

# Trabajo Fin de Grado

## Grado en Ingeniería Aeroespacial

### Diseño de misiones de rendezvous con asteroides próximos a la Tierra

Autor: José Manuel Montilla García

Tutor: Rafael Vázquez Valenzuela

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

# **Diseño de misiones de rendezvous con asteroides próximos a la Tierra**

Autor:

José Manuel Montilla García

Tutor:

Rafael Vázquez Valenzuela

Profesor Titular

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Grado:   Diseño de misiones de rendezvous con asteroides próximos a la Tierra

Autor:       José Manuel Montilla García  
Tutor:       Rafael Vázquez Valenzuela

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

figuras/b.png

# Resumen

---

En este trabajo se estudian los asteroides desde el punto de vista de la Mecánica Orbital bajo la premisa de la necesidad de herramientas básicas para diseñar una misión cuyo objetivo final sea realizar un encuentro controlado entre una sonda y un asteroide, ya sea con fines científicos o económicos (minería espacial). A grandes rasgos, y simplificándolo para poder hacer énfasis en el *rendezvous*, el proceso se divide en tres partes. Primero, la necesidad de conocer la posición del asteroide en un lapso de tiempo suficientemente grande. Esto se consigue gracias al planteamiento numérico que se le ha dado. En segundo lugar, se hace un estudio de la dinámica orbital alrededor de los asteroides, ya que conocer el comportamiento de la sonda en las inmediaciones de estos es esencial. Aquí se ha diferenciado entre asteroides de masa despreciable y aquellos con suficiente masa como para obviar otros cuerpos, de forma que el movimiento de la sonda sea el resultado de la forma elipsoidal de estos (pues se ha usado un modelo de elipsoide triaxial para el potencial gravitatorio). En el caso de asteroides pequeños solo se estudia el movimiento relativo producto de la diferencia entre las órbitas de asteroide y sonda alrededor del Sol teniendo en cuenta la elipticidad de ambas, lo cual ha permitido obtener expresiones analíticas del movimiento relativo. En la última parte de una misión de este tipo se necesitan conocer las maniobras a realizar para que, dadas las condiciones iniciales de la sonda, se consiga llegar a la superficie del asteroide en el punto deseado y con baja velocidad relativa, evitando cualquier posible colisión durante el proceso. Esto se aborda como un problema de optimización con restricciones gracias a las expresiones analíticas que se han deducido previamente, lo que permite el cálculo de las maniobras impulsivas necesarias de forma rápida y eficiente. Lo anterior se mejora teniendo en cuenta posibles perturbaciones respecto de la trayectoria esperada.



# Abstract

---

In this thesis asteroids are studied from the point of view of Orbital Mechanics under the premise of the need for basic tools to design a mission whose ultimate goal is to conduct a controlled encounter between a space probe and an asteroid, whether for scientific purposes or economic (space mining). Broadly speaking, and simplifying to emphasize the rendezvous, the process is divided into three parts. First, the need to know the position of the asteroid in a span large enough. This is achieved by the numerical approach that has been used. Second, a study of the orbital dynamics around asteroids has been made, because knowing the behavior of the probe in the vicinity of asteroids is essential. Here we have differentiated between massless asteroids and those with enough mass to obviate other bodies, so that the movement of the probe is the result of the ellipsoidal shape of these (as a model of triaxial ellipsoid has been used for gravitational potential). In the case of small asteroids only relative movement product of the difference between the orbits of asteroid and probe around the Sun is studied considering the ellipticity of both, which has allowed to obtain analytical expressions of relative motion. In the last part of a mission of this type it is needed to know the maneuvers to be performed so that, given the initial conditions of the probe, reaching the asteroid's surface is achieved at the desired point and with low relative speed, avoiding any possible collision during the process. This is dealt as a constrained optimization problem thanks to the analytical expressions that has been previously deduced, allowing the calculation of impulsive maneuvers necessary quickly and efficiently. This is improved by taking into account possible disturbances from the expected trajectory.



# Índice

---

<i>Resumen</i>	I
<i>Abstract</i>	III
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Importancia del conocimiento de los asteroides y de su estudio in situ	2
1.2 Clasificación según su composición y órbitas típicas	2
1.3 Breve resumen de la historia de su exploración in situ	4
1.4 Futuras misiones	8
1.5 Objetivos y alcance del trabajo	9
1.6 Estructura del documento	9
<b>2 Modelado de la órbita del asteroide</b>	<b>11</b>
2.1 Ecuación del movimiento	11
2.2 Posición de los planetas	12
2.3 Implementación en <i>Matlab</i>	13
2.4 Análisis de resultados y validación del algoritmo	14
<b>3 Modelo de asteroide</b>	<b>23</b>
3.1 Modelo de elipsoide triaxial	24
<b>4 Dinámica orbital en las cercanías de un asteroide</b>	<b>27</b>
4.1 Considerando la masa del asteroide	27
4.1.1 Integral de Jacobi	29
4.1.2 Radio de estabilidad de Hill	32
4.2 Despreciando la masa del asteroide	37
4.2.1 Ecuación del movimiento	40
4.2.2 Propagación analítica del movimiento	42
Validación de resultados	46
4.2.3 Aplicación para órbitas periódicas	48
4.2.4 Aplicación para inserción orbital	48
Resultados	51
<b>5 Rendezvous sobre un asteroide</b>	<b>53</b>
5.1 Asteroide estático	55
5.2 Asteroide girando	58
5.3 Considerando la gravedad del asteroide, bucle cerrado	62
<b>6 Comentario del proyecto y trabajo futuro</b>	<b>71</b>
6.1 Simulación de la órbita del asteroide	71
6.2 Modelo de asteroide	71
6.3 Órbita cerca del asteroide	73
6.4 Maniobra de <i>rendezvous</i>	73

<b>7 Anexo</b>	<b>75</b>
<i>Índice de Figuras</i>	81
<i>Bibliografía</i>	83

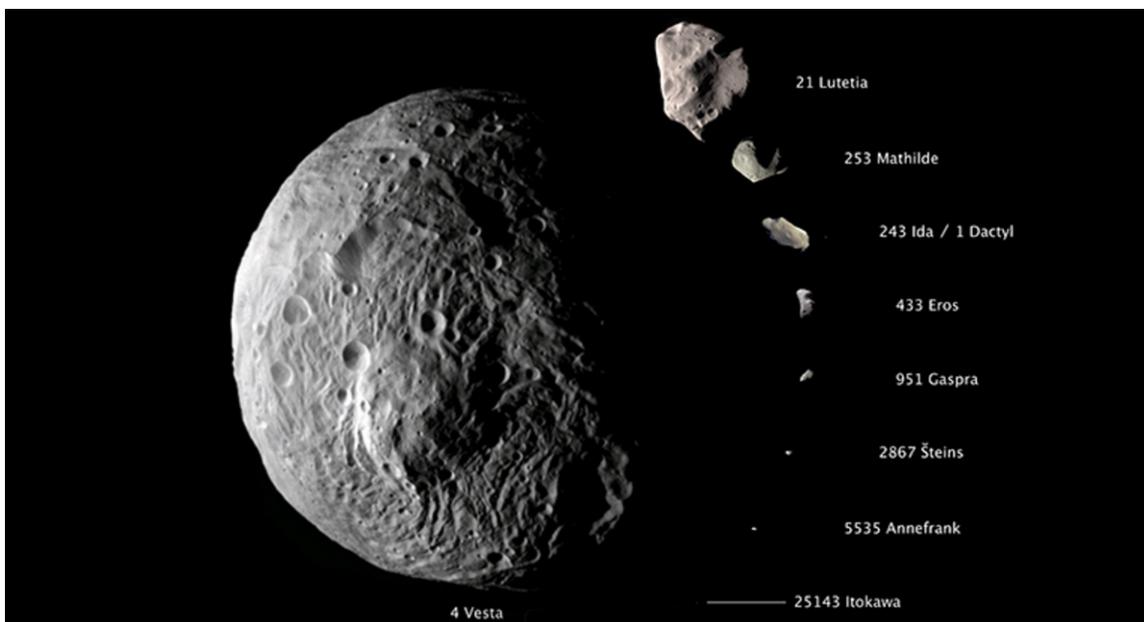
# 1 Introducción

---

*En algún sitio algo increíble espera ser descubierto.*

CARL SAGAN

Los asteroides son los vestigios de la formación del Sistema Solar [1], son pequeños cuerpos rocosos que no acumularon suficiente masa para convertirse en planetas y que orbitan alrededor del sol, la mayor parte entre Marte y Júpiter. Se conocen más de medio millón, pero estos están repartidos a lo largo de un enorme volumen alrededor del sol, de forma que su separación oscila entre 1 y 3 millones de kilómetros. El concepto de asteroide engloba una gran variedad de cuerpos de diferente tamaño y composición, tanto que pueden encontrarse asteroides de cientos de kilómetros de diámetro (como Vesta con 530 kilómetros) o pequeñas rocas de apenas 10 metros de diámetro (véase la Figura 1.1), de forma que si se agruparan todos no superarían en masa a la Luna. Tienen formas irregulares y están cubiertos por multitud de cráteres, productos de la continua erosión por colisiones con otros cuerpos desde el comienzo del Sistema Solar. Pueden diferenciarse varias clases en función de su composición, algunas con gran valor económico.



**Figura 1.1** Comparativa de tamaños de algunos asteroides visitados.

La dinámica orbital que los gobierna dista mucho de ser trivial. Mientras orbitan el sol, estos rotan sobre sí mismos, a veces de forma irregular. Algunos (más de 150 conocidos hasta ahora), poseen pequeños satélites que los acompañan, y existen sistemas binarios de asteroides que orbitan uno alrededor del otro. Se conoce un caso de asteroide con su propio sistema de anillos (Chariklo [2], que se encuentra entre Saturno y Urano),

y otro con varias columnas de material siendo expulsado desde su interior (P/2013 P5)<sup>1</sup>. Algunos asteroides fueron capturados por la gravedad de planetas convirtiéndose en sus lunas, como es el caso de Fobos y Deimos y el de las lunas exteriores de los planetas gaseosos, y otros fueron desviados de sus órbitas para acabar colisionando con la Tierra, alterando la historia geológica de nuestro planeta y el curso de la evolución de la vida.

## 1.1 Importancia del conocimiento de los asteroides y de su estudio in situ

Existen múltiples razones [3] por las que debemos alcanzar un mayor conocimiento de los asteroides y de las tecnologías que nos permitan interactuar con ellos, pudiendo agruparse estas en tres grupos.

Para mejorar nuestro conocimiento de los orígenes del sistema solar: Ya que se formaron al mismo tiempo que los planetas, los asteroides representan una fuente de información excepcional para mejorar nuestra comprensión sobre el estado original del Sol y del disco de material que dio lugar a todos los planetas del Sistema Solar. El hecho de que la mayoría de asteroides sean iguales en muchos aspectos, y por tanto hayan permanecido inalterados desde su formación, es muy importante en este sentido. Pero más interesante es desde el punto de vista científico, el hecho de que algunos son distintos (se han diferenciado), lo cual puede arrojar luz al proceso de diferenciación de los planetas en núcleo, manto y corteza. Precisamente es este proceso el que ha hecho que Ceres sea ahora clasificado como planeta enano (al igual que Plutón), en lugar de como asteroide [4]. Por ello, la exploración in situ de los mismos es un requisito si queremos aprovechar la ventaja de poder observar un rango mayor de longitudes de onda y poder obtener imágenes de mayor resolución que si nos limitáramos a observaciones desde la Tierra. Históricamente, los datos obtenidos mediante naves que han pasado cerca de asteroides han mejorado y a veces revolucionado las teorías basadas en información obtenida desde la Tierra.

Para disminuir el riesgo de impacto con un asteroide: Existe un grupo de asteroides (NEAs, *near earth asteroids*) que representan un riesgo real ya que sus órbitas cruzan (o pasan cerca de) la de la Tierra, y esto hace posible su colisión con nuestro planeta en el futuro. Se piensa que hay más de 20000 NEAs de un tamaño mayor de 100m en este tipo de órbitas, y más de un millón menores. Aunque las posibilidades de un impacto que provoque nuestra extinción es baja (aproximadamente uno cada 100000 años), la frecuencia de impactos capaces de provocar daños importantes es bastante mayor (Tunguska 1908 y Chelyabinsk 2013). Por ello, para reducir el riesgo que implican los NEAs es necesario mejorar nuestro conocimiento de su número y órbitas, así como desarrollar tecnologías que nos permitan desviar cualquiera que se encuentre en trayectoria de colisión con la Tierra.

Como fuente de recursos: Los asteroides representan una fuente importante de materias primas que pueden suponer un apoyo a la propia exploración espacial y a la economía. Podríamos aprovechar el hecho de que la naturaleza ha realizado un proceso de refinamiento en algunos asteroides, de forma que un buen porcentaje de los NEAs están formados exclusivamente de aleación Níquel-Hierro, además, los asteroides metálicos contienen 100 partes por millón de elementos del grupo oro y platino, haciendo que un pequeño asteroide de 200 metros pueda estar valorado en 100 mil millones de dolares. El 15% de los NEAs son ricos en agua, hidrógeno y oxígeno, lo cual puede suponer una gran ventaja para la futura exploración espacial, eliminando la necesidad de extraerlos de la Tierra.

## 1.2 Clasificación según su composición y órbitas típicas

La IAU (*International Astronomical Union*) no contempla oficialmente el término asteroide (no tienen definición oficial) aunque tradicionalmente se han denominado planetas menores. Aún así, desde Agosto de 2006, la IAU estableció una forma de clasificar los diferentes cuerpos del Sistema Solar (lo que hizo que Plutón dejara de ser considerado un planeta oficialmente) de forma que todos los asteroides entran dentro de la categoría de *pequeño cuerpo del sistema Solar*, que son todos los objetos que no se pueden clasificar como planetas o como planetas enanos (y que no son satélites).

Normalmente los asteroides se clasifican siguiendo dos criterios [5], uno es su órbita (clasificación dinámica), y otro es su composición (clasificación espectral). Basándonos en qué áreas del sistema solar podemos encontrarlos, los asteroides se pueden diferenciar en los siguientes grupos:

- Near Earth Asteroid (NEA): Son aquellos que se acercan a la Tierra a menos de 0.3UA (siendo una UA la distancia media de la Tierra al sol, aproximadamente 150 millones de kilómetros) en algún punto de

<sup>1</sup> Véase el capítulo Anexo para una explicación de cómo se nombran los asteroides.

su órbita. Dependiendo del tamaño de su órbita y de como se acerquen se distinguen varios grupos. Los **Atens**, con un semieje mayor<sup>2</sup> de menos de  $1UA$  y una distancia de afelio<sup>3</sup> mayor de  $0.983UA$ , algunos de ellos se cruzan con la órbita de la Tierra (alrededor de 640 conocidos). El subgrupo de Atens que nunca cruza la órbita de la Tierra se denomina Aphoele o Atira. Los **Apollos**, con un semieje mayor de más de  $1UA$  y una distancia de perihelio<sup>4</sup> menor de  $1.017UA$ , cruzando algunos con la órbita de la Tierra (se conocen unos 3800). Los **Armors**, con un semieje mayor que se encuentra entre  $1UA$  y  $1.524UA$  pero con perihelio menor de  $1.3UA$ , pueden cruzar la órbita de Marte pero nunca la de la Tierra (3200 conocidos).

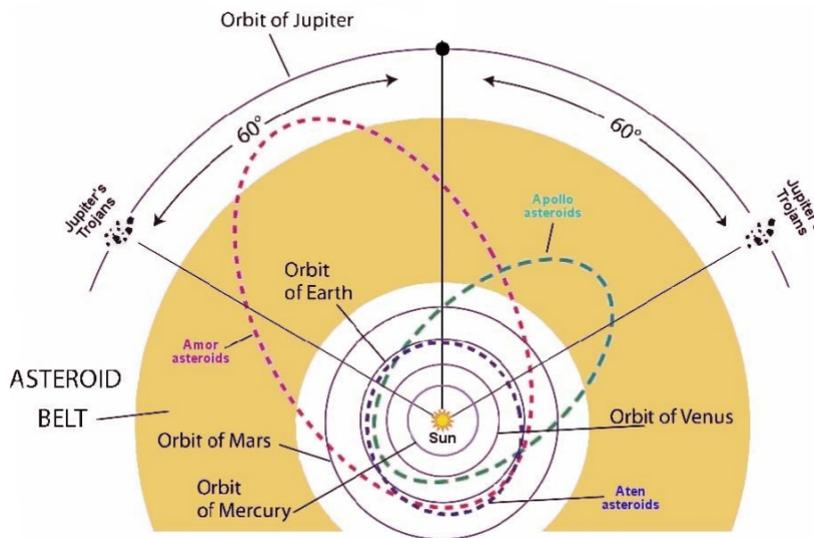


Figura 1.2 Clasificación de los NEA.

- Near Mars Asteroid: Dentro de este grupo se distinguen los Hungarias, Phocaeas y los Mars-Crossers. Los asteroides **Hungarias** residen en una región entre Marte y Júpiter de distancias al sol entre  $1.78UA$  y  $2UA$ , y por ello están sometidos a fenómenos de resonancia orbital (9:2 con Júpiter y 3:2 con Marte). Estos fenómenos de resonancia se dan cuando los periodos orbitales del asteroide y un planeta están relacionadas con números enteros, y pueden ser fuentes de inestabilidad orbital o de estabilidad a largo plazo. Los **Phocaeas** están distribuidos en el rango de  $2.25 - 2.5UA$ , mientras que los **Mars-Crossers** (MCs) son aquellos que intersectan la órbita de Marte pero que tienen una distancia de perihelio mayor de  $1.3UA$  (excluyendo a los Armors). Es importante resaltar que todos los MCs son inestables, por lo que sus órbitas podrían cambiar a algunas que crucen con la de la Tierra.
- Sistema solar medio: Después de la órbita de Marte nos encontramos con el **Cinturón de Asteroides**, que a pesar de su nombre no es una región homogénea en cuanto a la distribución de estos se refiere. Además de que hay familias fuera del mismo, la fuerte gravedad de Júpiter ha creado zonas de concentración y de huecos de asteroides, en las zonas de resonancia estable e inestable respectivamente (véase la Figura 1.3). Esta región se encuentra entre las  $2.1UA$  y las  $3.3UA$ , con órbitas de excentricidad menor a  $0.4$  e inclinaciones menores de  $30^\circ$ , aunque la mayoría se encuentran sobre la eclíptica y tienen excentricidades de  $0.07$  aproximadamente. También es destacable la familia **Hildas** debido a la particular forma que tiene el conjunto, creando un triángulo con los vértices en los puntos de Lagrange<sup>5</sup>  $L_3$ ,  $L_4$  y  $L_5$  del sistema Sol-Júpiter (a pesar de que cada asteroide sigue su propia órbita elíptica). Finalmente, otro grupo importante es el de los **Trojanos** de Júpiter, aquellos que lo acompañan en su órbita pero a  $60^\circ$  por delante y por detrás (véase la Figura 1.2), es decir, alrededor de los puntos  $L_4$  y  $L_5$ .

<sup>2</sup> Es un elemento orbital que determina el tamaño de la órbita. Véase el capítulo Anexo.

<sup>3</sup> Punto más alejado del Sol.

<sup>4</sup> Punto más cercano al Sol.

<sup>5</sup> Son los puntos de equilibrio del problema de los tres cuerpos, es decir, aquellos puntos donde un cuerpo puede permanecer estático visto desde el sistema de referencia fijo a los dos cuerpos masivos, en el caso de los Trojanos, el Sol y Júpiter.

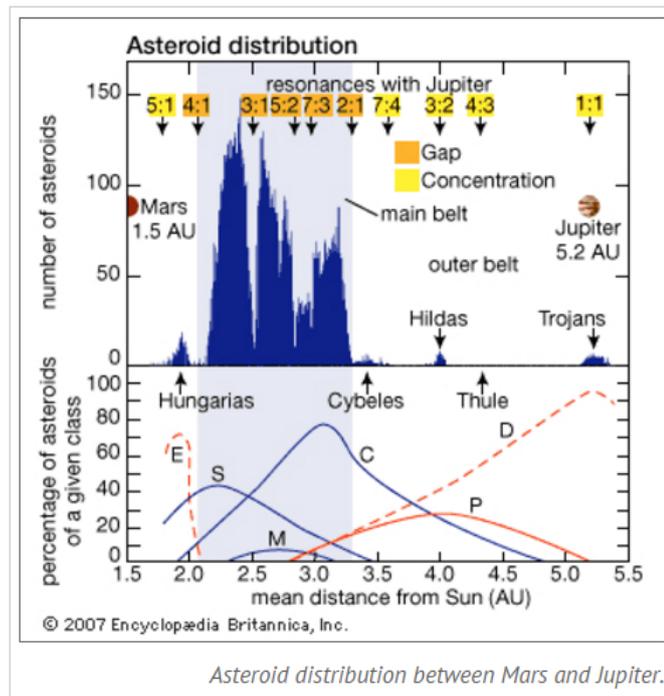


Figura 1.3 Distribución de asteroides entre Júpiter y Marte.

- Sistema solar externo: En esta zona se pueden encontrar los **Centaurs**, una familia de asteroides que orbitan entre Júpiter y Neptuno, los **TNOs** (Transneptunian Objects), aquellos que se encuentran más allá de Neptuno, y los **Plutinos**, aquellos que se encuentran en una órbita de resonancia 2:3 con Neptuno.

De todos los anteriores los más interesantes en cuanto a su aplicación son los NEA, ya que son los más accesibles desde el punto de vista energético. De acuerdo a su composición la mayoría de asteroides se pueden clasificar en tres grupos:

- Tipo C (*carbonaceous*). Aquí se incluyen más del 75 % de los asteroides conocidos. Con un albedo <sup>6</sup> de 0.03 – 0.09, tienen una composición parecida a la del sol (pero sin el hidrógeno, el helio y otros volátiles). Se encuentran sobre todo en la parte externa del Cinturón de Asteroides.
- Tipo S (*silicaceous*). Lo forman el 17% de los asteroides conocidos. Con un brillo relativamente alto (albedo de 0.10 – 0.22), están formados por una mezcla de hierro metálico y silicatos de hierro y magnesio. Se encuentran sobre todo en el Cinturón de Asteroides interno.
- Tipo M (*metallic*). Lo forman el resto de asteroides en su mayoría. Son relativamente brillantes (albedo de 0.10 – 0.18), y están formados principalmente por hierro metálico. La mayoría se encuentran en el Cinturón de Asteroides medio.

### 1.3 Breve resumen de la historia de su exploración in situ

A día de hoy 9 misiones se han realizado (una de ellas aún continua) que involucraban el encuentro con asteroides, llegando a visitar un total de 13 (contando Ceres).

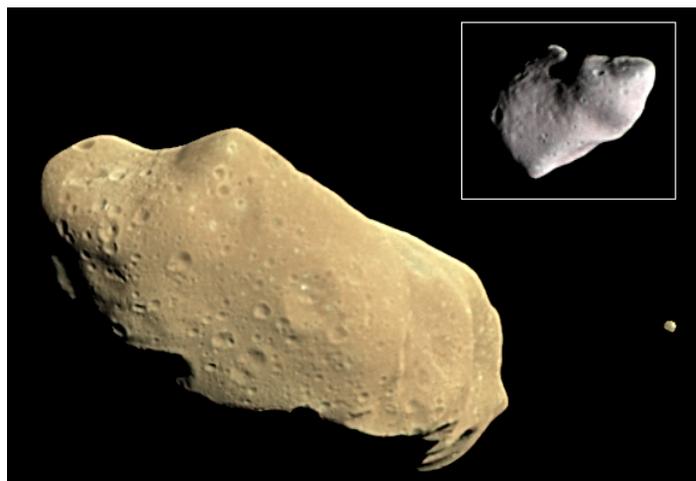
El 21 de octubre de 1991 se producía el primer encuentro entre una sonda hecha por el hombre y un asteroide. La sonda Galileo, en su viaje hacia el sistema de Júpiter pasaba a 1600Km del asteroide de tipo S perteneciente al cinturón de asteroides *Gaspra*, con una velocidad relativa de 8Km/s (véase la Figura 1.4). Su superficie estaba cubierta de cráteres, y un estudio detallado dio lugar a nuevos modelos de colisiones de asteroides (ya que su número sobrepasaba el límite teórico para el equilibrio de colisiones, situación en la que tantos cráteres están siendo formados como destruidos).

<sup>6</sup> Es la relación entre la luz incidente y la luz reflejada



**Figura 1.4** Imagen del asteroide *Gaspra*. Tomada 10 minutos antes del punto de máxima aproximación (a 5300Km). Imagen: NASA/JPL/USGS.

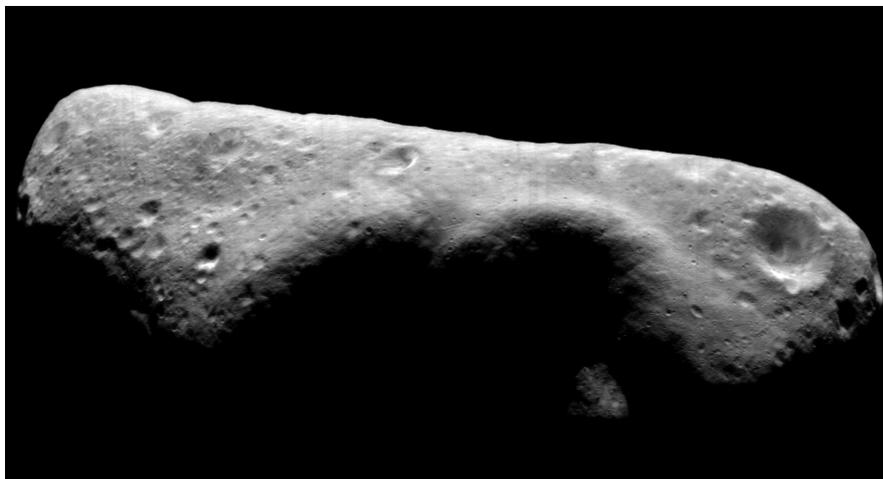
El 28 de agosto de 1993 Galileo se encuentra de nuevo con un asteroide de tipo S: *Ida* (perteneciente a la familia Koronis). En el punto más cercano la distancia era de 2400Km y la velocidad relativa de 12.4Km/s. Como con *Gaspra*, mucha información de alto valor científico pudo ser extraída de las observaciones de la superficie de *Ida*, pero el descubrimiento más sorprendente no estaba sobre el asteroide, sino a su alrededor. Las imágenes revelaron que *Ida* poseía un pequeño satélite orbitándolo, *Dactyl* (véase la Figura 1.5). Esta fue la primera evidencia de que un asteroide podía tener satélites y de la existencia de sistemas binarios. Combinando la información de las posibles órbitas de *Dactyl* con la estimación del volumen de *Ida*, por primera vez se pudo realizar una estimación precisa de la densidad de un asteroide, dando un valor de aproximadamente  $2.6 \pm 0.5 \text{g/cm}^3$  (de lo cual se infiere información vital de la composición del mismo).



**Figura 1.5** Imagen del asteroide *Ida* junto con su satélite a la derecha, *Dactyl*. Tomada 14 minutos antes del punto de máxima aproximación (a 10500Km). Su eje más largo mide 60Km, mientras que *Dactyl* tiene un radio medio de 1.4Km. Imagen: NASA/JPL/USGS.

La sonda NEAR (*Near-Earth Asteroid Rendezvous*) es lanzada el 17 de febrero de 1996 con el objetivo

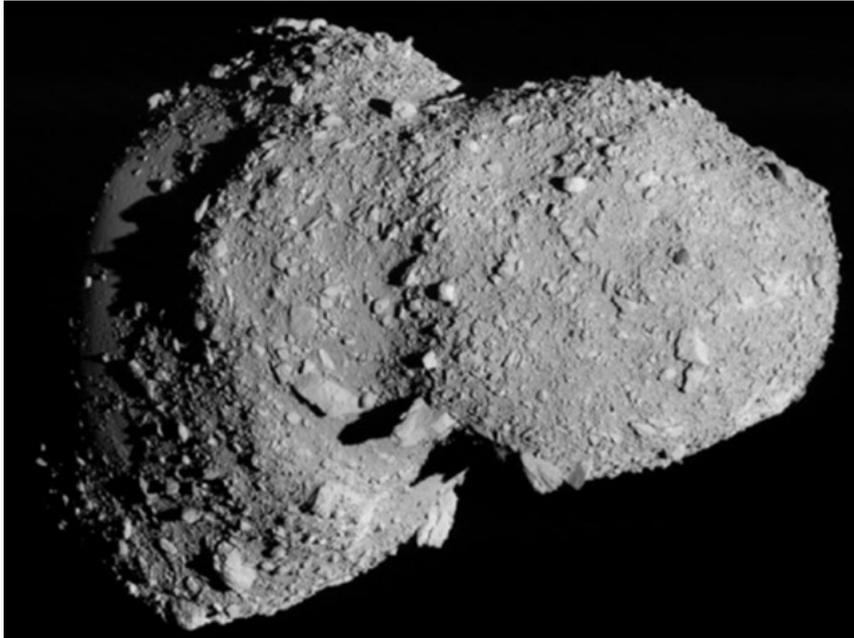
de aterrizar en el asteroide *Eros* y estudiar sus características (composición, minerales, forma, distribución interna de masa, campo magnético...). En su trayecto tuvo un encuentro con otro asteroide el 27 de junio de 1997, *Mathilde*, un asteroide de tipo C. A raíz de las perturbaciones medidas en la trayectoria de NEAR se calculó una densidad media de  $1.3 \pm 0.2 \text{ g/cm}^3$ , valor que indicaba una estructura porosa (50%) y de baja densidad. Es por tanto plausible pensar que *Mathilde* está formado por una agrupación de pequeñas rocas, estando el interior pulverizado por su largo historial de colisiones. Antes de que NEAR llegara a su objetivo, la sonda de la NASA Deep Space 1, una misión de bajo costo cuyo objetivo era probar nuevas tecnologías para la futura exploración espacial, sobrevoló un pequeño asteroide de tipo Q perteneciente a los NEAs, el asteroide (9969) *Braille*, el 29 de julio de 1999. El descubrimiento más importante en *Braille* vino de los magnetómetros, dos sensores del motor de iones capaces de una resolución de  $0.4 \text{ nT}$ . Por ello, Deep Space 1 fue la primera sonda en medir directamente el campo magnético de un asteroide. Finalmente, el 14 de febrero del 2000, la sonda NEAR alcanza al asteroide (433) *Eros* para llevar a cabo su misión. Desde ese momento y durante un año, NEAR estuvo orbitando a *Eros*, convirtiéndose en la primera sonda en orbitar un asteroide (véase la Figura 1.6). Durante este periodo de tiempo obtuvo información acerca de su tamaño, forma, masa (su distribución), y de los campos magnético y gravitatorio. El *rendezvous* se produjo el 12 de febrero de 2001, pudiéndose obtener las imágenes más detalladas de un asteroide hasta la fecha. La sonda fue capaz de mandar información desde la superficie durante dos semanas.



**Figura 1.6** Imagen del asteroide *Eros*. El asteroide tiene una longitud de  $33 \text{ Km}$ . Imagen: NASA/JPL/JHUAPL.

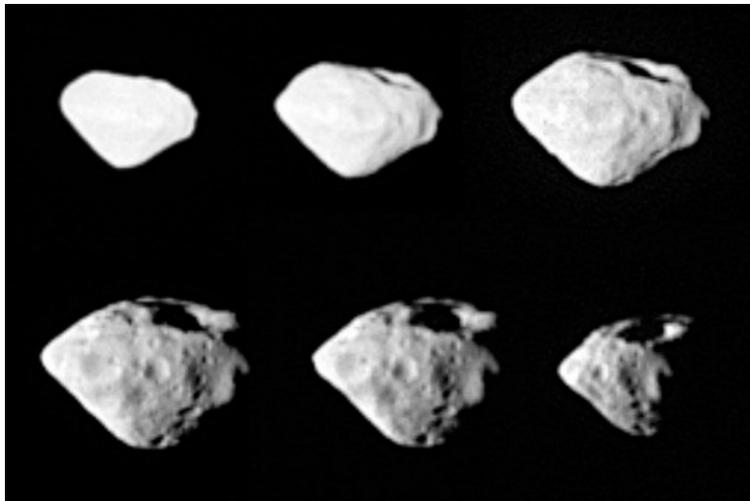
El 2 de noviembre de 2002 la sonda Stardust de la NASA, en su camino hacia el cometa *81P/Wild2*, tiene un encuentro con el asteroide (5535) *Annefrank*. Durante el encuentro (a  $3100 \text{ Km}$  y  $7.4 \text{ Km/s}$  en el punto más cercano), las imágenes tomadas apenas revelaron el 40% de la superficie de este, limitando mucho la estimación de su forma y tamaño. Durante el intervalo entre los meses de septiembre y diciembre del 2005, la sonda JAXA Hayabusa realizó la primera extracción de muestras de un asteroide en la historia. Los días 19 y 25 de noviembre de ese año fueron realizados dos contactos, estancias de 30 minutos y despegues desde la superficie de *Itokawa*, aunque solo el primero consiguió sacar material del asteroide. Las imágenes obtenidas durante el periodo de órbita alrededor del asteroide (a  $7 \text{ Km}$  de altitud) revelan una superficie como nunca antes vista en un asteroide (véase la Figura 1.7), debido a la ausencia completa de cráteres. Una posible explicación [6] es que el asteroide *Itokawa* esté formado por una agrupación no compactada de pequeñas rocas y trozos de hielo. De ser así los cráteres se llenarían de rocas cuando el asteroide se viera perturbado por la gravedad de un planeta cercano (la Tierra en este caso). También puede ser un efecto electromagnético causado por el sol, de forma que las partículas se volvieran eléctricamente cargadas y levitaran en la microgravedad, llenando los cráteres. Las muestras, que fueron retornadas a la Tierra el 13 de junio de 2013, fueron analizadas para revelar importantísima información acerca de la composición del asteroide y de los procesos de desgaste espacial.

El 5 de septiembre de 2008 la sonda Rosetta de la ESA, cuyo objetivo era el cometa *67P/Churyumov-Gerasimenko* (y que alcanzó el 10 de septiembre de 2014), pasó cerca de (2867) *Steins*, el primer asteroide de tipo E que se estudia de cerca. Pasó a  $800 \text{ Km}$  y  $8.6 \text{ km/s}$  en el punto más cercano, activando 14 instrumentos para sacar una descripción detallada del asteroide (véase la Figura 1.8). Se piensa [7] que *Steins* fue parte de un objeto diferenciado mayor en el pasado y que se separó de este, además de que el núcleo podría estar formado



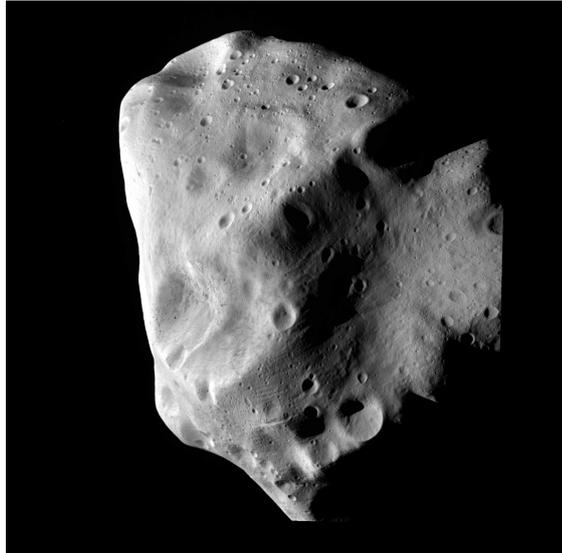
**Figura 1.7** Imagen del asteroide *Itokawa*. Imagen: ISAS/JAXA.

por una agrupación de rocas cuyo destino podría ser separarse completamente a causa de su rotación. Más adelante, el 10 de julio de 2010, *Rosetta* pasó cerca del asteroide *Lutetia* (3170Km y 15Km/s). Un estudio detallado de la superficie, composición y densidad concluyó que el asteroide es con mucha probabilidad un planetesimal, es decir, uno de los primeros estados en la formación de planetas en los comienzos del Sistema Solar, y que de alguna forma ha sobrevivido hasta el día de hoy a pesar de la evidencia de las continuas colisiones que ha sufrido (véase la Figura 1.9).

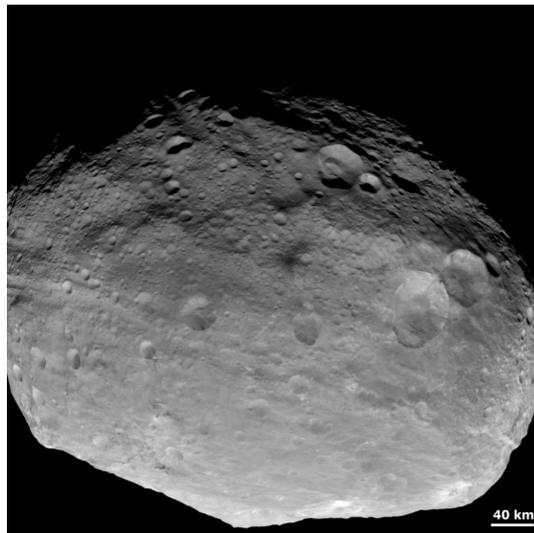


**Figura 1.8** Imagen del asteroide *Steins*. El asteroide tiene unas dimensiones de  $6.7 \times 5.8 \times 4.5 \text{Km}^3$ . Imagen: ESA ©2008 MPS for OSIRIS Team MPS/UPD/LAM/IAA/RSSD/INTA/UPM/DASP/IDA.

El 16 de julio de 2011 la sonda *Dawn* de la NASA, cuya misión es visitar tanto *Vesta* como *Ceres* (tercer y primer cuerpo más grande del cinturón de asteroides respectivamente), entra en órbita alrededor de *Vesta* (la primera vez que se órbita un cuerpo del cinturón principal). Con un radio de 530 Km se cree que *Vesta* es el remanente intacto de un protoplaneta de la época de formación del Sistema Solar (véase la Figura 1.10). En septiembre de 2012 terminó con su investigación de *Vesta*, y partió hacia (*1*) *Ceres*, para llegar en primavera del 2015. Actualmente la misión sigue su curso normal y se encuentra en órbita alrededor de *Ceres* enviando información muy detallada [8] (véase la Figura 1.11).



