$$

De nuevo se van a introducir en *Comsol* y se van a resolver con dos físicas distintas para determinar cuál se adapta mejor a la realidad.

Para realizar este problema en *Comsol*, tal y como se explicó anteriormente, hay que crear un problema temporal y añadirle la física *Electrostática* con sus respectivas condiciones de contorno (tierra en el plano superior y un potencial de valor unidad en el inferior) y una *densidad de carga espacial*.

La diferencia entre este apartado y 4.2.1 radica en qué densidad de carga espacial se añade. En el caso anterior se tenía que la densidad de carga era nula, para así anular el laplaciano del potencial. En este caso, será igual a q , siendo q la variable dependiente que añadiremos en la física que utilizemos para estudiar el transporte de carga.

A continuación se determina el mallado que se va a emplear. Se volverán a utilizar los representados en las figuras 4-5, 4-6, 4-7 y 4-8, además del mallado adaptativo.

Finalmente solo queda decidir con qué física se realizará el estudio del transporte de carga. Se emplearán las dos que vimos en el apartado anterior y se determinará cuál es más conveniente para este nuevo problema.

4.2.2.1 Ecuación de convección y difusión

Esta física se configura como se describió en el apartado 4.2.1.1. Tan solo es necesario determinar cuál será la variable dependiente, a la que llamaremos q , y los valores que toman los coeficientes que aparecen en la ecuación $da \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla q) + \beta \cdot \nabla q = f$ para asimilarla a la que queremos implementar. Así mismo, hay que especificar con la condición de contorno de Dirichlet qué valor toma la carga en el plano inferior.

Debido a que no existen diferencias entre la ecuación de transporte que se tiene que implementar ahora y la que se utilizó en el apartado 4.2.1.1, los coeficientes de la ecuación son los que aparecían en la tabla 4-3, y como condición de contorno se tomará que la carga en el plano inferior es igual a C , que igualaremos a los valores típicos $C=0.1$, $C=1$ y $C=10$.

Una vez se tiene toda la configuración necesaria se pasa a realizar el estudio y se obtienen los resultados mostrados a continuación.

En las figuras 4-38 y 4-39 aparecen los resultados obtenidos para $C=0.1$ y $C=1$. En ellas se observa que no son correctos, debido tanto a las oscilaciones que aparecen, como a que la carga es creciente a medida que aumenta el tiempo y esta se acerca al plano superior. Este comportamiento es contrario al que se mostró en la figura 3-7, en la que se comprueba que, según los resultados obtenidos analíticamente, la carga debe disminuir a medida que nos acercamos al plano superior. Con $C=0.1$ este efecto no se aprecia demasiado pero con $C=1$ queda claro que estos resultados no puede ajustarse a la realidad ya que la carga final es siete veces mayor a la inicial, cuando en la realidad debería disminuir.

Si se sigue aumentando el valor de C y se realiza un estudio con $C=2$ se obtienen los resultados de las figuras 4-40 y 4-41. Hay que destacar que este estudio devuelve un error que dice que en $t=0.5$ se alcanza una singularidad y el problema no converge. Por este motivo en la figura 4-40 aparece representado solo el tiempo desde 0 hasta 0.4, y a partir de este momento el programa devuelve unos valores con dimensiones mucho más grandes que las anteriores y un comportamiento que no se parece en absoluto al comportamiento real del problema. Estos errores se representan en la figura 4-41, en la que aparecen dos gráficos. Los errores se han separado en estos dos gráficos ya que si solo se representara el segundo de ellos, llega a alcanzar valores tan elevados que no se apreciarían los errores que devuelve en $t=0.5$.

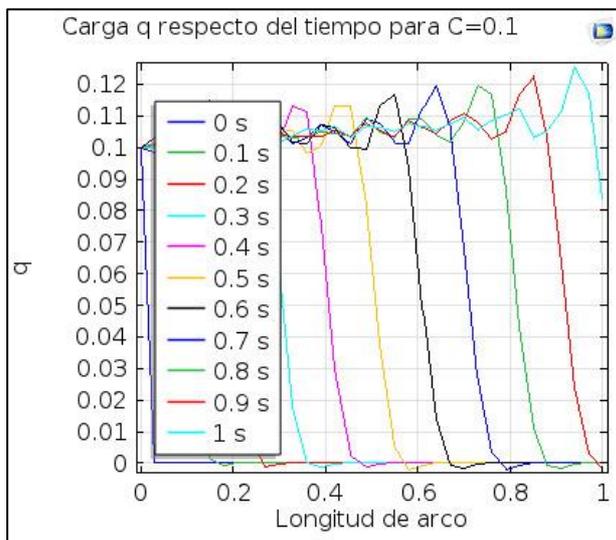


Figura 4-38. Carga q para $C=0.1$

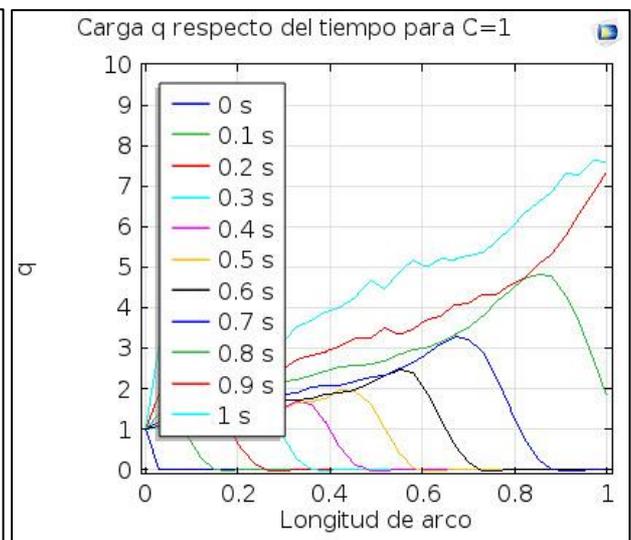


Figura 4-39. Carga q para $C=1$

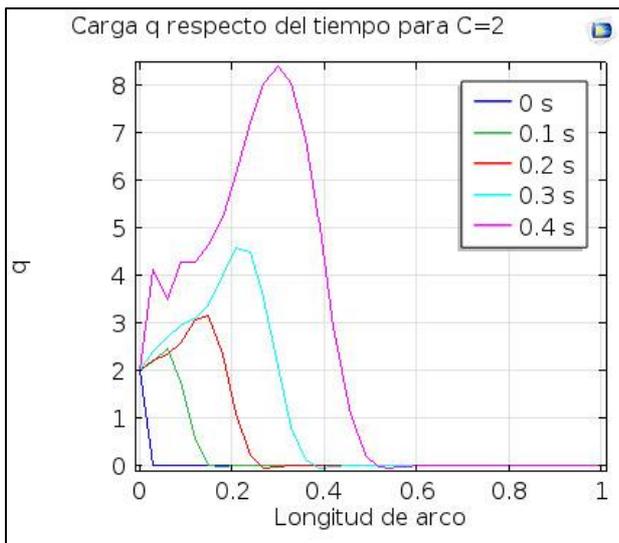


Figura 4-40. Carga q para C=2

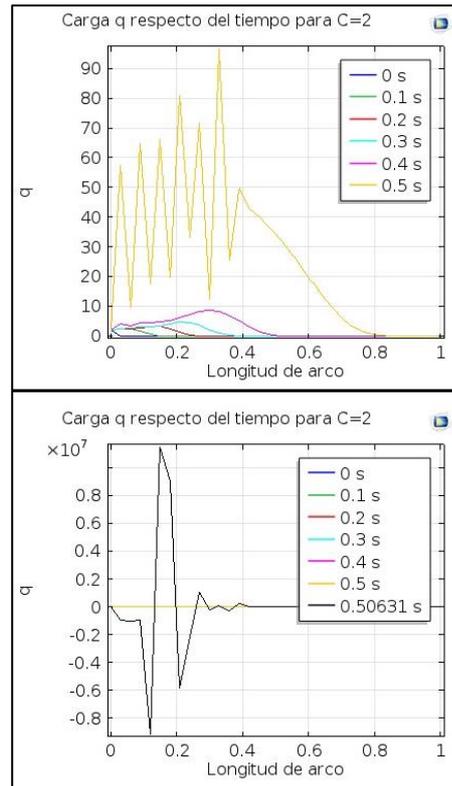


Figura 4-41. Errores para C=2

Por último se realiza el problema con C=10. En este caso, el programa devuelve un error cuando el tiempo es igual a 0.1 y las curvas que se pueden representar son las que aparecen en las imágenes 4-42 y 4-43. De nuevo se vuelve a comprobar que la física utilizada no es la adecuada para resolver este problema y es necesario buscar otra para conseguir una solución razonable.

