

# Trabajo Fin de Grado

## Grado en Ingeniería Aeroespacial

### Estudio del tiempo de vida de satélites en órbita baja mediante el método PTM

Autor: Francisco Javier Camacho Amaro

Tutor: Rafael Vázquez Valenzuela

**Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

# **Estudio del tiempo de vida de satélites en órbita baja mediante el método PTM**

Autor:

Francisco Javier Camacho Amaro

Tutor:

Rafeal Vázquez Valenzuela

Profesor titular

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Trabajo fin de Grado: Estudio del tiempo de vida de satélites en órbita baja mediante el método PTM

Autor: Francisco Javier Camacho Amaro

Tutor: Rafael Vázquez Valenzuela

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal



*A mi familia*



# Agradecimientos

---

A mi familia y en especial a mi madre, por levantarme cuando había caído y por hacer que confiase en mí en los momentos más difíciles.

A Eva Tesón, por apoyarme y ayudarme en estos cuatro maravillosos años. No ha habido un compañero más fiel y generoso que ella.

A mi tutor Rafael Vázquez Valenzuela, por darme la oportunidad de hacer el trabajo fin de grado con él. Ha sido una experiencia gratificante y de la que obtengo muchas cosas positivas.

*Francisco Javier Camacho Amaro*

*Sevilla, 2016*



Las órbitas bajas están cada vez más congestionadas y es por ello por lo que es interesante estimar el tiempo producido hasta que se produzca la reentrada del satélite.

El objetivo de este proyecto es estimar el tiempo de vida de un satélite en órbita baja sometido a algunas perturbaciones como la resistencia atmosférica y el achatamiento terrestre.

Para ello, se parte inicialmente de conceptos de la mecánica orbital. La resolución de este problema se llevará a cabo mediante un método determinista en el que serán conocidos todos los datos realizándose también estudio paramétrico del tiempo de vida respecto a los parámetros de los que depende y posteriormente mediante un método probabilista en el cual no se conocerá alguno de sus parámetros sino una función de distribución de estos.

Finalmente se propondrán trabajos futuros completando así el trabajo realizado.



# Abstract

---

The low orbits are increasingly congested and is why it is interesting to estimate the time produced until the satellite reentry occurs.

The objective of this project is to estimate the lifetime of a satellite in low orbit subject to some disturbances such as atmospheric drag and land flattening.

To do this, it begins with basics concepts of orbital mechanics. The resolution of this problem will be conducted by a deterministic method that will be known all data, also performing parametric study of the lifetime on the parameters on which it depends and then by a probabilistic method which will not be known one of its parameters but a distribution function thereof.

Finally, future work will be proposed to complete the project done.



<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice</b>	<b>xv</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>Notación</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. <i>Introducción. Motivación del proyecto</i>	1
1.2. <i>Alcance del proyecto</i>	2
1.3. <i>Estructura del proyecto</i>	3
<b>2 Conceptos de la mecánica orbital.</b>	<b>5</b>
2.1. <i>Análisis general de las perturbaciones</i>	5
2.2. <i>Perturbacion debido al achatamiento de la tierra</i>	6
2.3. <i>Perturbacion debido a la resistencia atmosférica</i>	8
2.3.1. <i>Densidad atmosférica</i>	9
<b>3 Estudio del tiempo de vida de un satélite. Método determinista.</b>	<b>13</b>
3.1. <i>Análisis matemático/numérico de las perturbaciones</i>	13
3.2. <i>Método determinista</i>	13
3.2.1. <i>Perturbación <math>J_2</math></i>	13
3.2.2. <i>Resistencia atmosférica</i>	15
3.2.3. <i>Condición inicial</i>	16
3.2.4. <i>Metodo de resolución</i>	16
3.2.5. <i>Altitud de reentrada</i>	18
3.3. <i>Resultados</i>	20
3.3.1. <i>Caso práctico de tres satélites en órbita baja</i>	20
3.3.2. <i>Estudio paramétrico de <math>m_v</math>, <math>S</math>, <math>C_D</math></i>	25
3.3.3. <i>Evolución de los elementos orbitales con el tiempo</i>	29
3.3.4. <i>Estudio paramétrico de los elementos orbitales</i>	37
<b>4 Estudio del tiempo de vida de un satélite. Método probabilista.</b>	<b>41</b>
4.1. <i>Método probabilista</i>	41
4.2. <i>Método de resolución</i>	43
4.3. <i>Condición de parada</i>	45
4.4. <i>Resultados</i>	47
4.4.1. <i>Método alternativo</i>	48

<b>5 Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>51</b>
5.1. Conclusiones	51
5.2. Trabajos futuros	52
<b>Referencias</b>	<b>53</b>

# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 2-1. Valores característicos para la obtención de la densidad en función de la altura.	11
Tabla 3-1. Características de los satélites utilizados en el modelo.	15
Tabla 3-2. Condicion inicial en elementos orbitales de los satélites en estudio.	16
Tabla 3-3. Tiempos de vida para los satélites en estudio.	20
Tabla 3-4. Tiempo real de vida de los satélites en estudio.	25



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1-1. Esquema de los parámetros de los que depende el tiempo de vida.	2
Figura 2-1. Sistema que muestra dos masas aisladas y puntuales.	5
Figura 2-2. Distribución de la masa terrestre con simetría de revolución.	7
Figura 2-3. Tipos de armónicos esféricos.	8
Figura 2-4. Efecto de circularización generado por la resistencia atmosférica.	9
Figura 2-5. Densidad obtenida del modelo exponencial.	11
Figura 3-1. Sistema de coordenadas esféricas.	14
Figura 3-2. Altitud en función de los errores relativo y absoluto.	17
Figura 3-3. Velocidad en función de los errores relativo y absoluto.	18
Figura 3-4. Zoom de la altitud en función de los errores relativo y absoluto.	18
Figura 3-5. Zoom de la velocidad en función de los errores relativo y absoluto.	19
Figura 3-6. Relación entre el radio según el eje x y el radio según el eje y.	21
Figura 3-7. Altitud del satélite Oderacs-A frente al tiempo.	22
Figura 3-8. Velocidad del satélite Oderacs-A frente al tiempo.	22
Figura 3-9. Altitud del satélite Oderacs-B frente al tiempo.	23
Figura 3-10. Velocidad del satélite Oderacs-B frente al tiempo.	23
Figura 3-11. Altitud del satélite Oderacs-E frente al tiempo.	24
Figura 3-12. Velocidad del satélite Oderacs-E frente al tiempo.	24
Figura 3-13. Comparación de la variación de altitud respecto al tiempo para satélite con diferente masa.	26
Figura 3-14. Variación del tiempo final de vida respecto a la masa del satélite.	26
Figura 3-15. Comparación de la variación de altitud respecto al tiempo para satélites con diferente superficie.	27
Figura 3-16. Variación del tiempo final de vida con la superficie del satélite.	27
Figura 3-17. Comparación de la variación de altitud respecto al tiempo para diferentes $C_D$ .	28
Figura 3-18. Variación del tiempo final de vida con el coeficiente de resistencia atmosférica.	28
Figura 3-19. Evolución del semieje mayor de la órbita respecto al tiempo.	29
Figura 3-20. Evolución del semieje mayor de la órbita respecto al tiempo teniendo en cuenta el $J_2$ .	29
Figura 3-21. Evolución de la excentricidad de la órbita del satélite respecto al tiempo.	30
Figura 3-22. Evolución de la excentricidad de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el $J_2$ .	30
Figura 3-23. Evolución del radio de perigeo y apogeo de la órbita del satélite respecto al tiempo.	31
Figura 3-24. Evolución del radio de perigeo y apogeo de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el $J_2$ .	31
Figura 3-25. Radio de la órbita según el eje x frente al radio según el eje y.	32

Figura 3-26. Evolución de la inclinación de la órbita del satélite respecto al tiempo.	32
Figura 3-27. Evolución de la inclinación de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el $J_2$ .	33
Figura 3-28. Evolución del RAAN de la órbita del satélite respecto al tiempo.	33
Figura 3-29. Evolución del RAAN de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el $J_2$ .	34
Figura 3-30. Evolución del argumento de perigeo de la órbita del satélite respecto al tiempo.	35
Figura 3-31. Evolución del argumento de perigeo de la órbita del satélite respecto al tiempo de vida teniendo en cuenta el $J_2$ .	35
Figura 3-32. Evolución del ángulo theta de la órbita del satélite respecto al tiempo.	36
Figura 3-33. Evolución del ángulo theta de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el $J_2$ .	36
Figura 3-34. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales del semieje mayor de la órbita.	37
Figura 3-35. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales de la excentricidad de la órbita.	37
Figura 3-36. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales del semieje mayor de la órbita para dos excentricidades distintas.	38
Figura 3-37. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores de la inclinación de la órbita.	38
Figura 3-38. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales del RAAN de la órbita.	39
Figura 3-39. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales del argumento de perigeo de la órbita.	39
Figura 3-40. Tiempo final de vida para diferentes anomalías medias iniciales de la órbita.	40
Figura 4-1. Función de densidad uniforme de la densidad atmosférica.	42
Figura 4-2. Evolución de la altitud respecto al tiempo para diferentes $\Delta\rho$ .	45
Figura 4-3. Evolución del tiempo de vida respecto a $\Delta\rho$ y condición de parada $h=120$ km.	46
Figura 4-4. Zoom de la evolución del tiempo de vida respecto a $\Delta\rho$ y condición de parada $h=120$ km.	46
Figura 4-5. Zoom de la evolución del tiempo de vida respecto a $\Delta\rho$ y con altitud de parada $h=200$ km.	47
Figura 4-6. Función de distribución del tiempo de vida de un satélite respecto al tiempo final de éste.	47
Figura 4-7. Función de distribución del tiempo de vida de un satélite respecto al tiempo final de éste para una excentricidad de 0.005 y un semieje mayor de 6623 km.	48
Figura 4-8. Función de distribución del tiempo de vida de un satélite respecto al tiempo final de éste para una excentricidad de 0.005 y un semieje mayor de 6573 km.	49
Figura 4-7. Función de distribución del tiempo de vida de un satélite respecto al tiempo final de éste (método alternativo).	50