**Figura 1.9** Imagen del asteroide *Lutetia*. El asteroide tiene unas dimensiones de  $121 \times 101 \times 75 \text{ Km}^3$ . Imagen: ESA 2010 MPS for OSIRIS Team MPS/UPD/LAM/IAA/RSSD/INTA/UPM/DASP/IDA.

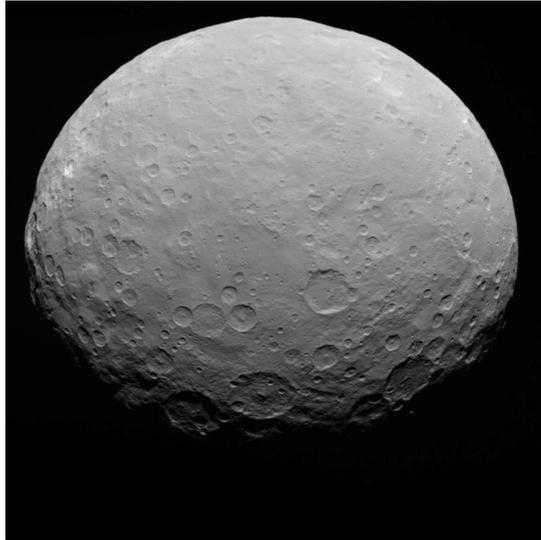


**Figura 1.10** Imagen del asteroide *Vesta*. La imagen tiene una resolución de 485m por píxel. Imagen: NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA.

Por último, cabe mencionar el sobrevuelo de la sonda china Cheng'E 2 del asteroide (4179) *Toutatis* (un NEA de clase S-) el 13 de diciembre de 2012 a una distancia de apenas 3.2Km.

## 1.4 Futuras misiones

A día de hoy ya hay misiones en desarrollo para estudiar asteroides (como la misión *Dawn*), además de planes para misiones futuras. La NASA ya tiene preparada la misión *OSIRIS-REx* [9], cuya fecha de lanzamiento se ubica en septiembre de 2016 y tiene el objetivo aproximarse al que se considera el asteroide más peligroso en términos de probabilidad de colisión, el asteroide *Bennu* (1999 RQ36). Se planea que alcanzará su objetivo en el año 2020, y si sale como está planeado será capaz de retornar muestras de la superficie. La misión *Hayabusa* tiene una sucesora, la *Hayabusa 2*, cuya sonda se lanzó el 3 de diciembre de 2014 y tiene previsto llegar en junio de 2018 a su objetivo, el asteroide *Ryugu* (1999 JU3), con intención de crear un pequeño cráter con un dispositivo de colisión, tomar muestras de este, y retornarlas a la Tierra para el 2020. Para concluir, la ESA (en colaboración con la NASA) se encuentra desarrollando una misión con objetivo el



**Figura 1.11** Imagen del planeta enano *Ceres*. Tomada desde una distancia de 13600Km. Imagen: NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA.

sistema *Didymos* para el año 2020, AIM (*Asteroid Impact Mission*), la primera misión a un sistema doble de asteroides (*Didymain* y *Didymoon* son el cuerpo mayor y el menor respectivamente). La misión tiene como objetivo estudiar las tecnologías asociadas con el desvío de asteroides peligrosos mediante misiles que impacten sobre estos.

## 1.5 Objetivos y alcance del trabajo

En este trabajo se pretende dar a conocer herramientas básicas para el estudio de los asteroides del Sistema Solar. En particular, a aquellos asteroides que tengan alguna utilidad desde alguno de los puntos de vista explicados en Sección 1.3 y que sean *fácilmente* alcanzables con la tecnología de que se dispone actualmente. Se hará un estudio de las características dinámicas que tienen algunos asteroides (órbitas, campo gravitatorio...), así como de las órbitas que se pueden alcanzar en las cercanías de estos bajo la simplificación (nada exagerada en la mayoría de los casos) de que un asteroide se puede asimilar a un elipsoide triaxial. Finalmente, se hará énfasis en la parte de la exploración de asteroides que se puede considerar más delicada, el *rendevouz* sobre estos, estudiando métodos simplificados para la simulación y optimización del proceso.

## 1.6 Estructura del documento

En esta introducción se ha pretendido dar una visión general básica del concepto de asteroide a día de hoy así como del trabajo de exploración que se ha hecho hasta el momento, para así facilitar la comprensión de las decisiones que se tomen en adelante en este trabajo. En el capítulo 2 se estudiará un método para simular las órbitas de asteroides cercanos a la Tierra con suficiente precisión en lapsos de tiempo del orden de una misión de este tipo. En el capítulo 3 se planteará el modelo de asteroide que se va a usar a lo largo del trabajo, en el cual se realizan simplificaciones en su forma y dinámica rotacional. En el capítulo 4 se estudiarán las órbitas que puede desarrollar una nave alrededor de estos bajo ciertas simplificaciones, así como las propiedades de las órbitas periódicas dada su elevado valor práctico. El capítulo 5 expone diversos procedimientos para el *rendezvous* sobre asteroides cuando se realiza la simplificación de que el asteroide no ejerce ningún efecto sobre la sonda, y considerando además el efecto de la gravedad sobre la maniobra calculada con tal simplificación. En el capítulo 6 se realizarán algunos comentarios sobre los procedimientos y simplificaciones realizadas, además de propuestas de mejora y ampliación de lo expuesto en el presente documento. Se añade un capítulo Anexo en el que se explican algunos conceptos relacionados con la Mecánica Orbital para ayudar a la comprensión de lo que aquí se expone.



## 2 Modelado de la órbita del asteroide

Para la obtención de la órbita del asteroide a partir del momento en que comienza la simulación, se integrará directamente la ecuación del movimiento de un cuerpo sometido a la fuerza del Sol y de otros astros. En este caso, ya que nos interesa conocer posiciones futuras de asteroides que podamos alcanzar con relativa facilidad, solo se tendrá en cuenta la acción gravitatoria de la Tierra y de Júpiter, pues como se verá más adelante, ambos tienen efectos gravitatorios de la misma importancia cuando se trata de órbitas en las cercanías de la Tierra. Para ello será necesario conocer en todo momento las posiciones de ambos planetas, y así poder usarlas en la integración numérica. Esto se conseguirá aplicando un método específico para propagar los elementos orbitales de los planetas (véase el capítulo Anexo para una explicación pormenorizada de los elementos orbitales). A lo largo del capítulo se necesitarán datos de posición reales de los asteroides para así poder validar los resultados obtenidos de este método de simulación, para esto se recurrirá a la herramienta *HORIZONS System* del JPL (*Jet Propulsion Laboratory*). Con dicha herramienta se pueden obtener efemérides<sup>1</sup> de alta precisión de cualquier cuerpo del Sistema Solar en el periodo de tiempo que se desee y en intervalos elegidos por el usuario (de esta forma podemos hacer que coincidan con el paso de integración que usamos en la simulación).

### 2.1 Ecuación del movimiento

Para empezar, supongamos que solo hay un tercer cuerpo que perturba el movimiento del asteroide respecto del que tendría si solo estuviera el Sol. Así, su movimiento vendrá dado por la siguiente ecuación diferencial para un sistema de referencia inercial con origen el centro de masas de los dos cuerpos másicos:

$$\ddot{\vec{r}}_{IN} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{Cs} \frac{\vec{r}_{Cs} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs} - \vec{r}|^3} \quad (2.1)$$

En la Ecuación 2.1 el vector  $\vec{r}$  da la posición del asteroide respecto del cuerpo principal del sistema (el Sol en nuestro caso), mientras que el vector  $\vec{r}_{Cs}$  es el que apunta al cuerpo secundario con origen en el cuerpo principal. Véase la Figura 2.1 donde se ejemplifica la situación anterior para el sistema Tierra-Luna.

Para esta aplicación nos interesa conocer el movimiento del asteroide respecto del cuerpo principal (y no respecto del baricentro<sup>2</sup> del sistema completo), por lo que hay que transformar la ecuación anterior para obtener las fuerzas que ve el asteroide vistas desde el sistema de referencia fijo al cuerpo principal.

Utilizando la nomenclatura de la Figura 2.1 se tiene que  $\vec{r}_{Cs} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , mientras que  $m_{Cp}\vec{r}_1 + m_{Cs}\vec{r}_2 = \vec{0}$  (la posición del centro de masas en un sistema de referencia fijo a este es  $\vec{0}$  por definición). Con lo anterior se llega a  $\vec{r}_1 = -\frac{m_{Cs}}{m_{Cs}+m_{Cp}}\vec{r}_{Cs}$ . Por otro lado, la ecuación del movimiento del cuerpo secundario dicta que

$$\ddot{\vec{r}}_{Cs} = -\frac{G(m_{Cs}+m_{Cp})}{r_{Cs}^3}\vec{r}_{Cs}. \text{ De donde } \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_{Cs}}{m_{Cs}+m_{Cp}}\ddot{\vec{r}}_{Cs} = \frac{m_{Cs}}{m_{Cs}+m_{Cp}}\frac{G(m_{Cs}+m_{Cp})}{r_{Cs}^3}\vec{r}_{Cs} = \frac{\mu_{Cs}\vec{r}_{Cs}}{r_{Cs}^3}.$$

Como  $\vec{r}_{IN} = \vec{r}_1 + \vec{r}$ , llegamos al resultado que buscábamos:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{Cs} \frac{\vec{r}_{Cs} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs} - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_{Cs}\vec{r}_{Cs}}{r_{Cs}^3} = \vec{\gamma}_K + \vec{\gamma}_P \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> Las efemérides astronómicas son colecciones de datos que contiene las coordenadas de los cuerpos celestes de interés para un conjunto de épocas dadas

<sup>2</sup> Centro de gravedad

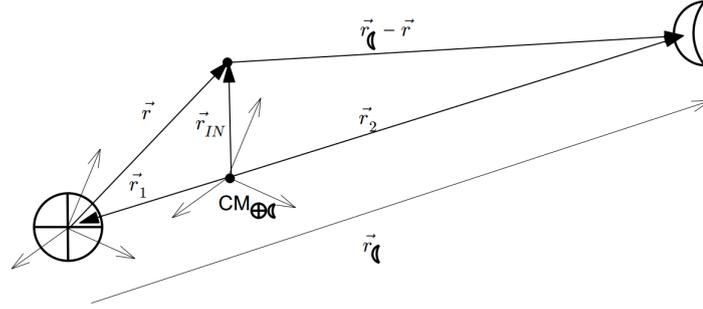


Figura 2.1 Sistema Tierra-Luna.

Donde  $\vec{\gamma}_K = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}}{r^3}$  es la fuerza Kepleriana clásica, y  $\vec{\gamma}_P = \mu_{Cs} \frac{\vec{r}_{Cs} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs} - \vec{r}|^3} - \frac{\mu_{Cs} \vec{r}_{Cs}}{r_{Cs}^3}$  es la fuerza de perturbación debida al tercer cuerpo.

Lo anterior se puede generalizar a un sistema con más cuerpos de la siguiente forma<sup>3</sup>:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{\gamma}_K + \sum_{i=1}^N \vec{\gamma}_{P_i} \quad (2.3)$$

Para poder utilizar la expresión anterior (integrarla para obtener la posición del asteroide) es necesario que conozcamos la posición de los  $N$  cuerpos en todo momento. Esto se resuelve en el siguiente punto.

## 2.2 Posición de los planetas

La obtención de la posición de los planetas del sistema solar en un intervalo de tiempo genérico no es un problema trivial ya que estos están sometidos a multitud de perturbaciones que alejan su posición de la que se podría esperar para un sistema de dos cuerpos (Sol-Planeta). Por ello, el procedimiento que se seguirá será el siguiente: A partir de efemérides conocidas de los planetas en la época del J2000<sup>4</sup> se obtendrán sus elementos orbitales Keplerianos en el momento del comienzo de la simulación utilizando un propagador planetario<sup>5</sup>. En los instantes posteriores de la simulación se seguirá usando el propagador planetario para conocer la posición de estos.

### Propagador planetario

Para la utilización del propagador planetario se usarán los datos de la Tabla 2.1, en los que se tiene tanto el valor de los elementos orbitales en el J2000 como su variación temporal a partir de ese momento (nótese que se va a utilizar el baricentro del sistema Tierra-Luna y no únicamente la Tierra). Tradicionalmente para los planetas los elementos orbitales heliocéntricos se dan de la forma  $(a, e, i, \Omega, \varpi, L)$ , donde  $\varpi = w + \Omega$  es la longitud del perihelio, y  $L = \varpi + M$  es la longitud media.

El modelo a seguir con el propagador planetario pasa por utilizar la siguiente ecuación:

$$(a, e, i, \Omega, \varpi, L) = (a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \varpi_0, L_0) + \left( \dot{a}, \dot{e}, \frac{d}{dt} i, \dot{\Omega}, \dot{\varpi}, \dot{L} \right) \cdot T_0 \quad (2.4)$$

Donde  $T_0$  es el número de centurias julianas transcurridas entre el J2000 y el momento en que se quieren conocer los elementos planetarios heliocéntricos. Se calcula utilizando la fórmula  $T_0 = \frac{JD - 2451545}{36525}$ , donde JD es el día juliano<sup>6</sup> de cálculo.

<sup>3</sup> Esta afirmación necesita de una justificación adecuada ya que se está generalizando un resultado del problema de los tres cuerpos para un sistema con más cuerpos. La justificación se desarrolla en el capítulo Anexo.

<sup>4</sup> Se define una época como un instante de tiempo que se usa como referencia y en el que se conoce la posición de uno o más cuerpos de interés (planetas, estrellas...). La época estándar actual es el J2000, el 1 de Enero de 2000 a las 12:00

<sup>5</sup> Un propagador es un método de obtención de elementos orbitales a partir de estos en un instante dado. En el caso del propagador planetario, este utiliza un ajuste que aproxima con bastante precisión la variación con el tiempo de los mismos.

<sup>6</sup> Definidos por Joseph Slanger en 1582 con el propósito de racionalizar la medida del tiempo en escalas astronómicas (años, siglos) evitando las ambigüedades como los años bisiestos y permitiendo unificar los calendarios. Es una cuenta de días a partir de la época definida a las 12:00 UT del 1 de Enero del año 4713 AC. Se cuenta 1 día de 12:00 UT de un día al siguiente, y las horas minutos y

**Tabla 2.1** Elementos orbitales Keplerianos y su variación respecto del plano de la eclíptica y el equinoccio en el J2000. Válido para el intervalo 1800 AD - 2050 AD. Ángulos en grados y su variación temporal en grados por centuria juliana. Fuente: JPL NASA.

	<b>a [ua, ua/cty]</b>	<b>e</b>	<b>i</b>	<b><math>\Omega</math></b>	<b><math>\varpi</math></b>	<b><math>L</math></b>
Baricentro	1.00000261	0.01671123	-0.00001531	0	102.93768192	100.46457166
Tierra-Luna	0.00000562	-0.00004392	-0.01294668	0	0.32327364	35999.37244981
Júpiter	5.20288700 -0.00011607	0.04838624 -0.00013253	1.30439695 -0.00183714	100.47390909 0.20469106	14.72847983 0.21252668	34.39644051 3034.74612775

### Coordenadas cartesianas a partir de elementos orbitales

Dado un sistema de referencia con origen en el foco ocupado por el cuerpo central del movimiento y eje  $x$  apuntando hacia periapsis (sistema de referencia perifocal), la posición y la velocidad dadas las coordenadas polares vendrá por:

$$\vec{r}^F = r\vec{e}_r \quad ; \quad \vec{v}^F = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Para dejarlo en función de la anomalía verdadera usaremos que la velocidad a la que barre áreas el vector  $\vec{r}$  es constante (segunda ley de Kepler), lo cual se puede demostrar que significa  $h = r^2\dot{\theta}$  (siendo  $h$  el momento cinético específico del movimiento alrededor de la órbita, también llamada constante de áreas). Esto junto con la ecuación de la cónica y la definición del *parámetro* de la órbita lleva a:

$$r\dot{\theta} = \frac{\sqrt{p\mu}}{r} = (1 + e\cos(\theta))\sqrt{\frac{\mu}{p}} \Rightarrow$$

$$\dot{r} = \dot{\theta}\frac{d(r)}{d\theta} = r\dot{\theta}\frac{e\sin(\theta)}{(1 + e\cos(\theta))} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin(\theta)$$

Por lo que sustituyendo se obtienen las coordenadas cartesianas en función de la anomalía verdadera:

$$\vec{r}^F = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}^F = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) + e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las coordenadas anteriores están dadas en el sistema de referencia perifocal, y para expresarlas en el sistema heliocéntrico hay que transformar los vectores usando la matriz de giro:

$$C_R^F = \begin{bmatrix} \cos(\Omega)\cos(w) - \sin(\Omega)\sin(w)\cos(i) & \sin(\Omega)\cos(w) + \cos(\Omega)\sin(w)\cos(i) & \sin(w)\sin(i) \\ -\cos(\Omega)\sin(w) - \sin(\Omega)\cos(w)\cos(i) & -\sin(\Omega)\sin(w) + \cos(\Omega)\cos(w)\cos(i) & \cos(w)\sin(i) \\ \sin(\Omega)\sin(i) & -\cos(\Omega)\sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix}$$

La matriz anterior transforma un vector en el sistema de referencia heliocéntrico al sistema perifocal, por lo que la inversa hará el cambio contrario, que es el que buscamos.

## 2.3 Implementación en *Matlab*

El procedimiento que se ha seguido para poder propagar la posición de un asteroide cualquiera desde una época también genérica (dentro de un intervalo definido por el propagador planetario) mediante métodos numéricos se explica a continuación. La estructura de los archivos de *Matlab* utilizados es la siguiente:

segundos en exceso de las 12:00 UT se contabilizan como decimales del día. Por ejemplo, el 1 de Enero de 2000 (a las 12:00 horas UT) es el JD 2451545.0

- Programa principal: Aquí se introducen los datos referentes al asteroide del que se quiere conocer la posición en un intervalo de tiempo, es decir, sus elementos orbitales y la época a la que pertenecen (esta puede ser cualquiera en el intervalo 1800 AC - 2050 AC, aunque es posible ampliar ese intervalo añadiendo más información del propagador planetario), así como el tiempo que se quiere propagar desde esa época. Después se llama a las funciones necesarias para realizar la tarea, estas se enumeran a continuación.
- Función de ecuación diferencial del movimiento: Esta función devuelve el valor de las derivadas de posición y velocidad, en función de los valores de posición y velocidad en un instante dado, es decir, que hay que transformar la ecuación diferencial de segundo orden dada en la Sección 2.1, a un sistema de ecuaciones de primer orden para poder resolverla numéricamente mediante una función de tipo *ode* implementada en *Matlab*:

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = f(\vec{r}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{r} = \dot{\vec{r}} \\ \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = f(\vec{r}) \end{cases}$$

- Función que propaga la posición de los planetas: Se han realizado dos funciones para tal propósito. Una de ellas utiliza el método del propagador planetario para conocer los elementos orbitales heliocéntricos de los planetas en el instante de comienzo de la simulación. Para ello utiliza la diferencia en *días julianos* de la época inicial y la del J2000 (donde se tienen los elementos orbitales de los planetas). La otra utiliza el propagador planetario para conocer los elementos de los planetas pasados  $t$  segundos del comienzo de la simulación, esta utiliza los elementos calculados por la primera como elementos iniciales.
- Función para obtener coordenadas cartesianas: Utiliza el método explicado en el apartado anterior para obtener las coordenadas de un planeta en un instante dado a partir de sus elementos orbitales, también es llamada desde dentro de la función de la ecuación diferencial.
- Función para extraer datos de posición: A partir de las efemérides obtenidas mediante la herramienta *HORIZONS* extraemos los elementos orbitales en los instantes de tiempo deseados, para así poder comparar los resultados de la simulación. Se ha aplicado tanto para la posición del asteroide como para los planetas.

En *Matlab* es muy común utilizar la función *ode45* para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), y para esta aplicación (tras haber hecho el cambio de ecuación de segundo orden a sistema de primer orden) es una opción perfectamente válida, ya que permite resolverlas con multitud de opciones en cuanto a restricciones de error relativo y absoluto. Aún así, en este caso nos interesa imponer unas restricciones a los errores bastante grandes, para reducir en la medida de lo posible la acumulación de error en posición del asteroide en misiones de larga duración. Para este tipo de aplicaciones *Matlab* tiene implementado el *ode113*, que comparado con el *ode45* es mucho mejor resolviendo problemas con tolerancias en los errores muy restrictivas. Precisamente, una situación muy común en la que destaca el *ode113* es en aplicaciones de mecánica orbital, donde se requiere alta precisión. Esta función implementa algoritmos para resolver los problemas con mucha rapidez, gracias a que necesita evaluar la función muchas menos veces. Se ha realizado una simulación de 10 años de duración con un paso fijo de 10 horas, y se ha comprobado la diferencia entre ambas funciones: *ode45* 115 segundos y *ode113* 8 segundos (es evidente cual conviene utilizar aquí). Se ha comprobado que no se está sacrificando precisión a cambio de la rapidez de integración.

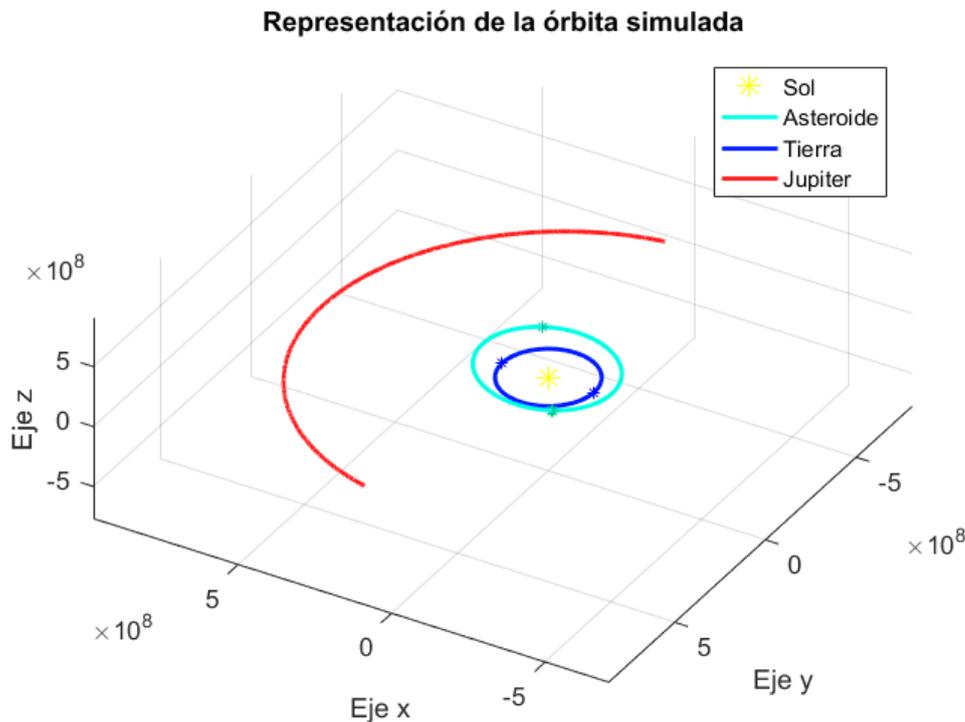
## 2.4 Análisis de resultados y validación del algoritmo

En este apartado se mostrarán los resultados obtenidos con algunos asteroides en intervalos de tiempo que podrían ser los de una misión real. Para validar los resultados, y por tanto el algoritmo en general, se usarán datos de esos asteroides y de los planetas obtenidos de la herramienta *HORIZONS* de la Nasa, y en lo que sigue se considerarán los datos reales, debido a la gran cantidad de perturbaciones que tiene en cuenta dicha herramienta para propagar la posición de los cuerpos del Sistema Solar.

### Eros

El asteroide (433) *Eros* ya ha sido visitado como se comentó en la Sección 1.3, y para esta simulación se ha elegido el 1 de enero del 2020 como punto de comienzo, así como un periodo de 5 años a partir de ese

momento como tiempo de simulación. Para la integración se ha dejado que la función *ode* elija el paso de forma dinámica, para así hacerla más eficiente (para distintos puntos de la órbita se necesitan pasos diferentes a fin de conseguir una precisión dada). En la Figura 2.2 se ha representado la órbita de Eros<sup>7</sup> (junto con la de la Tierra y Júpiter), aunque esto no da demasiada información sobre las capacidades de este método para determinar la posición del asteroide.



**Figura 2.2** Representación de la órbita de Eros (2020-2025).

Para ello se ha representado la distancia entre el asteroide real y el de la simulación en la Figura 2.3. Además, para dar perspectiva a estos datos, en la Figura 2.4 se tiene esta distancia en relación a la del asteroide real al Sol, expresada en tanto por ciento (de forma que un 100% significa que el asteroide de la simulación está tan alejado del real como este del Sol). El objetivo de este trabajo no es conocer la posición de un asteroide con la misma precisión que la que se requeriría para llevar una nave a las cercanías de este, sino más bien para hacer el diseño preliminar de una misión de este tipo, por lo que en adelante se considerarán válidas distancias relativas menores de un uno por ciento (que no deja de ser un error bajo si tenemos en cuenta la simplicidad del algoritmo).

Es interesante observar la Figura 2.5, ya que se puede ver confirmada la suposición inicial sobre la que descansa el algoritmo de que tanto la Tierra como Júpiter tienen importancias relativas similares. En el caso de la órbita de Eros, es Júpiter quien tiene una clara relevancia en cuanto a la magnitud de la perturbación, pero ambos planetas ejercen una fuerza sobre el asteroide del mismo orden. Finalmente, véase la Figura 2.6, donde se ve representada la distancia entre la Tierra de nuestra simulación (obtenida con el uso del propagador planetario) y la Tierra real, en relación a la distancia de la Tierra real al Sol. Como puede observarse es una diferencia muy baja que parece no seguir ningún tipo de tendencia, lo que valida la utilización de este método para posicionar los planetas.

Para comprobar como se pierde precisión conforme el tiempo de simulación aumenta se ha realizado otra hasta el año 2250 (mucho mayor del necesario para una misión real). En la Figura 2.7 se muestra el error obtenido en la posición del asteroide durante el transcurso de la simulación, y como era de esperar este va aumentando, llegando a ser demasiado grande (más de un 1%) a partir de la mitad de esta. En la Figura 2.8 puede verse la magnitud de las perturbaciones ejercidas por Júpiter y la Tierra, y aunque el primero sigue

<sup>7</sup> Se han marcado los puntos de paso por los nodos ascendente y descendente con asteriscos, de forma que para órbitas que se cortan pueda verse a primera vista como de cerca se ha realizado un acercamiento entre planeta y asteroide.

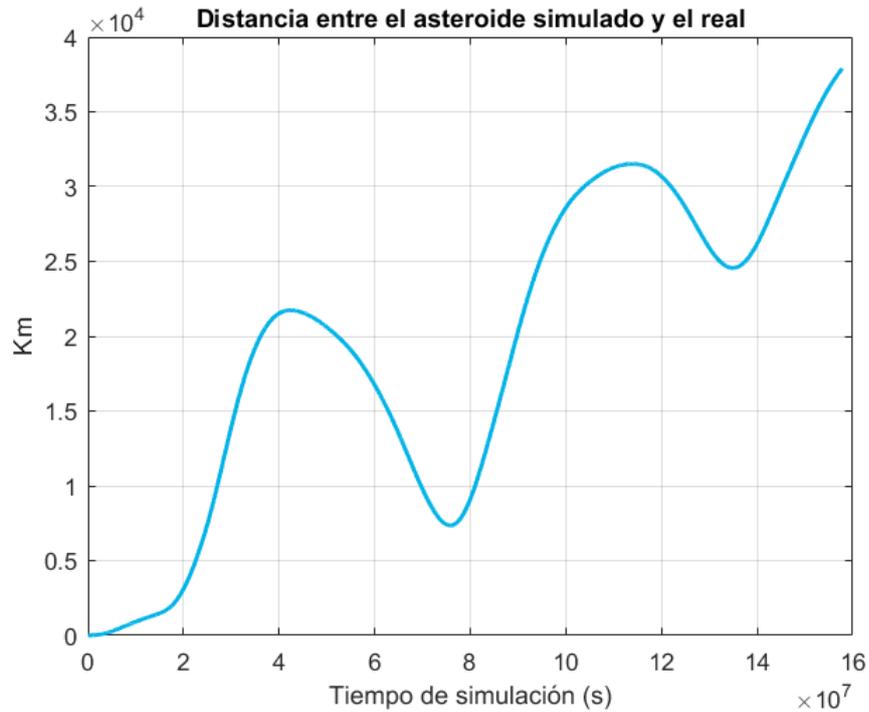


Figura 2.3 Error de la simulación, Eros (2020-2025).

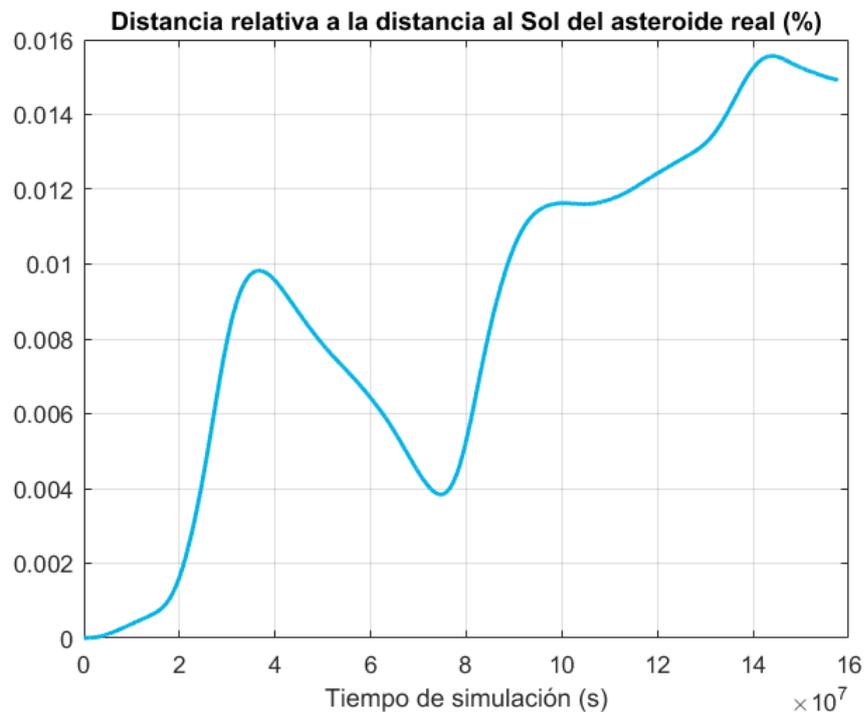


Figura 2.4 Error relativo, Eros (2020-2025).

siendo más importante en general, hay momentos en que ambos tienen la misma importancia relativa, debido a que el asteroide pasa lo bastante cerca de la Tierra. Por último, véase (Figura 2.9) que el error en posición de la Tierra durante la simulación se mantiene dentro de límites aceptables, incluso cuando el intervalo de simulación excede el de validez del propagador planetario.



Figura 2.5 Fuerzas de Júpiter y de la Tierra, *Eros* (2020-2025).

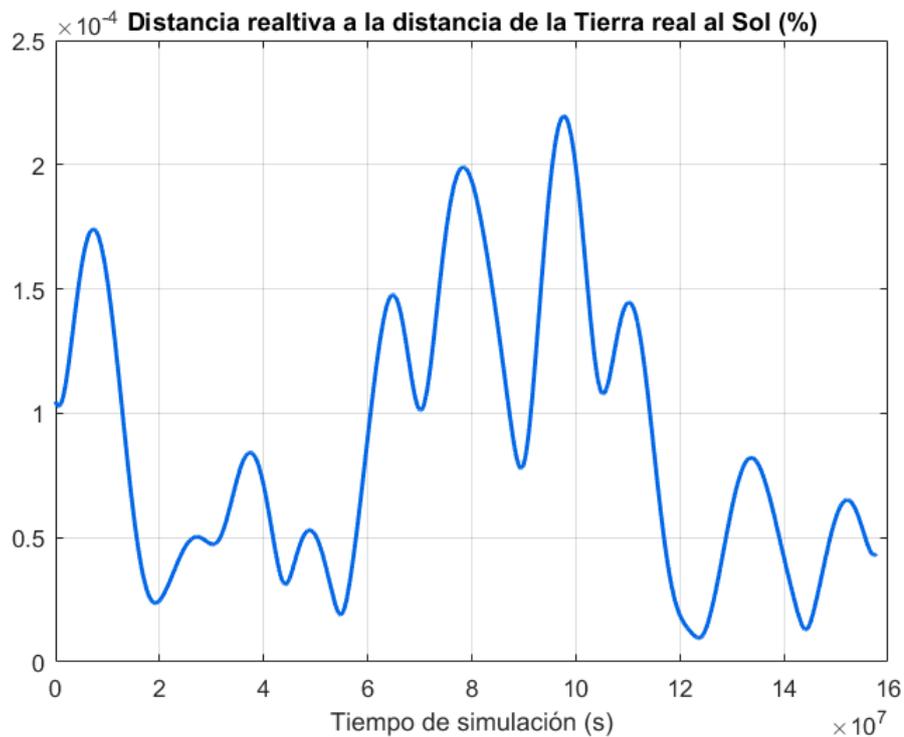


Figura 2.6 Distancia relativa entre la Tierra real y la simulada (2020-2025).

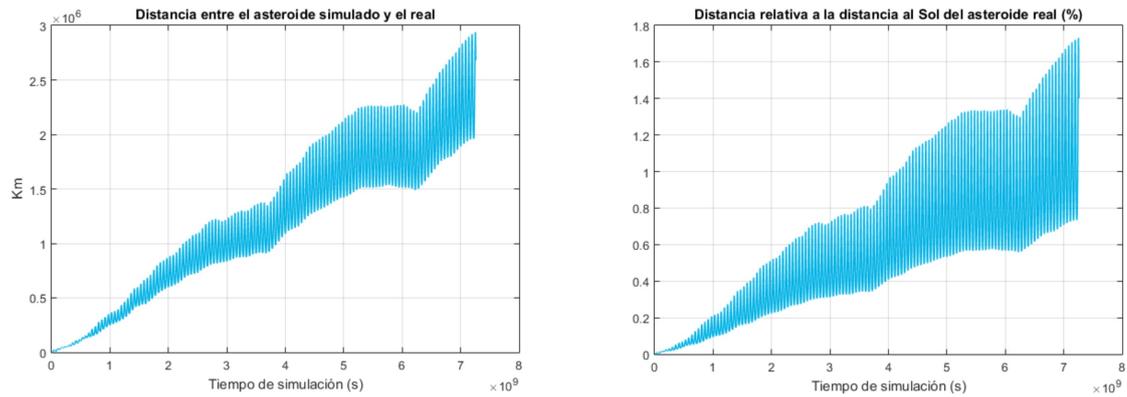


Figura 2.7 Error de la simulación en valor absoluto y relativo, *Eros* (2020-2250).

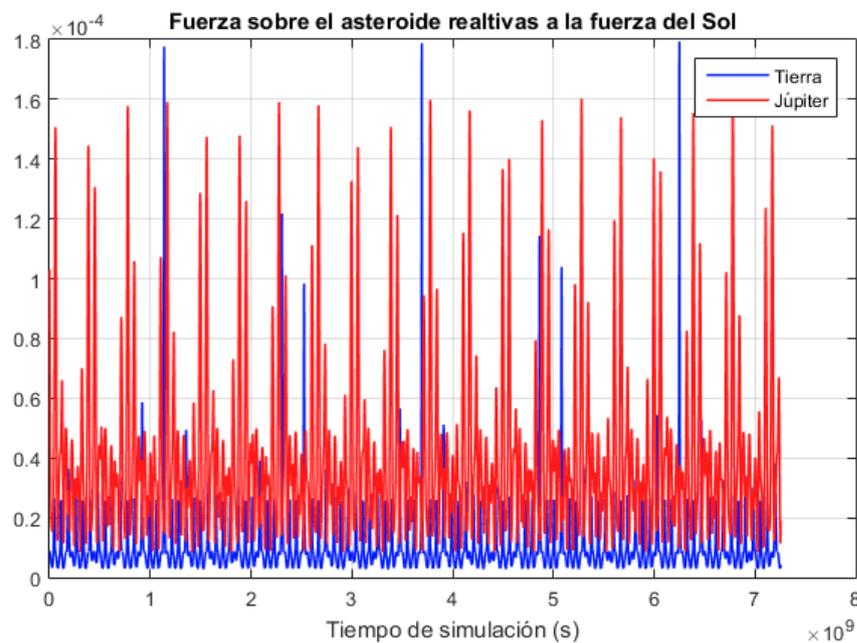


Figura 2.8 Fuerzas de Júpiter y de la Tierra, *Eros* (2020-2250).

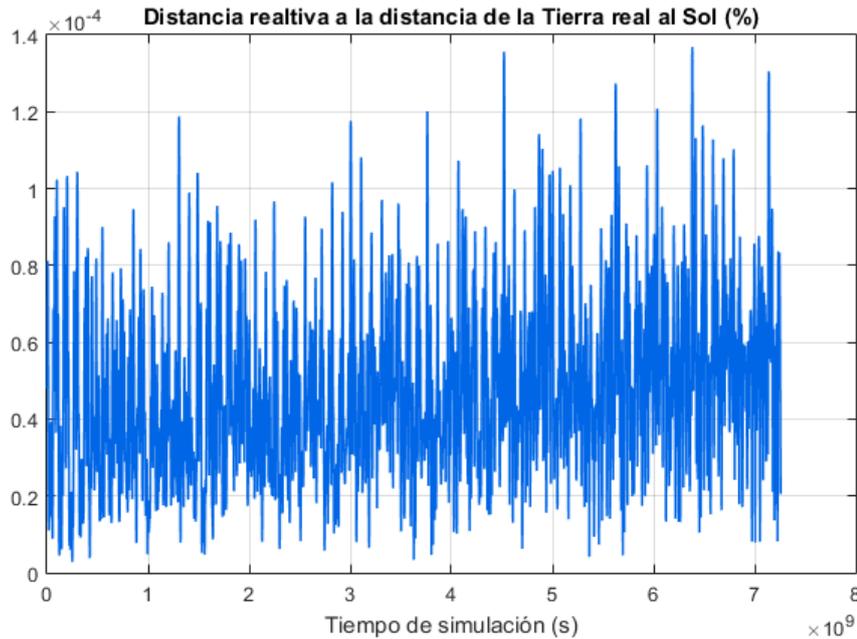
## Ryugu

El asteroide 162173 *Ryugu* (1999 JU3) es considerado uno de los más rentables económicamente desde el punto de vista de la minería espacial. Con un valor estimado en 95 mil millones de dólares<sup>8</sup> y un  $\Delta V$ <sup>9</sup> necesario para alcanzarlo de 4.6 Km/s de media (la Luna es alcanzable con un  $\Delta V$  de 4 Km/s aproximadamente en comparación), se estima que el aprovechamiento de los materiales de este asteroide puede tener un beneficio económico de 35 mil millones de dólares. En este caso se ha realizado la simulación en un periodo de 15 años y con los mismos parámetros, dando lugar a los datos de la Figura 2.10 y la Figura 2.11.