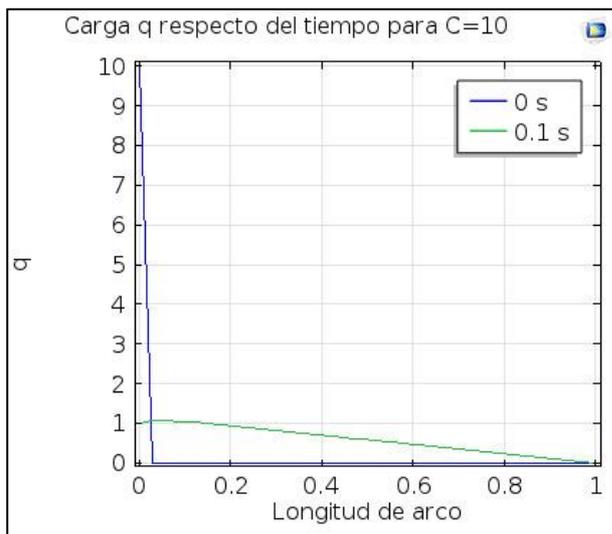


Figura 4-42 Carga q para C=10



Figura 4-43. Errores para C=10

Dado que los fallos encontrados al intentar solucionar el problema con esta física son tan amplios, no se solucionan al realizar el estudio con mallados más finos o adaptativos, ya que el problema no es el número de puntos evaluados, sino la complejidad del estudio que se está intentando realizar y el carácter hiperbólico de este. Sin embargo, en las figuras 4-54 y 4-55 se comprueba que al hacer el estudio con un mallado adaptativo, aunque no se obtengan resultados acorde con la realidad, al menos se consiguen magnitudes menores a las obtenidas con el mallado extrafino y se puede decir que se mejora, de alguna forma, el resultado final. Debido a que en las figuras no se aprecia qué valores se obtienen con la malla adaptada, en la tabla 4-6 aparece el valor pico – pico (diferencia entre los valores más alto y más bajo alcanzados) en cada una de las curvas.

	Valor pico – pico con malla adaptada	Valor pico – pico con malla fina	Diferencia
C=2	537	$2.09 \cdot 10^7$	99.99%
C=10	110	5430	97.97%

Tabla 4-6. Valores pico – pico para diferentes mallados y Cs.

Por último destacar que si se observan las leyendas de las figuras 4-44 y 4-45 se puede comprobar que los tiempos en los que se han representado las imágenes son distintos para el mallado adaptado y el mallado fino. Esto se debe a que el programa devuelve error en diferentes tiempos según sea el mallado que se está utilizando.

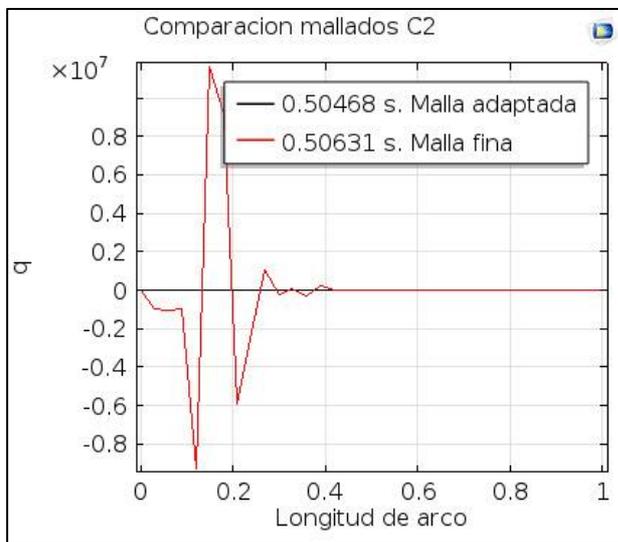


Figura 4-44 Comparación de mallados para C=2

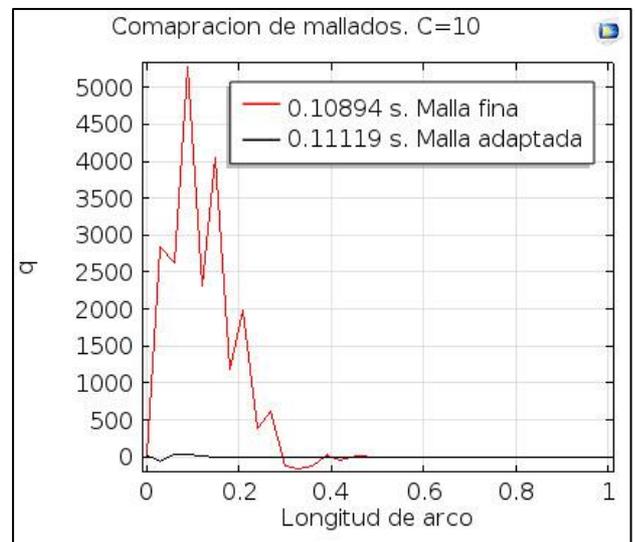


Figura 4-45 Comparación de mallados para C=10

Por todo lo aquí comentado se determina que el estudio realizado con la *Ecuación de convección y difusión* no es adecuado para resolver el problema debido a que devuelve comportamientos que no se asemejan a la realidad, además de dar errores al intentar resolverlos. Por tanto es necesario buscar una nueva física que resuelva el problema planteado de forma más acorde al mundo real.

4.2.2.2 Transporte de especies diluidas

Dado que en el apartado anterior utilizando la física llamada *Transporte de especies diluidas* se consiguieron buenos resultados, se volverá a resolver el problema utilizándola. Una vez más se configura la *Electrostática* y en el apartado de *Densidad espacial de carga* se determina que su valor es igual a q , que es la variable dependiente que pondremos al añadir la ecuación del transporte de especies diluidas. El resto de la configuración del estudio se realiza tal y como se hizo anteriormente y aparece en las figuras 4-32 a 4-36.

El estudio se va a realizar con dos tipos de difusión de viento lateral: *Do Carmo* y *Galeão* y *Codina* y se van a determinar las similitudes y diferencias entre hacerlo con uno u otro.

4.2.2.2.1 Do Carmo y Galeão

Se empieza con el tipo de difusión de viento lateral llamado *Do Carmo* y *Galeão*.

En este caso se obtienen resultados similares a los analíticos y que, por tanto, se puede determinar que se asemejan más a la realidad de lo que lo hacían los resultados conseguidos con la *Ecuación de convección y difusión*. Para empezar, tal y como se muestra en las figuras 4-46, 4-47 y 4-48, la carga disminuye a medida que se acerca al plano superior, y al llegar al estacionario tiene un comportamiento similar al que se consiguió analíticamente.