# Notación

---

$\oplus$	Símbolo astronómico de la Tierra
$\odot$	Símbolo astronómico del Sol
$\mu$	Parámetro gravitacional de masas combinadas
$p$	Parámetro de la cónica
$a$	Semieje mayor de la elipse
$r_p$	Radio de perigeo
$r_a$	Radio de apogeo
$i$	Inclinación de la órbita
$w$	Argumento de perigeo
$\Omega$	Ascensión recta del nodo ascendente (RAAN)
$\theta$	Anomalía verdadera
$M$	Anomalía media
$\lambda$	Longitud sobre la esfera terrestre
$\varphi$	Latitud sobre la esfera terrestre
$G$	Constante de gravitación universal
$n$	Velocidad orbital media
$\Omega$	Nodo ascendente
$UA$	Unidad astronómica
$m_v$	Masa del satélite
$S$	Superficie frontal del satélite
$C_D$	Coefficiente de arrastre atmosférico
$t_f$	Tiempo final de vida
$F_D$	Fuerza de resistencia atmosférica



# 1 INTRODUCCIÓN

---

## 1.1. Introducción. Motivación del proyecto

El objetivo de este proyecto es la obtención del tiempo de vida de satélites que se encuentran en órbita baja. No es una tarea sencilla debido a la incertidumbre que éste tiene asociado a sus múltiples parámetros y efectos que entran en juego a la hora de calcularlo, sobre todo uno de ellos: la densidad.

Es por ello por lo que al no conocerse con exactitud muchos de estos parámetros sería de interés la utilización de algún método probabilístico que permitiese a partir de la incertidumbre introducida por una función de densidad, por ejemplo, obtener una función de distribución del tiempo de vida.

Una órbita terrestre baja es una órbita alrededor de la tierra entre la atmósfera y el cinturón de radiación de Van Allen, con un ángulo bajo de inclinación. Sus límites no están rígidamente definidos, pero están típicamente entre 200 - 2000 km sobre la superficie de la Tierra.

La mayoría de los vuelos espaciales tripulados han sido en órbita terrestre baja. Aunque actualmente la órbita media es utilizada también por ejemplo para satélites de navegación, la mayoría de los satélites están dispuestos en órbita terrestre baja, donde viajan alrededor de 27.400 km/h (8 km/s), dando una vuelta a la tierra cada 90 minutos. Otra excepción son los satélites de comunicación que requieren órbita geoestacionaria. Sin embargo, hace falta menos energía para situar un satélite en órbita terrestre baja y además el satélite necesita transmisores menos potentes para transferencia de datos, así que la órbita terrestre baja se usa para muchas aplicaciones de comunicación. Dado que estas órbitas no son geoestacionarias, se requiere una red de satélites para suministrar cobertura continua. Las órbitas bajas también ayudan a satélites de teledetección gracias al nivel de detalle añadido que puede ser obtenido. Los satélites de teledetección pueden tomar también ventaja de órbitas terrestres bajas síncronas solares a una altitud de alrededor de 800 km y cerca de la inclinación polar.

En las dos décadas pasadas, mientras el número de satélites en la órbita baja de la tierra se incrementaba, los científicos empezaron a darse cuenta de los problemas particulares asociados con esas órbitas. En primer lugar, las órbitas bajas involucran perturbaciones debido a la resistencia que son la mayor cantidad de veces del orden de magnitud de otras perturbaciones orbitales existentes. En segundo lugar, cuando el satélite pierde su energía debido a la fricción atmosférica, sus elementos orbitales varían hasta llegar al punto de la reentrada. A continuación se produce la ruptura por ablación y la volatilización y en algunos casos aunque con pequeña probabilidad se produce un impacto a tierra. La reentrada de satélites puede representar un considerable peligro para las personas o aviones.