Se puede observar que desde el comienzo de la simulación el error empieza a divergir si lo comparamos con el caso del asteroide *Eros* (en la Figura 2.7 podemos ver que transcurren unos 63 años hasta que se alcanza este error, mientras que en este caso el tiempo transcurrido es de 15 años). Para comprender la razón de este comportamiento es útil comprobar la evolución de la distancia entre el asteroide y la Tierra, representado en la Figura 2.12, así como las fuerzas relativas que ejercen la Tierra y Júpiter (Figura 2.13). Se puede ver claramente que se ha producido un acercamiento entre el asteroide y la Tierra, lo cual a priori puede parecer algo anecdótico, y sin ninguna relación con el error obtenido. Sin embargo, conviene recordar al lector una

<sup>8</sup> Información basada en su tamaño y composición, que se obtiene mediante análisis espectral de la luz reflejada.

<sup>9</sup> En astronáutica es el incremento de velocidad total necesario para alcanzar una órbita determinada, y es directamente proporcional al coste de la misión.



**Figura 2.9** Distancia relativa entre la Tierra real y la simulada (2020-2250).

de las propiedades que posee el problema de los tres cuerpos de la Mecánica Orbital: es inherentemente caótico. Esto quiere decir que para un mismo problema, y dadas unas condiciones iniciales, el resultado de una simulación es altamente sensible a dichas condiciones iniciales, por lo que un cambio ínfimo en el valor de estas (ya sea en posición o velocidad), puede dar como resultado un cambio muy importante en las órbitas, que es precisamente lo que estamos viendo aquí. Como puede verse en la gráfica de las fuerzas relativas, al poco de comenzar la simulación la Tierra se vuelve muy importante, y es en este punto cuando la órbita del asteroide deja de ser un producto casi exclusivo de la atracción del Sol, volviéndose el resultado de un problema de 3 cuerpos y por tanto muy sensible a la posición de estos. Recuérdese que la posición de la Tierra resulta de utilizar un método muy simplificado, y como se vio en la Figura 2.6, es un dato que desde un primer momento acarrea un poco de error, por lo que esta es la causa de la falta de fidelidad de la simulación a partir de este momento.

Estos resultados proporcionan mucha información acerca de las limitaciones que tiene el método elegido para predecir la posición de asteroides que se encuentren en órbitas cercanas a la de la Tierra. Será altamente preciso cuando se trate de órbitas cercanas a esta, pero que no terminen de cortar en ningún punto. En cambio, los resultados deben ser tratados con precaución cuando se trate de asteroides que se crucen con la órbita de la Tierra, pues incluso el pequeño error que se obtiene utilizando el propagador planetario es suficiente para invalidar los resultados si se produce un acercamiento excesivo entre la Tierra y el asteroide.

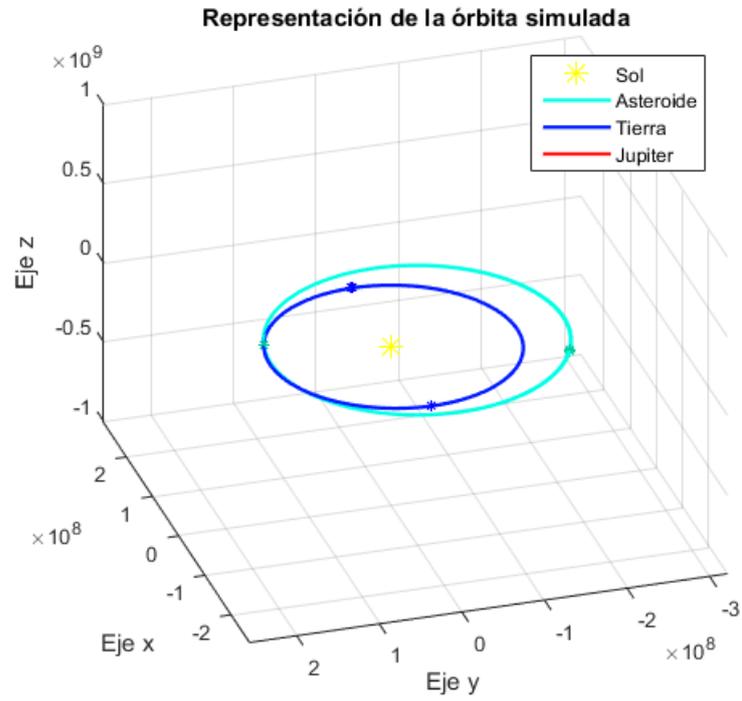


Figura 2.10 Representación de la órbita de Ryugu (2020-2035).

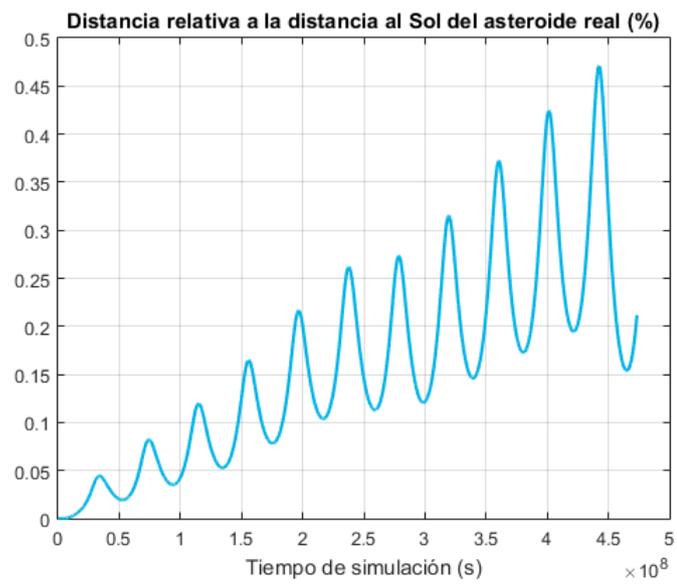


Figura 2.11 Error relativo de la simulación, Ryugu (2020-2035).

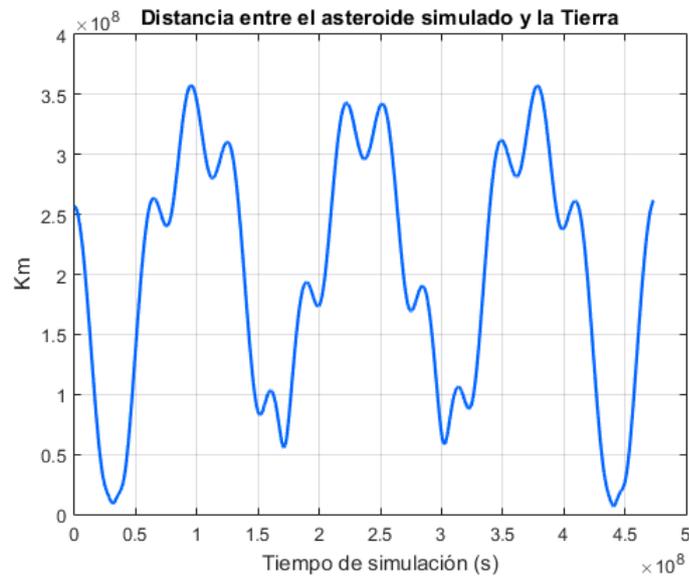


Figura 2.12 Distancia del asteroide simulado a la Tierra, Ryugu (2020-2035).

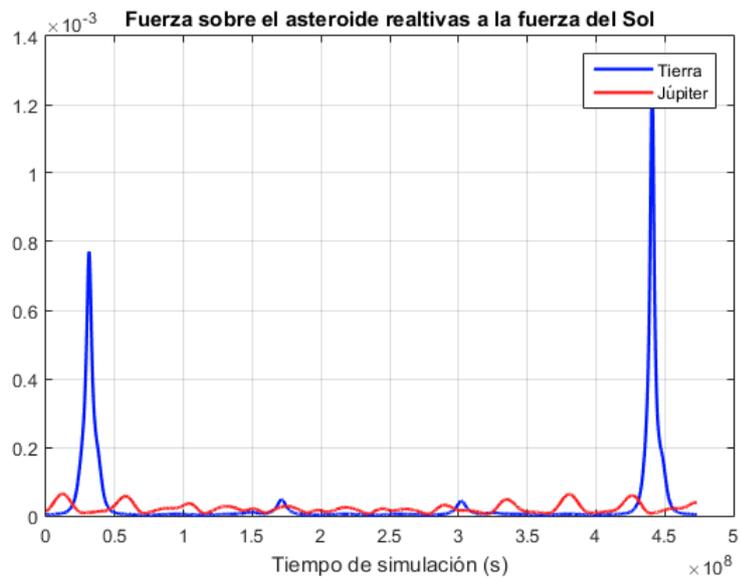


Figura 2.13 Fuerzas de Júpiter y de la Tierra, Ryugu (2020-2035).



### 3 Modelo de asteroide

Como ya se vio en el capítulo de introducción, existen asteroides de todo tipo de formas y tamaños, por lo que un modelo general de los mismos no es en absoluto trivial, aunque es técnicamente posible llegar hasta uno que nos permita conocer con total precisión el campo gravitatorio que estos generan a su alrededor si se tiene la suficiente información, sea cual sea el asteroide. Evaluar la dinámica alrededor de asteroides requiere de conocer un modelo completo del mismo, y para ello es necesario tener una descripción de su estado de rotación y de su campo gravitatorio. En cuanto a su estado de rotación, en principio este puede llegar a ser bastante complejo (rotación no uniforme alrededor de un eje que varía con el tiempo), pero debido a las fuerzas internas de disipación que actúan sobre los asteroides en su rotación, podemos suponer para nuestro modelo que el giro es uniforme y se realiza alrededor de un eje fijo, que además es uno de los ejes principales de inercia. La mayoría de asteroides se encuentran en este estado de rotación independientemente de cual fuera su estado inicial, y para aquellos con periodos de rotación normales (días o menos), ocurre en un periodo muy corto comparado con las escalas de tiempo del sistema solar.

El modelo de campo gravitatorio estándar que se usa en aplicaciones de navegación alrededor de cuerpos pequeños es el campo de expansión de armónicos esféricos. Este se deduce de imponer a una función que sea solución de la ecuación de Laplace<sup>1</sup>, siendo la función el potencial gravitatorio dependiente de la latitud y la longitud, así como de la distancia al centro de masas (ya que la distribución de masas es dependiente de estos),  $U = U(r, \phi, \lambda)$  (véase la Figura 3.1). En coordenadas esféricas la ecuación de Laplace se puede expresar como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (3.1)$$

La solución general a (3.1) viene dada por:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n J_{nm} \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 p_{nm}(\sin \phi) \cos(m(\lambda - \lambda_{nm})) \right] \quad (3.2)$$

El término  $\mu/r$  es el potencial gravitatorio creado por una esfera y es de donde se extrae el modelo de los dos cuerpos, mientras que el resto de la serie representa la desviación respecto de la esfera.  $R_0$  es el radio de normalización, y puede usarse un valor cualquiera (a veces se usa el de la esfera que circunscribe al elipsoide), ya que solo escala el valor del potencial, mientras que lo importante es el gradiente de este. Los coeficientes  $J_{nm}$  y  $\lambda_{nm}$  son los asociados al armónico  $nm$ , y  $p_{nm}$  es el polinomio asociado de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$  (evaluado en  $\sin(\phi)$ ), que se define como:

$$p_{nm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \Leftrightarrow p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$$

Donde  $p_n(x)$  es el polinomio de Legendre de grado  $n$ . Utilizando la formulación anterior se puede obtener una descripción detallada del potencial de cualquier cuerpo si se tiene la suficiente información referente a su forma y orientación respecto a unos ejes. Esta información puede obtenerse mediante datos radiométricos y ópticos que se extraen a partir de observaciones desde tierra, o preferiblemente, desde observaciones *in situ* para mayor detalle.

<sup>1</sup> La ecuación de Laplace se puede expresar como  $\nabla^2 F = 0$

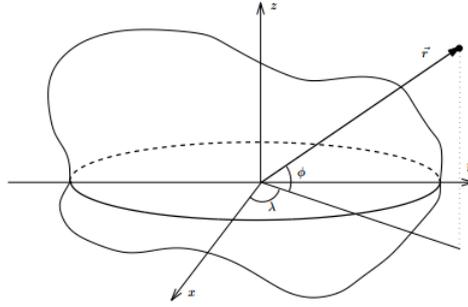


Figura 3.1 Cuerpo general.

### 3.1 Modelo de elipsoide triaxial

Para este trabajo se va a realizar una simplificación respecto a la forma de los asteroides que consiste en suponerlos aproximadamente como elipsoides triaxiales. Esto quiere decir que su geometría queda completamente definida con 3 parámetros (los tres semiejes del elipsoide por ejemplo), y como consecuencia que la descripción del potencial a partir de armónicos esféricos se puede truncar hasta los coeficientes de segundo grado. Este enfoque es una solución de compromiso entre la expansión de armónicos esféricos (que en potencia puede dar una descripción perfecta del campo gravitatorio) y el modelo de cuerpo esférico. Con el modelo triaxial obtenemos un modelo cerrado del potencial gravitatorio que tiene en cuenta los mayores efectos debidos a la forma no esférica del objeto, y que además puede derivarse de observaciones ópticas únicamente, pues solo necesitamos saber las dimensiones del elipsoide que engloba al asteroide con un mejor ajuste.

Así, de la ecuación (3.2) se realizan los sumatorios tomando hasta  $n = 2$ , por lo que aparecerán los coeficientes  $J_{20}, J_{21}, J_{22}, \lambda_{21}$  y  $\lambda_{22}$ . Si orientamos los ejes principales del elipsoide con los ejes coordenados, por simetría podemos afirmar que  $J_{21} = 0$  y  $\lambda_{22} = 0$ , y que por tanto  $\lambda_{21}$  tampoco es relevante (se usará  $J_{20}$  como  $J_2$ ). Por tanto, la expresión del potencial para el modelo triaxial dependerá de 2 parámetros, quedando de la siguiente forma:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 (1 - 3\text{sen}^2\phi) - 3J_{22} \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 \cos^2\phi \cos(2\lambda) \right] \quad (3.3)$$

Donde se ha tenido en cuenta que  $p_{20}(\text{sen}\phi) = \frac{1}{2}(3\text{sen}^2\phi - 1)$  y que  $p_{22}(\text{sen}\phi) = 3(1 - \text{sen}^2\phi) = 3\cos^2\phi$ . Para calcular las dos constantes que han quedado en la expresión del potencial debemos imponer dos condiciones sobre este, y para ello utilizaremos que por definición el potencial gravitatorio debe tener el mismo valor en todos los puntos de la superficie del elipsoide. En concreto lo aplicaremos sobre los puntos de intersección de los semiejes positivos con la superficie (véase la Figura 3.2):

$$A: \quad r = a; \quad \lambda = 0; \quad \phi = 0$$

$$B: \quad r = b; \quad \lambda = \pi/2; \quad \phi = 0$$

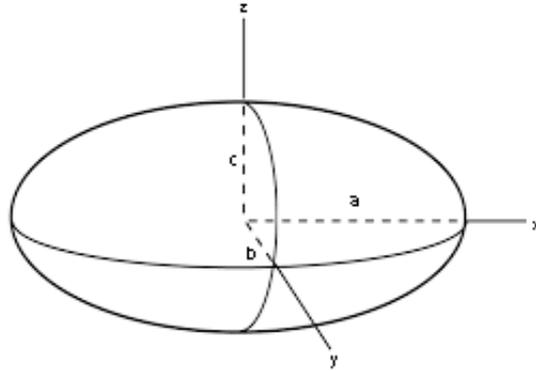
$$C: \quad r = c; \quad \phi = \pi/2 \quad \forall \lambda$$

Donde  $a, b$  y  $c$  son los valores de los semiejes del elipsoide, cumpliéndose que  $a \geq b \geq c$ . Así, haciendo que  $U_A = U_B$  y  $U_B = U_C$  se obtiene un sistema de dos ecuaciones con  $J_2$  y  $J_{22}$  como incógnitas:

$$J_2 \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{R_0}{a} \right)^2 - \frac{a}{2} \left( \frac{R_0}{b} \right)^2 \right] - J_{22} \left[ 3b \left( \frac{R_0}{a} \right)^2 - 3a \left( \frac{R_0}{b} \right)^2 \right] = (a - b)$$

$$J_2 \left[ \frac{c}{2} \left( \frac{R_0}{b} \right)^2 + b \left( \frac{R_0}{c} \right)^2 \right] - J_{22} \left[ 3c \left( \frac{R_0}{b} \right)^2 \right] = (b - c)$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen los valores de las constantes en la Ecuación 3.3. A continuación, solo necesitamos conocer el gradiente del potencial, pues en las ecuaciones del movimiento aparecen



**Figura 3.2** Elipsoide modelo triaxial.

las derivadas del potencial en coordenadas cartesianas. Para ello se aplica la expresión del gradiente en coordenadas esféricas:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \vec{e}_\lambda \quad (3.4)$$

El valor del parámetro gravitatorio se obtendrá en adelante suponiendo una densidad constante para el asteroide y aplicando:

$$\mu = Gm_{ast} = \frac{4\pi}{3} G\rho abc$$

Donde  $G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg \cdot s^2}$  es la constante de gravitación de Newton.



## 4 Dinámica orbital en las cercanías de un asteroide

---

Una sonda que se dirige a las proximidades de un asteroide se verá afectada por el Sol, los planetas más cercanos y en última instancia por la gravedad del asteroide (dejando a un lado las fuerzas no gravitatorias como la presión del viento solar o la propia propulsión de la nave). En adelante no se tendrán en cuenta las perturbaciones debidas a los planetas, y como se explicará, distinguiremos dos tipos de situaciones en lo que a la dinámica orbital cerca de asteroides se refiere. Primero se verán los efectos de la gravedad del asteroide sobre una sonda que se encuentre lo bastante cerca como para despreciar el efecto del Sol (el asteroide debe tener una masa suficiente para que esta sea una situación realista). Por último, en el caso de que el asteroide sea de masa despreciable, veremos una descripción de las trayectorias posibles en las cercanías de asteroides que se encuentran en órbitas elípticas alrededor del Sol. Este último caso es en realidad el más común dado que la gran mayoría de asteroides son de pequeño tamaño (menos de un kilómetro de diámetro), y por tanto tener en cuenta su gravedad es poco práctico. En cambio, existen asteroides cuya masa dista mucho de ser despreciable, como es el caso de los asteroides *Eros*, *Ida*, *Lutetia*, *Vesta*... (véase la Figura 1.1).

### 4.1 Considerando la masa del asteroide

Para el estudio del movimiento de una sonda alrededor de un asteroide que rota y teniendo en cuenta el efecto que tiene sobre esta la distribución de masa del asteroide es muy útil utilizar un sistema de referencia fijo a este. Con esta consideración conseguimos que las ecuaciones del movimiento sean independientes del tiempo, pues un punto fijo en este sistema de referencia ve siempre el mismo potencial gravitatorio (y por tanto el mismo gradiente), aunque este punto esté en realidad rotando respecto del sistema de referencia fijo a las estrellas.

Consideremos un sistema de referencia fijo al centro de masas del asteroide y cuya orientación está fija respecto de las estrellas, llamemos a este sistema de referencia  $S$ . Consideremos ahora el sistema de referencia con el mismo origen y con el eje  $Z$  coincidente al anterior, pero cuyos ejes  $X$  e  $Y$  están fijos a la superficie del asteroide, de forma que rota con la misma velocidad angular que el asteroide respecto de  $S$ , llamemos a este sistema  $S'$ .

Se puede demostrar que existe una relación entre la derivada temporal de un vector cualquiera en ambos sistemas de referencia, la cual se puede expresar como sigue:

$$\left[ \frac{d\vec{b}}{dt} \right]_S = \left[ \frac{d\vec{b}}{dt} \right]_{S'} + \vec{w}_{S'|S} \times \vec{b} \quad (4.1)$$

Donde  $\vec{w}_{S'|S}$  es el vector velocidad angular del sistema de referencia  $S'$  respecto del  $S$ . Por como están definidos los dos sistemas de referencia este vector se puede expresar como  $\vec{w}_{S'|S} = [0 \quad 0 \quad w_T]$ .

Sea  $\vec{r}$  el vector que da la posición de un punto en movimiento visto desde el sistema de referencia  $S$ , y  $\vec{r}'$  el que da la posición del mismo punto pero en coordenadas del sistema de referencia  $S'$  (es decir que  $\vec{r} = [\vec{r}']_S$ , o lo que es lo mismo  $\vec{r}' = [\vec{r}]_{S'}$ ). Aplicando la ecuación anterior:

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \right]_S = \left[ \frac{d\vec{r}'}{dt} \right]_{S'} + \vec{w}_{S'|S} \times \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{w}_{S'|S} \times \vec{r}'$$

Volviendo a aplicar lo mismo a la ecuación resultante:

$$\left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right]_S = \left[ \frac{d[\vec{v}' + \vec{w}_{S'|S} \times \vec{r}']}{dt} \right]_S = \left[ \frac{d[\vec{v}' + \vec{w}_{S'|S} \times \vec{r}']}{dt} \right]_{S'} + \vec{w}_{S'|S} \times [\vec{v}' + \vec{w}_{S'|S} \times \vec{r}']$$

Teniendo en cuenta que  $\vec{w}_{S'|S}$  es un vector constante por estar suponiendo un giro uniforme, se obtiene finalmente que:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{w}_{S'|S} \times \vec{v}' + \vec{w}_{S'|S} \times (\vec{w}_{S'|S} \times \vec{r}')$$

Donde  $\vec{a}$  es la aceleración que ve el punto desde el sistema de referencia  $S$  (que consideraremos inercial en primera aproximación), y  $\vec{a}'$  es la que se ve desde el sistema de referencia  $S'$ . Despejando  $\vec{a}'$  obtenemos la ecuación del movimiento en el sistema de referencia  $S'$ :

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{w}_{S'|S} \times \vec{v}' - \vec{w}_{S'|S} \times (\vec{w}_{S'|S} \times \vec{r}')$$

Donde se puede ver que los términos de aceleración no inerciales son la fuerza de Coriolis ( $2\vec{w}_{S'|S} \times \vec{v}'$ ) y la fuerza centrífuga ( $\vec{w}_{S'|S} \times (\vec{w}_{S'|S} \times \vec{r}')$ ), ambas debidas al giro del sistema de referencia  $S'$ . La aceleración  $\vec{a}$  es la debida a la gravedad del cuerpo central (en este caso el asteroide), las aceleraciones de control, y las perturbaciones debidas a otros cuerpos. En nuestro caso solo tendremos en cuenta la gravedad del asteroide pues estamos considerando que su masa es lo bastante grande para que esta sea la fuerza dominante. Así, teniendo en cuenta que  $\vec{a} = \vec{g} = \nabla U$ , y expresando los vectores en el sistema de referencia  $S'$ , las ecuaciones que describen el movimiento de una partícula alrededor de un asteroide vienen por:

$$\begin{cases} \dot{r}'_x = v'_x \\ \dot{r}'_y = v'_y \\ \dot{r}'_z = v'_z \\ \ddot{r}'_x = U_x + 2v'_y w_T + r'_x w_T^2 \\ \ddot{r}'_y = U_y - 2v'_x w_T + r'_y w_T^2 \\ \ddot{r}'_z = U_z \end{cases} \quad (4.2)$$

El vector  $\nabla U$  está calculado en el sistema de referencia  $S'$  con el modelo visto en el capítulo 2, por lo que para un punto  $\vec{r}'$  es un vector fijo e independiente del tiempo. Dadas unas condiciones iniciales en posición y velocidad en el sistema de referencia  $S'$  las ecuaciones anteriores se pueden integrar mediante la función *ode113* como ya se ha hecho anteriormente, obteniendo la trayectoria de una sonda alrededor del asteroide vista desde el sistema de referencia fijado a este.

**Tabla 4.1** Datos de algunos asteroides.

Asteroide	a [Km]	b [Km]	c [Km]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$T_r$ [h]	Fuente
Eros	34.4	11.2	11.2	2.67	5.27	JPL NASA
Ida	59.8	25.3	18.6	2.6	4.634	JPL NASA
Lutetia	121	101	75	3.4	8.165	ESA 2010 MPS
Mathilde	66	48	44	1.3	417.7	JPL NASA
Itokawa	0.535	0.294	0.209	1.9	12.132	JPL NASA

Considerando los datos del asteroide *Ida* dados en la Tabla 4.1 se ha realizado una simulación de un día de duración con condiciones iniciales  $[e \ a \ i \ \Omega \ w \ \theta]_{t_0} = [0.05 \ 100 \ 30 \ 180 \ 50 \ 30]$  en el sistema de referencia  $S$  (el semieje mayor está en kilómetros y los ángulos en grados). El resultado de dicha simulación puede verse en la Figura 4.1. También se ha realizado la conversión del resultado a los ejes fijos y

se ha representado en la Figura 4.2. Como puede verse, la forma no esférica del asteroide tiene efectos muy importantes sobre la órbita de una sonda que se mueva cerca de este, pudiendo desviarla completamente de una órbita kepleriana.

Suponiendo que el asteroide se encontrara en su punto más cercano al sol, se ha calculado la relación entre la fuerza provocada por el asteroide en la posición dada por las condiciones iniciales y la fuerza ejercida por el Sol, revelando que la del asteroide es aproximadamente 2000 veces mayor, por lo que despreciar la fuerza del Sol es viable en primera aproximación para estudiar la dinámica orbital en estos casos. La representación de los elementos orbitales de esta simulación se encuentra en la Figura 4.3, donde puede observarse que, además de la anomalía verdadera, todos los elementos orbitales sufren variaciones. Mientras que algunos parecen seguir una tendencia (argumento del perigeo y ascensión recta del nodo ascendente), otros parecen sufrir cambios aproximadamente periódicos (semieje mayor, inclinación y excentricidad). Un estudio detallado de los efectos de un elipsoide triaxial sobre la evolución de los elementos orbitales se escapa al alcance de este documento por su complejidad, pero a continuación se procede a obtener algunos resultados interesantes sobre estas órbitas.

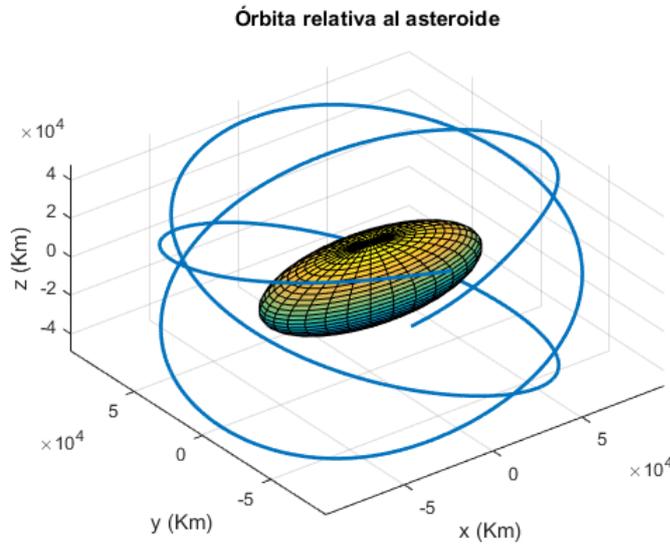


Figura 4.1 Órbita de prueba Ida, ejes móviles.

#### 4.1.1 Integral de Jacobi

Las tres últimas ecuaciones de (4.2) pueden integrarse para obtener una constante del movimiento, resultado de la rotación uniforme del asteroide. Esta es la constante de Jacobi, y viene por:

$$C = -\frac{1}{2}(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) + \frac{1}{2}w_T^2(r_x'^2 + r_y'^2) + U \quad (4.3)$$

Donde  $T = \frac{1}{2}(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)$  es la energía cinética de sonda en  $S'$ , y  $U' = \frac{1}{2}w_T^2(r_x'^2 + r_y'^2) + U$  es el pseudopotencial, estando ambos definidos en el instante inicial, por lo que el valor de  $C$  puede calcularse conocidas las condiciones iniciales, y se mantendrá constante en todo momento.

Dado un valor de  $C$  es posible que existan puntos donde  $T = 0$  (velocidad nula), estos puntos determinan las llamadas *superficies de velocidad cero*, que suponen barreras al movimiento, es decir, superficies a través de las cuales la sonda no puede viajar. Un estudio de estas superficies puede ser de utilidad ya que nos permitiría elegir un estado para la sonda que nos garantice la imposibilidad de una colisión con el asteroide.

Por como ha sido definido el potencial  $U$ , este tiene siempre el mismo signo fuera de la superficie del elipsoide, y se puede comprobar fácilmente que es positivo. Así, en un punto cualquiera el pseudopotencial será también positivo, por lo que para un valor de  $C < 0$  se tiene que forzosamente  $T > 0$  siempre, lo que indica que la sonda siempre estará en movimiento. Por otro lado, si  $C > 0$ , entonces existe la posibilidad de que  $T = 0$  en alguna superficie. Estas superficies dividen el espacio en zonas de movimiento permitido

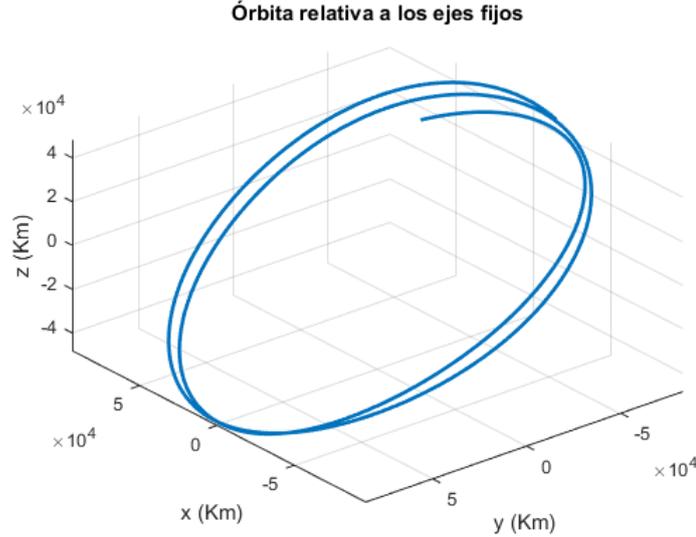


Figura 4.2 Órbita de prueba Ida, ejes fijos.

( $T > 0$ ) y movimiento no permitido ( $T < 0$ ). Empecemos suponiendo un valor de  $C \gg 0$ , y luego se discutirán los cambios que se producen cuando  $C$  decrece hacia 0 (procedimiento seguido en [10]).

Haciendo  $T = 0$ , la ecuación resultante de la superficie de velocidad cero es:

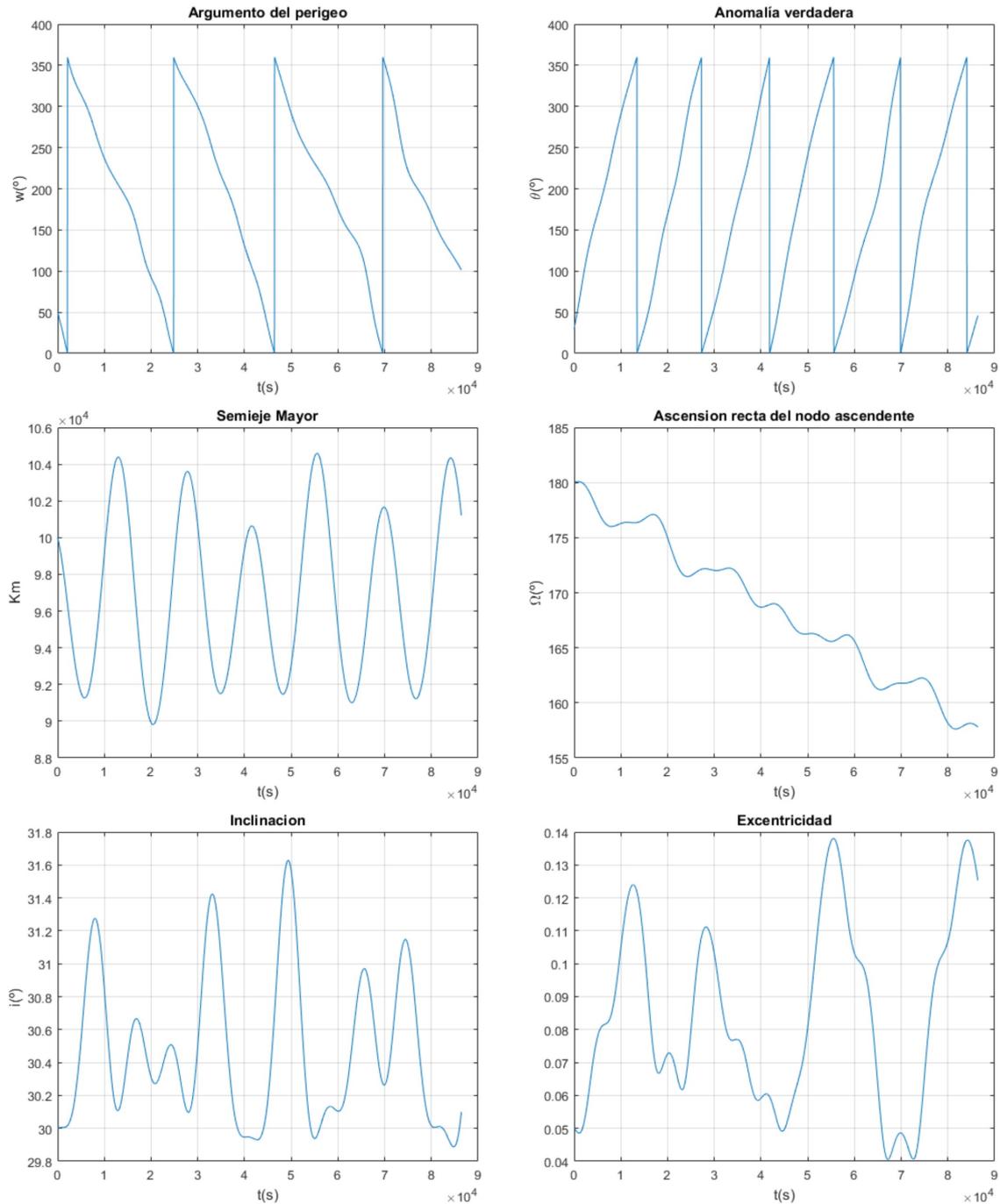
$$C = \frac{1}{2}w_T^2(r_x'^2 + r_y'^2) + U \quad (4.4)$$

Teniendo en cuenta que  $U(\vec{r}') > 0$  (para puntos fuera del elipsoide) y que  $U(\vec{r}') < |U(\vec{r}' \rightarrow 0)|$  (ya que va como  $1/r$ ), entonces si  $(C - U(\vec{r}' \rightarrow 0)) > 0$  (lo cual se dará siempre si  $C \gg 0$ ), habrá una solución para esta ecuación: un cilindro perturbado de radio  $R$  de forma que  $R \approx \sqrt{\frac{2}{w_T^2}(C - U(\vec{r}'))}$ . Con  $C \rightarrow \infty$  entonces  $R \rightarrow \sqrt{2C/w_T^2}$ . Solo está permitido el movimiento fuera del cilindro, y este se mueve hacia adentro cuando  $C$  decrece. Cuando se llega al punto de que  $(C - U(\vec{r}' \rightarrow 0)) = 0$  una superficie de velocidad cero surge del centro del elipsoide. Esta situación se refleja en las dos primeras gráficas de la Figura 4.4, donde se ha representado el corte de estas superficies con el plano  $z = 0$  para el caso de *Eros* con distintos valores de  $C$ . Ahí ya se puede observar que desde el centro del elipsoide surge una superficie, pues el valor de  $C$  para el que esto ocurre es muy grande.

Si se sigue disminuyendo  $C$  la superficie interna acabará cortando y, en algún momento, envolviendo al asteroide (aunque dependiendo de los parámetros de este, puede que no ocurra), dejando espacio entre la superficie y el asteroide en sí. Dentro de ese espacio el movimiento está permitido ( $T > 0$ ), por lo que hay una barrera que impide escapar de las cercanías del asteroide. Como la superficie cilíndrica sigue ahí, existe una banda entre ambas donde el movimiento no es posible ( $T < 0$ ).

Al seguir disminuyendo  $C$ , se puede alcanzar un valor que haga que ambas superficies se corten en dos puntos simétricos del eje  $X$ . Estos son puntos de equilibrio del movimiento en el sistema de referencia fijo al asteroide (se llaman *puntos de silla*), y por tanto se pueden calcular a partir de las ecuaciones del movimiento buscando los puntos del eje  $X$  en los que la aceleración es nula cuando  $\vec{v}' = 0$ . También se pueden calcular a partir del pseudopotencial, buscando los puntos en el eje  $X$  que hacen  $U_x'(\pm r_{x_0}', 0, 0) = 0$ , son métodos equivalentes. El punto en el que esto ocurre no tiene porque estar fuera del asteroide, para que eso pase se debe cumplir que en los puntos  $(\pm a, 0, 0)$  la fuerza de atracción gravitatoria debe ser mayor a la centrífuga que hace alejarse a la sonda, esto se puede expresar como  $U_x'(\pm a, 0, 0) = aw_T^2 + U_x(\pm a, 0, 0) < 0$ . El valor de la constante de Jacobi aquí se denota por  $C_s$ , para valores inferiores a  $C_s$ , las partículas pueden viajar desde el espacio lejos del asteroide al cercano a este, pasando por ese punto.