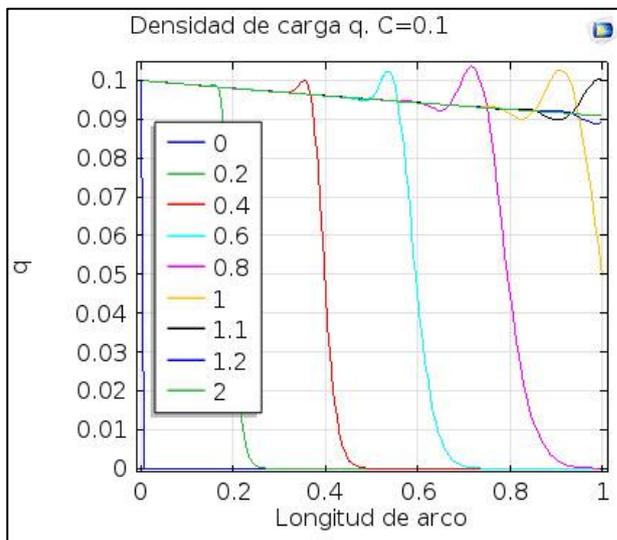


Figura 4-46 Carga para $C=0.1$

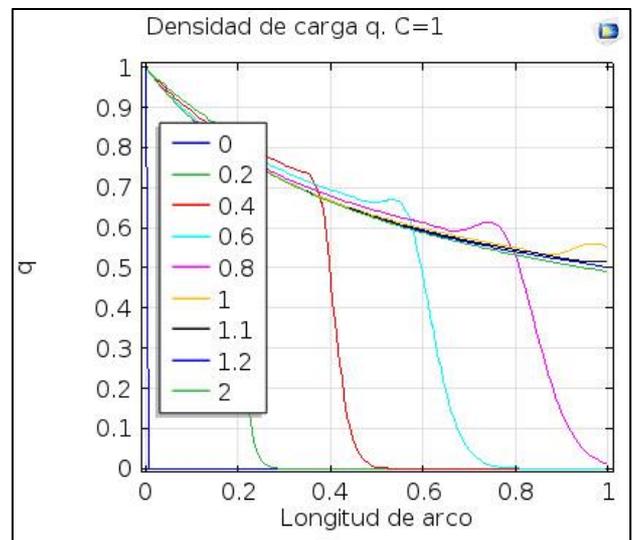


Figura 4-47 Carga para $C=1$

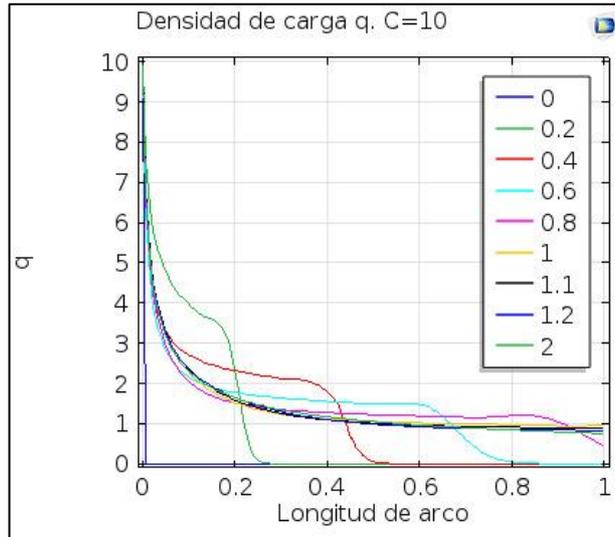


Figura 4-48 Carga para C=10

A pesar de las mejoras conseguidas con este estudio respecto al realizado con la *Ecuación de convección y difusión*, no se puede determinar que los resultados sean iguales a los que se obtienen en la realidad, debido a que en las tres figuras aquí mostradas aparecen varios comportamientos que no se pueden dar físicamente.

El primero de ellos es que la carga no cae de forma completamente vertical en el periodo no estacionario. El segundo se trata de las sobreoscilaciones que se muestran de forma más clara en la figura 4-46, cuando $C=0.1$. Si se realiza este estudio experimentalmente se demuestra que, durante el periodo no estacionario, la carga avanza por el plano superior, disminuyendo levemente hasta que llega a un punto en el que cae de forma vertical. En este comportamiento no aparece ningún tipo de sobreoscilación. Se comprobará si este comportamiento mejora al utilizar el método de difusión de viento lateral *Codina*.

En las figuras 4-49, 4-50 y 4-51 aparece una comparación de los resultados que se obtienen con los distintos mallados utilizados. En ellas se puede comprobar que cuanto más fina es la malla mejores son los resultados que el programa devuelve, ya que más se parecen a la realidad.