Por toda la aplicabilidad que las órbitas bajas tienen, sumado a la basura espacial que almacenan, pueden sufrir riesgos de congestión y es por ello por lo que muchos proyectos de investigación deciden observar el movimiento del satélite y tratar de predecir su trayectoria (análisis de dispersión) y estimar el tiempo de vida de dichos satélites.

Con el análisis de dispersión se predice con mejor exactitud la posición del satélite en cualquier instante futuro, además de proporcionar las herramientas necesarias para el cálculo de las propiedades de la atmósfera (principalmente la densidad). Con la estimación del tiempo de vida del satélite se permite planificar una misión de forma realista y adecuada; en los casos donde el satélite es incontrolado, la predicción del tiempo hasta la reentrada evitando daños en aeronaves o humanos; y en los casos en los que el satélite aún se encuentra bajo el

control de actitud, obtener la predicción de su reentrada como una función de la actitud, lo que permite el control con una precisión razonable del reingreso y la obtención del punto y la región de impacto en un lugar deseado evitando las zonas pobladas.

El análisis de dispersión no es objeto del proyecto, sin embargo, si lo será la estimación del tiempo de vida de satélites que se encuentren en órbitas bajas.

El tiempo de vida es el tiempo entre el instante inicial para el cual el satélite en estudio se encuentra en una posición determinada, a una altura determinada y con unos elementos orbitales y el instante en el que llega a una altitud fijada como la altitud de reentrada. A partir de ésta, el decaimiento es inminente y muy rápido.

El tiempo de vida depende de una gran cantidad de parámetros o efectos como pueden verse en la figura 1-1.

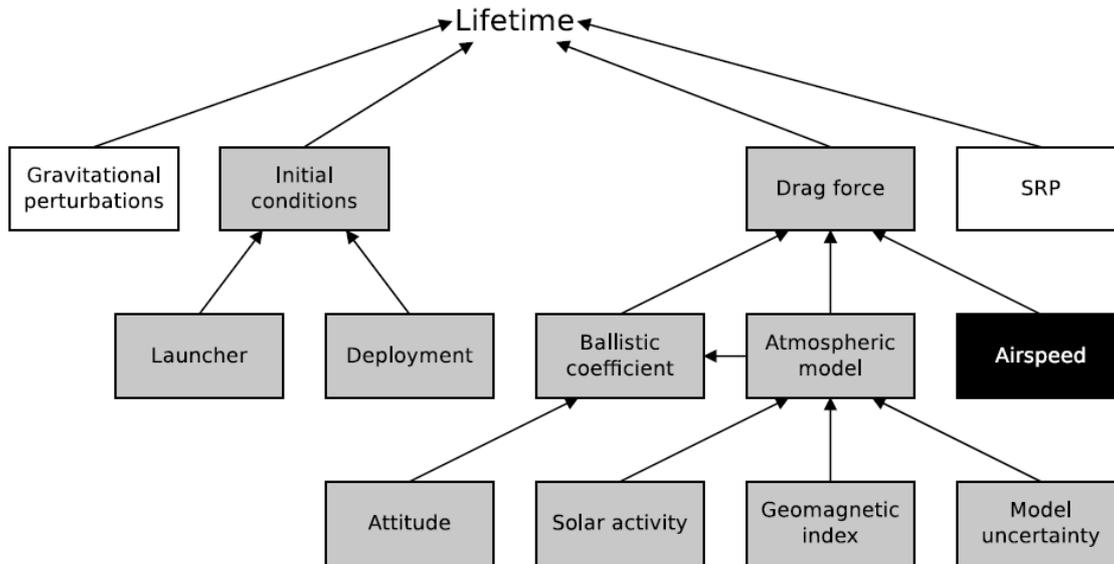


Figura 1-1. Esquema de los parámetros de los que depende el tiempo de vida.

En primer lugar depende de la condición inicial del satélite la cual viene dada por los elementos orbitales en el instante inicial. También lo hace de la perturbación gravitacional conocida como el  $J_2$ . Además de éstas, depende fuertemente de la resistencia atmosférica en órbitas bajas por lo que para obtener un resultado coherente se debe tener un buen modelo atmosférico. Dentro de esta última dependencia aparecen parámetros como el coeficiente balístico, definido a partir de la masa, superficie del satélite y coeficiente atmosférico; la velocidad relativa; y otros parámetros que no se tendrán en cuenta como son la actividad solar o el índice geomagnético.