Si se sigue disminuyendo  $C$  las superficies cortan a lo largo del eje  $Y$ , los puntos donde esto ocurre se pueden calcular de forma similar (se llaman *puntos centrales*). El valor de  $C$  para el que ocurre esto se denota por  $C_c$ . Una condición necesaria para que estos puntos no existan es que no existan los puntos de silla, aunque



**Figura 4.3** Órbita de prueba Ida, elementos orbitales.

nosotros consideraremos que siempre existen en los asteroides bajo estudio cuando los puntos de silla están fuera del asteroide. Para valores inferiores de  $C$  las superficies de velocidad cero no se cortan en el plano X-Y y solo existen en el espacio fuera del plano. Conforme  $C$  se acerca a cero estas superficies se van alejando del asteroide cada vez más y desaparecen cuando  $C = 0$ . Para ejemplificar lo anterior se han representado las curvas de velocidad cero para diferentes planos (y diferentes valores de  $C$ ), de forma que se ve la evolución de dichas superficies fuera del plano X-Y, donde se han estudiado hasta ahora. Para ello véanse las figuras (4.5), (4.6) y (4.7).

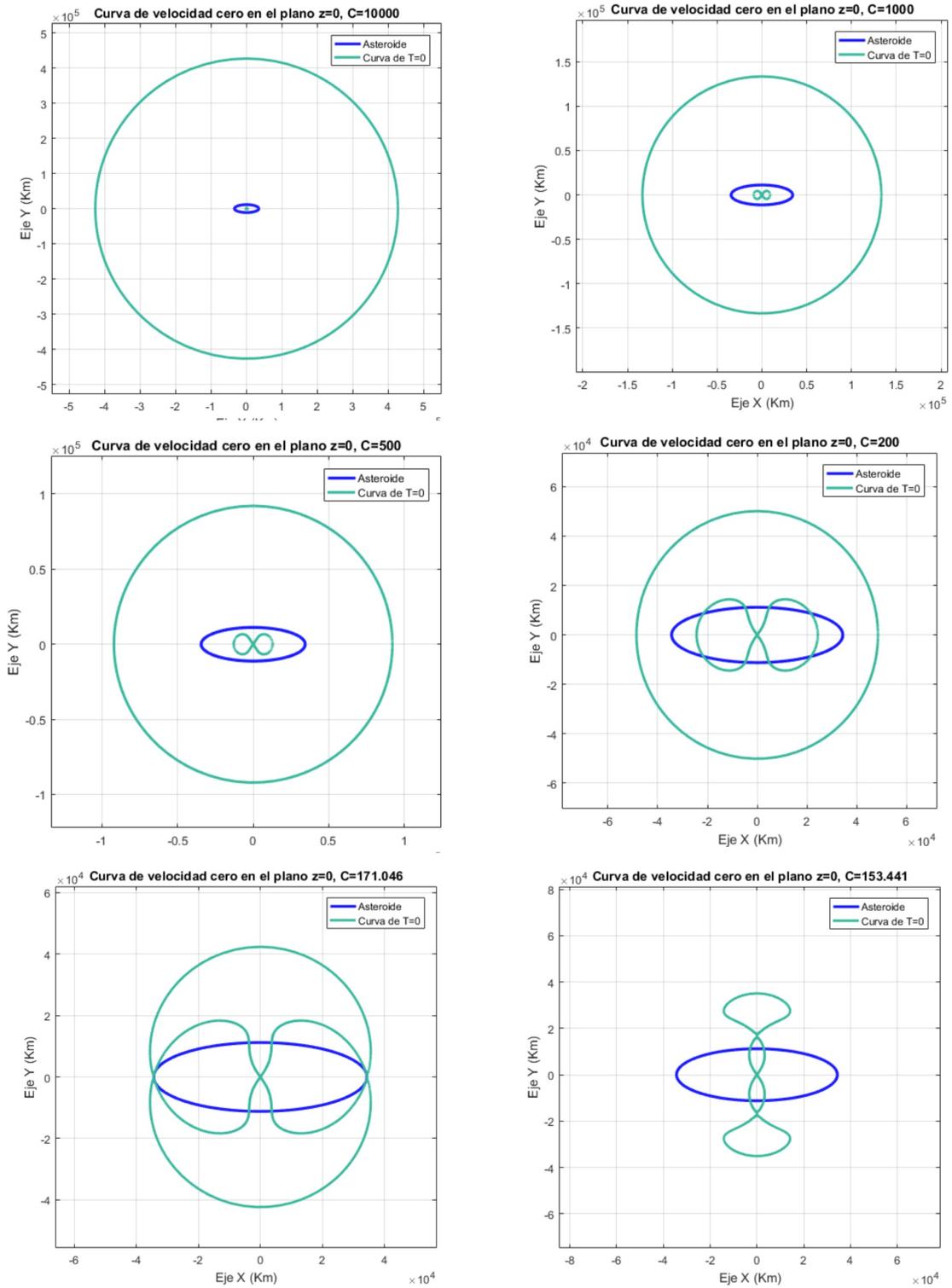
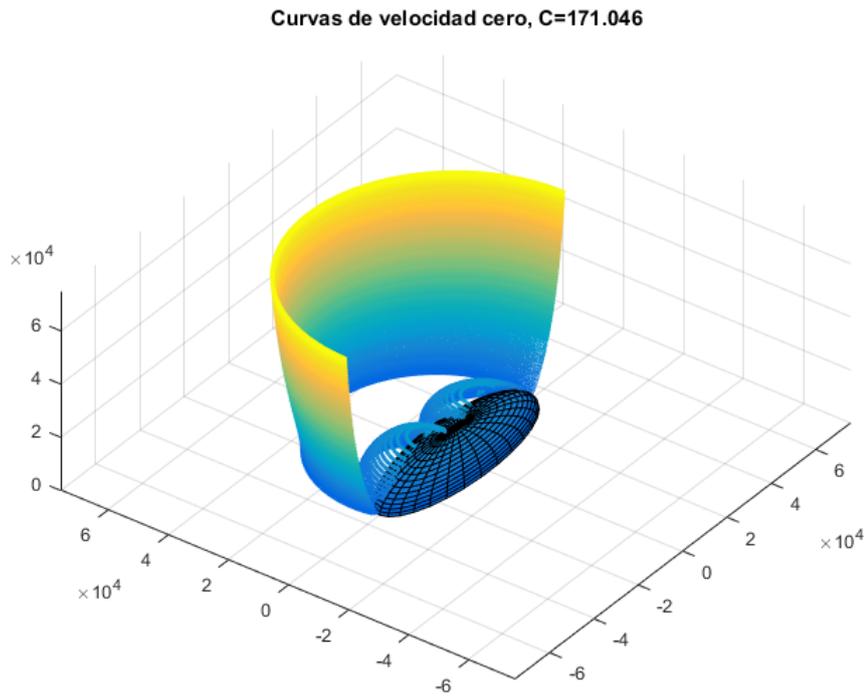


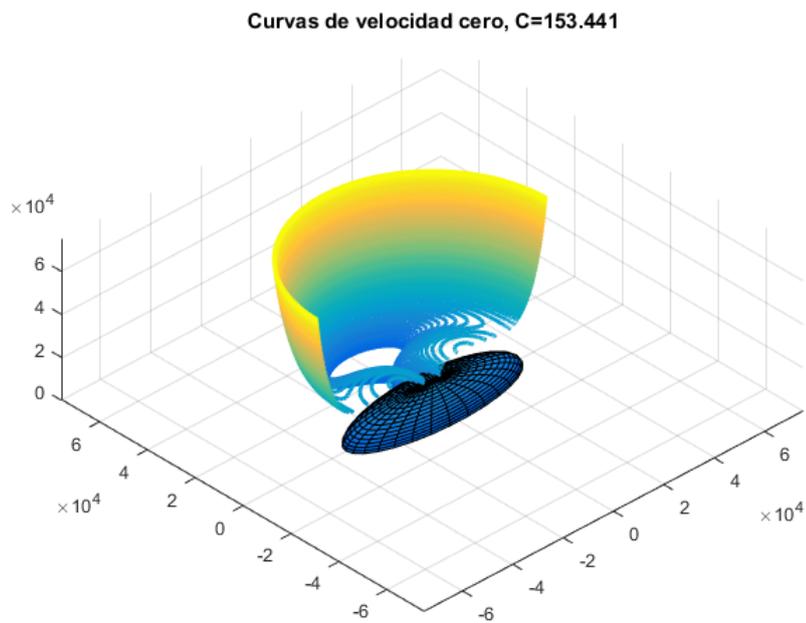
Figura 4.4 Curvas de velocidad cero, *Eros*.

#### 4.1.2 Radio de estabilidad de Hill

En este apartado primero vamos a considerar únicamente las órbitas contenidas en el plano X-Y para facilitar el estudio de las órbitas que nos garantizan la imposibilidad de choque con la superficie del asteroide, luego esto se generalizará para el movimiento fuera del plano. Consideremos una órbita que en un primer momento



**Figura 4.5** Curvas de velocidad cero a diferentes niveles de  $z$  con  $C = C_s$ , Eros.



**Figura 4.6** Curvas de velocidad cero a diferentes niveles de  $z$  con  $C = C_c$ , Eros.

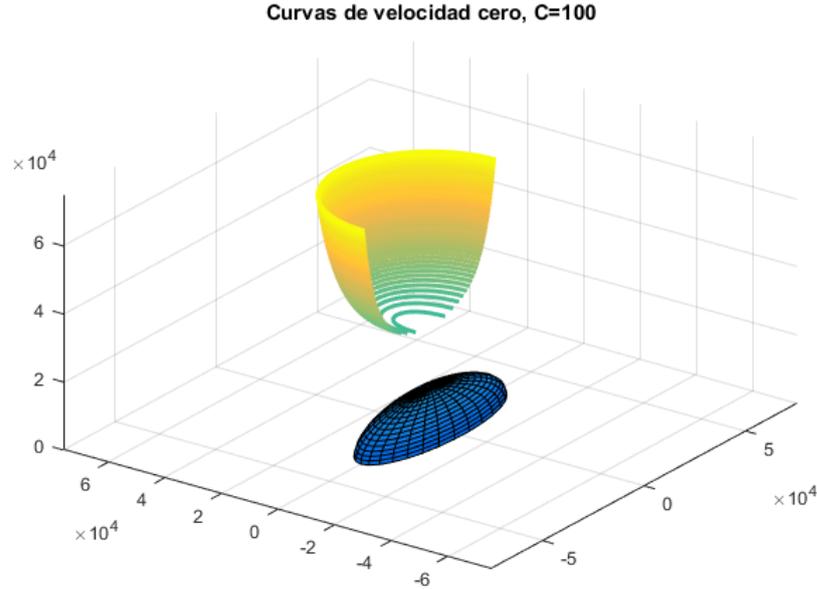


Figura 4.7 Curvas de velocidad cero a diferentes niveles de  $z$  con  $C = 100$ , Eros.

es *circular*<sup>1</sup>, es decir, cuya velocidad en el sistema de coordenadas inercial sea  $v_c = \sqrt{\mu/r}$  con  $r$  la distancia inicial. La velocidad en esta órbita en el sistema de coordenadas fijo al asteroide será entonces  $\sqrt{\mu/r} - w_T r$ . Así, suponiendo la sonda colocada en un punto del eje  $Y$  con la velocidad en dirección perpendicular a este (y en sentido directo), la constante de Jacobi de dicha órbita vendrá por:

$$C = -\frac{1}{2}(\sqrt{\mu/r} - w_T r)^2 + \frac{1}{2}w_T^2 r^2 + U(0, r, 0)$$

En la Figura 4.8 se ha representado la constante  $C$  de la expresión anterior como una función de  $r$ , y como se puede ver, es una función creciente con la distancia. Una aplicación de la constante de Jacobi es determinar la distancia a partir de la cual una órbita inicialmente circular tiene garantías de no entrar nunca en contacto con el asteroide, y como se ha visto hasta ahora, para que esto ocurra,  $C$  debe ser tal que las superficies de velocidad cero separen el espacio que ocupa la sonda del que ocupa el asteroide. El valor mínimo de  $C$  que garantiza esto es  $C_s$ , ya que por debajo de este las curvas de velocidad cero no envuelven al asteroide (véase la Figura 4.4). Por ello, se llama radio de estabilidad de Hill al que hace que una órbita inicialmente circular tenga  $C = C_s$  (el cálculo exacto de este radio debe hacerse numéricamente con la expresión anterior). Como puede verse por la Figura 4.8, para órbitas circulares por debajo de esta se tendrá una constante de Jacobi que no garantiza la seguridad de la sonda, mientras que por encima será imposible una colisión.

En las figuras (4.9), (4.10) y (4.11) se han representado diferentes órbitas *circulares*, empezando por una con el radio de Hill, y dos más por encima de esta. Como puede verse también se han representado las curvas de velocidad cero correspondientes a las constantes de Jacobi en cada una de ellas, y en todas el asteroide y la sonda están separadas por una de esas curvas, lo que hace imposible que se encuentren. También queda patente que una órbita inicialmente circular no permanece de este modo, y esto es debido fundamentalmente a las variaciones de la fuerza que provoca el asteroide elipsoidal. Aun así también se puede observar que cuanto mayor es la órbita menos se ve afectada la sonda por esas perturbaciones.

Estas últimas órbitas, aunque seguras, no tienen demasiada utilidad práctica, debido a que solo ven una latitud del asteroide, limitando mucho las posibilidades de una misión de observación del mismo. En la práctica sería más interesante buscar una órbita con cierta inclinación pero que siguiera cumpliendo con la condición de que la constante de Jacobi sea mayor de  $C_s$ , ya que como se ha visto anteriormente (Figura 4.5), para este valor hay una superficie de velocidad cero *cilíndrica* que separa al asteroide de la sonda. Así, considerando una órbita circular con inclinación *INC*, las velocidades en el plano  $X$ - $Y$  y la componente

<sup>1</sup> En el modelo de los dos cuerpos una órbita circular a una distancia dada del cuerpo central tiene una velocidad fijada por la expresión  $\sqrt{\mu/r}$ . En este caso el cuerpo central no es esférico y la fuerza que provoca no es uniforme a una distancia dada, por lo que las órbitas circulares son casi imposibles de conseguir, salvo que se trate de una órbita en alguno de los puntos de equilibrio.

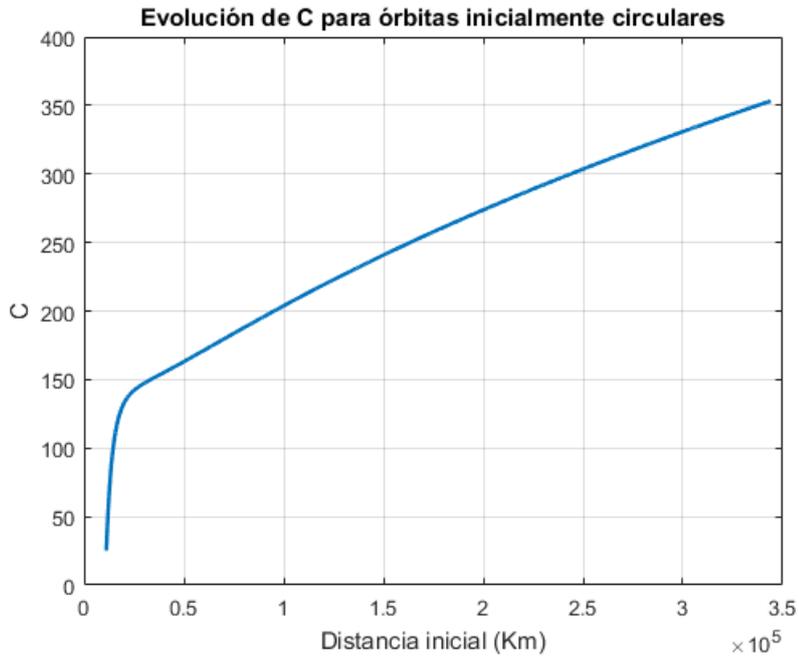


Figura 4.8 C para órbitas circulares, *Eros*.

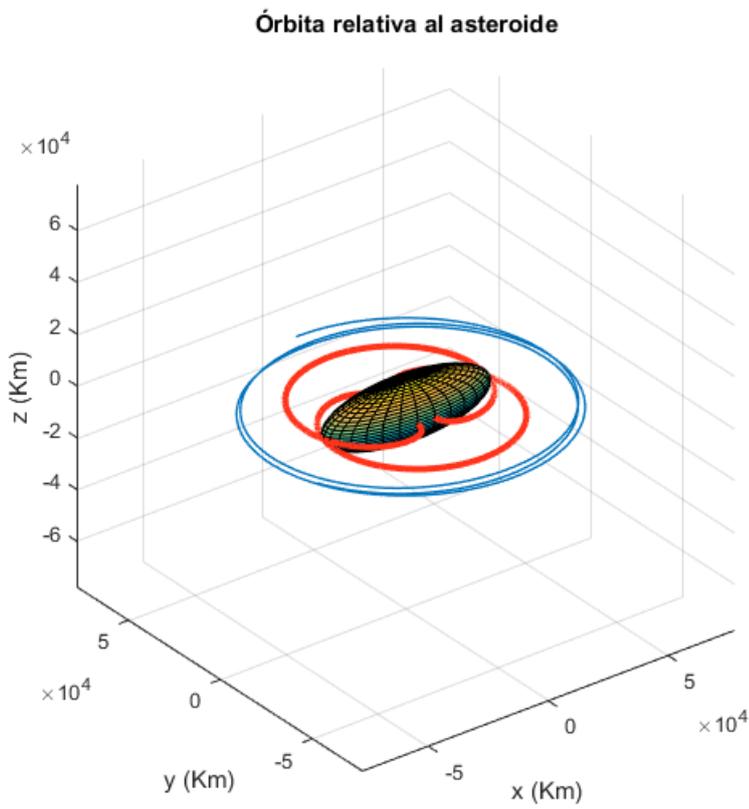
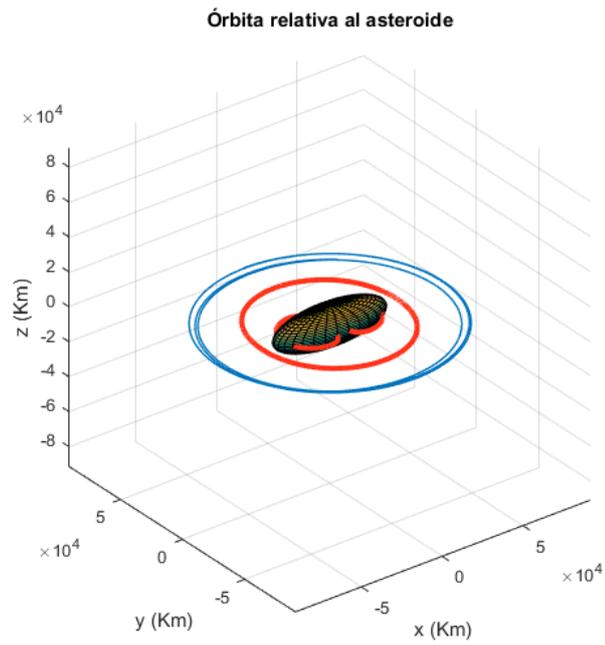
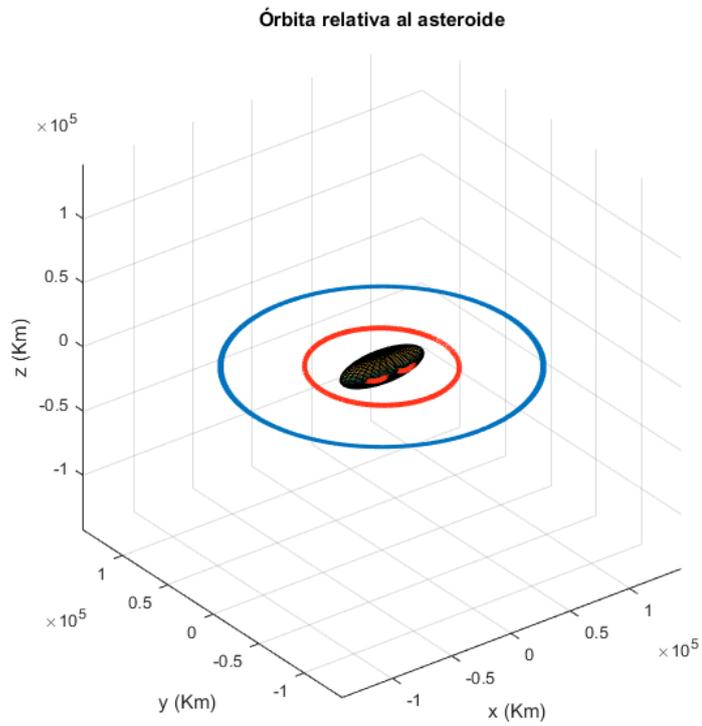


Figura 4.9 Órbita inicialmente circular con el radio de Hill, *Eros*.



**Figura 4.10** Órbita inicialmente circular 10 Km por encima del radio de Hill, *Eros*.



**Figura 4.11** Órbita inicialmente circular 50 Km por encima del radio de Hill, *Eros*.

en dirección Z serán  $v_{x-y} = \cos(INC)v_c$  y  $v_z = \sin(INC)v_c$  respectivamente, de forma que la velocidad en dirección Z es la misma en ambos sistemas de referencia, mientras que la contenida en el plano X-Y viene por  $v'_{x-y} = \cos(INC)\sqrt{\mu/r} - w_T r$ . Introduciendo esto en la expresión para calcular la constante de Jacobi suponiendo la sonda en un punto del eje Y nos queda:

$$C = -\frac{1}{2}((\cos(INC)\sqrt{\mu/r} - w_T r)^2 + (\sin(INC)\sqrt{\mu/r})^2) + \frac{1}{2}w_T^2 r^2 + U(0,r,0)$$

Utilizando esta expresión para calcular la evolución del radio de Hill ( $C = C_s$ ) con la inclinación se ha llegado a la Figura 4.12, donde se ve que este aumenta rápidamente.

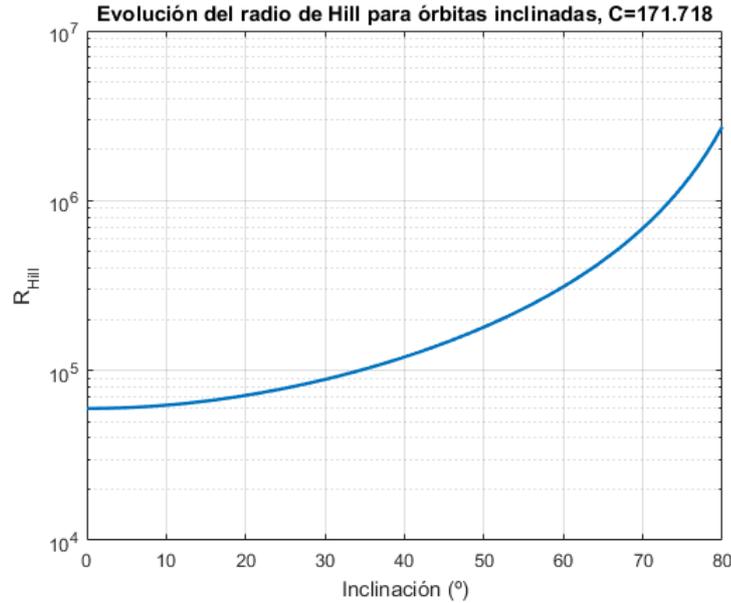


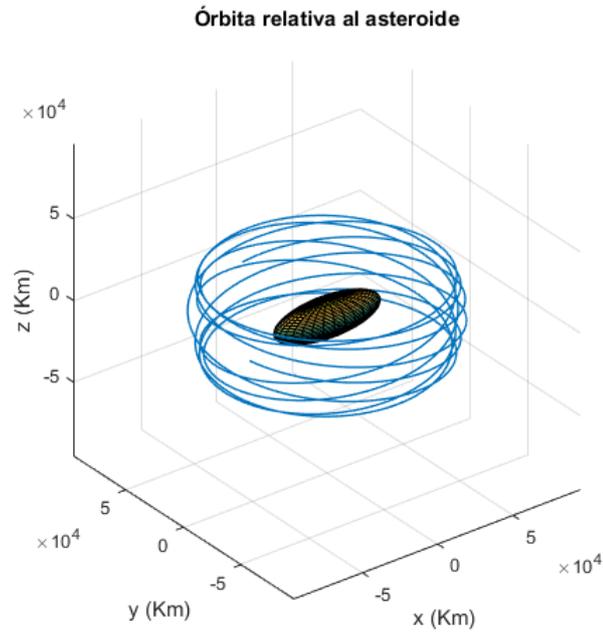
Figura 4.12 Radio de Hill con la inclinación, *Eros*.

Una simulación de tres días de una órbita 2Km por encima del radio de Hill con inclinación 20° se ha representado en la Figura 4.13.

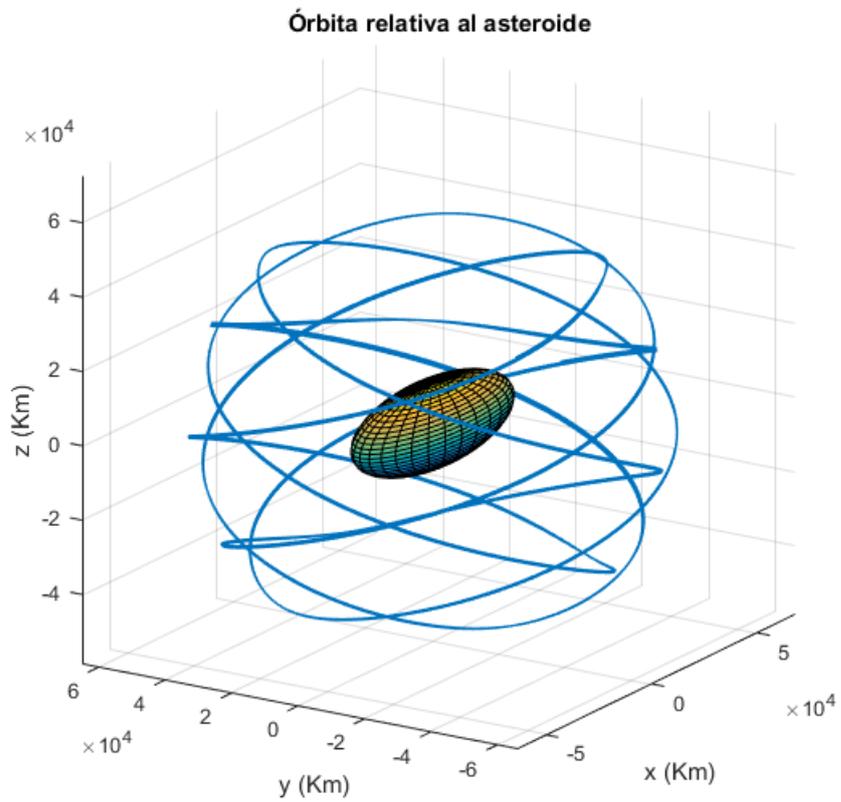
Estas órbitas que cumplen la condición de estabilidad de Hill siguen sin poder acceder a las latitudes más altas del asteroide debido a la geometría de las superficies de velocidad cero para  $C > C_s$  (el radio necesario sería tan grande que la observación del asteroide sería poco útil). Es decir, que si intentáramos conseguir una órbita con la que poder observar la totalidad de la superficie del asteroide esta sería una con  $C < C_s$ . A pesar de esto, es técnicamente posible que una órbita que no cumpla con la condición de estabilidad de Hill sea lo bastante segura para poder utilizarse. Para que sea así, los elementos orbitales deben evolucionar de forma periódica, es decir, que las perturbaciones provocadas por el asteroide nunca modifiquen la órbita lo suficiente para que llegue a chocar con este (o salga despedida). Aun así, conseguir una periodicidad perfecta con las geometrías con las que trabajamos es muy difícil, más aún con la de un asteroide real (mucho más irregular), por ello lo que se busca son órbitas *cuasiperiódicas*, es decir, aquellas que a pesar de ir variando de una a la siguiente, lo que hacen es oscilar alrededor de una órbita nominal. Un estudio analítico de las condiciones para conseguir la periodicidad buscada bajo los efectos de la gravedad del asteroide se escapa del alcance de este trabajo por su elevada complejidad, aunque en la Figura 4.14 se ha representado un ejemplo de este tipo de órbita (8 días de simulación), además de la evolución de sus elementos orbitales principales (figuras (4.15), (4.16) y (4.17)).

## 4.2 Despreciando la masa del asteroide

Hasta ahora se ha considerado el movimiento relativo de una sonda alrededor de un asteroide como el producto del efecto que tenía el asteroide sobre esta y obviando la órbita en la que se encuentra el asteroide, así como el efecto del Sol sobre la sonda. Aquí se obviará el efecto del asteroide sobre la sonda (se considerará un



**Figura 4.13** Órbita inicialmente circular 2 Km por encima del radio de Hill con  $20^\circ$  de inclinación, *Eros*.



**Figura 4.14** Órbita cuasiperiódica de  $45^\circ$  de inclinación, *Eros*.

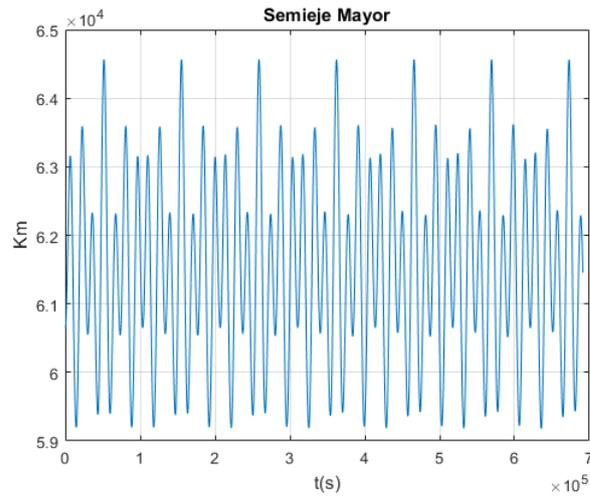


Figura 4.15 Evolución del semieje mayor, *Eros*.

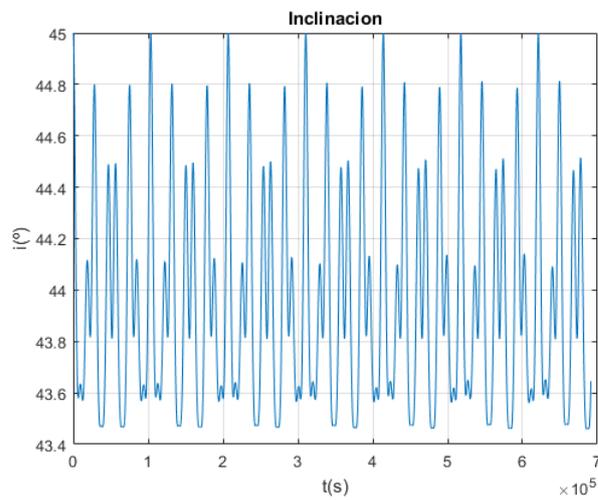


Figura 4.16 Evolución de la inclinación, *Eros*.

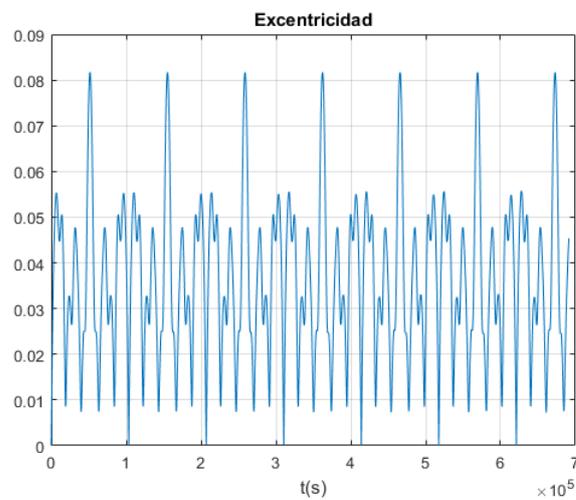


Figura 4.17 Evolución de la excentricidad, *Eros*.

punto sin masa) y solo se tendrá en cuenta la dinámica resultante de considerar el movimiento relativo entre dos cuerpos que se encuentran cerca pero en órbitas ligeramente diferentes alrededor del Sol.

### 4.2.1 Ecuación del movimiento

La órbita de referencia se corresponde con la del asteroide ( $M_1$ ), con la segunda órbita la de la nave que lo sigue ( $M_2$ ). Ambas son órbitas elípticas y Keplerianas, es decir, que no se tendrán en cuenta perturbaciones de otros cuerpos, conociéndose el semieje mayor y la excentricidad de la primera. Considérese un sistema de referencia inercial centrado en el Sol con la base ortonormal  $B_0 = (\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ , con la órbita de  $M_1$  contenida en su plano  $(X_0, Y_0)$  y la periapsis sobre el eje  $\vec{X}_0$  (véase la Figura 4.18). El movimiento relativo estará descrito en el sistema de referencia LVLH (local vertical, local horizontal) rotatorio centrado en el asteroide. La base correspondiente es  $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , con  $\vec{z}_1$  a lo largo del vector radial del asteroide hacia el Sol,  $\vec{x}_1$  en la dirección de la velocidad e  $\vec{y}_1$  completando el triedro a derechas (véase la Figura 4.19).

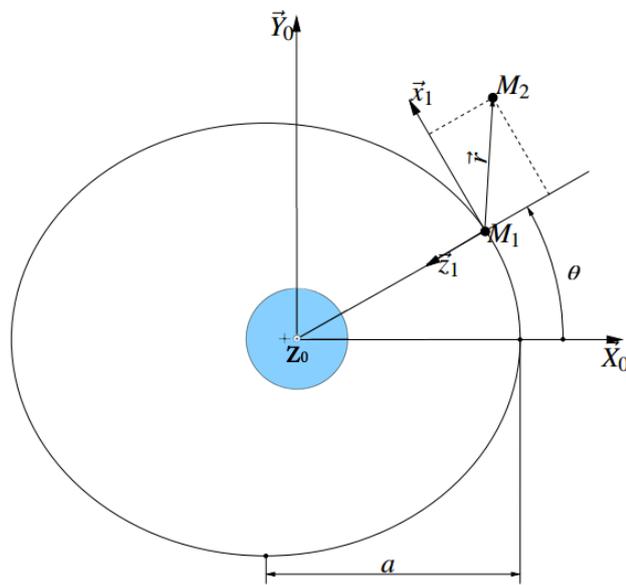


Figura 4.18 Sistema de referencia  $B_0$ .

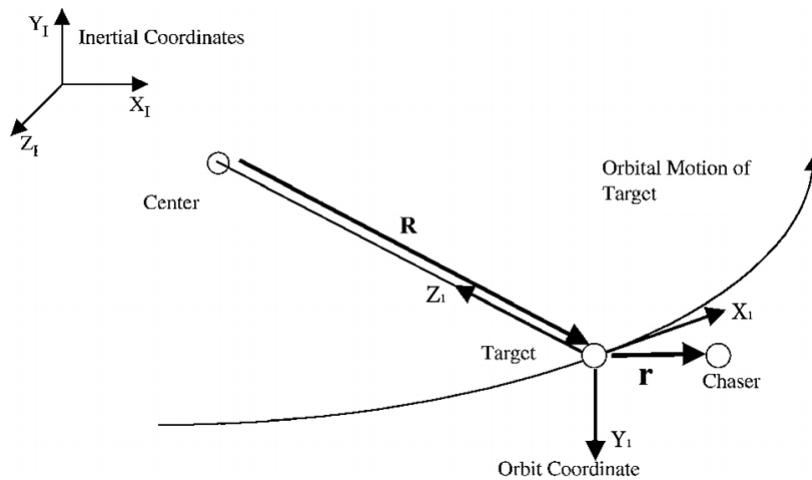


Figura 4.19 Sistema de referencia  $B_1$ .