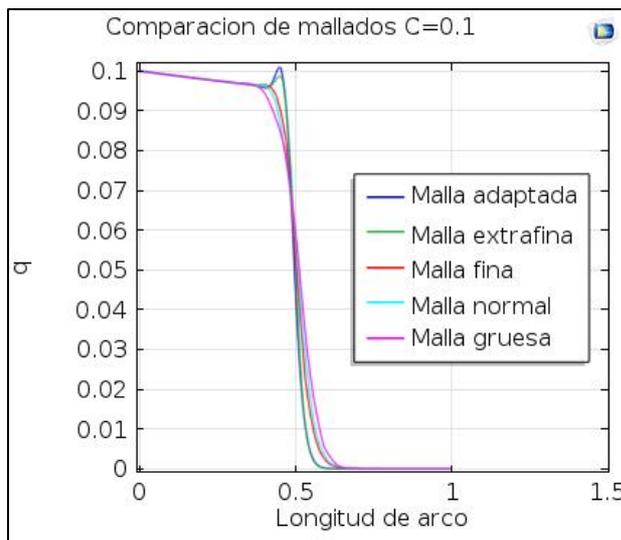


Figura 4-49. Comparación de mallados C=0.1

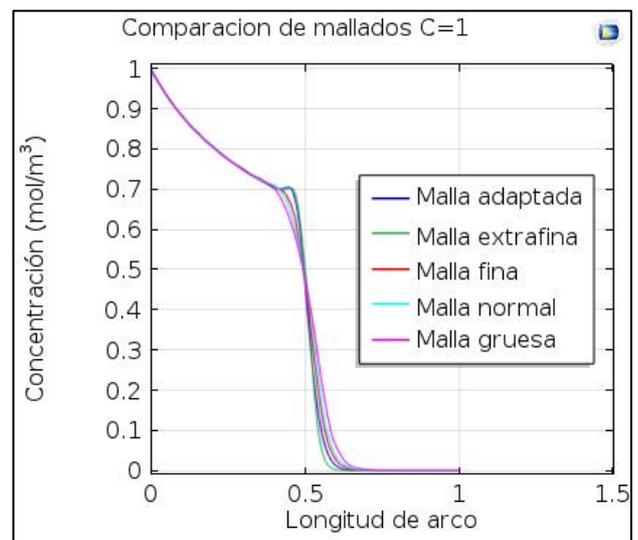


Figura 4-50. Comparación de mallados C=1

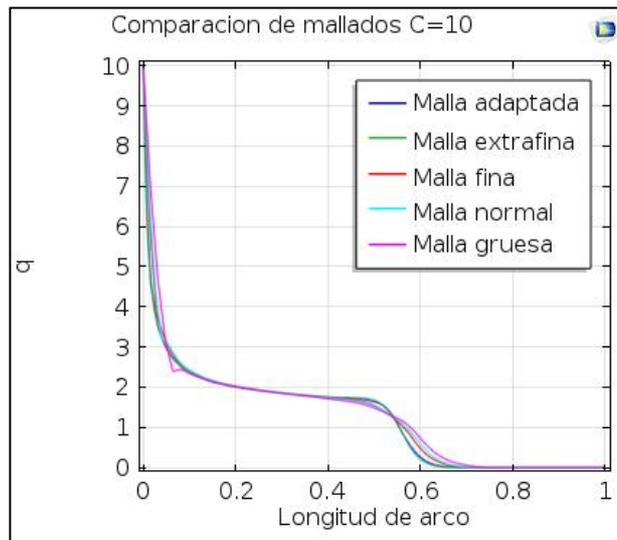


Figura 4-51. Comparación de mallas C=10

Hay básicamente dos grandes puntos que destacar. El primero de ellos se trata de que, a primera vista, se podría decir que el problema de la sobreoscilación se soluciona haciendo que el mallado sea menos fino, ya que los mayores problemas aparecen con el mallado adaptado y el extrafino. Sin embargo, y este es el segundo punto a destacar, como se ha comentado con anterioridad, el comportamiento ideal es con caídas de carga totalmente verticales y, en este caso, cuanto más fina sea la malla mejor se refleja este comportamiento. Por tanto, de nuevo es necesario tomar una solución de compromiso que solucione lo mejor posible ambas cuestiones. En este caso parece que lo ideal sería tomar la solución intermedia, teniendo un *mallado normal*.

Por último, también resulta interesante destacar que las curvas obtenidas con el mallado extrafino y el mallado adaptado son muy similares y tal vez no sea necesario realizar un refinamiento de malla adaptativo, ya que resulta mucho más costoso computacionalmente que el extrafino. Esta cuestión se verá más detallada en el apartado 4.2.2.5.

4.2.2.2.2 Codina

En este apartado se cambia el tipo de difusión de viento lateral y pasa de ser *Do Carmo* y *Galeão* a ser *Codina*. El resto del planteamiento y configuración del problema permanece igual.

Los resultados que se obtienen son los mostrados en las figuras 4-52, 4-53 y 4-54. En ellas se observa que, lejos de mejorar las sobreoscilaciones que teníamos en el apartado anterior, estas han aumentado; sin embargo, las caídas sí son más verticales que con el otro tipo de difusión.

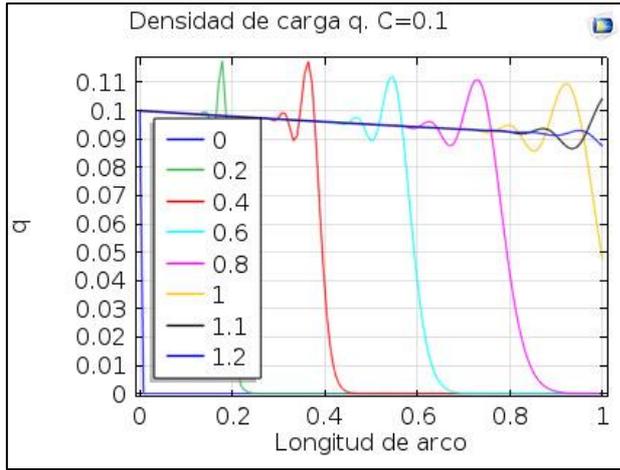


Figura 4-52. Evolución de la carga para C=0.1

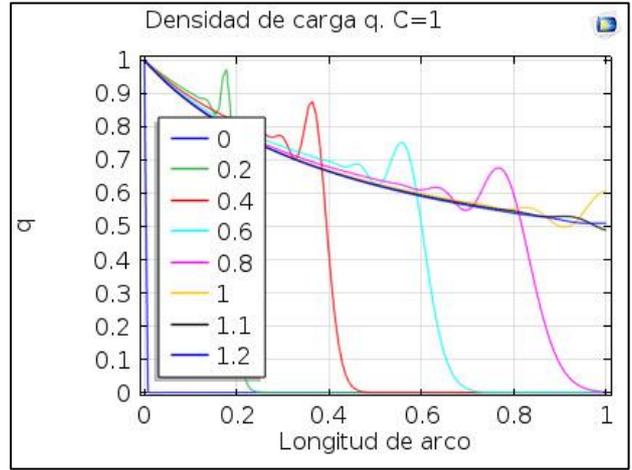


Figura 4-53. Evolución de la carga para C=1

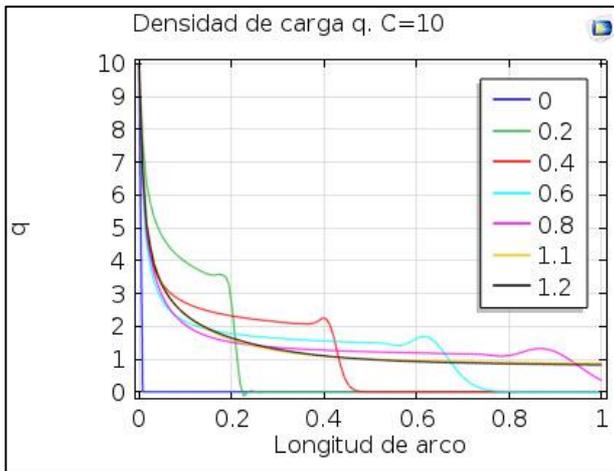


Figura 4-54. Evolución de la carga para C=10

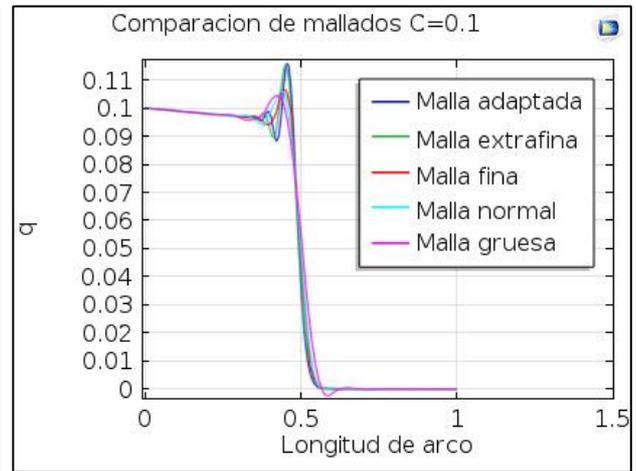


Figura 4-55. Comparación de mallados C=0.1

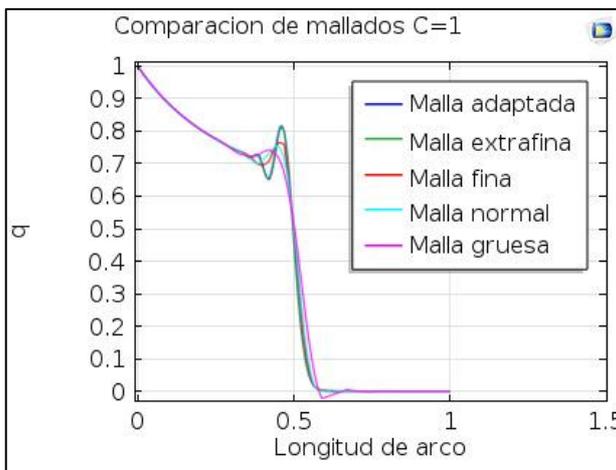


Figura 4-56. Comparación de mallados C=1

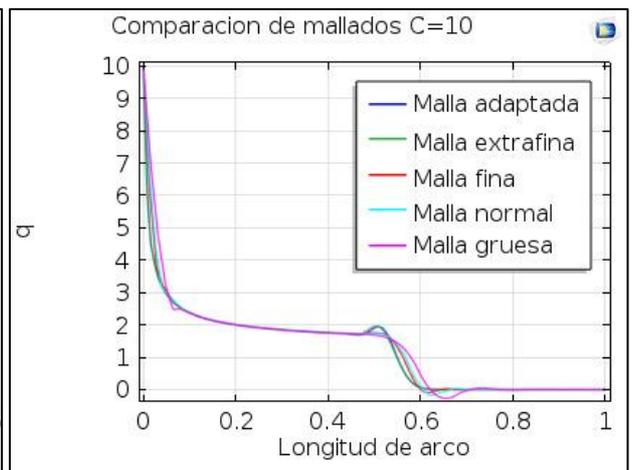


Figura 4-57. Comparación de mallados C=10

Por otra parte la comparación entre mallados aparece en las figuras 4-55, 4-56 y 4-57. Se vuelve a observar que, aunque con mallados más gruesos se tengan menores oscilaciones, las caídas son más inclinadas y por tanto se alejan de la realidad. Además con el mallado grueso hay puntos en los que la carga se vuelve negativa, comportamiento imposible en la física real.