Aun conocidos gran parte de estos parámetros, algunos no se harán de forma exacta, apareciendo una incertidumbre en el modelo, como se comentó con anterioridad. Estas incertidumbres pueden minimizarse con un amplio estudio y pruebas, sin embargo, no se podrán eliminar por completo dejando un error inherente en cualquier cálculo del tiempo de vida.

## 1.2. Alcance del proyecto.

El objetivo de este proyecto es realizar desde inicio un modelo que permita simular el comportamiento dinámico de un satélite alrededor de la tierra, obteniendo en cada instante su vector estado (posición y velocidad), y con éste poder estimar su tiempo de vida restante. Más exactamente, se basa en dicho cálculo pero para satélites en órbitas bajas en los que como se verá más adelante afectará la resistencia que opone la atmosfera al igual que la no esfericidad de la tierra.

Por tanto, a modo de resumen, los objetivos son:

- Generación completa de un modelo de simulación del movimiento de un satélite en órbitas bajas en la plataforma *MATLAB* para la obtención de su tiempo de vida teniendo en cuenta la resistencia atmosférica.
- Ampliación de dicho modelo añadiendo la perturbación debida al achatamiento de la tierra:  $J_2$ , y de nuevo obtención del tiempo de vida.
- Comparación del modelo con datos reales del decaimiento y obtención del error.
- Estudio de la evolución de los elementos orbitales durante el decaimiento del satélite.
- Realización de un estudio paramétrico de la masa, superficie del satélite, coeficiente de resistencia atmosférica y elementos orbitales respecto al tiempo final de vida.
- Además del modelo determinista, para el cual se tiene la función de densidad dependiente de la altitud, se genera un modelo probabilista en el que no se conoce la densidad sino una función de distribución de ésta y con la que se obtiene la función de distribución del tiempo de vida del satélite.

### 1.3. Estructura del proyecto.

La estructura del proyecto es la que sigue:

- *Capítulo 1: Introducción del proyecto.* En este capítulo se presenta brevemente la problemática del acumulamiento de cuerpos en órbita baja y se motiva la necesidad de crear una herramienta de cálculo de tiempos de vida para satélites afectados por la resistencia aerodinámica. Finalmente, se define el alcance concreto de este proyecto.
- *Capítulo 2: Conceptos de la mecánica orbital.* Este capítulo está dedicado a la desviación del problema de los dos cuerpos y a la explicación de las perturbaciones que afectan al caso en consideración ( $J_2$  y la resistencia atmosférica).
- *Capítulo 3: Modelo determinista.* Se define y genera el modelo que se utiliza en la plataforma *MATLAB* viéndose la importancia de añadir la perturbación  $J_2$  a la ya incluida resistencia atmosférica. Se toman algunos satélites que ya hayan reingresado en la atmósfera para poder estimar y comparar los tiempos de vida de éstos. Se observa y comenta la evolución de los elementos orbitales con el paso del tiempo de vida del satélite. También se realiza un estudio paramétrico de la masa del satélite, superficie del satélite, coeficiente de resistencia atmosférica y elementos orbitales para obtener la influencia que éstos generan al tiempo final de vida del satélite.
- *Capítulo 4: Modelo probabilista.* Se varía el modelo determinista debido al desconocimiento de la densidad generando así una herramienta probabilística que permita la obtención de una función de distribución del tiempo de vida del satélite a partir de la función de distribución de la densidad. Posteriormente se realiza la media y la desviación típica.
- *Capítulo 5: Conclusiones y trabajos futuros.* Se comenta en este capítulo las conclusiones obtenidas sobre el proyecto, resumiendo el trabajo realizado. También se indicarán unas líneas de trabajo futuras sobre las cuales poder mejorar y completar el proyecto.



## 2 CONCEPTOS DE LA MECÁNICA ORBITAL

Las ecuaciones que permiten obtener el movimiento de un cuerpo, es decir, su vector posición y velocidad en cada instante parten del problema de los dos cuerpos [1].

Se recuerdan las hipótesis sobre las que se sostenía dicho problema:

- Se considera el sistema aislado del resto del Universo.
- Las masas se pueden considerar puntuales y localizadas en el centro de masas del cuerpo.

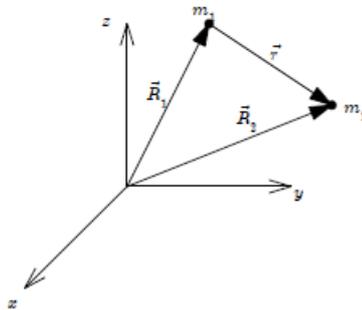


Figura 2-1. Sistema que muestra dos masas aisladas y puntuales.