Sea  $\vec{r} = [x \ y \ z]^T$  la posición de la sonda en el sistema de referencia LVLH del asteroide. La dinámica del movimiento del asteroide y de la sonda en el sistema de referencia inercial  $B_0$  vienen respectivamente por:

$$\ddot{\vec{R}} = -\mu \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \quad (4.5)$$

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R} + \vec{r}|^3} + \vec{a}_c \quad (4.6)$$

Donde  $\vec{a}_c$  es la aceleración de control sobre la sonda. Reescribiendo parte de la ecuación de la sonda se obtiene que:

$$\begin{aligned} |\vec{R} + \vec{r}| &= [(\vec{R} + \vec{r})^T (\vec{R} + \vec{r})]^{1/2} = [|\vec{R}|^2 + 2\vec{R}^T \vec{r} + |\vec{r}|^2]^{1/2} \rightarrow \\ |\vec{R} + \vec{r}|^3 &= |\vec{R}|^3 \left[ 1 + 2 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{R}|^2} \right]^{3/2} \end{aligned}$$

La ecuación anterior es general, pero teniendo en cuenta que queremos conocer el movimiento relativo cuando la sonda se encuentra cerca del asteroide podemos utilizar esto para realizar simplificaciones. Así, cuando  $|\vec{R}| \gg |\vec{r}|$  se tiene que:

$$\frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R} + \vec{r}|^3} = \frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R}|^3} \left[ 1 + 2 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{R}|^2} \right]^{-3/2} \approx \frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R}|^3} \left[ 1 + 2 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \right]^{-3/2}$$

La expresión anterior se puede linealizar teniendo en cuenta que  $2 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \sim \frac{|\vec{r}|}{|\vec{R}|}$ . Para ello se usará que  $(1+x)^\alpha \approx (1+\alpha x)$  si  $x \ll 1$ :

$$\frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R}|^3} \left[ 1 + 2 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \right]^{-3/2} \approx \frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R}|^3} \left[ 1 - 3 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \right] \approx \frac{1}{|\vec{R}|^3} \left[ \vec{R} + \vec{r} - 3 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \right]$$

Introduciendo lo anterior en la Ecuación 4.6 y restando la Ecuación 4.5, se llega a la ecuación linealizada del movimiento relativo de la sonda respecto del asteroide en el sistema de referencia inercial:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{R}|^3} \left[ \vec{r} - 3 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \right] + \vec{a}_c \quad (4.7)$$

Para escribir la ecuación anterior en el sistema de referencia LVLH será necesario utilizar de nuevo (4.1), ya que en (4.7) la derivada respecto del tiempo se hace en el sistema de referencia  $B_0$ . Teniendo en cuenta que en este caso  $\vec{w} = [0 \ -\dot{\theta} \ 0]^T$ , y que  $\dot{\theta}$  no es constante, aparecerá un término extra debido a la variación con el tiempo de  $\dot{\theta}$ :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{R}|^3} \left[ \vec{r} - 3 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \right] - 2(\vec{w} \times \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{w}} \times \vec{r} - \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) + \vec{a}_c \quad (4.8)$$

Donde las derivadas respecto del tiempo se hacen en el sistema de referencia  $B_1$ . Teniendo en cuenta que en  $B_1$  se tiene  $\vec{R} = [0 \ 0 \ -R]^T$ , los términos de (4.8) se convierten en:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}z \\ 0 \\ \dot{\theta}x \end{bmatrix} \\ \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} &= \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}z \\ 0 \\ \ddot{\theta}x \end{bmatrix} \\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}^2x \\ 0 \\ -\dot{\theta}^2z \end{bmatrix} \\ \vec{r} - 3\frac{\vec{R}^T\vec{r}}{|\vec{R}|^2}\vec{R} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Cuando estas relaciones son introducidas en (4.8), las ecuaciones del movimiento relativo en el sistema de referencia LHLV quedan así:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{\theta}\dot{z} + \ddot{\theta}z + \dot{\theta}^2x - \frac{\mu}{R^3}x + a_x \\ \ddot{y} = -\frac{\mu}{R^3}y + a_y \\ \ddot{z} = -2\dot{\theta}\dot{x} - \ddot{\theta}x + \dot{\theta}^2z + 2\frac{\mu}{R^3}z + a_z \end{cases} \quad (4.9)$$

#### 4.2.2 Propagación analítica del movimiento

Hasta ahora las ecuaciones del movimiento obtenidas en este trabajo se han integrado directamente mediante métodos numéricos para obtener los resultados expuestos. En este caso, las ecuaciones (4.9) son lo bastante sencillas para tener una solución analítica [11], y su deducción nos ocupará el resto de este apartado. Para ello, el sistema de ecuaciones anterior se va a transformar haciendo un cambio de variable independiente y un escalado. En lugar del tiempo, se usará la anomalía verdadera como variable independiente, así para una variable cualquiera se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d(\cdot)}{dt} &= \frac{d(\cdot)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (\cdot)' \dot{\theta} \\ \frac{d^2(\cdot)}{dt^2} &= \dot{\theta}^2(\cdot)'' + \ddot{\theta}(\cdot)'\end{aligned}$$

Donde  $\dot{\theta}' = \ddot{\theta}$ . Además, escalamos las variables con  $\rho = 1 + e \cos(\theta)$ :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = (1 + e \cos(\theta)) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Por lo que para la variable x quedaría:

$$\begin{aligned}\tilde{x}' &= \rho x' - (e \sin(\theta))x \\ \tilde{x}'' &= \rho x'' - 2(e \sin(\theta))x' - (e \cos(\theta))x\end{aligned}$$

Ahora, para simplificar las ecuaciones de (4.9), se usará que  $R^2\dot{\theta} = h$ , un resultado del modelo de los dos cuerpos. Sea  $K = \mu/h^{3/2}$  una constante para la órbita del asteroide, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{R^3} &= \frac{\mu}{h^{3/2}} \dot{\theta}^{3/2} = K \dot{\theta}^{3/2} \\ \dot{\theta} &= \frac{h}{R^2} = \frac{h}{p^2} (1 + e \cos(\theta))^2 = \frac{\mu^2}{h^3} \rho^2 = K^2 \rho^2 \\ \dot{\theta}' &= \frac{d\dot{\theta}}{d\rho} \rho' = 2K^2 \rho \rho' = -2K^2 \rho e \sin(\theta)\end{aligned}$$

Introduciendo lo anterior en la ecuación de  $x$  quedaría:

$$K^4 \rho^4 x'' - 2K^4 \rho^3 e \sin(\theta) x' = (K^4 \rho^4 - K^4 \rho^3) x + 2K^4 \rho^4 z' - 2K^4 \rho^3 e \sin(\theta) z + a_x$$

$$\rho x'' - 2e \sin(\theta) x' - e \cos(\theta) x = 2\theta z' - 2e \cos(\theta) z + \frac{a_x}{K^4 \rho^3}$$

$$\tilde{x}'' = 2\tilde{z}' + \tilde{u}_x$$

De forma similar a como se ha hecho con  $x$ , las demás ecuaciones se pueden simplificar, llegando al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \tilde{x}'' = 2\tilde{z}' + \tilde{u}_x \\ \tilde{y}'' = -\tilde{y} + \tilde{u}_y \\ \tilde{z}'' = 3/\rho \tilde{z} - 2\tilde{x}' + \tilde{u}_z \end{cases} \quad (4.10)$$

Definiendo el vector de estado  $\tilde{X}(\theta) = [\tilde{x}(\theta) \quad \tilde{y}(\theta) \quad \tilde{z}(\theta) \quad \tilde{x}'(\theta) \quad \tilde{y}'(\theta) \quad \tilde{z}'(\theta)]$  y el vector de entrada  $\tilde{u}(\theta) = [\tilde{u}_x(\theta) \quad \tilde{u}_y(\theta) \quad \tilde{u}_z(\theta)]$  el sistema (4.10) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{d\tilde{X}(\theta)}{d\theta} = \tilde{A}(\theta)\tilde{X}(\theta) + \tilde{B}\tilde{u}(\theta) \quad (4.11)$$

Con:

$$\tilde{A}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/\rho & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Partiendo del sistema (4.11), existe una matriz de transición  $\Phi$  que permite la propagación del movimiento relativo desde una condición inicial, además de contemplar el control de la sonda mediante impulsos:

$$\tilde{X}(\theta) = \Phi_{\theta_0}^{\theta} \tilde{X}(\theta_0) + \sum_i \Phi_{\theta_i}^{\theta} \tilde{B} \tilde{u}_i \quad (4.12)$$

De esta forma se ve que las componentes de  $\tilde{u}_i(\theta)$  son los incrementos de velocidad (en las variables escaladas) que se producen en los instantes en que se realizan los impulsos (ya que si se evaluara la expresión anterior en  $\theta_0$  sería lo mismo que sumarle a las condiciones iniciales de velocidad el vector  $\tilde{u}(\theta_0)$ ).

La ecuación de  $\tilde{y}$  es la de un oscilador armónico, y además es independiente del resto, por lo que:

$$\tilde{y} = K_{y1} \sin(\theta) + K_{y2} \cos(\theta)$$

Por otra parte, las componentes  $\tilde{x}$  y  $\tilde{z}$  están acopladas, por lo que hay que resolver el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\tilde{x}' = 2\tilde{z} + K_{x1} \quad (4.13)$$

Que introducido en la ecuación de  $\tilde{z}$ :

$$\tilde{z}'' + (4 - 3/\rho)\tilde{z} = -2K_{x1} \quad (4.14)$$

El problema ahora se reduce a resolver la ecuación anterior para  $\tilde{z}$ . Una de las soluciones a la parte homogénea de (4.14) es:

$$\varphi_1 = \rho \sin(\theta)$$

Se puede demostrar [12] que, partiendo de la anterior, otra solución es:

$$\varphi_2 = \rho \sin(\theta) \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sin^2 \tau \rho(\tau)^2} d\tau$$

La integral anterior tiene varios problemas, el primero que es singular cuando  $\theta = \pm\pi$ . Esto se puede solucionar con una integración por partes, pero el resultado no es demasiado útil por necesitar de integración numérica, lo que haría que el resultado final perdiera interés, ya que lo que buscamos es una solución analítica fácilmente evaluable. Lo que se ha propuesto es el uso del siguiente término integral:

$$J(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau$$

Esto es así porque la integral anterior es fácilmente evaluable:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{d\theta}{dt} = K^2 \rho^2 \\ K^2 dt &= (1/\rho^2) d\theta \\ K^2(t - t_0) &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau = J(\theta) \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que la integral se puede calcular directamente a través del tiempo transcurrido, el cual se calcula mediante las leyes horarias sin necesidad de integración o de resolución de ecuaciones. Para encontrar la solución usando dicha integral, suponemos la solución con la siguiente forma:

$$\varphi_2 = c_1 \rho \sin(\theta) J + \rho \cos(\theta) + c_2$$

Para simplificar la notación sustituimos las siguientes variables:

$$\phi \equiv \rho \sin(\theta), \quad \xi \equiv \rho \cos(\theta)$$

Quedando:

$$\varphi_2 = c_1 \phi J + \xi + c_2$$

Esto se introduce en:

$$\ddot{z} + (4 - 3/\rho)\dot{z} = 0 \quad (4.15)$$

Con lo que nos queda:

$$c_1([\phi'' + (4 - 3/\rho)\phi]J + 2\phi'J' + \phi J'') + \xi'' + (4 - 3/\rho)\xi + c_2(4 - 3/\rho) = 0$$

Sobre la ecuación anterior hay que imponer que  $\phi$  es solución de (4.15) y que se cumple  $\xi'' + (4 - 3/\rho)\xi = 2e$ , de forma que:

$$c_1(2\phi'J' + \phi J'') + 2e + c_2(4 - 3/\rho) = 0$$

El término entre paréntesis cumple  $2\phi'J' + \phi J'' = (2/\rho)\cos(\theta)$ , por lo que reordenando se llega a:

$$(2c_1 + 4ec_2 + 2e^2)\cos(\theta) + c_2 + 2e = 0$$

Es decir que para que se cumpla la ecuación anterior las constantes  $c_1$  y  $c_2$  deben valer:

$$c_2 = -2e, \quad c_1 = 3e^2$$

Así, la solución propuesta queda como sigue:

$$\varphi_2 = 3e^2 \rho \sin(\theta) J + \rho \cos(\theta) - 2e$$

Para demostrar que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son soluciones linealmente independientes de (4.15) se calcula su Wronskiano:

$$\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2 = e^2 - 1$$

Para órbitas elípticas  $0 \leq e < 1$ , por lo que  $e^2 - 1 \neq 0$ , lo que confirma que son soluciones linealmente independientes. Cuando estas soluciones son usadas, una solución particular de (4.14) puede encontrarse utilizando el método de variación de parámetros:

$$\varphi_3 = \frac{2K_{x1}}{e^2 - 1} \left( \varphi_1 \int \varphi_2 d\theta - \varphi_2 \int \varphi_1 d\theta \right) = -\frac{K_{x1}}{e} \rho \cos(\theta)$$

Añadiendo las constantes  $K_{z1}$  y  $K_{z2}$ , la solución completa de (4.14) es de la siguiente forma:

$$\tilde{z} = K_{z1} \rho \sin(\theta) + K_{z2} (3e^2 \rho \sin(\theta) J + \rho \cos(\theta) - 2e) - \frac{K_{x1}}{e} \rho \cos(\theta)$$

Que puede ser reordenada como:

$$\tilde{z} = K_{z1} \rho \sin(\theta) + (K_{z2} - K_{x1}/e) \rho \cos(\theta) - K_{z2} e (2 - 3e \rho \sin(\theta) J)$$

Tras la sustitución y posterior integración de  $\tilde{z}$  en (4.13) se llega a la siguiente solución en  $\tilde{x}$ :

$$\tilde{x} = K_{x2} - K_{z1} \cos(\theta) (\rho + 1) + (K_{z2} - K_{x1}/e) \sin(\theta) (\rho + 1) - 3K_{z2} e \rho^2 J$$

Por conveniencia se redefinen las constantes de integración usadas hasta ahora, de forma que, usando  $s = \rho \sin(\theta)$  y  $c = \rho \cos(\theta)$ , la solución para el plano X-Z queda así:

$$\tilde{x} = K_1 - K_2 c (1 + 1/\rho) + K_3 s (1 + 1/\rho) + 3K_4 \rho^2 J \quad (4.16)$$

$$\tilde{z} = K_2 s + K_3 c + K_4 (2 - 3esJ) \quad (4.17)$$

Por diferenciación se obtienen las expresiones para  $\tilde{x}'$  y  $\tilde{z}'$ :

$$\tilde{x}' = 2K_2 s + K_3 (2c - e) + 3K_4 (1 - 2esJ) \quad (4.18)$$

$$\tilde{z}' = K_2 s' + K_3 c' - 3K_4 e (s'J + s/\rho) \quad (4.19)$$

Expresando las ecuaciones del plano X-Z en notación matricial se llega a:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \\ \tilde{x}' \\ \tilde{z}' \end{bmatrix}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & -c(1+1/\rho) & s(1+1/\rho) & 3\rho^2 J \\ 0 & s & c & (2-3esJ) \\ 0 & 2s & 2c-e & 3(1-2esJ) \\ 0 & s' & c' & -3e(s'J + s/\rho^2) \end{bmatrix}_\theta \times \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} \equiv \Psi_\theta \vec{K} \quad (4.20)$$

Donde  $s' = \cos(\theta) + e \cos(2\theta)$  y  $c' = -(\sin(\theta) + e \sin(2\theta))$ , y las constantes de  $\vec{K}$  se calculan a partir de las condiciones iniciales. Para ello se procederá con el siguiente razonamiento:

$$\tilde{X}_{XZ}(\theta) = \Psi_\theta \vec{K}$$

$$\tilde{X}_{XZ}(\theta_0) = \Psi_{\theta_0} \vec{K}$$

$$\vec{K} = \Psi_{\theta_0}^{-1} \tilde{X}_{XZ}(\theta_0)$$

$$\tilde{X}_{XZ}(\theta) = \Psi_\theta \Psi_{\theta_0}^{-1} \tilde{X}_{XZ}(\theta_0) = \Psi_{\theta_0}^\theta \tilde{X}_{XZ}(\theta_0)$$

Teniendo en cuenta que  $J(\theta_0) = 0$  se llega a:

$$\Psi_{\theta_0} = \begin{bmatrix} 1 & -c(1+1/\rho) & s(1+1/\rho) & 0 \\ 0 & s & c & 2 \\ 0 & 2s & 2c-e & 3 \\ 0 & s' & c' & -3es/\rho^2 \end{bmatrix}_{\theta_0}$$

Para calcular su inversa necesitamos su determinante, que resulta  $\det(\Psi_{\theta_0}) = e^2 - 1 \neq 0$ . Por lo tanto tenemos garantías de que  $\Psi_{\theta_0}^{-1}$  existe para cualquier anomalía verdadera y excentricidad. Su cálculo lleva a:

$$\Psi_{\theta_0}^{-1} = \frac{1}{1-e^2} \begin{bmatrix} 1-e^2 & 3e(s/\rho)(1+1/\rho) & -es(1+1/\rho) & -ec+2 \\ 0 & -3e(s/\rho)(1+e^2/\rho) & s(1+1/\rho) & c-2e \\ 0 & -3(c/\rho+e) & c(1+1/\rho)+e & -s \\ 0 & 3\rho+e^2-1 & -\rho^2 & -3es \end{bmatrix}_{\theta_0}$$

Con esto ya se tiene lo necesario para construir la matriz de transición en el plano X-Z,  $\Psi_{\theta_0}^{\theta}$ , sin más que multiplicar matricialmente  $\Psi_{\theta_0}$  con  $\Psi_{\theta_0}^{-1}$ . Con esta matriz de transición puede obtenerse el estado  $\tilde{X}_{XZ}(\theta)$  en cualquier valor de  $\theta$  conocido el estado inicial  $\tilde{X}_{XZ}(\theta_0)$ . Procediendo de forma similar para el movimiento en Y se llega a:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{bmatrix}_{\theta} = \frac{1}{\rho_{\theta-\theta_0}} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}_{\theta-\theta_0} \times \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{bmatrix}_{\theta_0} \equiv \Omega_{\theta_0}^{\theta} \tilde{X}_Y(\theta_0) \quad (4.21)$$

Las matrices  $\Omega_{\theta_0}^{\theta}$  y  $\Psi_{\theta_0}^{\theta}$  pueden combinarse para dar lugar a la matriz de transformación de (4.12), con la que puede propagarse el movimiento a partir de cualquier estado inicial. Recuérdese que los vectores de estado utilizados en este procedimiento están en *variables transformadas*, por lo que las condiciones iniciales deben transformarse adecuadamente:

$$\vec{r} = \rho \vec{r}, \quad \vec{v} = -e \sin(\theta) \vec{r} + \frac{1}{K^2 \rho} \vec{v} \quad (4.22)$$

Donde  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  son las posiciones y velocidades que se introducen en el vector de estados  $\tilde{X}(\theta)$ . Por contra, cuando se ha realizado la propagación con la matriz de transición el resultado debe transformarse de nuevo en las variables normales, y para ello:

$$\vec{r} = 1/\rho \vec{r}, \quad \vec{v} = K^2 (e \sin(\theta) \vec{r} + \rho \vec{v}) \quad (4.23)$$

### Validación de resultados

Para comprobar la validez del método analítico propuesto se ha realizado una simulación con el asteroide *Itokawa* de un año de duración ( $\theta_0 = 10^\circ$  y  $\theta_f = 370^\circ$ ) con las siguientes condiciones iniciales en el sistema de referencia LVLH:

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 2.8 \\ 2.8 \end{bmatrix} (Km)$$

$$\vec{v}_0 = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 12.6 \\ -1.2 \\ -3 \end{bmatrix} (m/s)$$

Para empezar se comprueba que en el instante inicial la fuerza ejercida por el Sol es 10000 veces mayor que la ejercida por el asteroide (supuestos ambos masas puntuales). Esto confirma que es viable tratar de forma diferente a determinados asteroides, ya que, como en este caso, tener en cuenta la gravedad del asteroide no supondría una mejora importante en la veracidad de los resultados. La órbita de la simulación se muestran en la figura (4.20), y para poder comparar se ha mostrado también el resultado de la misma simulación realizando la integración numérica de (4.10). Como puede comprobarse por el error en las tres coordenadas (del orden de  $10^{-6}$ ), ambos métodos devuelven el mismo resultado. Se ha representado el asteroide alineado con los ejes LVLH para apreciar el tamaño de la órbita, a pesar de que en estos ejes el asteroide está rotando.

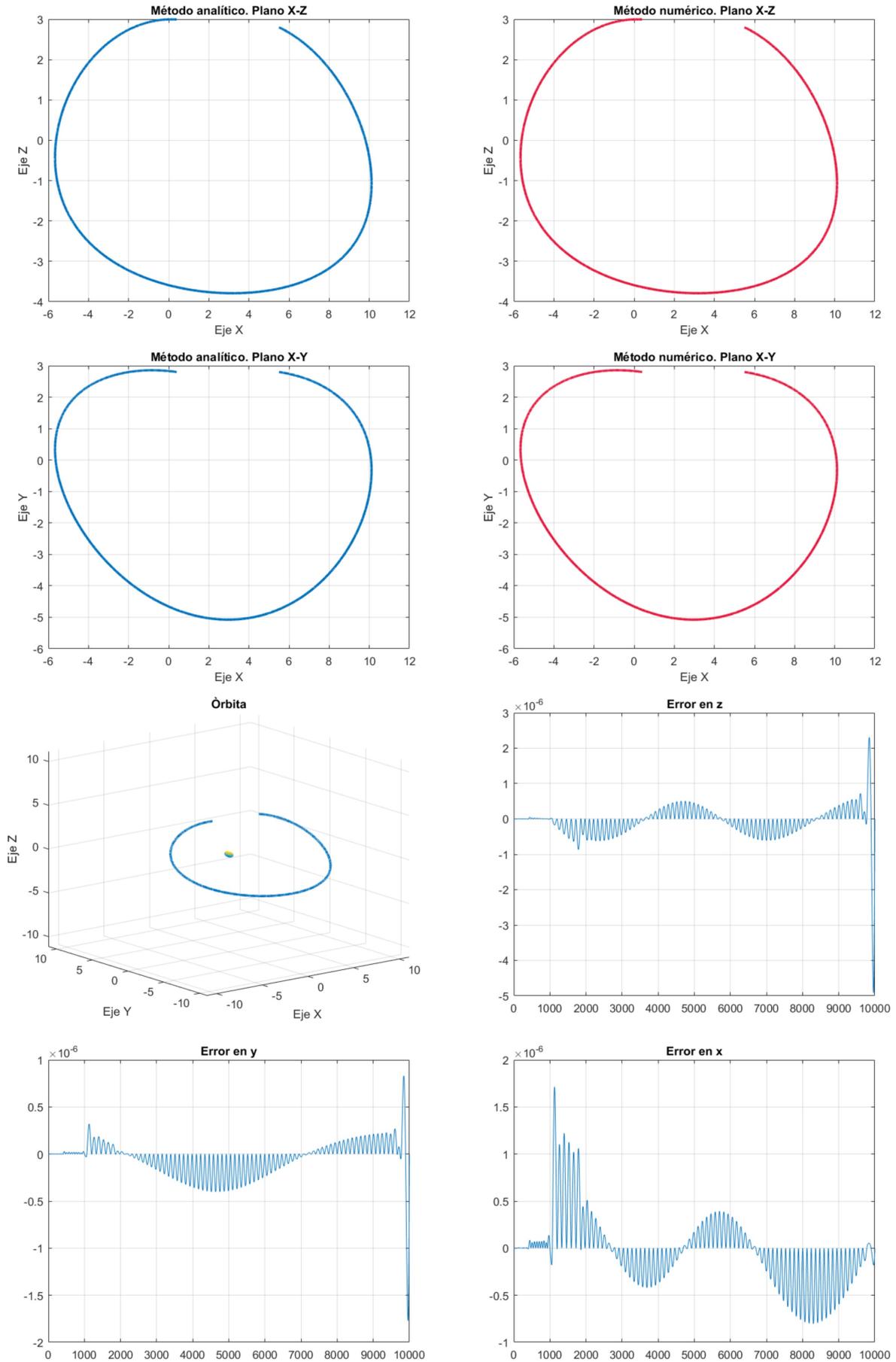


Figura 4.20 Comparación de resultados de la simulación con método analítico y numérico.

### 4.2.3 Aplicación para órbitas periódicas

Conseguir una órbita periódica en las cercanías del asteroide es de gran utilidad práctica, ya que nos permitiría realizar estudios del mismo un tiempo indefinido y sin consumo de combustible (en la práctica las perturbaciones deberían ser compensadas cada cierto tiempo). El hecho de haber conseguido una formulación analítica de la órbita relativa al asteroide nos va a permitir extrapolar las condiciones que deben cumplirse para que una sonda repita su movimiento alrededor del asteroide cada cierto tiempo, lo cual no habría sido posible a priori con la integración numérica de las ecuaciones del movimiento.

Un estado inicial  $\tilde{X}(\theta_0)$  es el estado inicial de un movimiento periódico si su estado propagado con (4.12) tras un periodo es igual. Esta condición se puede expresar como sigue:

$$\tilde{X}(\theta_0 + 2\pi) = \Phi_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} \tilde{X}(\theta_0) = \tilde{X}(\theta_0)$$

Para empezar, la componente en  $\tilde{y}$  del movimiento se propaga únicamente con funciones sinusoidales con periodo  $2\pi$  (Ecuación 4.21), por lo que su evolución será siempre periódica independientemente de las condiciones iniciales. El movimiento en el plano X-Z viene por (4.20), donde las componentes de  $\tilde{X}_{XZ}(\theta)$  son el resultado de multiplicar matricialmente un vector de constantes por la matriz  $\psi_{\theta}$ . En esta matriz todas las componentes son periódicas, salvo los elementos de la última columna, que contienen la función  $J(\theta)$  creciente con el tiempo. Es decir, que para hacer periódicas las componentes  $\tilde{x}$  y  $\tilde{z}$  la única forma es hacer que la constante  $K_4$  que multiplica la última columna sea cero. Como ya se vio, esta constante viene por las condiciones iniciales del movimiento, en particular es la última componente del vector  $\vec{K} = \psi_{\theta_0}^{-1} \tilde{X}_{XZ}(\theta_0)$ , y dado que tenemos la expresión de la matriz  $\psi_{\theta_0}^{-1}$ , se puede obtener fácilmente la condición de periodicidad sobre  $\tilde{X}(\theta_0)$ :

$$K_4 = (3\rho_0 + e^2 - 1)\tilde{z}(\theta_0) - \rho^2 \tilde{x}'(\theta_0) - 3es_0 \tilde{z}'(\theta_0) = 0 \quad (4.24)$$

Unas condiciones iniciales cuyo estado en variables transformadas cumpla (4.24) se propagará de forma que la órbita se repita a cada vuelta del asteroide alrededor del Sol. Para calcular un estado cualquiera que lo cumpla se puede, por ejemplo, forzar a que la componente de velocidad en  $\tilde{x}$  cumpla que:

$$\tilde{x}'(\theta_0) = \frac{2 + 3e \cos(\theta_0) + e^2}{(1 + e \cos(\theta_0))^2} \tilde{z}(\theta_0) + \frac{e \sin(\theta_0)}{(1 + e \cos(\theta_0))} \tilde{z}'(\theta_0)$$

Así, independientemente del resto de variables de estado (incluidas  $\tilde{z}$  y  $\tilde{z}'$ ), la órbita será periódica, aunque no se está poniendo ninguna otra restricción sobre esta (su forma, posición relativa al asteroide...).

Para probar este concepto se ha repetido la simulación anterior pero modificando la condición inicial de velocidad en  $\tilde{x}$  (lo cual supone un cambio en la velocidad en dirección x de las componentes reales), por lo que las condiciones iniciales pasan a ser:

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 2.8 \\ 2.8 \end{bmatrix} (Km)$$

$$\vec{v}_0 = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 12.39976 \\ -1.2 \\ -3 \end{bmatrix} (m/s)$$

El resultado de la simulación aparece en las figuras (4.21), (4.22) y (4.23).

### 4.2.4 Aplicación para inserción orbital

Ahora, y para terminar este capítulo, se va a utilizar la formulación de (4.12) en el cálculo de las maniobras impulsivas necesarias para insertar una sonda en la órbita de un asteroide, habiendo garantías de que no impacten y de que permanecerá cerca durante un tiempo indefinido.

El problema a resolver es el siguiente: Antes de tener que afrontar el rendezvous sobre el asteroide, primero hay que acercar la sonda lo suficiente y dejarla en una órbita de seguridad. En general (como se vio en el capítulo de Introducción), las naves pasan a distancias del orden de cientos o miles de Kilómetros de los asteroides y a velocidades relativas del orden  $10Km/s$  durante los acercamientos. En el caso de una misión a un asteroide en particular, la trayectoria de la sonda se intenta optimizar de forma que en el encuentro la distancia y la velocidad relativa sean lo menor posible, para ahorrar combustible en el frenado y la inserción

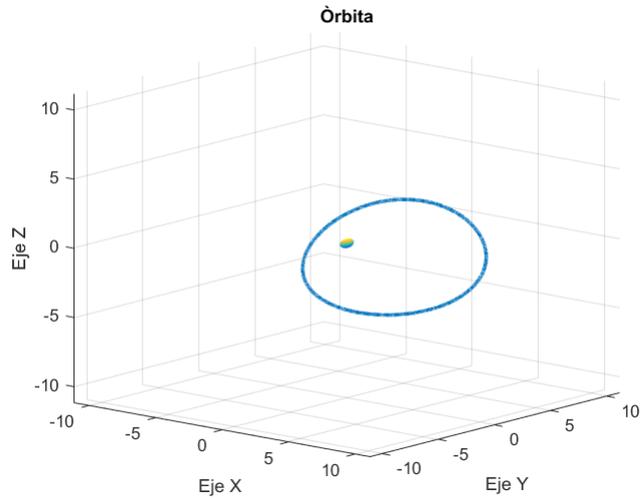


Figura 4.21 Órbita con condiciones iniciales de periodicidad (1 año).



Figura 4.22 Coordenadas X-Z del movimiento de la órbita periódica (1 año).

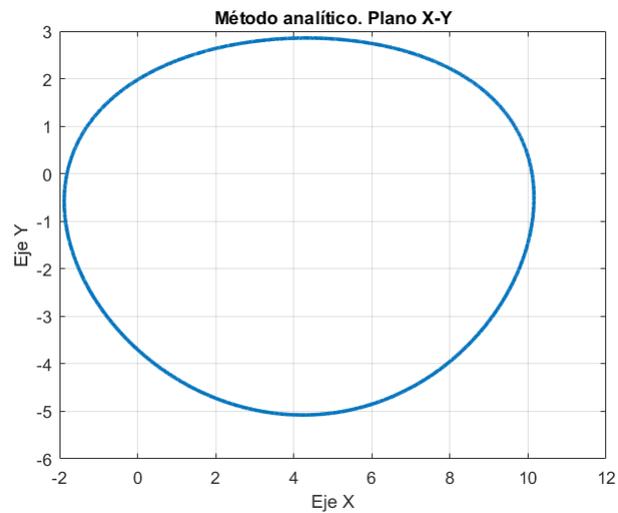


Figura 4.23 Coordenadas X-Y del movimiento de la órbita periódica (1 año).

en la órbita relativa deseada, aunque los valores anteriores nos servirán de límites superiores. Se quiere calcular la magnitud y la dirección de los impulsos que realizan la inserción utilizando la menor cantidad de combustible posible, es decir, se quiere optimizar las maniobras necesarias. Este problema de optimización se planteará como en [13], aunque a diferencia de este artículo aquí se dejará el tiempo de inserción como un parámetro de optimización, además de realizar los impulsos en intervalos no homogéneos como ya se explicará.

En la inserción se usará un número de impulsos predeterminado ( $N$ ), que podrá elegirse entre el mínimo necesario para poder completar la maniobra y un límite superior indefinido (como ya se verá, el algoritmo se vuelve inestable para demasiados impulsos, haciendo imposible la convergencia a una solución óptima en tiempos de computación razonables). El número mínimo de impulsos se puede estimar por la velocidad relativa entre sonda y asteroide en el instante inicial y, sobre todo, por el valor de los niveles de saturación de los propulsores que le atribuimos a la sonda para modelar la incapacidad de realizar un impulso ilimitadamente grande. Así, la función que se desea optimizar viene por:

$$\min_{\Delta\tilde{V}} \sum_{i=1}^N \|\Delta\tilde{V}_i\| \quad (4.25)$$

Donde  $\Delta\tilde{V} = [\Delta\tilde{V}_1 \cdots \Delta\tilde{V}_N]^T \in R^{3N}$  es el vector con los impulsos. Para asegurar que la sonda queda en una órbita periódica el estado justo después del último impulso debe cumplir la condición impuesta por (4.24), y para que esta órbita tenga un tamaño limitado, se impondrá que en cualquier instante posterior a la maniobra ningún punto pueda estar fuera de una región con forma de caja cuyas dimensiones imponemos. Además, para imposibilitar el choque, se usará una restricción de tipo esfera alrededor del asteroide, para que ningún punto de la órbita pueda quedar dentro de la misma. Estas restricciones pueden expresarse como sigue:

$$s.a \quad \begin{cases} \|\Delta\tilde{V}_i\| \leq \overline{\Delta\tilde{V}_i} \forall i = 1 \dots N \\ \tilde{X}(\theta_N) \text{ Cumple (4.22)} \\ (\tilde{x}(\theta), \tilde{y}(\theta), \tilde{z}(\theta)) \in \tilde{X}_{CAJA} \forall \theta \geq \theta_N \\ (\tilde{x}(\theta), \tilde{y}(\theta), \tilde{z}(\theta)) \notin \tilde{X}_{ESFERA} \forall \theta \geq \theta_N \end{cases} \quad (4.26)$$

Donde  $\overline{\Delta\tilde{V}_i} \in R^3$  son los niveles de saturación de los propulsores. El estado de la sonda al final de las maniobras puede expresarse como:

$$\tilde{X}(\theta_N) = A_N + B_N \Delta\tilde{V}$$

Con:

$$A_N = \Phi_{\theta_1}^{\theta_N} \tilde{X}(\theta_1)$$

$$B_N = \left[ \Phi_{\theta_1}^{\theta_N} \tilde{B} \cdots \Phi_{\theta_{N-1}}^{\theta_N} \tilde{B} \quad \tilde{B} \right]$$

Y la condición de periodicidad con:

$$M(\theta_N) \tilde{X}(\theta_N) = 0 \quad \leftarrow \quad M(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2+3e\cos(\theta)+e^2}{(1+e\cos(\theta))^2} & -1 & 0 & \frac{e\sin(\theta)}{(1+e\cos(\theta))} \end{bmatrix}$$

Sea  $\tilde{X}_{CAJA} = [x_c \quad y_c \quad z_c]$  la región de tipo caja usada para la restricción de distancia máxima, en coordenadas transformadas esta restricción puede expresarse así para la coordenada  $\tilde{x}$ :

$$(1+e\cos(\theta))(-x_c) \leq \tilde{x}(\theta) \leq (1+e\cos(\theta))(x_c)$$

De forma similar, para la restricción de tipo esfera se impone que la norma de el vector de posición en coordenadas transformadas sea mayor que un radio fijado de antemano multiplicado por el factor  $(1+e\cos(\theta))$  correspondiente al punto donde se está comprobando. Aprovechando que la órbita es periódica, se hacen las comprobaciones de las regiones en algunos puntos de la órbita posterior a la maniobra espaciados homogéneamente en el tiempo hasta un año después de esta.

Para la distribución de los impulsos a lo largo del tiempo de maniobra (que es un parámetro de optimización en nuestro problema), se puede elegir hacerlo uniformemente. Por ejemplo, en una maniobra de tres impulsos

de 1000s de duración, los dos intervalos que hay entre los impulsos se pueden repartir por igual, de forma que ambos duren 500s. En este caso, con tres impulsos, la duración de ambos se puede expresar así:

$$T_1 = T_m \alpha$$

$$T_2 = T_m (1 - \alpha)$$

Siendo  $\alpha = 0.5$  cuando la distribución es uniforme. Cuando alfa se acerca a 1 el valor del primer intervalo se hace cada vez mayor, mientras que el segundo se hace más pequeño, pero la suma de ambos sigue siendo el tiempo de maniobra,  $T_m$ . La formulación anterior puede generalizarse para un número de impulsos genérico  $N$ , de forma que el intervalo  $T_i$  (con  $i = 1 \dots (N - 1)$ ) vale:

$$T_i = T_m \alpha^{(N-1)-i} (1 - \alpha)^{i-1} \frac{1}{\Lambda} \quad \leftarrow \quad \Lambda = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha^{(N-1)-j} (1 - \alpha)^{j-1}$$

Así, un valor pequeño de  $\alpha$  agrupará los impulsos al principio, mientras que uno grande (1 como máximo), hará que la mayoría se agrupen por el final, para cualquier  $N$  y cualquier tiempo de maniobra.

Tal como está planteado el problema, el número de variables para optimizar la solución es  $3N + 2$ , por lo que supone un esfuerzo computacional importante buscar una solución con más impulsos de los necesarios dadas las condiciones iniciales y las limitaciones de la sonda.

## Resultados

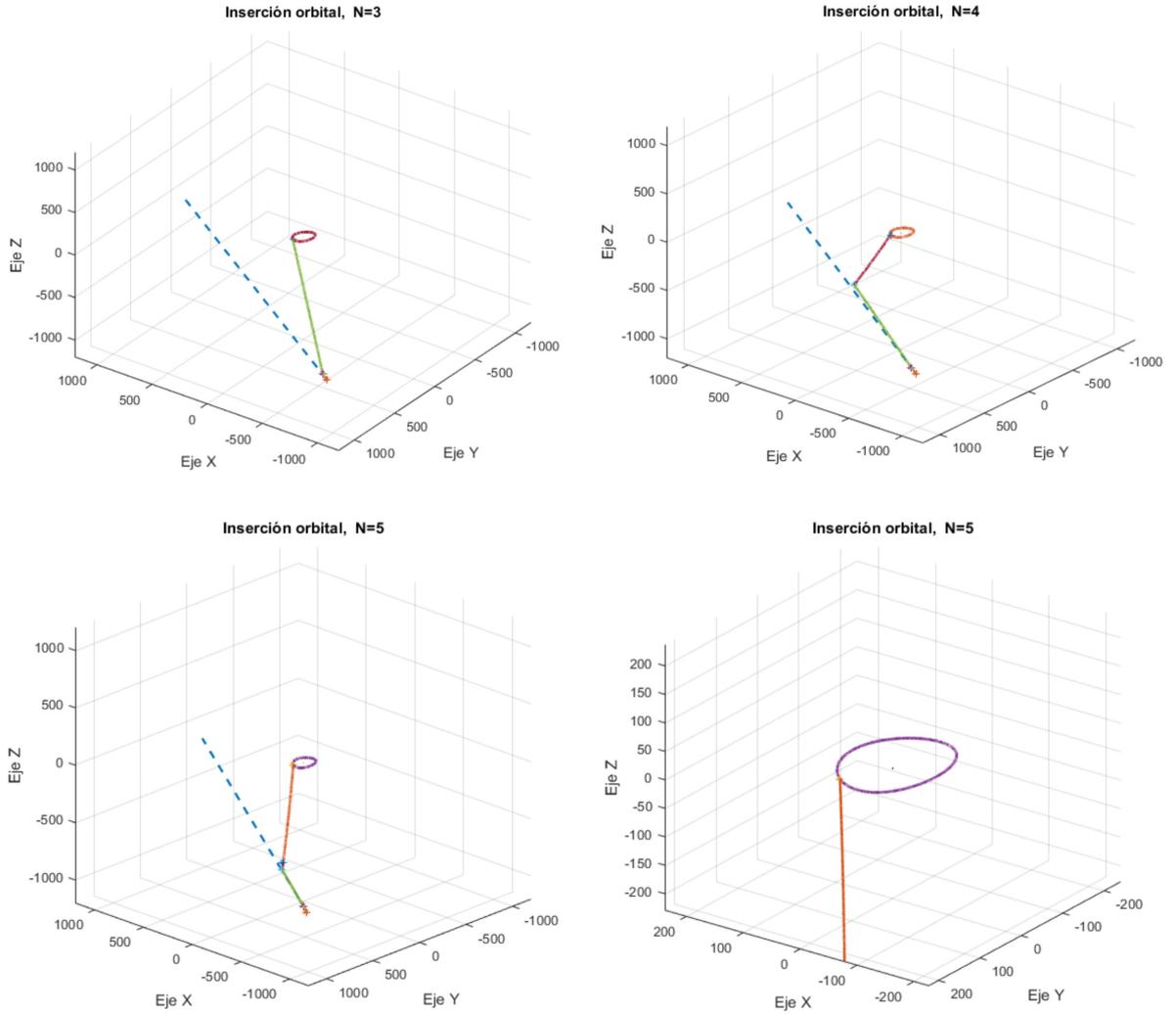
Se ha utilizado este método para calcular la inserción orbital óptima alrededor del asteroide *Itokawa* con distancia en el de comienzo de la maniobra de 800Km y velocidad relativa de 1.5Km/s (la dirección se ve en las figuras con la solución mediante una línea de trazos con la trayectoria que habría seguido la sonda sin realizar impulsos). La saturación de los propulsores se ha fijado en 0.6Km/s para todos los impulsos, por lo que debe haber un mínimo de 3 impulsos. Se han calculado las maniobras para 3, 4, 5 y 10 impulsos, los resultados se muestran en la Tabla 4.2, así como la representación de dichas maniobras en la Figura 4.24 (Los puntos donde se realizan los impulsos están señalados con asteriscos).