También cabe destacar que el comportamiento con malla adaptada y con malla extrafina son prácticamente iguales, por tanto es preferible utilizar la malla extrafina, ya que es más fácil de realizar computacionalmente. Por ello en las figuras 4-58, 4-59 y 4-60, donde se compara el comportamiento que se obtiene con cada uno de los métodos de difusión, se ha realizado el estudio con un mallado extrafino.

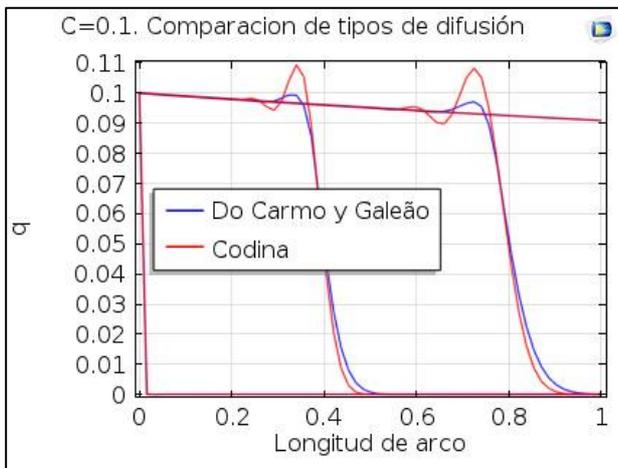


Figura 4-58. Comparación tipos de difusión C=0.1

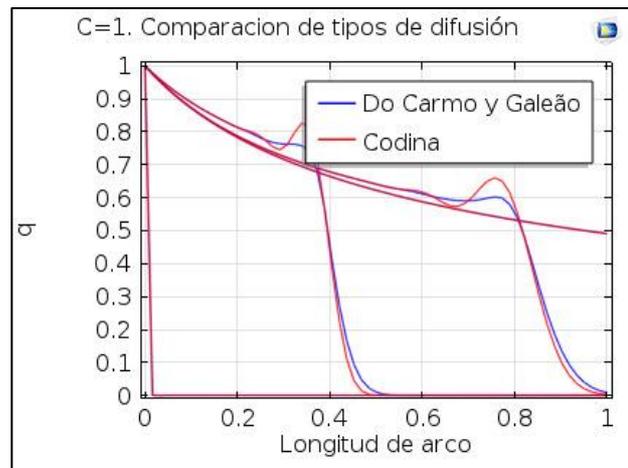


Figura 4-59. Comparación tipos de difusión C=1

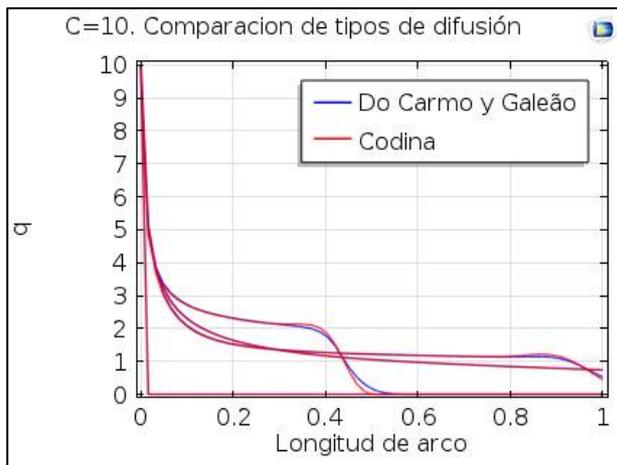


Figura 4-60. Comparación tipos de difusión C=10

Tal y como ya se había señalado con *Do Carmo y Galeão* las sobreoscilaciones son menores, pero con *Codina* las caídas son menos inclinadas.

También resulta interesante destacar que, a medida que C aumenta, la diferencia entre usar un método u otro cada vez son menores, ya que con $C=0.1$ se tienen unas variaciones grandes entre ambos tipos de difusión, pero con $C=10$ las curvas obtenidas son casi coincidentes.

En la tabla 4-7 queda esto reflejado.

	<i>Do Carmo y Galeão</i>		<i>Codina</i>	
	Sobreoscilación	Distancia	Sobreoscilación	Distancia
C=0.1	4.12%	0.23	13.2%	0.15
C=1	10%	0.2	19.4%	0.19
C=10	33.3%	0.21	33.3%	0.205

Tabla 4-7. Comparación *Do Carmo y Galeão* con *Codina*.

Se puede comprobar fácilmente que, a medida que C aumenta, la sobreoscilación con *Do Carmo y Galeão* aumenta mucho más rápido que con *Codina*, llegando a ser iguales en C=10.

Por otra parte, la distancia que recorre la curva en la caída se mantiene prácticamente igual para los valores de C estudiados, si usamos el tipo de difusión *Do Carmo y Galeão*, mientras que con *Codina* esta distancia va en aumento, llegando a coincidir, prácticamente en C=10. Por ello se puede concluir que para valores altos de C, elegir un tipo u otro de difusión no supone prácticamente ninguna diferencia.

4.2.2.2.3 Estacionario

En los estudios realizados con *Comsol* se han conseguido tanto resultados temporales como estacionarios. Analíticamente se obtuvo el resultado estacionario para valores típicos de C, por ello resulta interesante comparar los resultados analíticos con los obtenidos en *Comsol* para el régimen estacionario.

Si en *Comsol* añadimos la función obtenida con anterioridad, durante el estudio analítico

$$q(y) = \frac{C}{\sqrt{\frac{2C}{E_s} \bar{y} + 1}}$$

coinciden casi totalmente, solo hay algunas diferencias mínimas en el caso C=10, pero son prácticamente despreciables.

Esto significa, por una parte, que los resultados analíticos fueron obtenidos de forma correcta y, por otra, que el análisis en *Comsol* también se ha realizado satisfactoriamente.

Por último se compara el campo eléctrico obtenido también por ambos métodos para terminar de confirmar que el estudio se ha hecho fiel a la realidad. Como se comprueba en la figura 4-72 no existen diferencias entre las soluciones analíticas y por el método de los elementos finitos.