Estas consideraciones podrían ser aceptadas, aun alejándose de la exactitud, ya que indican que sólo existen dichos cuerpos, como se aprecia en la figura 2-1, y por tanto la única fuerza que apareciese es la de atracción entre ellos. Como se quiere obtener un resultado lo más preciso posible, se debe descartar esta hipótesis.

Es por ello por lo que se consideran una serie de perturbaciones y efectos que hacen del problema algo más complejo.

### 2.1. Análisis general de las perturbaciones

La primera suposición permite reducir, como se acaba de indicar anteriormente, las fuerzas que actúan a las gravitatorias entre los dos cuerpos. Pero no hay que olvidar que existen otras fuerzas:

- La fuerza gravitatoria ejercida por otros cuerpos.
- La resistencia atmosférica en órbitas bajas.
- Fuerzas propulsivas (especialmente a tener en cuenta en la realización de maniobras).
- La presión de radiación solar.

En cuanto a la segunda suposición es solo válida si los cuerpos son esferas macizas y homogéneas. No obstante:

- Los planetas no son esferas perfectas. En concreto la Tierra está achatada.
- Los vehículos espaciales no son esferas perfectas. Un vehículo no esférico se ve afectado por el gradiente gravitatorio (fenómeno que afecta a cuerpos no puntuales, y que tiene su origen en que la gravedad que actúa sobre ellos resulta no uniforme) debido a que ésta se distribuye en la masa del satélite y este no tiene una forma esférica.

Respecto a la primera suposición cabe indicar:

Que no se tendrá en cuenta la fuerza ejercida por otros cuerpos ya que como se puede observar en [1],

el orden de magnitud de la fuerza de perturbación generada por un tercer cuerpo, por ejemplo el sol, sobre el satélite es:

$$\vec{\gamma}_p = \mu_{\odot} \frac{\vec{r}}{r_{\odot}^3} \quad (2.1)$$

Y comparándola con la fuerza kepleriana:

$$\vec{\gamma}_K = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.2)$$

Se puede tener una estimación del orden de magnitud de una respecto a la otra y ver si es despreciable o no.

$$\left| \frac{\vec{\gamma}_P}{\vec{\gamma}_K} \right| = \left( \frac{\mu_{\odot}}{\mu_{\oplus}} \right) \cdot \left( \frac{r}{r_{\odot}} \right)^3 = 3 \cdot 10^{-9} \quad (2.3)$$

Habiendo considerado que:  $r_{\odot} = 1 AU = 149.597.870.700 km$  y que  $\mu_{\odot} = 132.712.440.000 km^2 s^{-2}$

Por lo que se puede comprobar que para órbitas bajas, dicha atracción comparada con la fuerza kepleriana es despreciable.

En cuanto a las fuerzas propulsivas, indicar que tampoco se tendrán en cuenta ya que no se considerará ninguna fuerza realizada por los propios satélites estudiados.

Por último, la presión de radiación solar, llega a ser muy importante para órbitas con grandes altitudes pero para satélites en orbitas bajas, la perturbación debida a la resistencia atmosférica juega un papel más importante en muchos casos, excepto para satélites tipo globo en los que el ratio área/masa es muy alto.

En cuanto a la segunda suposición indicar que en este proyecto se plantearán las ecuaciones del movimiento sobre satélites esféricos, si bien se considera la no esfericidad de la Tierra, provocando como se ve a continuación la perturbación del  $J_2$ .

A continuación, se explican las perturbaciones que se van a considerar a la hora de modelar el problema del cálculo del tiempo de vida. En concreto, se describe tanto el efecto de la resistencia provocada por la atmósfera residual en órbitas bajas, como el efecto del achatamiento de la tierra.

## 2.2. Perturbación debido al achatamiento de la tierra.

En Geodesia (disciplina que estudia la forma y tamaño de la Tierra y su campo gravitatorio), se consideran múltiples modelos de Tierra según el nivel de precisión requerida por la aplicación. Cada modelo considera un tamaño y figura de la Tierra distintos, desde un modelo topográfico exacto de la Tierra (no deseable para cálculos matemáticos, pues el tomar en cuenta todas las irregularidades conllevaría un número prohibitivo de cálculos) hasta incluso un modelo de Tierra plana en estudios locales (no aplicable en Mecánica Orbital por razones obvias).

El concepto pitagórico de una Tierra esférica ofrece una superficie simple que es matemáticamente fácil de manejar. Muchos cómputos astronómicos y de navegación la utilizan como representación de la Tierra. Mientras que la esfera es una aproximación cercana a la verdadera forma de la Tierra, y satisfactoria para muchos propósitos, para otros se necesitan figuras más precisas. Mejores aproximaciones van desde modelar la forma entera de la Tierra como un esferoide oblató, hasta el uso de armónicos esféricos o aproximaciones locales en términos de elipsoides de referencia locales.