**Tabla 4.2** Resultados de las simulaciones de inserción orbital.

N	$\Delta V_{Total}$ [Km/s]	$\alpha$	$T_m$ [s]
3	1.5388	0.0208	3.9650e+03
4	1.5030	0.0234	1.5360e+05
5	1.5010	0.0678	2.0283e+05
10	2.5961	0.3147	9.7309e+04

Puede verse que la forma de las soluciones solo es coherente cuando el número de impulsos se mantiene dentro de un límite razonable, y esto es debido a que el espacio de soluciones se vuelve demasiado grande para realizar una búsqueda completa y encontrar la mejor de todas cuando  $N$  se hace muy grande. Aun así, se ha conseguido que para pocas maniobras el valor final de  $\Delta V$  sea muy parecido, por lo que es razonable asumir que el algoritmo puede encontrar una solución muy cercana a la óptima, a pesar de no tener forma de saber cual es (en este caso sabemos que debe ser cercana a la velocidad relativa inicial, ya que en general solo hay que frenar y aplicar el impulso que pone la sonda en una órbita periódica). Para conseguir esto se ha recurrido al *Global Optimization Toolbox* de Matlab, que nos da herramientas para realizar búsquedas "completas" en problemas de optimización con múltiples mínimos relativos y restricciones no lineales. En particular se ha usado la función *MultiStart*, que realiza la búsqueda partiendo de múltiples puntos del espacio de las variables de optimización, pudiendo elegir la cantidad de estos, por lo que cuantos más se utilicen más exhaustiva será la búsqueda y más fácil es encontrar la solución óptima (aumentando también el tiempo de cálculo).

En el caso de la maniobra de 10 impulsos este método no es capaz de llegar a una solución óptima (ya que sabemos que las anteriores son un caso particular de una maniobra de muchos impulsos pero con algunos de ellos nulos) cuando se utiliza la misma cantidad de puntos iniciales de búsqueda que en los casos anteriores (20 puntos), y tarda alrededor de 500 segundos (cuando para 3, 4 y 5 la duración va de los 60 a los 400). Aumentar los puntos iniciales para poder encontrar una solución óptima solo conseguiría que el tiempo



**Figura 4.24** Representación de la inserción orbital con diferente número de impulsos.

necesario fuera simplemente poco práctico, por lo que en ese caso habría que cambiar la metodología (solo se pretende ver una aplicación del método de propagación analítico que se ha deducido, y no resolver el problema de la inserción orbital óptima).

## 5 Rendezvous sobre un asteroide

---

En este capítulo se va a exponer una técnica para calcular maniobras de *rendezvous* óptimas sobre asteroides utilizando las herramientas de propagación de movimiento relativo que se dedujeron en el capítulo anterior. Se van a utilizar las ecuaciones de (4.9), por lo que la propagación analítica del movimiento se realizará mediante las matrices de la expresión (4.12). Para facilitar la nomenclatura, la matriz que propaga unas condiciones iniciales desde  $\theta_0$  hasta  $\theta_k$  (recuérdese que con la formulación utilizada los instantes de tiempo se sustituyen por el valor de la anomalía verdadera en ese momento) se llamará  $A_0^k$  (es directamente  $\Phi_{\theta_0}^{\theta_k}$ ), y la matriz que propaga el efecto de un impulso que se da en  $\theta_0$  hasta  $\theta_k$  vendrá por  $B_0^k$  (resultado de multiplicar  $\Phi_{\theta_0}^{\theta_k}$  y  $\tilde{B}$ ).

Así, dadas unas condiciones iniciales  $\tilde{X}_0$  y un impulso  $\vec{u}_0$  aplicado en  $\theta_0$ , el estado *antes* de dar el siguiente impulso vendrá dado por:

$$\tilde{X}_1 = A_0^1 \tilde{X}_0 + B_0^1 \vec{u}_0$$

Para el estado en el siguiente impulso se llega a la expresión:

$$\tilde{X}_2 = A_1^2 \tilde{X}_1 + B_1^2 \vec{u}_1 = A_1^2 (A_0^1 \tilde{X}_0 + B_0^1 \vec{u}_0) + B_1^2 \vec{u}_1 = A_1^2 A_0^1 \tilde{X}_0 + A_1^2 B_0^1 \vec{u}_0 + B_1^2 \vec{u}_1$$

Como es lógico, se tiene que cumplir que  $A_1^2 A_0^1 = A_0^2$  y  $A_1^2 B_0^1 = B_0^2$ . Iterando, y considerando una maniobra de  $N$  impulsos, se llega a la siguiente expresión para calcular cualquier estado:

$$\tilde{X}_k = A_0^k \tilde{X}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} B_i^k \vec{u}_i \quad \forall k < N \quad (5.1)$$

En la expresión anterior no se está considerando el último impulso, es decir, el que se da cuando se llega a  $\tilde{X}_{N-1}$  (nótese que una maniobra de  $N$  impulsos cuenta con  $N$  estados, pero el primero lo llamamos el estado 0 por lo que el último es el  $N-1$ ), para lo cual solo habría que realizar el sumatorio hasta  $k$  (equivalente a sumar el incremento de velocidad directamente al estado).

Con lo anterior, dado el vector de estados de la forma:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \vdots \\ \tilde{X}_{N-1} \end{bmatrix}$$

Y conocido el vector de impulsos (en variables transformadas):

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \vec{u}_0 \\ \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{u}_{N-1} \end{bmatrix}$$

Se puede escribir una expresión matricial que nos proporcione todos los estados por los que pasa la sonda de una vez:

$$\tilde{X} = F\tilde{X}_0 + G\tilde{U} \quad (5.2)$$

Donde  $F$  es una matriz *columna* de matrices  $A_0^k$  en cada *fila*, y  $G$  tiene en cada *fila* las matrices  $B_i^k$  hasta la  $k-1$ , salvo en la última, donde aparecerá  $B_k^k$  (que es una matriz identidad) para tener en cuenta el último impulso como ya se ha comentado. A modo de ejemplo, para una maniobra de 4 impulsos estas matrices quedan de la siguiente forma:

$$F = \begin{bmatrix} A_0^1 \\ A_0^2 \\ A_0^3 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} B_0^1 & 0 & 0 & 0 \\ B_0^2 & B_1^2 & 0 & 0 \\ B_0^3 & B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 \end{bmatrix}$$

El problema a resolver es calcular el vector de impulsos  $\tilde{U}$  ( $3N$  variables) que provoque el rendezvous de la sonda (condición de igualdad para el estado final tanto en posición como en velocidad), mientras que los estados previos no provoquen el choque con el asteroide (condición de seguridad para los  $N-2$  estados previos, que se pueden expresar como desigualdades) minimizando el valor de los impulsos para reducir el consumo de combustible todo lo posible (estando estos sujetos a limitaciones a su vez).

Partiendo del modelo de (5.2) podemos realizar una planificación óptima, fijando los objetivos y las restricciones necesarias. Para ello vamos a plantearlo como un problema de optimización cuadrática (*quadratic program* o QP) que podemos resolver de forma rápida y eficiente con *Matlab* utilizando la función *quadprog*. Un QP es un problema de optimización cuya forma estándar puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} & \min_{\vec{r}} \frac{1}{2} \vec{r}^T H \vec{r} + \vec{f}^T \vec{r} \\ & \text{s.a.} \quad \begin{cases} A \vec{r} \leq \vec{b} \\ A_{eq} \vec{r} = \vec{b}_{eq} \end{cases} \end{aligned}$$

Donde las matrices  $H$ ,  $A$ ,  $A_{eq}$  y los vectores  $\vec{f}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{b}_{eq}$  vienen definidos por las características del problema en cuestión, y son los datos de entrada que se necesita para resolverlo mediante *quadprog*. Nótese que solo se pueden imponer restricciones lineales con las variables de entrada (a diferencia del problema de inserción orbital antes resuelto).

En cuanto a la función objetivo, esta debe minimizar el sumatorio de las normas de los impulsos, pero como eso no es posible con el planteamiento de un QP, lo que se hará será minimizar la energía de control (el sumatorio del cuadrado de la norma de los impulsos). Así la matriz  $H$  resulta como la identidad de orden  $3N$  y el vector  $\vec{f}$  como un vector de ceros.

Respecto a la igualdad, queremos que el último vector de  $\tilde{X}$  cumpla con la condición de rendezvous, es decir, queremos que  $\tilde{X}_{N-1} = \tilde{X}_{rend}$ . El valor concreto de  $\tilde{X}_{rend}$  depende de como se afronte el problema, y se discutirá en los apartados sucesivos. En cuanto a las matrices para resolverlo como un QP, solo necesitamos aislar el estado  $\tilde{X}_{N-1}$  del vector  $\tilde{X}$ , para lo cual lo multiplicamos por:

$$G_1 = [0_{6 \times 6} \quad 0_{6 \times 6} \quad \cdots \quad 0_{6 \times 6} \quad Id_{6 \times 6}]$$

Por lo que se llega a:

$$\tilde{X}_{rend} = G_1 \tilde{X} = G_1 F \tilde{X}_0 + G_1 G \tilde{U}$$

Es decir que  $A_{eq} = G_1 G$  y  $\vec{b}_{eq} = -G_1 F \tilde{X}_0 + \tilde{X}_{rend}$ . Para limitar el valor de los impulsos lo ideal sería plantearlo como  $|\vec{u}_i| \leq u_{max}$ , pero esto no es viable pues no es una condición lineal del valor de las componentes de  $\tilde{U}$ . Por ello, lo que se hará será limitar el valor de las componentes de los impulsos en si, aunque sea en realidad una limitación diferente:

$$-\vec{u}_{max} \leq \tilde{U} \leq \vec{u}_{max}$$

Donde  $\vec{u}_{max}$  es un vector de dimensión  $3N$  cuyas componentes son  $u_{max}$ . De esta forma los vectores resultantes podrían llegar a tener un módulo mayor que  $u_{max}$ , siendo  $\sqrt{3}u_{max}$  su máximo módulo alcanzable. Así, para evitar esto, se puede escalar  $\vec{u}_{max}$  para que sus componentes sean  $u_{max}^* = u_{max}/\sqrt{3}$ , evitando este

problema (aunque también se está limitando en cierta manera las soluciones posibles). Para poner la limitación anterior en forma de desigualdad inferior podemos escribirlas como  $\dot{U} \leq \vec{u}_{max}^*$  y como  $-\dot{U} \leq \vec{u}_{max}^*$ , por lo que la matriz  $A$  y el vector  $\vec{b}$  quedan de la siguiente forma (a falta de añadir la condición de seguridad):

$$A = \begin{bmatrix} Id_{3N \times 3N} \\ -Id_{3N \times 3N} \end{bmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{max}^* \\ \vec{u}_{max}^* \end{bmatrix}$$

Finalmente, solo faltaría expresar la condición de seguridad en forma de desigualdad para evitar así que la sonda impacte con el asteroide. Esto solo se puede hacer limitando la región del espacio en la que puede estar la sonda en los puntos donde se realizan los impulsos (pues solo ahí conocemos los estados de la sonda mediante  $\tilde{X}$ ). En la práctica, una condición muy común que se impone a la posición de la nave es que se mantenga dentro de la región definida por el cono con vértice en el punto de rendezvous y cuyo eje es perpendicular a la superficie. Para simplificar, y dado que la ecuación de un cono no es lineal (lo que hace imposible implementarlo con esta técnica), aquí se impondrá como válida la región del espacio limitada por el plano tangente al punto de rendezvous (ya que la ecuación de un plano sí es lineal). Esto se hará primero en el caso muy simplificado de un asteroide que no gira y con el punto de rendezvous en uno de los ejes principales del elipsoide, para así ejemplificar la base de este método. Después se generalizará para el caso de asteroides que giran alrededor de un eje cualquiera a velocidad constante y con el punto final en cualquier lugar de la superficie del asteroide.

Como forma de incluir el efecto de la gravedad, se ha implementado esto dentro de un modelo de *Control Predictivo basado en Modelo* (MPC) al final del capítulo, para así mejorar los resultados cuando existen incertidumbres que no tiene en cuenta el modelo base utilizado en la propagación.

## 5.1 Asteroide estático

En este caso simplificado supondremos que nuestro asteroide (modelado como un elipsoide triaxial) tiene sus ejes principales alineados con el sistema de referencia LVLH. De esta forma, dadas las coordenadas del punto de rendezvous en el sistema de referencia fijo al asteroide (mismo sistema de referencia de la Figura 3.2), conoceremos las coordenadas de  $\tilde{X}_{rend}$  en el sistema de referencia LVLH. En realidad, dado que el sistema de referencia está rotando en todo momento, el asteroide también lo está haciendo con este planteamiento, pero considerando lo lento que es este giro (aproximadamente  $360^\circ$  en 365 días en órbitas cercanas a la de la tierra) y que el procedimiento de rendezvous dura muy poco tiempo (aquí consideraremos maniobras de duración del orden de 10000 segundos) vamos a suponer que en realidad el sistema de referencia no gira durante las maniobras para no tener en cuenta la variación de orientación entre el sistema de referencia fijo al asteroide y el fijo a la órbita.

Dado que solo nos interesan los puntos de pertenecientes a los ejes principales, las coordenadas del punto final son fáciles de calcular en este caso. Por ejemplo, si se elije hacer el rendezvous sobre uno de los puntos que corta con el eje  $x$ ,  $(\pm a, 0, 0)$ , el estado final de la sonda vendrá dado por el vector:

$$X_{rend} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde se ve que la velocidad en el sistema de referencia que estamos usando es nula, ya que el asteroide está fijo a este (si estuviera rotando la velocidad sería la misma que la del asteroide en ese punto). Ahora hay que transformar este vector de estado a las variables escaladas en las que está formulado el propagador de movimiento relativo. Para ello se utiliza las ecuaciones de (4.22). Como puede verse, en variables transformadas la velocidad es proporcional al vector de la posición real, por lo que el vector  $\tilde{X}_{rend}$  tendrá velocidad diferente de cero en general (aunque esto no afecta al método).

Con esto ya quedan definidas la matriz  $A_{eq}$  y el vector  $\vec{b}_{eq}$ , por lo que falta completar la matriz  $A$  y el vector  $\vec{b}$  con la condición de seguridad.

En este caso simplificado se usará la condición  $x \geq a$  para evitar que la sonda pueda chocar con el asteroide (al menos en los instantes en los que se dan los impulsos, que es donde podemos hacer la comprobación como ya se ha mencionado). Dado un vector de estado  $X_j$ , la condición anterior puede expresarse así:

$$c \cdot X_j \geq a$$

Con  $c = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Pero en la formulación utilizada hay que usar la condición geométrica en variables transformadas, donde las longitudes vienen de multiplicar los valores reales por  $\rho = 1 + \cos \theta$ , de forma que  $x \geq a$  se transformaría en  $\tilde{x} \geq a\rho$  (el valor de  $\rho$  cambia con la posición en la órbita). Así, lo que hay que implementar sería:

$$c \cdot \tilde{X}_j \geq a\rho_j$$

Con el mismo vector  $c$ , ya que solo ha cambiado el punto por el que pasa el plano y no su orientación. Nótese además que las componentes de la velocidad de  $\tilde{X}_j$  están todas siendo multiplicadas por cero ya que estamos imponiendo una condición en posición y el valor de la velocidad es indiferente en estos estados intermedios (solo son relevantes las tres primeras componentes de  $c$ ).

Teniendo en cuenta que para un QP la condición en desigualdad tiene que ser del tipo menor o igual, podemos generalizar lo anterior para todos los estados intermedios con la expresión  $C\tilde{X} \leq -\tilde{X}_{min}$ , donde la matriz  $C$  viene por:

$$C = \begin{bmatrix} -c & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & -c \end{bmatrix}$$

Y el vector  $\tilde{X}_{min}$  contiene las componentes  $a\rho_j$  correspondientes a cada instante de tiempo. Considerando que  $\tilde{X} = F\tilde{X}_0 + G\tilde{U}$  podemos obtener lo que buscábamos:

$$A^* = CG$$

$$\vec{b}^* = -CF\tilde{X}_0 - \tilde{X}_{min}$$

Por lo que si completamos con la limitación de los impulsos:

$$A = \begin{bmatrix} Id_{3N \times 3N} \\ -Id_{3N \times 3N} \\ CG \end{bmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{max}^* \\ \vec{u}_{max}^* \\ -CF\tilde{X}_0 - \tilde{X}_{min} \end{bmatrix}$$

Dado que ya tenemos todas las matrices y vectores necesarios se pueden introducir en *quadprog* para obtener el vector de impulsos.

### Aplicación al asteroide *Bede*

Se va a aplicar el método anterior para calcular el *rendezvous* sobre el asteroide *3691 Bede (1982 FT)* por tardar este 226,8 horas en realizar una rotación sobre si mismo, lo que lo convierte en uno de los asteroides de rotación más lenta conocidos. Así, la simplificación realizada de asteroide estático será aproximadamente válida para maniobras de *rendezvous* que transcurran en poco tiempo. En particular se va a imponer que el tiempo de maniobra sea de 6000 segundos (lo que supone un giro de aproximadamente 3 grados).

Como se vio en el capítulo anterior, para conocer las matrices de propagación es necesario conocer los datos de la órbita (semieje mayor y excentricidad, los cuales se conocen con precisión) además del instante inicial (dado por  $\theta_0$ ) y el tiempo de propagación. Aquí se ha elegido  $\theta_0 = 10^\circ$  y, como ya se ha dicho, el tiempo de maniobra es  $T_m = 6000s$ . Solo faltaría elegir el número de impulsos y las condiciones iniciales para poder calcular las matrices  $F$  y  $G$  que definen el problema. Se hará la maniobra de 10 impulsos, y el estado inicial vendrá por el vector:

$$X_0 = [8 \quad 1 \quad 3 \quad 0.1E-3 \quad -2.5E-3 \quad -0.2E-3]$$

Estando la posición en *Km* y la velocidad en *Km/s*. La geometría de este asteroide en particular no es del todo conocida pues solo se tiene información tomada desde tierra mediante medios ópticos. Se sabe que tiene un radio medio de 2,15 *Km* (lo cual se deduce de la luz que refleja y de la distancia al asteroide), por lo que supondremos un semieje mayor de 3 *Km* y fijaremos las dos dimensiones restantes del elipsoide para que

esto se cumpla. Con esto se puede conocer el vector de estado en el rendezvous (dado por el valor de  $a$ ) y por tanto el resto de matrices para resolver el problema.

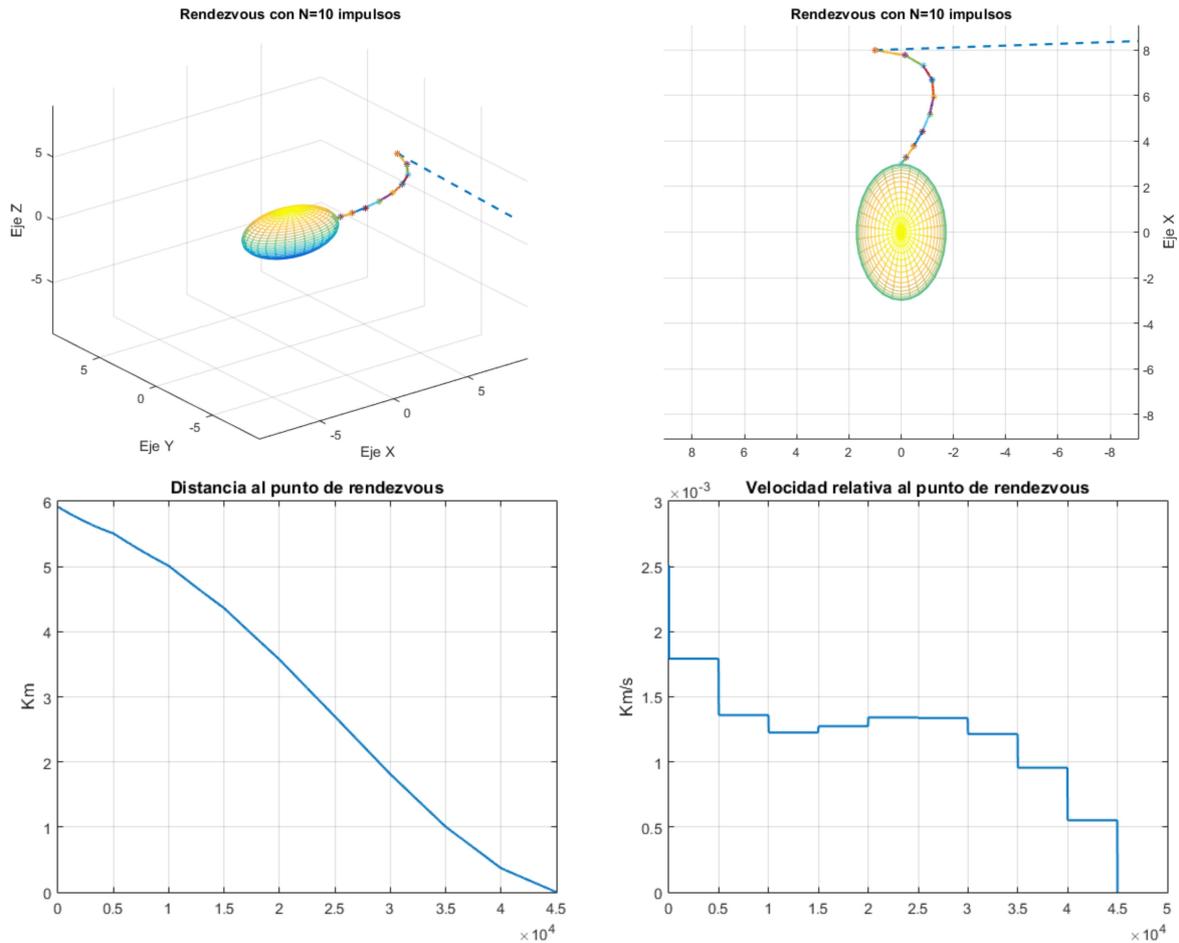


Figura 5.1 Rendezvous sin giro.

En la Figura 5.1 se han representado los resultados de aplicar el método explicado sobre el asteroide *Bede*. Como puede observarse por la gráfica de la velocidad relativa (en el eje x están los instantes en que se ha dividido la representación de la maniobra) el impulso más grande se da al principio (el salto en cada escalón no es el valor del impulso en sí, pero es representativo). Aunque parezca que la velocidad entre impulsos se mantiene constante esto se debe a que el tiempo transcurrido entre impulsos es muy corto y no se producen cambios significativos de velocidad.

El  $\Delta V$  de la maniobra completa ha sido de 4,655 m/s, y la norma de los diferentes impulsos viene por el siguiente vector:

$$DVims = [0.9160 \quad 0.7607 \quad 0.6069 \quad 0.4566 \quad 0.3145 \quad 0.1991 \quad 0.1752 \quad 0.2684 \quad 0.4046 \quad 0.5529]$$

Cabe destacar que para este problema se impuso un valor máximo a los impulsos de 5 m/s (lo que suponía imponer  $5/\sqrt{3}$  como valor máximo de las componentes de los impulsos). Se puede observar que al final del rendezvous se cumplen las condiciones impuestas en posición y en velocidad, por lo que podemos dar por válido el algoritmo utilizado. El programa en sí tarda en ejecutarse unos 0.6 segundos, de los cuales 0.5 se corresponden a la ejecución del *quadprog* que obtiene los impulsos, y el resto se usa en calcular las matrices que definen el problema. Esto quiere decir que el método es lo bastante rápido para ser utilizado en aplicaciones en tiempo real ya que los cálculos necesarios se llevan a cabo rápidamente en comparación con la maniobra completa, lo cual va a tener implicaciones para las fases sucesivas de este trabajo.

## 5.2 Asteroide girando

En este apartado se explicarán las modificaciones necesarias para generalizar el algoritmo anterior a un asteroide que además está girando respecto al sistema de referencia LVLH alrededor de un eje cualquiera. Para esto hay que tener en cuenta que cambia la forma de expresar el estado en el instante de *rendezvous*, ya que se hará para poder realizarlo sobre cualquier punto del asteroide y que además este punto ahora va a estar moviéndose. También va a cambiar la forma en la que se expresan las condiciones de seguridad en los instantes de los impulsos, ya que el plano de seguridad, que antes era  $x = a$ , ahora será tangente a un punto cualquiera y estará rotando respecto del eje de giro del asteroide.

La superficie del elipsoide parametrizada con los mismos ángulos que en el modelado del potencial viene por la siguiente expresión:

$$S(\lambda, \phi) = (a \cos \phi \cos \lambda, \quad b \cos \phi \sin \lambda, \quad c \sin \phi) \quad (5.3)$$

Así, dados los ángulos  $\phi_r$  y  $\lambda_r$  el punto de *rendezvous* quedaría definido por  $\vec{r}_{AR} = (S(\lambda_r, \phi_r))^T$  si este no rotara sobre si mismo. Para tener en cuenta el giro solamente hay que hacer uso de la matriz de rotación de ángulo  $\theta$  alrededor de un eje unitario  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  que viene por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta + u_x^2(1 - \cos \theta) & u_x u_y(1 - \cos \theta) - u_z \sin \theta & u_x u_z(1 - \cos \theta) + u_y \sin \theta \\ u_y u_x(1 - \cos \theta) + u_z \sin \theta & \cos \theta + u_y^2(1 - \cos \theta) & u_y u_z(1 - \cos \theta) - u_x \sin \theta \\ u_z u_x(1 - \cos \theta) - u_y \sin \theta & u_z u_y(1 - \cos \theta) + u_x \sin \theta & \cos \theta + u_z^2(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Dicha matriz es ortogonal por lo que se cumple que  $R^T = R^{-1}$  y  $\det R = 1$ . Suponiendo que en el instante inicial el asteroide se encuentre alineado con los ejes del sistema de referencia LVLH lo único que hay que hacer es multiplicar la matriz anterior por el vector posición del punto de *rendezvous* antes de la rotación,  $\vec{r}_{DR} = R \cdot \vec{r}_{AR}$ . Esto quiere decir que solamente hay que definir previamente el eje de giro y el ángulo que ha girado el asteroide. En principio no hay ninguna limitación a la hora de elegir el eje de giro, pero dado que la mayoría de asteroides giran alrededor de su eje de mayor inercia se va a elegir el eje  $z$  (pues ya se estableció que  $a \geq b \geq c$ ). El ángulo girado viene directamente por el tiempo de maniobra,  $T_m$ , y por el periodo de rotación  $T_r$ , mediante la expresión  $\theta = \frac{2\pi}{T_r} T_m$ . Lo anterior se puede generalizar a cualquier orientación inicial, para lo cual solo hay que realizar un giro inicial  $\theta_0$  alrededor de un eje cualquiera  $u_0$ , y así orientar al asteroide de diferente forma. De este modo se tendrá que:

$$\vec{r}_{DR} = R \cdot R_0 \cdot \vec{r}_{AR}$$

Donde ahora la matriz  $R$  viene por el mismo ángulo girado que se ha calculado previamente, pero con el eje de giro resultado de hacer girar el vector  $(0, 0, 1)^T$  lo mismo que el asteroide en sí:

$$\vec{u} = R_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

En cuanto a la velocidad del punto de *rendezvous* en el instante final sabemos que tiene como módulo  $v_r = \frac{2\pi}{T_r} |r_{DR}|$  y como dirección la que viene por la regla de la mano derecha, que puede calcularse como  $\vec{u} \times \frac{\vec{r}_{DR}}{|r_{DR}|}$ . Por lo que la velocidad del punto de *rendezvous* vendrá por:

$$\vec{v}_r = \frac{2\pi}{T_r} \vec{u} \times \vec{r}_{DR}$$

Así, el estado final vendrá por el vector columna:

$$X_{rend} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{DR} \\ \vec{v}_r \end{bmatrix}$$

Dicho estado debe transformarse a las variables escaladas como ya se mencionó antes. Para poder expresar la condición de seguridad primero necesitamos calcular el plano tangente al punto de *rendezvous*, para lo cual hay que calcular el vector normal a la superficie del elipsoide en ese punto. Dada la expresión parametrizada de una superficie, el vector normal a esta viene por el producto escalar de las derivadas parciales respecto a los parámetros, en este caso  $\phi$  y  $\lambda$ . Teniendo en cuenta como están definidos dichos ángulos, el vector

normal hacia afuera vendrá por  $\vec{n}(\lambda, \phi) = S_\lambda \times S_\phi$ , expresión que debe ser evaluada en el punto deseado. Así, dado un punto  $\vec{p}$  y el vector normal, el plano viene dado por la ecuación:

$$(x - p_x)n_x + (y - p_y)n_y + (z - p_z)n_z = 0$$

Que también puede expresarse como:

$$xn_x + yn_y + zn_z = n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z$$

En el instante inicial de la maniobra el punto es el que viene dado por  $(\lambda_r, \phi_r)$  por lo que:

$$\begin{aligned}\vec{n}_0 &= \vec{n}(\lambda_r, \phi_r) \\ \vec{p}_0 &= \vec{r}_{AR}\end{aligned}$$

Por lo que el plano tangente viene por:

$$\vec{n}_0^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{p}_0^T \cdot \vec{n}_0$$

Para un instante  $j$  sucesivo solo hay que rotar los vectores  $\vec{n}_0$  y  $\vec{p}_0$  mediante la matriz  $R_j$ , con el ángulo  $\theta_j$  correspondiente, quedando completamente definido el plano tangente en cualquier momento. Esto también es válido si el elipsoide no esta orientado al principio con los ejes de LVLH, simplemente hay que usar  $R_0 \cdot \vec{n}_0$  como vector normal inicial y  $R_0 \cdot \vec{p}_0$  como punto inicial, además de usar como eje de giro el dado por (5.5) en la matriz  $R_j$ .

Finalmente, la condición de seguridad que debe cumplir un estado  $X_j$  intermedio entre el comienzo y el instante de *rendezvous* viene por:

$$c_j \cdot X_j \geq \vec{p}_j^T \cdot \vec{n}_j$$

Donde  $c_j = [\vec{n}_j^T \ 0 \ 0 \ 0]$ . Dicha condición debe expresarse en las variables transformadas, que se vuelve a hacer multiplicando el lado derecho de la inequación por  $\rho_j$ , ya que en el espacio de las variables transformadas cambia el punto de *rendezvous*, pero el vector normal solo sufre un cambio de longitud, por lo que puede usarse el mismo. De esta forma la condición queda:

$$c_j \cdot \tilde{X}_j \geq \vec{p}_j^T \cdot \vec{n}_j \rho_j$$

Esto quiere decir que solo hay que cambiar la matriz  $C$  y el vector  $\tilde{X}_{min}$ , quedando completamente definidas el resto de matrices y vectores del problema de optimización.

### Aplicación al asteroide Itokawa

Para el método considerando el giro se usará el asteroide Itokawa (ver Tabla 4.1), con una maniobra de *rendezvous* de 10000 s de duración (gira 80° aproximadamente) y 20 impulsos. El giro se realiza alrededor del eje principal de inercia, pero se ha orientado el asteroide con un giro inicial de 180° alrededor de  $[1 \ 0 \ 0]$  (a falta de conocer datos reales del mismo). El punto de *rendezvous* elegido viene por  $\phi_r = -30^\circ$  y  $\lambda_r = 30^\circ$  y las condiciones iniciales son:

$$X_0 = [-1 \quad -1.2 \quad 2 \quad -0.5E-3 \quad 0.01E-3 \quad -0.8E-3]$$

En la Figura 5.2 se ha representado el resultado obtenido. En línea de puntos se representa la trayectoria que iba a seguir la sonda de no haber empezado a aplicar los impulsos. El plano que está representado en cada instante es el tangente al punto de *rendezvous*, y es el que se utiliza como condición geométrica de seguridad en cada instante (mientras el último punto dibujado esté por el lado del plano contrario al asteroide entonces será un punto válido). La maniobra en si ha tenido un coste total de 1.495m/s y la representación de la velocidad y distancia relativa al punto de *rendezvous* a lo largo de la misma puede verse en las figuras (5.3) y (5.4).

De nuevo el tiempo empleado por el programa para calcularlo todo ha sido de 0.5 segundos aproximadamente, de los que la mayoría (0.4) se emplean en la optimización de la maniobra.

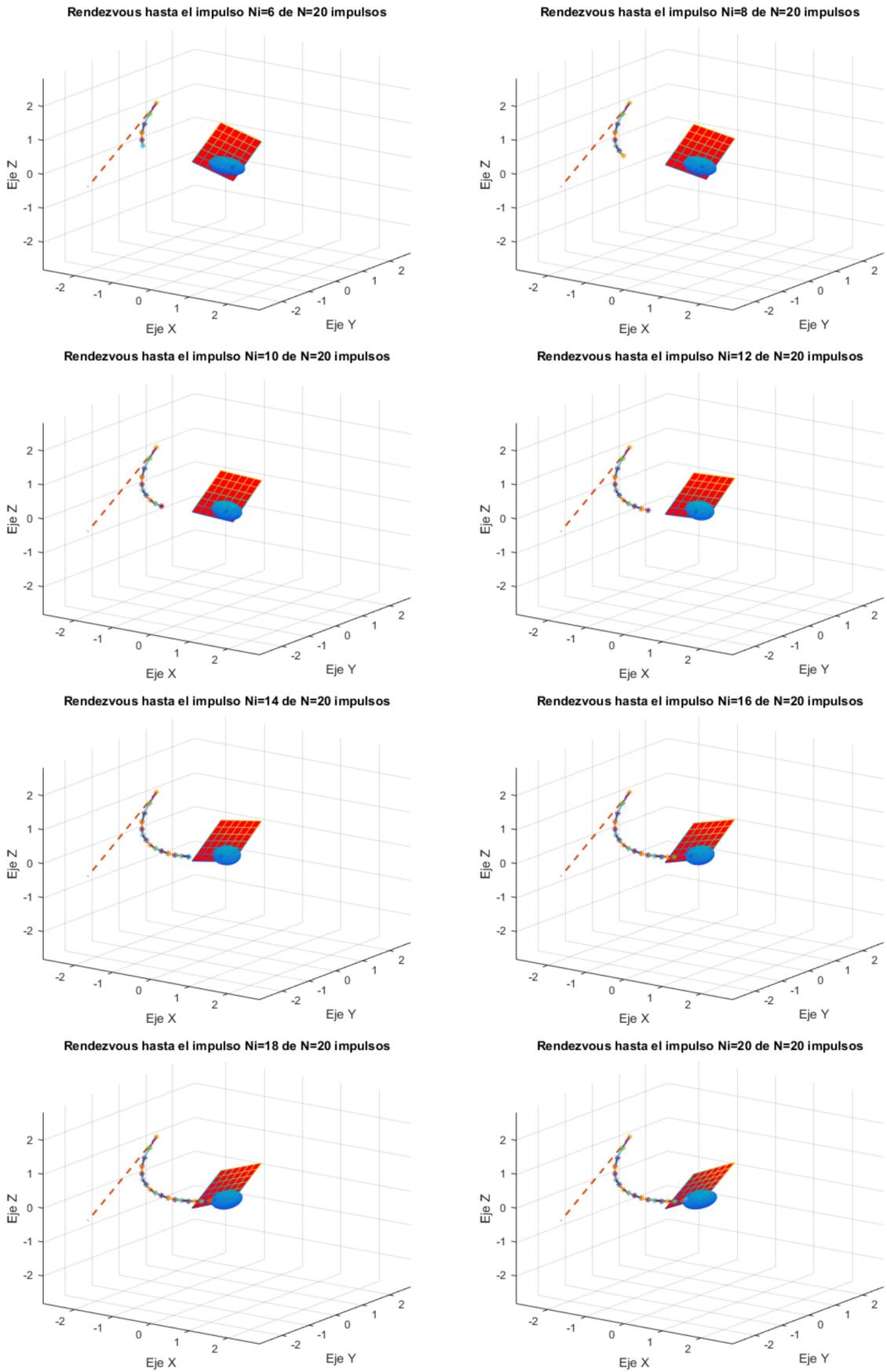


Figura 5.2 Rendezvous con giro.

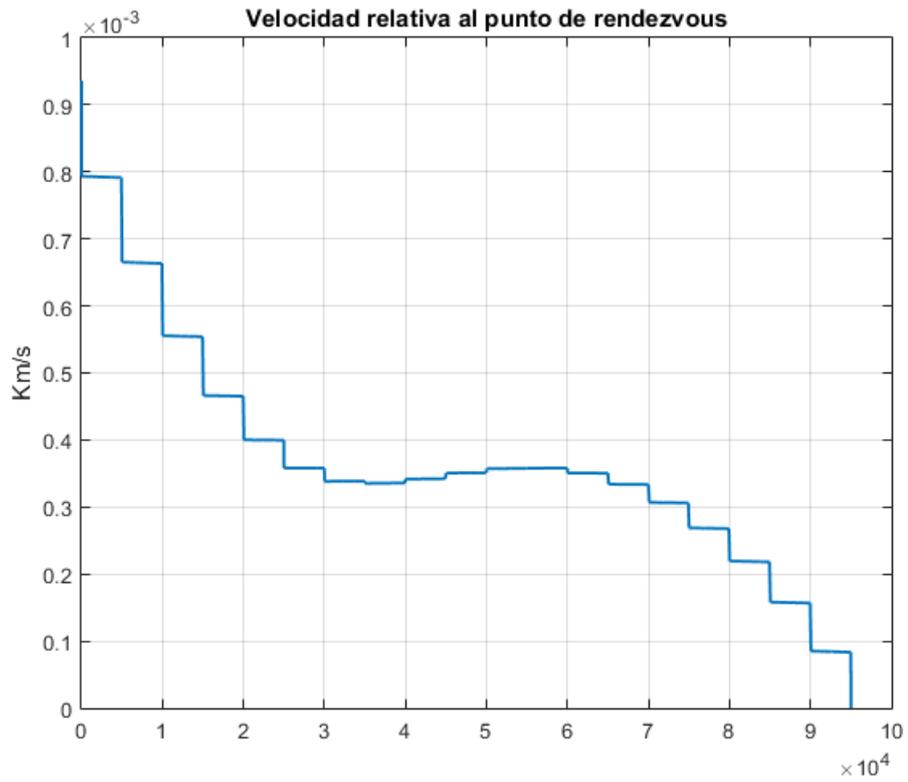


Figura 5.3 Rendezvous con giro, velocidad relativa.