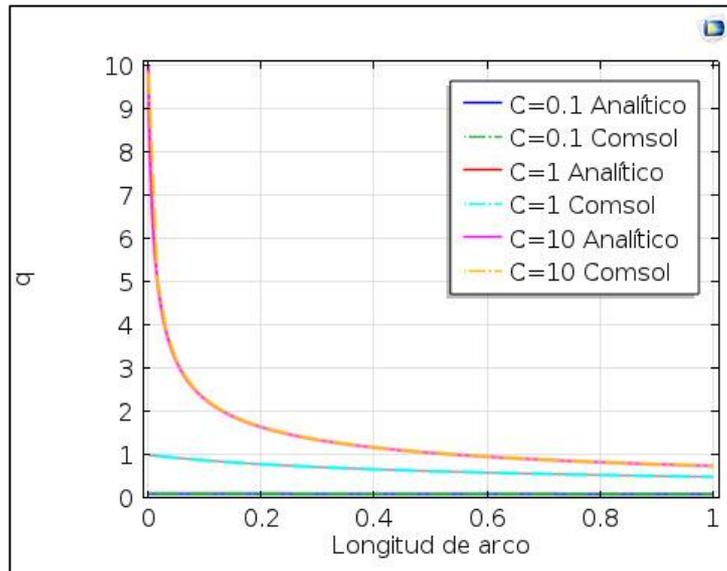


Figura 4-61. Comparación de la carga en Comsol y analítico

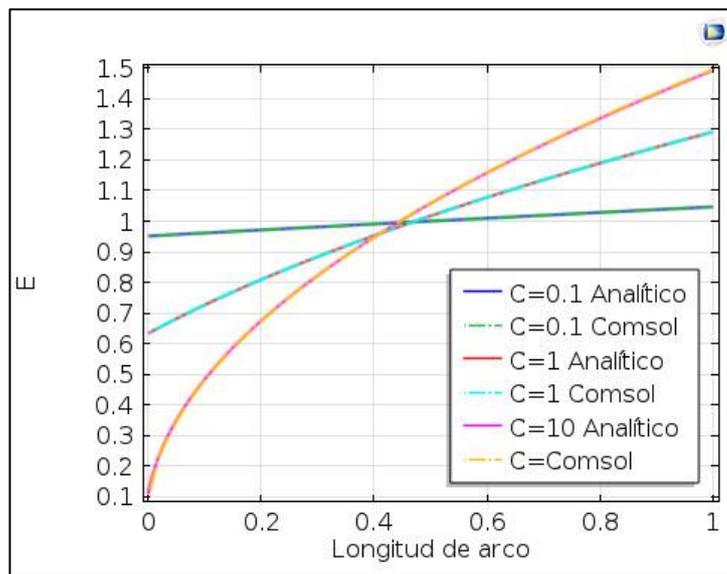


Figura 4-62. Comparación del campo en Comsol y analítico

4.2.2.3 Perfiles de carga

Los estudios hasta ahora realizados se van a comparar con los perfiles de carga calculados mediante el *Método de las características* [4][9] y el método *Particle-In-Cell* [5][6].

Se representan 3 figuras, en cada una de ellas aparecen los datos obtenidos con los perfiles de carga anteriormente nombrados junto a los resultados conseguidos en *Comsol* para los dos tipos de difusión que se han venido utilizando, con un determinado tipo de mallado cada una, para decidir con cuál de estos se consiguen resultados más fieles a la realidad.