Dado que la Tierra está achatada en los polos y abultada en el ecuador, la figura geométrica utilizada en geodesia que más se aproxima a la forma de la Tierra es un esferoide oblató. Un esferoide oblató es un elipsoide

de revolución obtenido por rotación de una elipse alrededor de su eje más corto. Un esferoide que representa la forma de la Tierra u otro cuerpo celeste recibe el nombre de elipsoide de referencia.

Un elipsoide de revolución queda unívocamente determinado por dos magnitudes, dos dimensiones, o una dimensión y un número representando la diferencia entre las dos dimensiones. Los geodestas (personas que se dedican profesionalmente a la geodesia), por convención, utilizan el semieje mayor y el achatamiento.

Un satélite orbitando la Tierra en una órbita baja se verá fuertemente influenciado por las asimetrías en la distribución de masa terrestre, ya que el potencial gravitatorio no dependerá exclusivamente del radio sino también de las latitudes y longitudes sobrevoladas. La fuerza de perturbación resultante puede alterar considerablemente la órbita.

El potencial gravitatorio permite obtener la fuerza gravitatoria específica con lo que su cálculo es de mucho interés.

Si se supusiese un cuerpo esférico y homogéneo con parámetro gravitatorio  $\mu$ , se tendría su potencial gravitatorio como  $U_K = \frac{\mu}{r}$ , sin embargo, no es así. Y para la obtención de un potencial gravitatorio para un cuerpo cualquiera se verifica la Ecuación de Laplace  $\nabla^2 U = 0$ .

Se supondrá un cuerpo cuya masa estará distribuida homogéneamente con simetría de revolución (alrededor de un eje), es decir, solo varía con  $\varphi$  (no con  $\lambda$ ) como la mostrada en la figura 2-2.

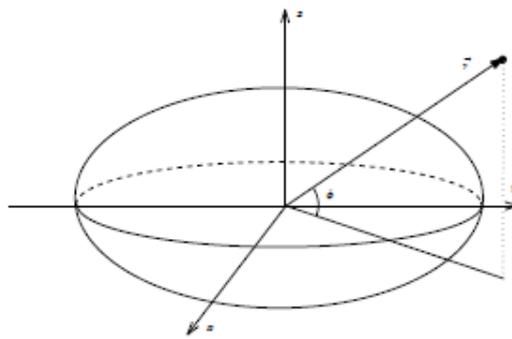


Figura 2-2. Distribución de la masa terrestre con simetría de revolución.

En este caso y para mayor facilidad se utilizarán las coordenadas esféricas,  $U = U(r, \varphi)$ . Con lo que la ecuación de Laplace quedará de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (2.4)$$

La solución general de dicha ecuación viene dada por:

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n p_n(\sin \varphi) \right] \quad (2.5)$$

Donde:

- El primer término representa, como se comentó, el potencial de una esfera, mientras el resto (la serie) representa la desviación del modelo esférico.
- Los coeficientes  $J_n$  son los llamados armónicos zonales del potencial.
- $p_n$  es el n-ésimo polinomio de Legendre, definido recursivamente como

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}((2n+1)xp_n(x) - np_{n-1}(x)) \quad (2.6)$$

El significado de los diferentes armónicos se puede ver a continuación en la figura 2-3 (segundo, tercero, cuarto y quinto armónico esférico).

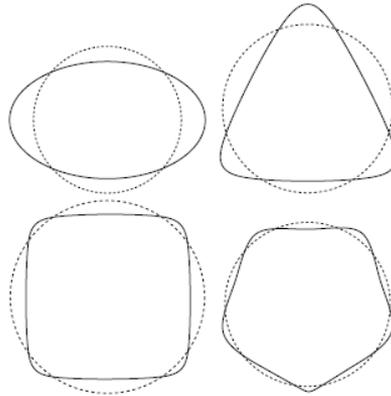


Figura 2-3. Tipos de armónicos esféricos.

Los primeros armónicos son los de más importancia. Para la Tierra,  $J_2=1,083 \times 10^{-3}$ ,  $J_3=-2,534 \times 10^{-6}$ ,  $J_4=-1,620 \times 10^{-6}$ ,  $J_5=-2.273 \times 10^{-7}$ ...

Un modelo frecuentemente utilizado consiste en despreciar todos los armónicos excepto el segundo, lo que equivale a considerar la tierra como un elipsoide de revolución.

Esto se justifica en el sentido de que es el término que produce la mayor perturbación y por tanto domina el movimiento global del satélite. Para el caso de la Tierra, el valor del  $J_2$  es al menos mil veces mayor que cualquiera de los restantes coeficientes.