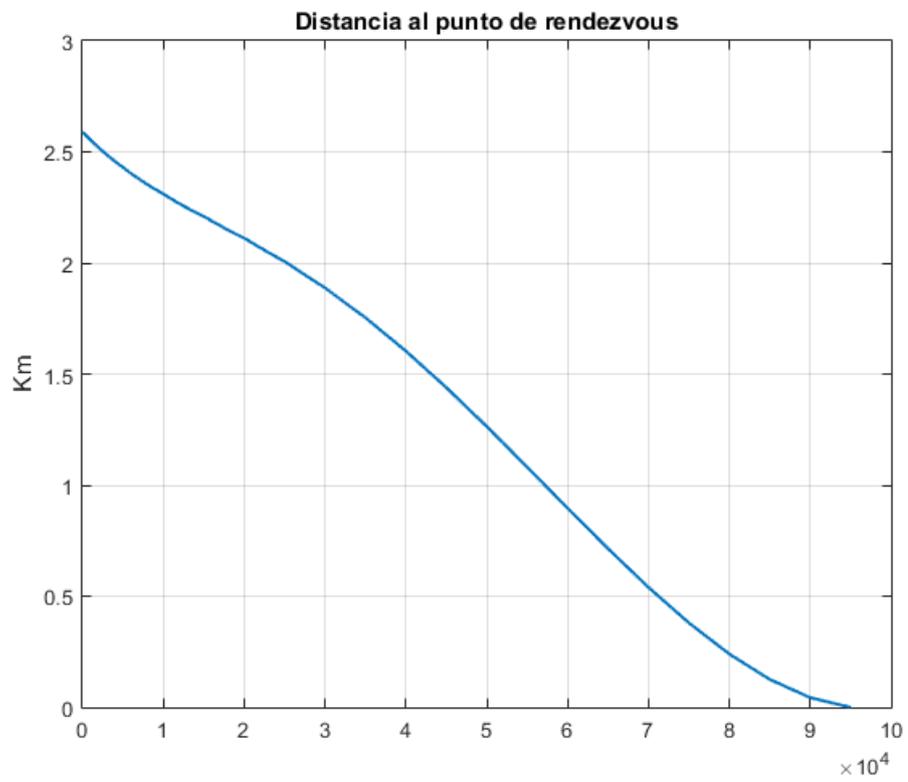


Figura 5.4 Rendezvous con giro, distancia relativa.

### 5.3 Considerando la gravedad del asteroide, bucle cerrado

En el procedimiento realizado hasta ahora se considera que el movimiento de la sonda es debido únicamente a la atracción del Sol, y que el asteroide no tiene ningún efecto sobre esta durante el *rendezvous*. Esto nos ha permitido obtener unas ecuaciones analíticas para propagar el movimiento de la misma sin las cuales habría sido imposible realizar un proceso de optimización que nos permita calcular las maniobras mostradas de una forma tan rápida y eficiente. En realidad la sonda está sometida a varias perturbaciones que ya se han comentado (planetas, radiación solar, el asteroide...), pero en este caso la corta distancia al asteroide hace que la más importante sea la propia atracción de este, que en ciertos casos, y cuando se está realizando la aproximación final, puede ser la fuerza dominante. Por ello, en este apartado se va a establecer un método para utilizar lo explicado hasta ahora en maniobras de *rendezvous* sobre asteroides considerando la atracción gravitatoria de los mismos.

Para considerar el efecto del asteroide hay que recordar que las ecuaciones del movimiento relativo utilizadas provenían de restar la ecuación del asteroide a la ecuación de la sonda ((4.5) y (4.6)). En la ecuación de la sonda se incluía un término de aceleración extra para el control de la misma, pero también podemos incluir otros efectos como el debido al asteroide. En general el efecto del asteroide puede ser tenido en cuenta considerando el término de perturbación debido a tercer cuerpo que se calculó en el Capítulo 2, pero podemos hacer una simplificación si tenemos en cuenta que esto solo lo usaremos durante el rendezvous (cuando la distancia al asteroide es muy corta). En este caso el término  $(\vec{r}_{Cs} - \vec{r})$  de  $\vec{\gamma}_p$  se hará muy pequeño (es el vector que va desde la sonda al asteroide) por lo que se cumplirá que:

$$\frac{\vec{r}_{Cs} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs} - \vec{r}|^3} \gg \frac{\vec{r}_{Cs}}{|\vec{r}_{Cs}|^3}$$

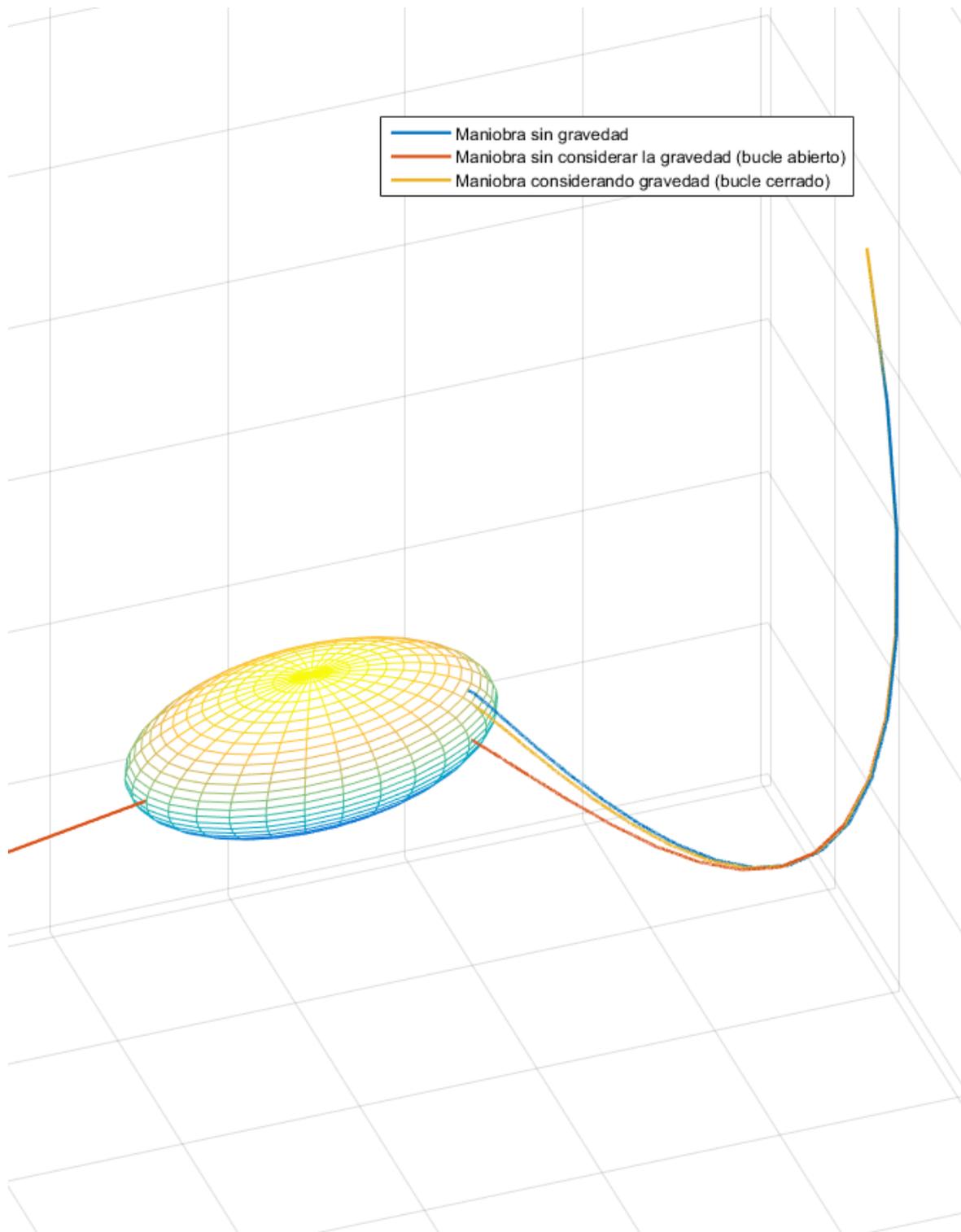
Esto quiere decir que de los dos términos de  $\vec{\gamma}_p$  solo nos interesa el debido a la *fuerza central* del asteroide. En el caso que se dedujo para el Capítulo 2 el tercer cuerpo se estaba modelando como un sólido esférico, por lo que la expresión de su fuerza gravitatoria es del tipo  $\mu\vec{r}/|\vec{r}|^3$ , pero en este caso la fuerza es la debida a un elipsoide triaxial, que como ya se ha visto en el Capítulo 3, tiene términos extras debido a la desviación respecto de la esfera. Para tener en cuenta estos términos basta con usar en su lugar el gradiente del potencial (3.3) dado por (3.4). Por la expresión del gradiente podemos ver que la fuerza resultante dista de ser una fuerza central, ya que tiene términos asociados a tres direcciones diferentes del sistema de referencia fijo al asteroide.

Visto como introducir el efecto del asteroide en la ecuación del movimiento de la sonda, para obtener la ecuación del movimiento relativo a este el procedimiento es completamente análogo, por lo que el resultado final será el de las ecuaciones (4.9) con los términos del gradiente sumando en el lado derecho. El único problema a resolver es que el gradiente calculado con (3.4) está dado en el sistema de referencia fijo al asteroide, mientras que en las ecuaciones deducidas, aunque tienen el sistema de referencia centrado en el propio asteroide, estará orientado de otra forma en general. Para resolver esto solo hay que realizar un cambio de coordenadas al vector gradiente, lo cual se puede hacer con la matriz de giro que se ha venido usando hasta ahora para orientar los vectores que giran con el asteroide (al igual que para expresar el vector posición de la sonda en el sistema de referencia del asteroide en el momento de calcular el gradiente en si).

Así, una vez tenemos unas ecuaciones del movimiento que tienen en cuenta las perturbaciones podemos aplicar un control en bucle cerrado como sigue. Dadas las condiciones iniciales de la maniobra se calcularán los impulsos necesarios para llegar al punto de *rendezvous* en las condiciones deseadas. Se aplicará el primer impulso, y desde ese momento se propagará el movimiento de la sonda con las ecuaciones del movimiento deducidas, de forma que el movimiento de la misma se aproxime lo más posible a la realidad (será más exacto cuantas más perturbaciones se tengan en cuenta). Cuando llegue el momento de dar el segundo impulso se volverán a calcular los mismos, ya que la trayectoria de la sonda se ha tenido que desviar respecto de la esperada debido al efecto del asteroide (se desviará más cuanto mayor sea el asteroide), siendo esto viable gracias a la rapidez del algoritmo para calcular los impulsos óptimos necesarios (en nuestra simulación el tiempo transcurrido en los cálculos es lo de menos, pero para una aplicación real si es importante, pues a mayor tiempo empleado más nos desplazaremos del punto en el que estábamos cuando se empezaron a calcular los impulsos). Una vez calculados todos los impulsos de nuevo, se aplica el primero de ellos, y se vuelve a repetir el proceso de propagar con el modelo completo y recalculando una vez se ha llegado al momento del siguiente impulso.

Con este procedimiento se pretende cerrar el bucle de control, de forma que para una situación real la sonda llegue al punto deseado de forma más o menos precisa a pesar de no tener un modelo perfecto del

sistema a controlar (la dinámica cerca del asteroide). Se ha realizado este procedimiento para el caso del asteroide *Itokawa* con las mismas condiciones iniciales para comprobar como de efectiva sería la maniobra si no se llegara a tener en cuenta la gravedad del asteroide y como mejoraría si se utilizara el procedimiento en bucle cerrado.



**Figura 5.5** Rendezvous sobre Itokawa considerando la gravedad.

En la (Figura 5.5) se compara la trayectoria seguida por la sonda si no hubiera gravedad (la del caso anterior) con las trayectorias cuando si la hay, por un lado cuando no se tiene en cuenta (en bucle abierto) y

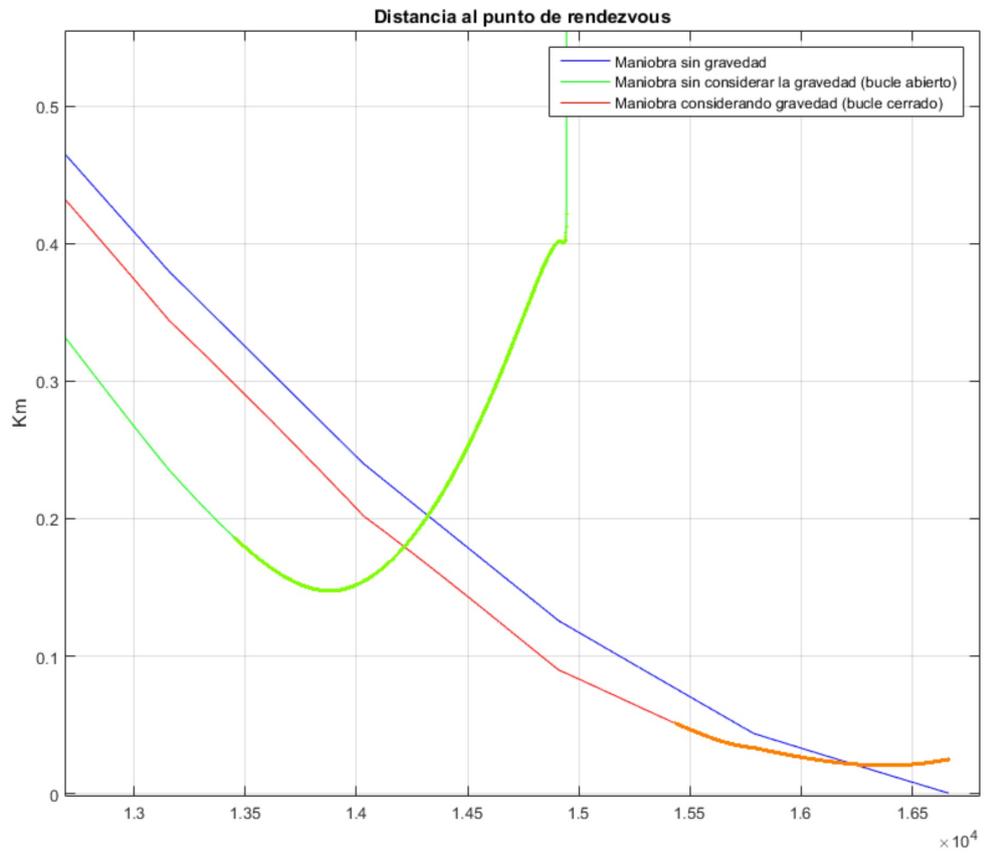
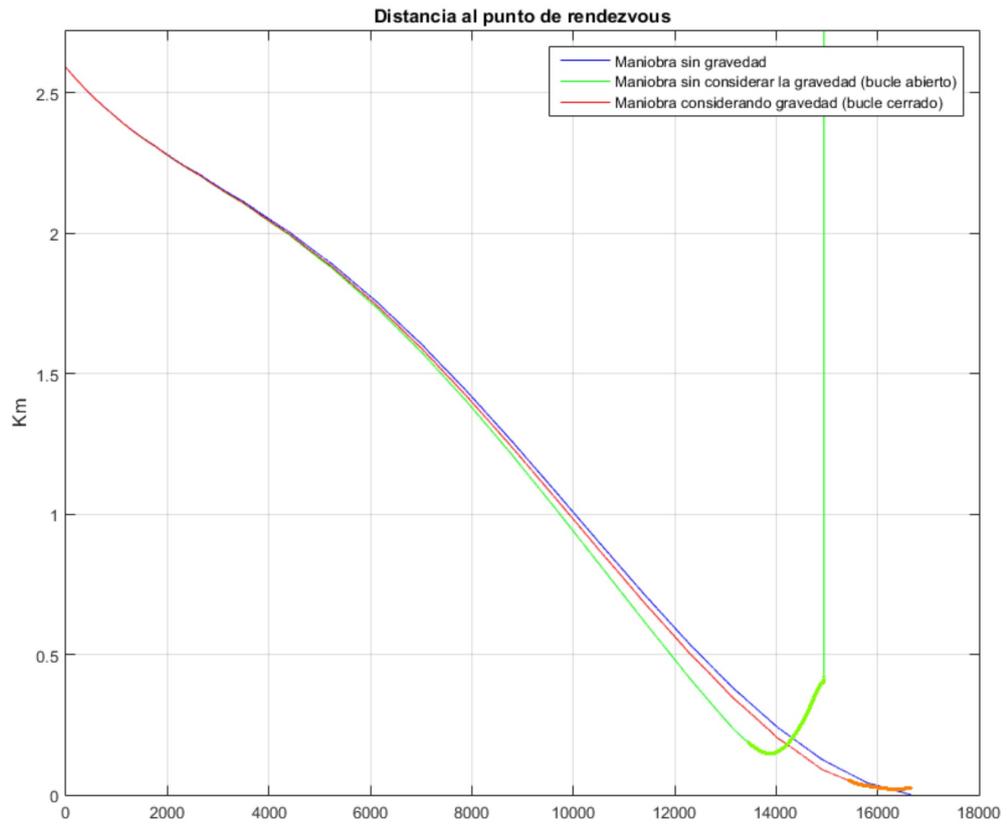


Figura 5.6 Rendezvous sobre Itokawa, comparación de distancia relativa.

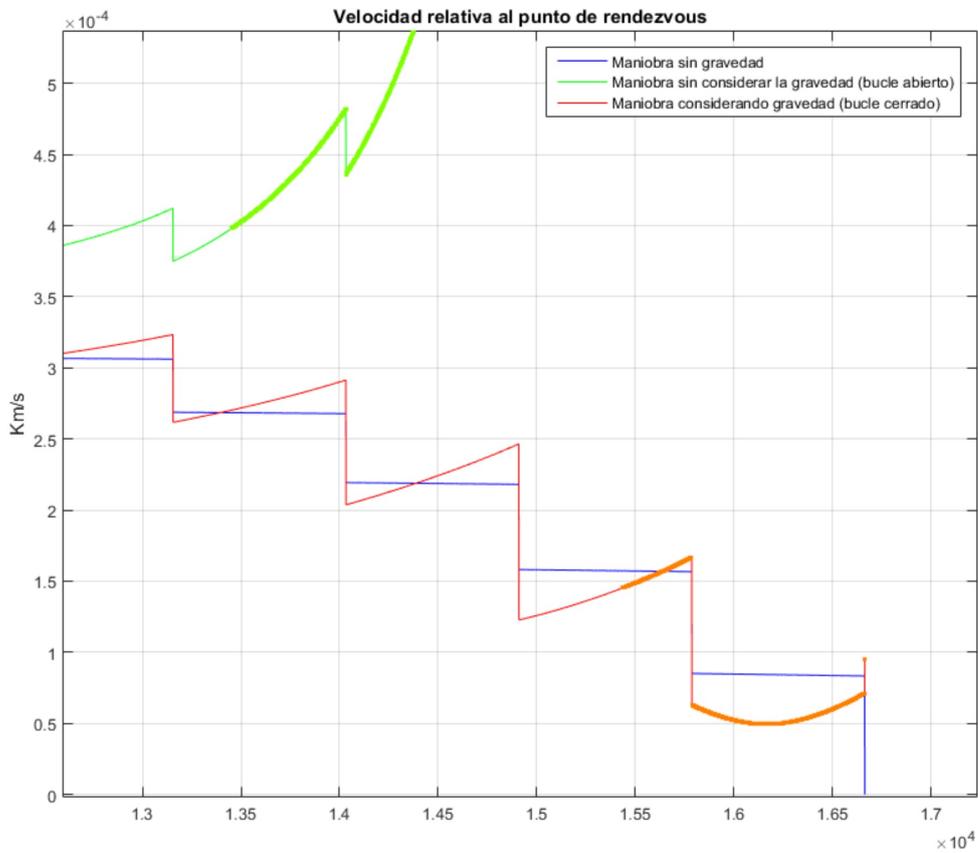
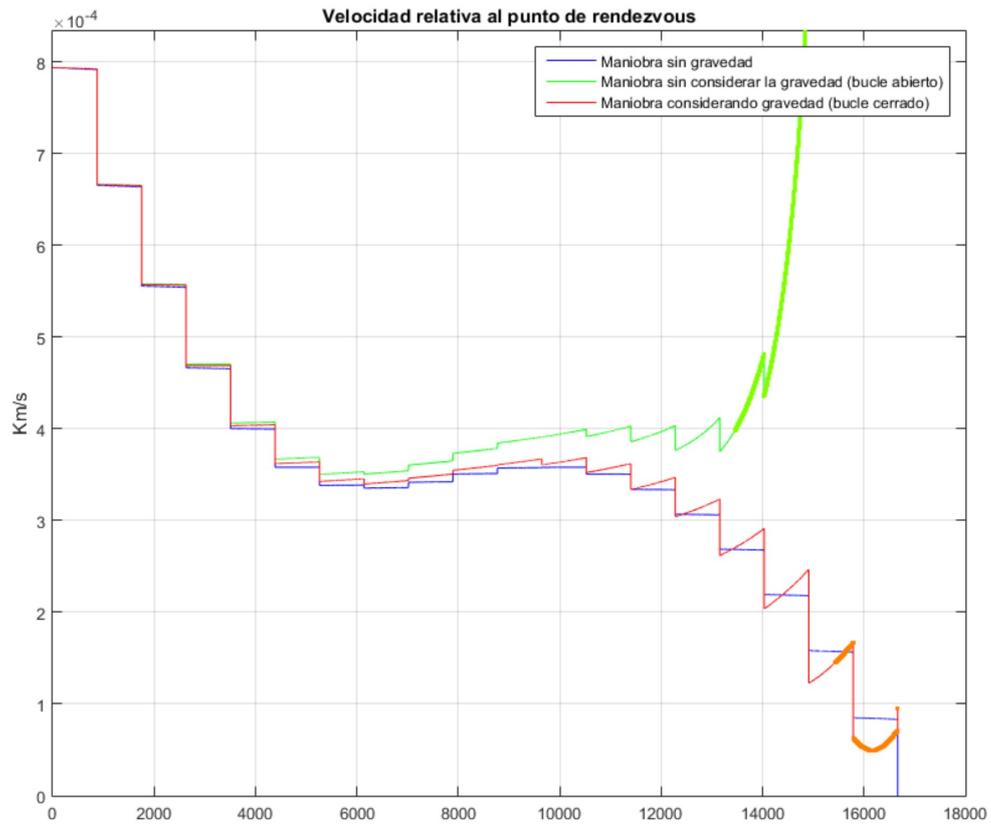


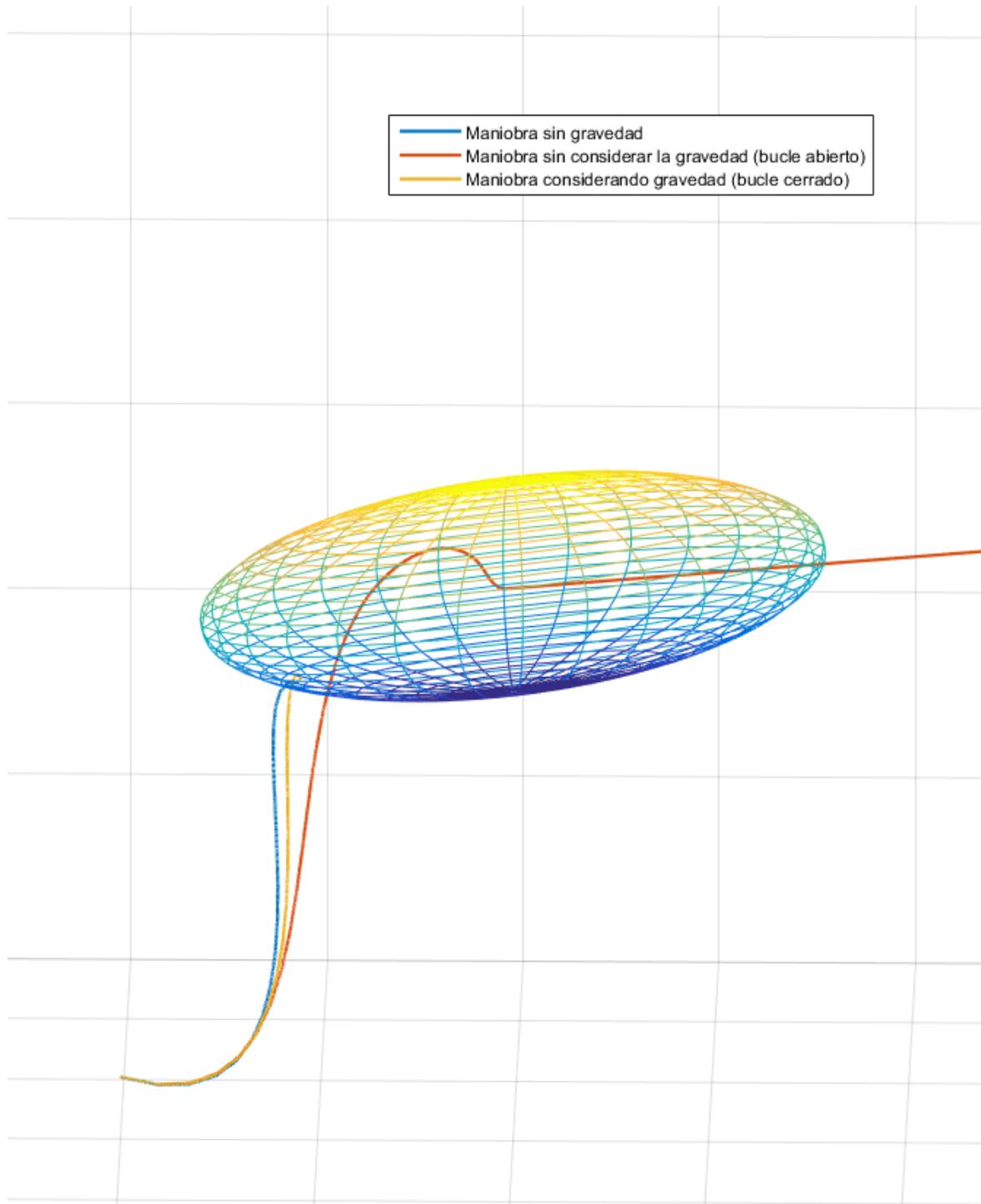
Figura 5.7 Rendezvous sobre Itokawa, comparación de velocidad relativa.

por otro cuando a cada momento de realizar un impulso se recalculan los mismos para tener en cuenta la desviación que se ha producido (bucle cerrado). Como se puede observar, el no tener en cuenta la gravedad provoca que la sonda se desvíe del camino esperado y realice el contacto con el asteroide en un punto bastante alejado del objetivo, además de a una velocidad distinta de cero considerablemente grande (0.4 m/s), como se puede observar en las figuras (5.6) y (5.7) (a partir del contacto con el asteroide se ha representado con línea más gruesa). Por otro lado, el método de bucle cerrado consigue que la trayectoria se ajuste bastante a la buscada desde un primer momento, consiguiendo que el contacto se produzca muy cerca del punto de *rendezvous* buscado (0.05 Km) y a una velocidad relativa inferior (0.15 m/s). Es importante destacar que esto se consigue a un costo mayor, pues el conjunto de las maniobras calculadas suman un  $\Delta V$  total de 1.76 m/s. Aun así, aunque se ha conseguido mejorar el resultado, no es impensable realizar un *rendezvous* sobre asteroides a una velocidad relativa de 0.4 m/s (1.44 Km/h), pero hay que tener en cuenta que la gravedad no es la única perturbación e incertidumbre, por lo que en la práctica siempre es necesario utilizar un mecanismo de control en bucle cerrado para mitigar dichas perturbaciones. Esta necesidad quedará más patente en el siguiente caso de estudio, cuando la masa del asteroide es mucho mayor que la de *Itokawa*.

Para considerar el caso de asteroides mucho más másicos se ha elegido al asteroide *Eros*. Se ha realizado una maniobra de 20 impulsos de 6000 s de duración con condiciones iniciales de:

$$X_0 = [-10 \quad 40 \quad -50 \quad -12E - 3 \quad -15E - 3 \quad -2E - 3]$$

El punto de *rendezvous* tiene las mismas coordenadas que en el caso anterior y no se ha realizado ningún giro inicial para orientar el asteroide. El coste de la maniobra es de 41.597 m/s cuando no se tiene en cuenta la gravedad, y de 57.305 m/s cuando se cierra el bucle de control. Las trayectorias obtenidas se muestran en las figuras (5.8), (5.9) y (5.10). En este caso se puede ver claramente como la trayectoria en bucle abierto se desvía mucho de la esperada, impactando con el asteroide a más de 20 m/s (72 Km/h) lejos del punto de *rendezvous*. En cambio, considerando las perturbaciones se consigue un buen ajuste de la maniobra deseada, haciendo contacto a 5 m/s (18 Km/h), que aún así es una velocidad considerablemente alta, por lo que es deseable que esta disminuya. Para ello una posible solución sería realizar las comprobaciones de posición con más frecuencia, lo cual con este método supone realizar más impulsos. Así, realizando la maniobra con 25 impulsos se logra una velocidad en el contacto de 4 m/s (es 10 veces mayor que en el caso de *Itokawa*), como se puede ver en la (Figura 5.12). En materia de *rendezvous* se considera que un contacto es suave cuando se produce por debajo de los 3 m/s, por lo que el resultado conseguido es más que aceptable.



**Figura 5.8** Rendezvous sobre Eros considerando la gravedad (20 impulsos).

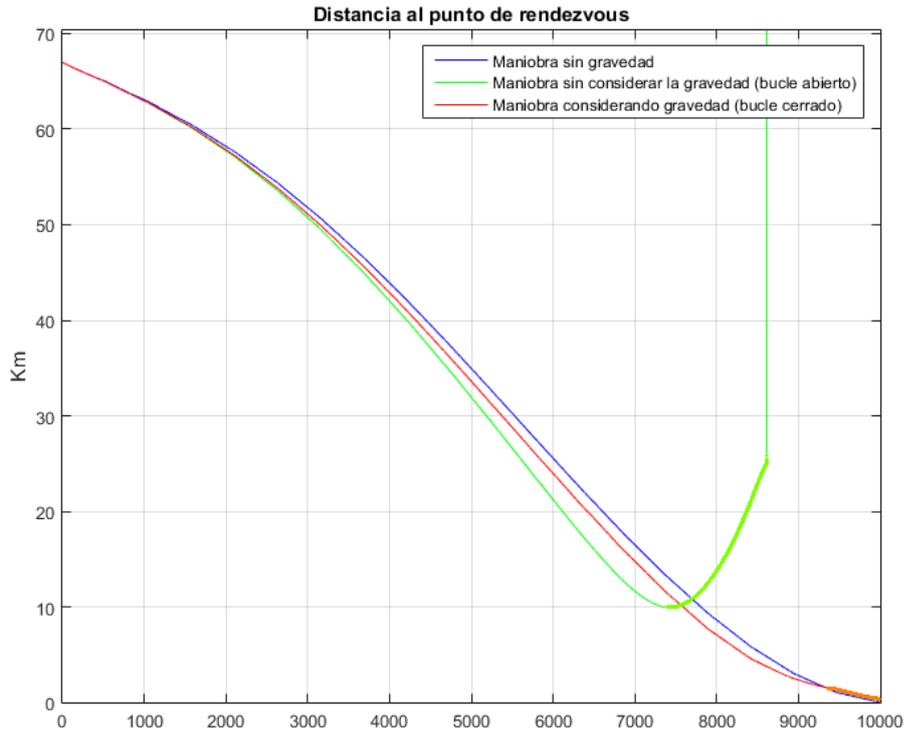


Figura 5.9 Rendezvous sobre Eros, comparación de distancia relativa (20 impulsos).

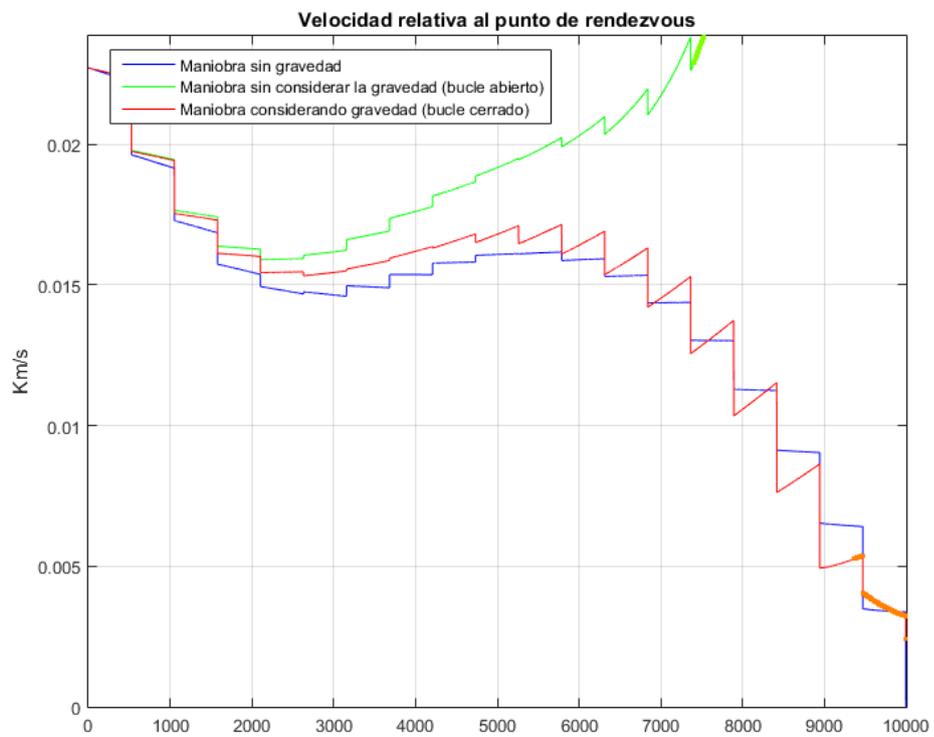


Figura 5.10 Rendezvous sobre Eros, comparación de velocidad relativa (20 impulsos).

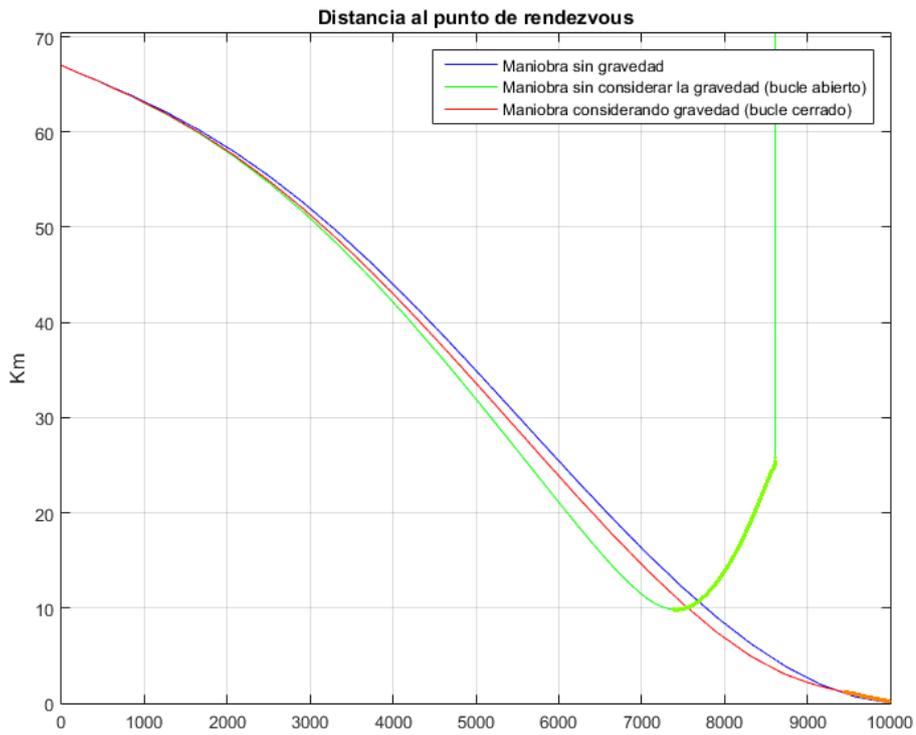


Figura 5.11 Rendezvous sobre Eros, comparación de distancia relativa (25 impulsos).

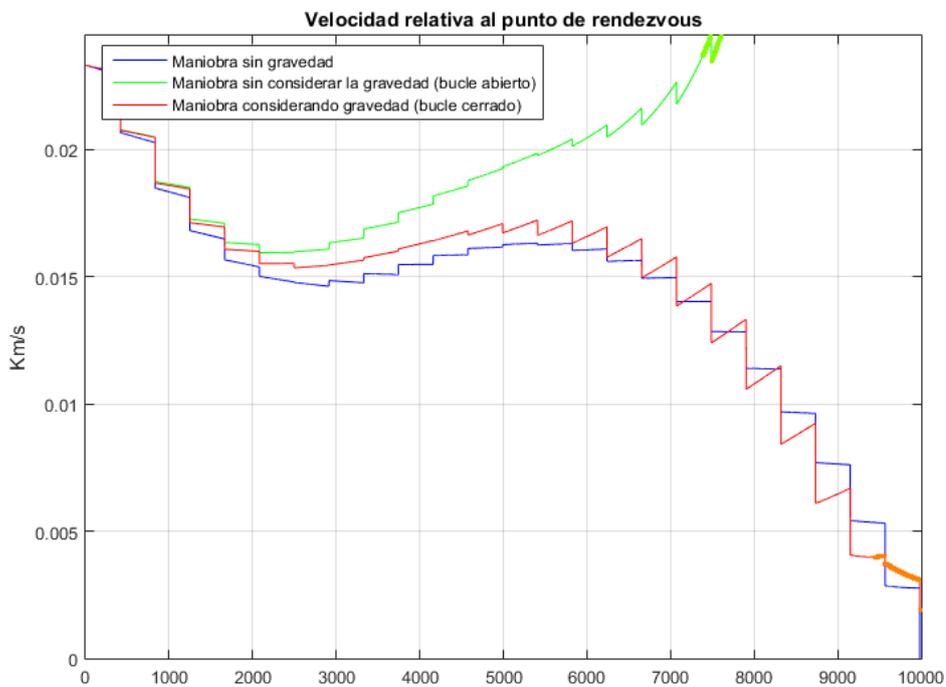


Figura 5.12 Rendezvous sobre Eros, comparación de velocidad relativa (25 impulsos).