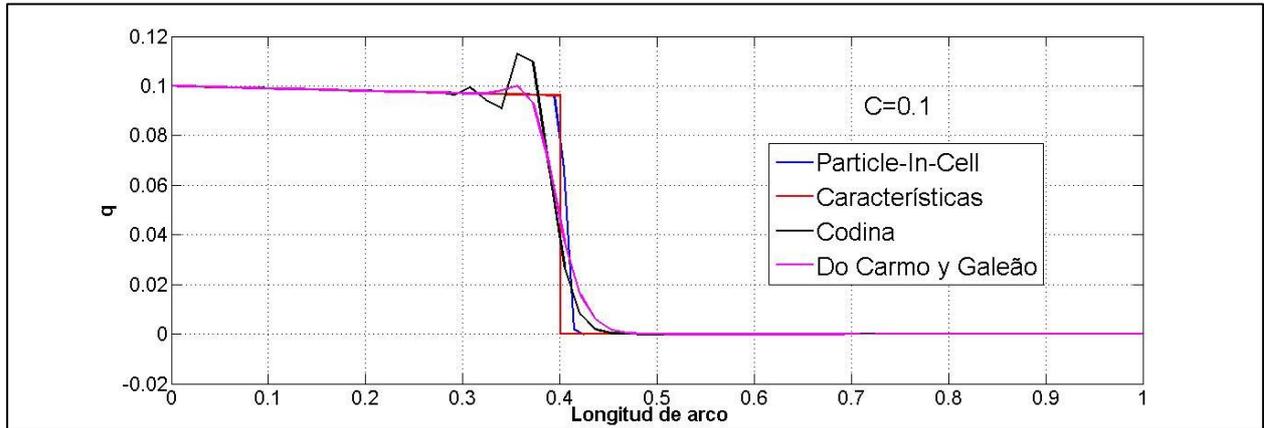


Figura 4-63. Comparación perfiles de carga con resultados para mallas adaptada

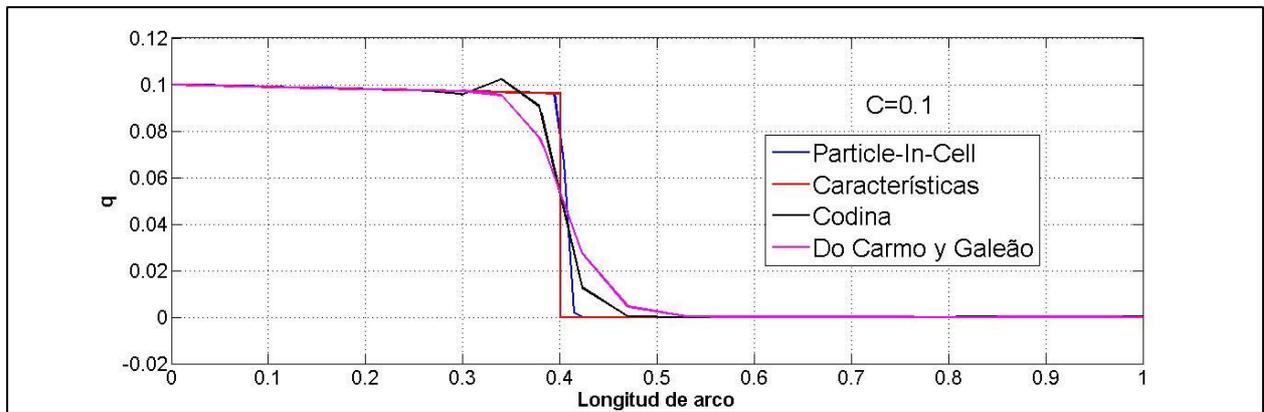


Figura 4-64. Comparación perfiles de carga con resultados para mallas adaptada

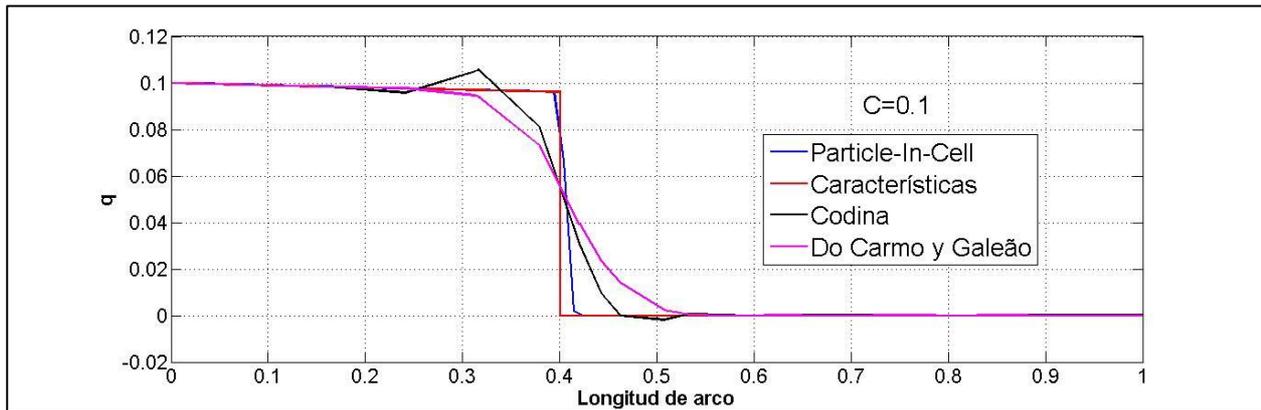


Figura 4-65. Comparación perfiles de carga con resultados para mallas gruesas

En estas últimas imágenes se demuestra lo que se viene diciendo a lo largo de todo el documento. Los resultados más fieles a la realidad son los que tienen caídas más verticales, sin sobreoscilaciones. En estos casos los calculados por el método *Particle in Cell* y el método de las *Características*. En cada una de ellas se ve que dependiendo de las necesidades del estudio será necesario utilizar uno u otro mallado en *Comsol* y uno u otro tipo de difusión. Así, si necesitamos que las caídas sean lo más verticales posibles elegiríamos una malla adaptada con el tipo de difusión *Codina*. Sin embargo, si lo que se necesita es que haya la menor sobreoscilación posible utilizaríamos el tipo de difusión *Do Carmo y Galeão* y un mallado fino o grueso. Por otra parte, si se necesita un compromiso entre los dos casos ya nombrados, es decir, que tenga poca sobreoscilación y las caídas sean lo más verticales posibles, se utilizaría, por ejemplo, un mallado fino con *Do Carmo y Galeão*. Por ello no se puede determinar que ninguno de los estudios realizados con la física *Transporte de especies diluidas* sea mejor que otro.

4.2.2.4 Límites

A continuación se van a comparar los resultados que consiguieron haciendo el desarrollo en serie de Taylor para C pequeña, de las funciones que definen analíticamente el comportamiento de la carga y del campo eléctrico, con los resultados que se han obtenido en *Comsol* con $C=0.1$, una vez alcanzado el régimen estacionario.

Se comprueba que las diferencias entre estos casos son muy similares a las que se encontraron cuando se compararon los casos límites con los resultados analíticos. En las figuras 4-75 y 4-76 se puede observar que tanto en el caso límite como en el resultado obtenido de *Comsol*, las curvas que representan el campo son crecientes y prácticamente paralelas. La diferencia principal entre ellas se debe a la condición de contorno que impone que el campo eléctrico debe ser igual a E_s en el plano inferior; por ello, al tomar E_s valores distintos en cada uno de los casos se tienen curvas no coincidentes; sin embargo el máximo error cometido no supera el 5%, lo que significa que las diferencias no son realmente importantes.

Por otra parte, la carga es en ambos casos decreciente y las curvas son prácticamente coincidentes hasta llegar al punto medio entre los planos. Es fácil ver que el mayor error se produce en el punto perteneciente al plano superior. Este error es inferior al 1%, por ello se considera despreciable.

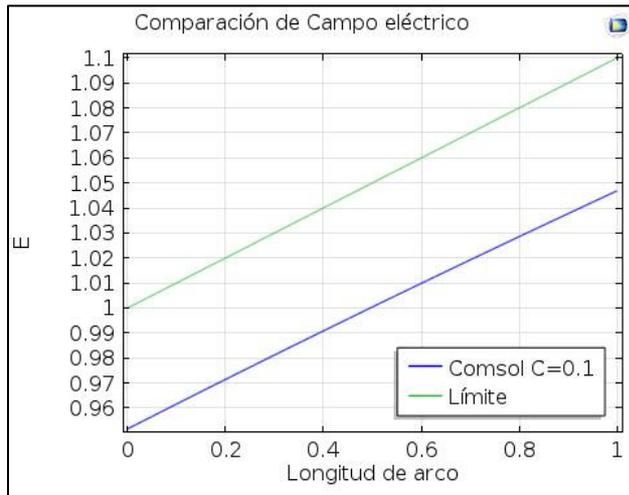


Figura 4-65. Comparación de campo eléctrico en caso límite y C=0.1

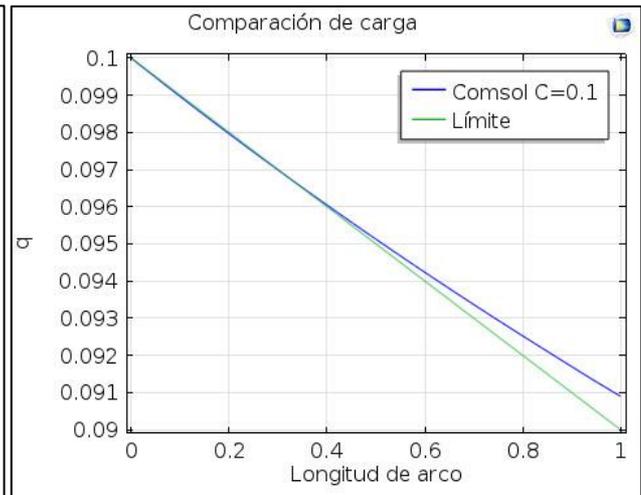


Figura 4-66. Comparación de carga en caso límite v C=0.1

4.2.2.5 Tiempos de resolución

Por último se van a comentar unos resultados muy importantes cuando se realiza un estudio por el método de los elementos finitos. Cuando las ecuaciones que hay que resolver, o el dominio en el cual hay que resolverlas tienen una alta complejidad, el hecho de elegir un mallado lo más fino posible puede hacer que la carga computacional aumente enormemente, llegando a necesitarse ordenadores muy potentes para poder hacer ciertos estudios. Sin embargo, si se llega a un compromiso entre el número de elementos en el mallado y que la solución sea fiable, se pueden realizar los mismo estudios con ordenadores más limitados en alguno de los sentidos.

Todos los resultados que se han presentado en este documento se han realizado con un mismo ordenador, con un procesador *Intel Core i5* y utilizando un solo núcleo. En la tabla 4-7 aparecen los tiempos que este ordenador ha tardado en realizar los estudios con las ecuaciones completas, es decir, en resolver las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) sin simplificaciones.

		Malla adaptada	Malla extrafina	Malla fina	Malla normal	Malla gruesa
<i>Do Carmo y Galeão</i>	C=0.1	665	156	17	12	9
	C=1	551	156	17	12	9
	C=10	687	163	19	14	10
<i>Codina</i>	C=0.1	759	164	18	14	10
	C=1	628	157	18	14	10
	C=10	705	191	22	16	11

Tabla 4-8. Tiempo de resolución de ecuaciones

Se comprueba fácilmente que lo que más influye en el tiempo de resolución es el tipo de mallado que se haya realizado ya que el tiempo de resolución es prácticamente independiente de C y del tipo de estabilización que se esté utilizando. Solo la malla adaptada tiene una mayor dependencia con estos parámetros y se debe a que esta crea diferentes mallas según las necesidades y, según se puede observar, para los valores límites de $C=0.1$ y $C=10$ se necesitan mallas más complejas que para $C=1$, ya que los tiempo de resolución son mayores en estos. Con *Codina* también se necesita un mallado más complejo debido a la mayor sobreoscilación que devuelve, que hace que se necesite un mallado más fino para determinar todos los puntos de dicho movimiento.

En la figura 4-67 se representa el tiempo de resolución frente al número de elementos de la malla. Se ha representado con el eje de ordenadas en escala logarítmica, para comprobar que la dependencia es de forma exponencial. Por ello, es muy importante decidir bien qué tipo de malla se va a usar, ya que, aunque los resultados sean más similares a los reales con mallas de mayor número de elementos, también tiene una mayor carga computacional, y puede ser conveniente obtener resultados menos reales pero más rápidamente.