## 6 Comentario del proyecto y trabajo futuro

---

Aquí se van a comentar las simplificaciones hechas en este trabajo y las posibles líneas de investigación para futuros trabajos que pueden complementar o mejorar lo aquí expuesto.

### 6.1 Simulación de la órbita del asteroide

Para simplificar el proceso de implementar en *Matlab* el algoritmo de simulación, se ha limitado el número de planetas a tener en cuenta a 2. Aunque esto ha permitido obtener buenos resultados por ser los de mayor importancia para asteroides en las cercanías de la órbita terrestre, el procedimiento es fácilmente escalable para más planetas y cuerpos del Sistema Solar sin más que introducir otras perturbaciones sumadas a la ecuación del movimiento.

Aún así, esto no bastaría para mejorar los resultados dada la naturaleza aproximada del propagador planetario, que ya de por sí introduce un error en la simulación. Si se deseara obtener datos de posición del asteroide con mucha más precisión (por ejemplo durante el transcurso de la misión para hacer los cálculos finales de inserción orbital), una posible solución a esto sería utilizar datos de la herramienta *HORIZONS* del JPL para posicionar los planetas. Como ya se ha comentado, esta herramienta proporciona los elementos orbitales en intervalos de tiempo fijos, por lo que sería necesario hacer cálculos intermedios si el paso de integración de la simulación es variable (lo cual es necesario si se quiere un algoritmo rápido). Para ello se podría interpolar la posición del planeta en cuestión mediante funciones de *Matlab*, lo que permitiría aplicar lo que se obtiene mediante *HORIZONS*.

Por último, es posible mejorar la simulación si se considera una ecuación del movimiento con más términos, es decir, aquellos que se han despreciado al considerar la acción de los planetas independientes entre sí (ver capítulo Anexo).

### 6.2 Modelo de asteroide

En este trabajo se ha usado una expansión de armónicos esféricos truncada para aproximar el campo del potencial gravitatorio alrededor de un asteroide. Aunque este método tiene el potencial de aproximar con gran precisión la acción gravitatoria de este tipo de cuerpos se ha obviado un fuerte punto negativo que acarrea. Fuera de la esfera que rodea al cuerpo en cuestión este procedimiento es capaz de dar resultados tanto mejores cuanto más términos de la expansión se utilicen, pero para una cantidad determinada de términos la solución empieza a divergir dentro de esa esfera (llamada esfera de Brillouin, Figura 6.1) cuanto más adentro de la esfera se esté evaluando. Este método se utilizaba originariamente para cuerpos aproximadamente esféricos como planetas, por lo que el volumen de divergencia era muy pequeño. Pero para una aplicación como la nuestra donde el objetivo es acercarse a un cuerpo no esférico hasta tocar la superficie entonces si se está cometiendo un error.

La solución más inmediata a este problema es la utilización de una serie de expansión de armónicos elipsoidales, que convergen fuera del elipsoide que rodea el cuerpo en cuestión (elipsoide de Brillouin, Figura 6.2). Estas expansiones, basadas en funciones de Lamé, son básicamente iguales a la expansión de armónicos esféricos: También son solución de la ecuación de Laplace, tienen coeficientes similares y presentan una zona interna de divergencia (en el volumen que hay entre el elipsoide de Brillouin y el cuerpo en cuestión).

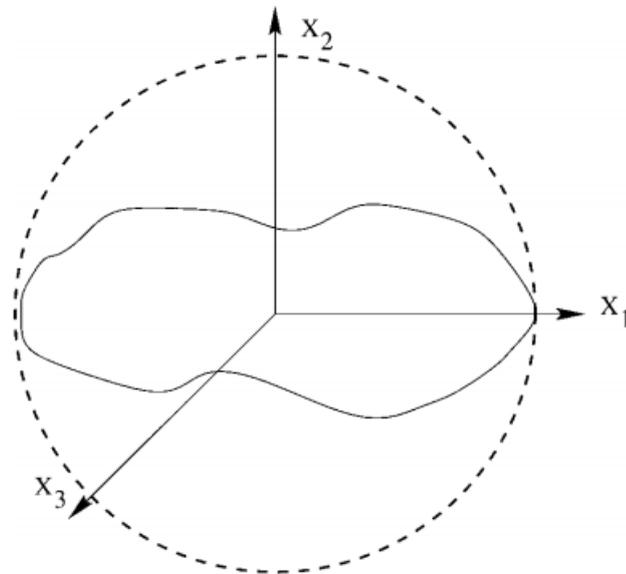


Figura 6.1 Esfera de Brillouin.

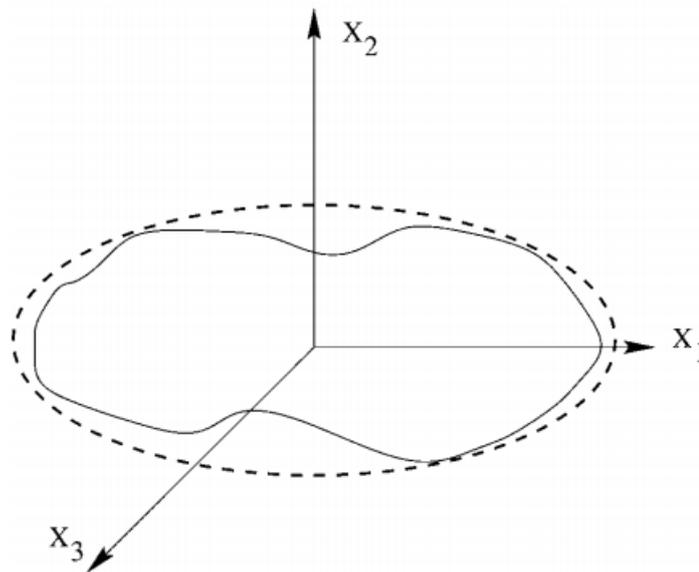


Figura 6.2 Elipsoide de Brillouin.

Por lo tanto se propone como futura línea de trabajo la utilización de este tipo de series para modelar el campo gravitatorio de un asteroide durante el procedimiento de *rendezvous*.

Por otro lado, la dinámica rotacional se ha simplificado mucho suponiendo que la velocidad de rotación es constante y que el eje de rotación tampoco varía con el tiempo. En la práctica esto es una aproximación estupenda en la mayoría de los casos, pero que puede suponer un problema si se pretende orbitar el asteroide durante periodos prolongados (el error cometido será mayor conforme pasa el tiempo). Así, una posible mejora sería considerar asteroides que no roten alrededor de su eje principal de inercia (por ejemplo Toutatis), ya que su dinámica rotacional puede ser descrita en términos de funciones analíticas [14].

### 6.3 Órbita cerca del asteroide

En cuanto a la dinámica en las cercanías del asteroide se ha hecho el estudio considerando la gravedad de un asteroide elipsoidal pero despreciando la acción del Sol como fuerza perturbadora (que puede llegar a ser importante a ciertas distancias del asteroide). Por ello se propone estudiar el efecto del Sol para diferentes asteroides y para distintas órbitas, y comprobar en que casos es viable despreciar su efecto. Tampoco se ha profundizado en el efecto de la triaxialidad del asteroide sobre los elementos orbitales mediante un enfoque analítico, lo cual puede ser de gran utilidad a la hora de diseñar órbitas alrededor de asteroides.

### 6.4 Maniobra de *rendezvous*

En lo que se refiere al *rendezvous* se han hecho bastantes simplificaciones, ya que es en realidad un proceso complejo en el que hay que tener en cuenta multitud de factores que se comentan a continuación.

Por un lado las maniobras se han aproximado a una serie de impulsos espaciados temporalmente, lo cual puede ser una buena aproximación para el diseño preliminar de la maniobra, sobre todo en el caso de sondas pequeñas, donde la acción de los propulsores sea muy parecida a la de un impulso. En general, y para un estudio más detallado habrá que considerar propulsión de tipo continua, lo cual dificulta la optimización.

El modelo utilizado para el movimiento relativo al asteroide a la hora de optimizar la maniobra de *rendezvous* no consideraba una de las perturbaciones más importantes, es decir, el propio asteroide (lo cual es determinante para aquellos que sean muy grandes, como se ha podido comprobar). Esto debe ser corregido de alguna forma para evitar que la trayectoria resultante sea demasiado diferente a la esperada (pudiendo provocar una colisión en el peor de los casos). Por ello se propone incorporar el efecto de la gravedad del asteroide en el algoritmo de optimización de la maniobra de *rendezvous* (además de incorporar el concepto de bucle cerrado de control como ya se ha hecho). También sería interesante mejorar la forma en la que se ha impuesto la condición de seguridad, por ejemplo mediante cuatro planos que delimiten una zona de tipo cónica con el punto de *rendezvous* como vértice.

Una simplificación bastante importante ha sido la suposición de que se puede conocer con total precisión tanto posición como velocidad de la sonda desde el principio, lo cual es falso ya que toda instrumentación está ligada a cierto error de medida. Por ello se propone incluir esta incertidumbre en los cálculos y, por ejemplo, hacer un estudio estadístico del resultado de la maniobra para diferentes desviaciones respecto a los datos reales.

Por último, resaltar que se ha obviado por completo la necesidad de realizar un control de actitud de la sonda, y las implicaciones que esto puede tener en cuanto a una posible saturación de las acciones de control para que las maniobras se lleven a cabo en el momento adecuado. Esta es por tanto una posible mejora que se propone para los procedimientos aquí expuestos en relación al *rendevouz* sobre asteroides.



# 7 Anexo

---

## Cómo se nombran los asteroides

El proceso de asignar un nombre a un nuevo asteroide puede llegar a durar incluso décadas. Comienza con el descubrimiento de un asteroide que no puede ser identificado con ningún cuerpo ya clasificado. Cuando observaciones de este procedentes de dos noches diferentes son declaradas al *Minor Planet Center*, se le asigna una designación provisional (estas dos observaciones no necesitan venir del mismo observador). La designación estándar provisional que se usa actualmente consiste en las siguientes partes, todas relacionadas con la fecha de descubrimiento del objeto: Un número de 4 dígitos indicando el año; un espacio; Una letra para mostrar el mes y la quincena dentro de este (la primera o la segunda) (Figura 7.1); otra letra para indicar el orden de asignación (Figura 7.2); y otro número opcional para indicar el número de veces que la letra se ha repetido en ese medio mes.

Letter	Dates	Letter	Dates
A	Jan. 1-15	B	Jan. 16-31
C	Feb. 1-15	D	Feb. 16-29
E	Mar. 1-15	F	Mar. 16-31
G	Apr. 1-15	H	Apr. 16-30
J	May 1-15	K	May 16-31
L	June 1-15	M	June 16-30
N	July 1-15	O	July 16-31
P	Aug. 1-15	Q	Aug. 16-31
R	Sept.1-15	S	Sept.16-30
T	Oct. 1-15	U	Oct. 16-31
V	Nov. 1-15	W	Nov. 16-30
X	Dec. 1-15	Y	Dec. 16-31

I is omitted and Z is unused

Figura 7.1 Quincena del descubrimiento del asteroide.

A = 1st	B = 2nd	C = 3rd	D = 4th	E = 5th
F = 6th	G = 7th	H = 8th	J = 9th	K = 10th
L = 11th	M = 12th	N = 13th	O = 14th	P = 15th
Q = 16th	R = 17th	S = 18th	T = 19th	U = 20th
V = 21st	W = 22nd	X = 23rd	Y = 24th	Z = 25th

I is omitted

Figura 7.2 Orden de descubrimiento.

Si hay más de 25 descubrimientos en esa quincena la segunda letra se vuelve a utilizar en el mismo orden pero añadiendo un uno al final de la designación. Si hay más de 50 descubrimientos, se añade un 2, para más de 75, un 3, y así sucesivamente. Si es posible estos número adicionales deben indicarse usando subíndices.

Por lo tanto, el orden de designación para una quincena en particular sería el siguiente: 1995 CA, 1995 CB, ..., 1995 CY, 1995 CZ, 1995 CA<sub>1</sub>, ..., 1995 CZ<sub>1</sub>, 1995 CA<sub>2</sub>, etc.

Llegados a este punto se empiezan a buscar coincidencias con objetos previamente designados provisionalmente. Si se encuentra una, el identificador elige una de las designaciones provisionales. La selección de la designación provisional no afecta a quien será el descubridor del objeto una vez esté numerado. Si no se encuentran coincidencias se sigue al objeto en sucesivas observaciones para computar su órbita. Este es seguido por el mayor tiempo posible (incluso meses).

El objeto se sigue observando cada vez que completa una órbita, y cuando este proceso se ha repetido 4 o más veces el objeto recibe una designación permanente, un número. Las circunstancias exactas bajo las cuales un objeto recibe un número son algo complejas y dependen del tipo de objeto en cuestión. Por ejemplo, para los NEA suele bastar con 3 o incluso 2 órbitas registradas.

El descubridor del objeto numerado se elige de dos formas. Para algunos asteroides el descubridor es el mismo descubridor que produjo la designación principal (esto es para aquellos designados antes del 19 de Octubre de 2010). El resto de asteroides tienen por descubridor el primero que produjo el informe con la observación de segunda noche.

A este descubridor se le da el privilegio de sugerir un nombre para su descubrimiento. Este derecho se conserva durante diez años desde su numeración. Para ello, el descubridor tiene que escribir una explicación de la razón del nombre elegido, que será juzgado por el Comité de Nombramiento de Asteroides, formado por quince personas implicadas en investigaciones sobre asteroides o cometas. Los nombres propuestos deben ser de 16 caracteres o menos, preferiblemente de una palabra, no ofensivos y que se diferencie de nombres de otros asteroides o planetas existentes. Además, los nombres de personas o hechos históricos de índole militar o político solo son válidos 100 años después de que la persona haya muerto o haya ocurrido el evento en cuestión. Tampoco son válidos nombres de mascotas o aquellos con propósito parcial o puramente comercial.

Los nombres aceptados se vuelven oficiales cuando son publicados, junto con la explicación de su nombre en las circulares del *Minor Planet Center*.

## Elementos orbitales keplerianos

Para un sistema de referencia  $Ox^Oy^Oz^O$  con el plano  $Ox^Oy^O$  conteniendo al plano de la órbita y con el origen en el foco solo se necesitan tres parámetros para determinar la órbita. Los parámetros son:

- Semieje mayor de la órbita,  $a$ : Determina el tamaño de la órbita, es el semieje mayor de la elipse orbital. Se puede sustituir por  $p$ , denominado parámetro de la órbita (cuya definición es  $p = h^2/\mu$ ), que está relacionado con  $a$  mediante el siguiente parámetro.
- Excentricidad,  $e$ : Determina la forma de la órbita y relaciona  $a$  y  $p$  con  $p = a(1 - e^2)$ .
- Argumento de periapsis,  $w$ : Orienta la línea de ápsides, es decir el punto más cercano al foco.

Se necesita un cuarto parámetros para determinar la posición del cuerpo en la órbita, que puede ser el tiempo transcurrido desde el paso por periapsis,  $\Delta t$ , o alguno equivalente, como la anomalía verdadera,  $\theta$  (están relacionados mediante las leyes horarias). El *sistema de referencia perifocal*  $Ox^Fy^Fz^F$  está centrado en el foco, con  $Ox^F$  apuntando hacia periapsis, y el eje  $Oz^F$  en la dirección del vector  $\vec{h}$ .

Lo anterior sirve para conocer la órbita dado el plano en el que está contenida, por lo que para conocer por completo esta, solo hay que orientar el plano en el espacio, quedando ahora completamente determinada. Esto se consigue con dos parámetros más, quedando un total de 6 que reciben el nombre de elementos orbitales.

El plano de referencia del que se ha hablado será diferente dependiendo de la situación. Para órbitas planetocéntricas puede ser el plano ecuatorial del planeta, mientras que para órbitas heliocéntricas puede ser el plano de la eclíptica (como es el caso de este trabajo, donde los asteroides se posicionan usando este plano como referencia).

Una vez orientados, el plano de la órbita y el de referencia se cortan en la llamada *línea de nodos*. La órbita corta la línea de nodos en dos puntos llamados nodos, uno recorrido de abajo a arriba, el nodo ascendente  $\Omega$ , y otro al contrario, el nodo descendente  $\Upsilon$ . El vector nodo  $\vec{n}$  es un vector unitario en la dirección de  $\Omega$ .

Como puede verse en la Figura 7.4, el plano se orienta por un lado conociendo la inclinación de este mediante  $i$  y por otro conociendo el ángulo que forman el punto de aries ( $\Upsilon$ ) con  $\vec{n}$  en sentido anti-horario, la ascensión recta del nodo ascendente (RAAN),  $\Omega$ . La inclinación se mide en el sentido indicado por  $\vec{n}$ , y es un ángulo contenido entre 0 y  $\pi$ .

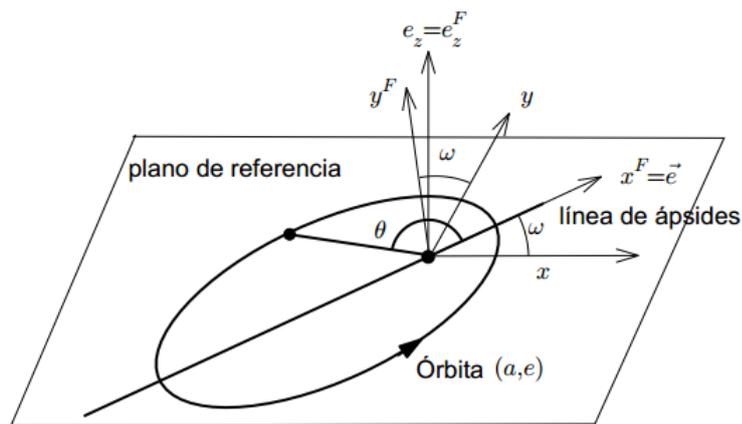


Figura 7.3 Sistema de referencia perifocal.

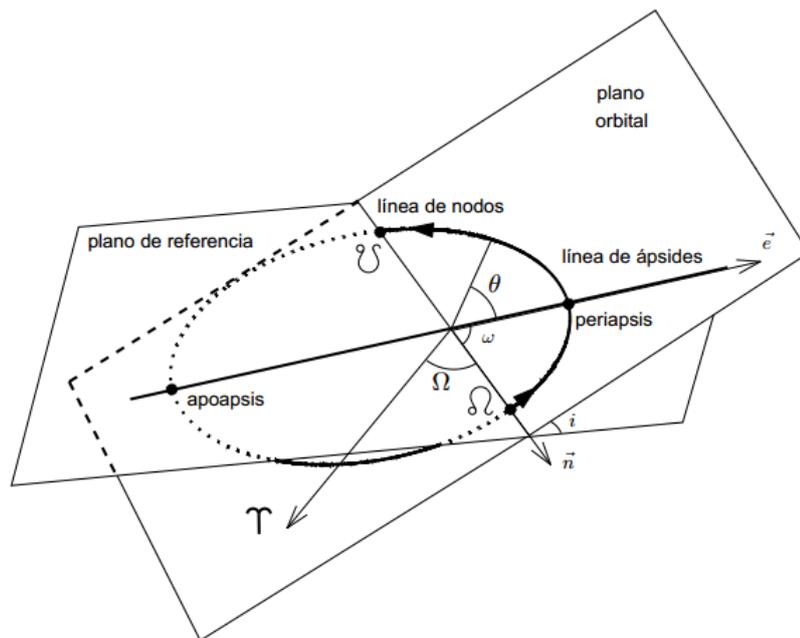


Figura 7.4 Plano orbital en relación al plano de referencia.

Cuando los elementos orbitales son los anteriores se llaman elementos orbitales Keplerianos clásicos. En el caso de órbitas alrededor de la tierra son los más usados (aunque dependiendo de la situación es necesario usar algunos equivalentes). Para órbitas heliocéntricas, en cambio, se suelen usar otros elementos orbitales equivalentes:

- Longitud del perihelio  $\varpi = w + \Omega$ , en lugar de  $w$ .
- Longitud media  $L = \varpi + M$ , en lugar de anomalía verdadera. Siendo  $M$  la anomalía media, que se calcula como  $M = \sqrt{\mu/a^3} \Delta t$ .

Así, los elementos orbitales quedarán como  $(a, e, i, \Omega, \varpi, L)$ .

## Justificación de la ecuación del movimiento del asteroide

Dado que en el sistema completo que se ha estudiado (Sol-Júpiter-Tierra-Asteroide) hay más de tres cuerpos, la conclusión a la que se llega en el Capítulo 2 en relación a la ecuación que rige el movimiento del asteroide está en realidad injustificada. Se parte de un problema de tres cuerpos clásico para determinar la fuerza de perturbación sobre el asteroide cuando la masa de este se supone despreciable y por tanto no afecta a la situación del centro de masas del sistema, que viene determinado por los otros dos cuerpos (Sol-Planeta). Una vez se ha obtenido la fuerza de perturbación debida al tercer cuerpo se generaliza la ecuación del movimiento completa bajo la suposición de que perturbaciones debidas a más planetas que se añaden al sistema son equivalentes e independientes entre sí. Esto quiere decir que estamos despreciando el efecto que tienen los planetas entre sí, además del efecto conjunto de estos sobre el Sol (no estamos teniendo en cuenta que el centro de masas del sistema completo es diferente de aquel que se supuso en el modelo de los tres cuerpos). Aquí se va a justificar la validez de estas simplificaciones bajo la premisa de que la masa del Sol es mucho mayor que la de cualquier planeta (incluido Júpiter). En el desarrollo que se muestra en adelante el Sol estará referido como cuerpo principal ( $C_p$ ), la Tierra como cuerpo secundario 1 ( $C_{s_1}$ ) y Júpiter como cuerpo secundario 2 ( $C_{s_2}$ ), de esta forma se le añade generalidad al razonamiento, pues puede extenderse a  $n$  planetas considerados como cuerpos secundarios.

Para empezar, la ecuación del movimiento dada en el sistema de referencia inercial con origen en el centro de masas del sistema completo se calcula siguiendo el mismo esquema, pero añadiendo la fuerza de todos los cuerpos implicados:

$$\ddot{\vec{r}}_{IN} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}|^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}|^3} \quad (7.1)$$

El vector de posición  $\vec{r}$  sigue estando definido igual ( $\vec{r} = \vec{r}_{IN} - \vec{r}_1$ ), por lo que para conocer la aceleración de este vista desde el Sol como origen necesitamos, al igual que en el razonamiento utilizado para el modelo de los tres cuerpos, la expresión de  $\ddot{\vec{r}}_1$ . La diferencia es que esta vez va a ser una función de la posición de ambos cuerpos en relación al Sol ( $\vec{r}_{Cs_1}$  y  $\vec{r}_{Cs_2}$ ), y no solo de uno.

Las ecuaciones del movimiento de la Tierra y de Júpiter en el sistema de referencia inercial vendrán de la misma forma por:

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}|^3} \quad (7.2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} + \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}|^3} \quad (7.3)$$

Donde  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$  son las posiciones de la Tierra y de Júpiter en el sistema de referencia inercial. Al sistema actual hay que añadir la ecuación del centro de masas:

$$m_{Cp} \vec{r}_1 + m_{Cs_1} \vec{r}_2 + m_{Cs_2} \vec{r}_3 = \vec{0} \quad (7.4)$$

Que por las definiciones de los vectores de posición ( $\vec{r}_{Cs_1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  y  $\vec{r}_{Cs_2} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ ) se puede transformar en:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_{Cs_1}}{m_T} \vec{r}_{Cs_1} - \frac{m_{Cs_2}}{m_T} \vec{r}_{Cs_2} \quad (7.5)$$

Donde  $m_T = m_{Cp} + m_{Cs_1} + m_{Cs_2}$ . Derivando dos veces con respecto al tiempo la ecuación anterior e introduciendo las definiciones de los vectores de posición en (7.2) y (7.3) se llega al siguiente sistema de tres ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_{Cs_1} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}|^3} - \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{a}_1(\vec{r}_{Cs_1}, \vec{r}_{Cs_2}) - \ddot{\vec{r}}_1 \\ \ddot{\vec{r}}_{Cs_2} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} + \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}|^3} - \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{a}_2(\vec{r}_{Cs_1}, \vec{r}_{Cs_2}) - \ddot{\vec{r}}_1 \\ \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_{Cs_1}}{m_T} \ddot{\vec{r}}_{Cs_1} - \frac{m_{Cs_2}}{m_T} \ddot{\vec{r}}_{Cs_2} \end{cases}$$

Como ya se ha dicho el objetivo es conocer  $\ddot{\vec{r}}_1$  para así introducirlo en (7.1) y tener la expresión de  $\ddot{\vec{r}}$ . Del sistema anterior se puede obtener  $\ddot{\vec{r}}_1$  como una función de los vectores de posición  $\vec{r}_{Cs_1}$  y  $\vec{r}_{Cs_2}$ , para ello primero se introduce la tercera ecuación en las dos primeras y así obtener una expresión de  $\ddot{\vec{r}}_{Cs_1}$  y  $\ddot{\vec{r}}_{Cs_2}$ , que luego serán reintroducidos en la tercera. Con este razonamiento se llega a:

$$\ddot{\vec{r}}_{Cs_1} \left[ \left( 1 - \frac{m_{Cs_1}}{m_T} \right) - \left( \frac{m_{Cs_1} m_{Cs_2}}{m_T (m_T - m_{Cs_2})} \right) \right] = \vec{a}_1 + \frac{m_{Cs_2}}{m_T - m_{Cs_2}} \vec{a}_2$$

Para simplificar las ecuaciones usaremos que  $m_{Cp} \gg m_{Cs_1}, m_{Cs_2}$ , por lo que el término que multiplica a  $\ddot{\vec{r}}_{Cs_1}$  se aproxima con:

$$\left[ \left( 1 - \frac{m_{Cs_1}}{m_T} \right) - \left( \frac{m_{Cs_1} m_{Cs_2}}{m_T (m_T - m_{Cs_2})} \right) \right] \approx \left[ 1 - \left( \frac{m_{Cs_1}}{m_T} \right) \left( \frac{m_{Cs_2}}{m_T} \right) \right] \approx 1$$

Así, la ecuación quedaría:

$$\ddot{\vec{r}}_{Cs_1} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}|^3} - \frac{m_{Cs_2}}{m_T - m_{Cs_2}} \mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} + \frac{m_{Cs_2}}{m_T - m_{Cs_2}} \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}|^3}$$

Donde se pueden hacer las siguientes aproximaciones:

$$\frac{m_{Cs_2}}{m_T - m_{Cs_2}} \mu_{Cp} \approx \frac{m_{Cs_2}}{m_T} G m_{Cp} \approx \mu_{Cs_2}$$

$$\frac{m_{Cs_2}}{m_T - m_{Cs_2}} \mu_{Cs_1} \approx G \frac{m_{Cs_1} m_{Cs_2}}{m_T}$$

Que introducidas en la ecuación anterior:

$$\ddot{\vec{r}}_{Cs_1} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}|^3} - \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} + G \frac{m_{Cs_1} m_{Cs_2}}{m_T} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}|^3}$$

Agrupando el segundo y cuarto término se obtiene:

$$\ddot{\vec{r}}_{Cs_1} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} - \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} + G \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}|^3} \left( m_{Cs_2} - \frac{m_{Cs_1} m_{Cs_2}}{m_T} \right)$$

El término entre paréntesis se puede simplificar si tenemos en cuenta que:

$$\frac{m_{Cs_2}}{\left( \frac{m_{Cs_1} m_{Cs_2}}{m_T} \right)} = \frac{m_T}{m_{Cs_1}} \gg 1$$

Por lo que la expresión final de  $\ddot{\vec{r}}_{Cs_1}$  queda como:

$$\ddot{\vec{r}}_{Cs_1} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}|^3} - \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3}$$

Donde se puede observar que su ecuación del movimiento es la misma que la que resulta de plantearlo como un problema de 3 cuerpos, con la atracción del Sol como cuerpo principal más una perturbación, en este caso debida a Júpiter. Haciendo lo mismo con la ecuación del movimiento de Júpiter queda:

$$\ddot{\vec{r}}_{Cs_2} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} + \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}|^3} - \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3}$$

Introduciéndolo todo en la ecuación del movimiento del asteroide:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_{IN} - \ddot{\vec{r}}_1 = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}|^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}|^3} \\ &+ \frac{m_{Cs_1}}{m_T} \left( -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}_{Cs_1}|^3} - \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} \right) \\ &+ \frac{m_{Cs_2}}{m_T} \left( -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} + \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}_{Cs_2}|^3} - \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} \right)\end{aligned}$$

De los términos entre paréntesis se ve que los dos centrales se cancelan mutuamente, los otros pueden agruparse de la siguiente forma:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}|^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}|^3} - G \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} \left( \frac{m_{Cs_1} m_{Cp}}{m_T} + \frac{m_{Cs_2} m_{Cs_1}}{m_T} \right) - G \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} \left( \frac{m_{Cs_2} m_{Cp}}{m_T} + \frac{m_{Cs_2} m_{Cs_1}}{m_T} \right)$$

De donde se pueden despreciar los sumandos con dos masas de cuerpos secundarios en el numerador. Haciendo además que  $m_{Cp}/m_T \approx 1$  la ecuación del movimiento para el asteroide queda finalmente:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu_{Cp} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs_1} - \vec{r}|^3} - \mu_{Cs_1} \frac{\vec{r}_{Cs_1}}{r_{Cs_1}^3} + \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}}{|\vec{r}_{Cs_2} - \vec{r}|^3} - \mu_{Cs_2} \frac{\vec{r}_{Cs_2}}{r_{Cs_2}^3} \quad (7.6)$$

Resultado que confirma la suposición inicial del Capítulo 2 de que el efecto conjunto de los planetas se puede suponer aproximadamente independiente entre sí. Este resultado es equivalente al que se obtiene con la resolución clásica del problema planetario: Un problema de  $N$  cuerpos en el que se supone que una de las masas es mucho mayor que las demás, por lo que se puede descomponer en  $N - 1$  problemas de pares Estrella-Planeta donde el resto de planetas se tratan como perturbadores independientes.

# Índice de Figuras

---

1.1	Comparativa de tamaños de algunos asteroides visitados	1
1.2	Clasificación de los NEA	3
1.3	Distribución de asteroides entre Júpiter y Marte	4
1.4	Imagen del asteroide <i>Gaspra</i> . Tomada 10 minutos antes del punto de máxima aproximación (a $5300Km$ ). Imagen: NASA/JPL/USGS	5
1.5	Imagen del asteroide <i>Ida</i> junto con su satélite a la derecha, <i>Dactyl</i> . Tomada 14 minutos antes del punto de máxima aproximación (a $10500Km$ ). Su eje más largo mide $60Km$ , mientras que <i>Dactyl</i> tiene un radio medio de $1.4Km$ . Imagen: NASA/JPL/USGS	5
1.6	Imagen del asteroide <i>Eros</i> . El asteroide tiene una longitud de $33Km$ . Imagen: NASA/JPL/JHUAPL	6
1.7	Imagen del asteroide <i>Itokawa</i> . Imagen: ISAS/JAXA	7
1.8	Imagen del asteroide <i>Steins</i> . El asteroide tiene unas dimensiones de $6.7 \times 5.8 \times 4.5 Km^3$ . Imagen: ESA ©2008 MPS for OSIRIS Team MPS/UPD/LAM/IAA/RSSD/INTA/UPM/DASP/IDA	7
1.9	Imagen del asteroide <i>Lutetia</i> . El asteroide tiene unas dimensiones de $121 \times 101 \times 75 Km^3$ . Imagen: ESA 2010 MPS for OSIRIS Team MPS/UPD/LAM/IAA/RSSD/INTA/UPM/DASP/IDA	8
1.10	Imagen del asteroide <i>Vesta</i> . La imagen tiene una resolución de $485m$ por píxel. Imagen: NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA	8
1.11	Imagen del planeta enano <i>Ceres</i> . Tomada desde una distancia de $13600Km$ . Imagen: NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA	9
2.1	Sistema Tierra-Luna	12
2.2	Representación de la órbita de <i>Eros</i> (2020-2025)	15
2.3	Error de la simulación, <i>Eros</i> (2020-2025)	16
2.4	Error relativo, <i>Eros</i> (2020-2025)	16
2.5	Fuerzas de Júpiter y de la Tierra, <i>Eros</i> (2020-2025)	17
2.6	Distancia relativa entre la Tierra real y la simulada (2020-2025)	17
2.7	Error de la simulación en valor absoluto y relativo, <i>Eros</i> (2020-2250)	18
2.8	Fuerzas de Júpiter y de la Tierra, <i>Eros</i> (2020-2250)	18
2.9	Distancia relativa entre la Tierra real y la simulada (2020-2250)	19
2.10	Representación de la órbita de <i>Ryugu</i> (2020-2035)	20
2.11	Error relativo de la simulación, <i>Ryugu</i> (2020-2035)	20
2.12	Distancia del asteroide simulado a la Tierra, <i>Ryugu</i> (2020-2035)	21
2.13	Fuerzas de Júpiter y de la Tierra, <i>Ryugu</i> (2020-2035)	21
3.1	Cuerpo general	24
3.2	Elipsoide modelo triaxial	25
4.1	Órbita de prueba <i>Ida</i> , ejes móviles	29
4.2	Órbita de prueba <i>Ida</i> , ejes fijos	30
4.3	Órbita de prueba <i>Ida</i> , elementos orbitales	31
4.4	Curvas de velocidad cero, <i>Eros</i>	32
4.5	Curvas de velocidad cero a diferentes niveles de $z$ con $C = C_s$ , <i>Eros</i>	33

4.6	Curvas de velocidad cero a diferentes niveles de $z$ con $C = C_c$ , Eros	33
4.7	Curvas de velocidad cero a diferentes niveles de $z$ con $C = 100$ , Eros	34
4.8	$C$ para órbitas circulares, Eros	35
4.9	Órbita inicialmente circular con el radio de Hill, Eros	35
4.10	Órbita inicialmente circular 10 Km por encima del radio de Hill, Eros	36
4.11	Órbita inicialmente circular 50 Km por encima del radio de Hill, Eros	36
4.12	Radio de Hill con la inclinación, Eros	37
4.13	Órbita inicialmente circular 2 Km por encima del radio de Hill con $20^\circ$ de inclinación, Eros	38
4.14	Órbita cuasiperiódica de $45^\circ$ de inclinación, Eros	38
4.15	Evolución del semieje mayor, Eros	39
4.16	Evolución de la inclinación, Eros	39
4.17	Evolución de la excentricidad, Eros	39
4.18	Sistema de referencia $B_0$	40
4.19	Sistema de referencia $B_1$	40
4.20	Comparación de resultados de la simulación con método analítico y numérico	47
4.21	Órbita con condiciones iniciales de periodicidad (1 año)	49
4.22	Coordenadas X-Z del movimiento de la órbita periódica (1 año)	49
4.23	Coordenadas X-Y del movimiento de la órbita periódica (1 año)	49
4.24	Representación de la inserción orbital con diferente número de impulsos	52
5.1	<i>Rendezvous</i> sin giro	57
5.2	<i>Rendezvous</i> con giro	60
5.3	<i>Rendezvous</i> con giro, velocidad relativa	61
5.4	<i>Rendezvous</i> con giro, distancia relativa	61
5.5	<i>Rendezvous</i> sobre Itokawa considerando la gravedad	63
5.6	<i>Rendezvous</i> sobre Itokawa, comparación de distancia relativa	64
5.7	<i>Rendezvous</i> sobre Itokawa, comparación de velocidad relativa	65
5.8	<i>Rendezvous</i> sobre Eros considerando la gravedad (20 impulsos)	67
5.9	<i>Rendezvous</i> sobre Eros, comparación de distancia relativa (20 impulsos)	68
5.10	<i>Rendezvous</i> sobre Eros, comparación de velocidad relativa (20 impulsos)	68
5.11	<i>Rendezvous</i> sobre Eros, comparación de distancia relativa (25 impulsos)	69
5.12	<i>Rendezvous</i> sobre Eros, comparación de velocidad relativa (25 impulsos)	69
6.1	Esfera de Brillouin	72
6.2	Elipsoide de Brillouin	72
7.1	Quincena del descubrimiento del asteroide	75
7.2	Orden de descubrimiento	75
7.3	Sistema de referencia perifocal	77
7.4	Plano orbital en relación al plano de referencia	77

# Bibliografía

---

- [1] Nasa, “Asteroids in depth,” <http://solarsystem.nasa.gov/planets/asteroids/indepth>, 2016.
- [2] Space.com, “Asteroid found with rings!” <http://www.space.com/25225-asteroid-rings-discovery-video-images.html>, 2014.
- [3] V. Badescu, *Asteroids: Prospective Energy and Material Resources*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] IAU, “Pluto and the developing landscape of our solar system,” <https://www.iau.org/public/themes/pluto/>.
- [5] ———, “Asteroid classification i – dynamics,” <http://minorplanetcenter.net/blog/asteroid-classification-i-dynamics/>, 2011.
- [6] Nasa, “Astronomy picture of the day,” <http://apod.nasa.gov/apod/ap051121.html>, 2005.
- [7] H. Keller, C. Barbieri, D. Koschny, P. Lamy, H. Rickman, R. Rodrigo, H. Sierks, M. F. A’Hearn, F. Angrilli, M. Barucci *et al.*, “E-type asteroid (2867) steins as imaged by osiris on board rosetta,” *Science*, vol. 327, no. 5962, pp. 190–193, 2010.
- [8] Nasa, “New clues to ceres’ bright spots and origins,” <http://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?feature=4785>, 2015.
- [9] D. Marin, “La sonda osiris-rex ya está lista para traer muestras del asteroide bennu,” <http://danielmarin.naukas.com/2015/10/26/la-sonda-osiris-rex-ya-esta-lista-para-traer-muestras-del-asteroide-bennu/>, 2015.
- [10] D. J. Scheeres, “Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids: applications to asteroids,” *Icarus*, vol. 110, no. 2, pp. 225–238, 1994.
- [11] K. Yamanaka and F. Ankersen, “New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit,” *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 25, no. 1, pp. 60–66, 2002.
- [12] T. E. Carter, “State transition matrices for terminal rendezvous studies: brief survey and new example,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 21, no. 1, pp. 148–155, 1998.
- [13] G. Deaconu, C. Louembet, and A. Theron, “Constrained periodic spacecraft relative motion using non-negative polynomials,” in *American Control Conference (ACC), 2012*. IEEE, 2012, pp. 6715–6720.
- [14] D. J. Scheeres, S. J. Ostro, R. Hudson, E. M. DeJong, and S. Suzuki, “Dynamics of orbits close to asteroid 4179 toutatis,” *Icarus*, vol. 132, no. 1, pp. 53–79, 1998.