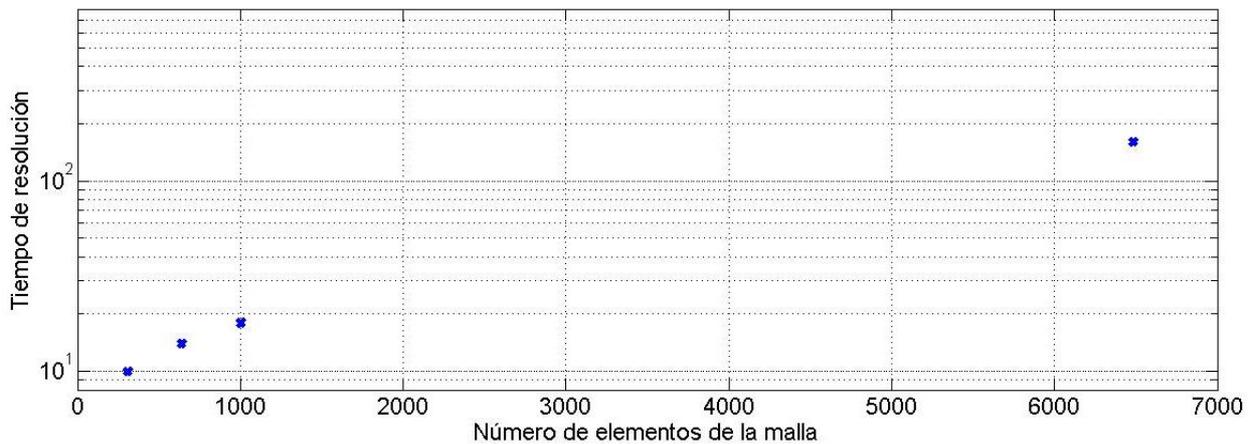


Figura 4-67. Tiempo de resolución frente al número de elementos de la malla

5 CONCLUSIONES

Tras todos los estudios realizados a lo largo de este documento se han extraído una serie de conclusiones que aquí se enumeran:

- En muchas ocasiones se tienen comportamientos físicos modelados por ecuaciones que son difíciles de resolver a mano si no se realiza ninguna simplificación, en estos casos la mejor opción es determinar una serie de simplificaciones y estudiar cómo se comporta en esos casos. Muchas veces con esta primera aproximación es suficiente para conocer cómo se comporta, aproximadamente, el fenómeno físico que se quiere estudiar.
- Realizar un estudio adimensional resulta de gran interés, ya que con este no se tiene en cuenta las condiciones en las que se está realizando el estudio y se pueden obtener conclusiones más genéricas. Además, en la mayoría de los casos, adimensionalizar las ecuaciones ayuda a su resolución.
- Adimensionalizar las ecuaciones también es conveniente cuando se quiere realizar una modelización por elementos finitos, ya que a todas las magnitudes se les da valor unidad, y las conclusiones extraídas son más universales que si se realizara el estudio determinando los valores que toma cada variable.
- Uno de los puntos más importantes a la hora de realizar un estudio por elementos finitos es determinar con qué mallado se va a hacer, ya que de este depende tanto la carga computacional como la similitud de los resultados que se obtengan con la realidad. En ocasiones no es necesario tener un gran número de elementos, ya que el problema tiene fácil solución, pero a medida que el comportamiento es más complejo resulta más conveniente utilizar mallados más finos.
- En el caso concreto que se ha estudiado en este documento, otra de las variables de mayor interés ha sido C , ya que dependiendo de su valor se han obtenido comportamientos muy diferentes. Cuando el valor de C es muy próximo a 0, el comportamiento se asemeja al que se obtiene cuando la densidad de carga espacial es nula.
- En ocasiones, las ecuaciones que se necesitan resolver no vienen implementadas exactamente en el programa que estemos usando para intentar encontrar una solución; ha sido el caso de la ecuación del transporte de carga. En estos casos hay que buscar físicas que implementen ecuaciones similares y modificarlas para que sean como la que se necesita (haciendo algunos coeficientes nulos para eliminar términos, por ejemplo).
- Una de las conclusiones más claras que se ha podido extraer es que, aunque en una física se puede implementar una ecuación, los resultados que se obtienen del estudio pueden ser totalmente erróneos y puede inducir a errores, como ha ocurrido en este trabajo con la *Ecuación de convección y difusión*.
- Aunque se obtengan resultados que puedan parecer correctos, es muy importante compararlos con los obtenidos por otros métodos, para comprobar si se está cometiendo algún error.
- Los resultados obtenidos resolviendo la *Ecuación de convección y difusión* han sido malos al resolver el problema con campo eléctrico constante; pero han empeorado incluso más al intentar resolver el problema completo, devolviendo errores para ciertos valores de C .

- Utilizando la ecuación de *Transporte de especies diluidas* se han mejorado notablemente los resultados extraídos con la *Ecuación de convección y difusión*. Se han utilizado dos tipos de estabilización: *Codina* y *Do Carmo y Galeão*.
 - Con *Codina* se alcanzaron valores negativos de la carga, lo cual resulta imposible físicamente. Con *Do Carmo y Galeao* todos los valores de la carga han sido positivos, por lo tanto se puede decir que mejora los resultados obtenidos con *Codina*.
 - Por otra parte, *Do Carmo y Galeão* devuelve una menor pendiente en la caída que *Codina*, en este caso son mejores los resultados obtenidos por el segundo método, ya que en la realidad dicha pendiente es completamente vertical.
- Comparando tanto *Codina* como *Do Carmo y Galeão* con el método de las *Partículas* y las *Características* se demuestra que estos últimos son menos difusivos, y por tanto más fieles a la física real. Sin embargo, es más rápido realizar los estudios con los tipos de estabilización nombrados inicialmente. Además, utilizando mallas adaptativas se reducen notablemente las diferencias con el comportamiento real.
- Como conclusión final se puede decir que es importante elegir bien con qué física se va a realizar el estudio mediante elementos finitos, ya que este se basa en una serie de simplificaciones que pueden hacer que los resultados obtenidos no se correspondan con la realidad. También hay que tener en cuenta que los mallados son una parte muy importante del estudio, ya que eligiendo de forma adecuada cuál utilizar se pueden obtener resultados mucho más fieles a la realidad.

REFERENCIAS

- [1] A. Castellanos, “Electrohydrodynamics” Springer-Verlag, 1998.
- [2] E. Gomes Dutra Do Carmo and A. C. Galeão, “Feedback Petrov-Galerkin methods for convection-dominated problems,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 88, no. 1, pp. 1–16, Jun. 1991.
- [3] R. Codina and a Folch, “A stabilized finite element predictor – corrector scheme for the incompressible Navier – Stokes equations using a nodal-based implementation,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 44, no. July 2003, pp. 483–503, 2004
- [4] M. Zahn, S.-C. Pao, and C. F. Tsang, “Effects of excitation rise-time and charge injection conditions on the transient field and charge behavior for unipolar conduction,” *J. Electrostat.*, vol. 2, no. 1, pp. 59–78, Feb. 1976.
- [5] Hockney RW, Eastwood JW. “Computer Simulations using Particles”. McGraw-Hill; 1981
- [6] P. A. Vázquez, G. E. Georghiou, and A. Castellanos, “Numerical study of the time evolution of finite amplitude electroconvection between two plates using PIC-FE and FCT-FE,” in *Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*, 2008. CEIDP 2008. Annual Report Conference on, 2008, pp. 176–179.
- [7] Candrupatla, Tirupathi R. “Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería” Prentice Hall, 1999
- [8] Zienkiewicz, O. C. “El método de los elementos finitos” McGraw-Hill, 1994
- [9] Jean Donea and Antonio Huerta. “Finite element methods for flow problems” Wiley, 2003
- [10] J.N. Reddy. “An introduction to the finite element method” McGraw-Hill, 2006