Usando la fórmula encontramos que  $p_2 = \frac{3x^2-1}{2}$ .

Por tanto el modelo potencial, considerando tan sólo el  $J_2$ , es:

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 (1 - 3 \text{sen}^2 \varphi) \right] \quad (2.7)$$

Donde el primer término, está implícitamente incluido en las ecuaciones KS por tratarse del potencial que da origen al movimiento kepleriano. El potencial perturbador ( $U_p$ ), equivalente al segundo término, genera la denominada teoría principal del satélite artificial.

### 2.3. Perturbación debido a la resistencia atmosférica.

El efecto de la resistencia atmosférica es, para órbitas bajas, el que más peso tiene y determina el tiempo de vida de un satélite. También es muy importante en los estudios de reentrada y es útil para las maniobras de aerofrenado como lo fue para la "Mars Reconnaissance Orbiter" en la cual se consiguió ahorrar 600 kg de combustible o la "Magallanes" (Venus).

Se encuentran variaciones o perturbaciones seculares en  $a$ ,  $e$  y  $i$  mientras que en todos los elementos orbitales, incluidos los anteriores, se producen perturbaciones periódicas.

Si la excentricidad es mayor que cero el efecto inicial de dicha perturbación por la resistencia

atmosférica es la de circularizar la órbita (ver figura 2-4), haciendo disminuir el radio de apogeo hasta que coincida con el de perigeo. Una vez esto, el efecto es la lenta disminución del radio, provocando una caída en espiral del cuerpo hasta que se produce su reentrada.

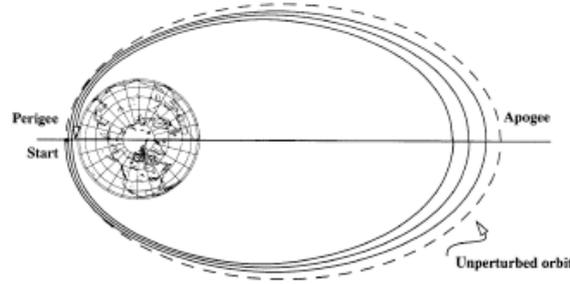


Figura 2-4. Efecto de circularización generado por la resistencia atmosférica.

En cuanto a la fuerza que aparece aquí es la provocada por dicha resistencia atmosférica y tendrá la dirección de la velocidad relativa a la atmósfera, pero el sentido opuesto:

$$\vec{\gamma}_P = -D \frac{\vec{v}_{rel}}{v_{rel}} \quad (2.8)$$

La velocidad relativa se define como la velocidad que llevaría el cuerpo en estudio restándole la velocidad atmosférica, suponiendo que la atmósfera rota con la Tierra:  $\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_{atm}$  donde dicha velocidad de la atmósfera se define como  $\vec{v}_{atm} = \vec{\omega}_{\oplus} \times \vec{r} = \omega_{\oplus} \vec{k} \times \vec{r}$

La resistencia se modela como:

$$D = \frac{1}{2B} \rho v_{rel}^2 \quad (2.9)$$

Donde,  $B = \frac{m_v}{SC_D}$  es el coeficiente balístico, con  $m_v$  la masa del vehículo,  $S$  la superficie frontal (dependiente con la actitud del vehículo), y  $C_D$  el coeficiente de resistencia aerodinámico.

La densidad del medio depende de la altura y es difícil de modelar ya que para una misma altura los valores fluctúan entre un máximo y un mínimo debido a múltiples y complejos factores (variaciones debidas a la geografía y el achatamiento, fluctuaciones solares...). A continuación se hablará de ella con más detalle.

### 2.3.1. Densidad atmosférica

La densidad en la atmósfera alta cambia debido a la interacción compleja entre tres parámetros básicos: la naturaleza de la estructura molecular de la atmósfera, el flujo solar incidente, y las interacciones geomagnéticas. La composición molecular afecta fuertemente a la densidad. El flujo solar, generado por la radiación incidente que llega provocada por el sol, afecta a la densidad atmosférica casi instantáneamente, haciendo de la densidad una función del tiempo. La actividad geomagnética afecta a la atmósfera a través de la calefacción de partículas que colisionan con otras partículas energéticas cargadas procedentes del sol. Juntos, estos efectos hacen que la densidad atmosférica aumente a altas altitudes debido al incremento de las colisiones entre partículas. El nivel del flujo solar y la actividad geomagnética son difíciles de predecir pero muy importantes para un modelo preciso.

La atracción gravitacional de las moléculas en la atmosfera determina su presión y densidad. Además, la relación con la temperatura es importante ya que ésta es una de las mayores causas de la dificultad en la determinación de un modelo exacto de densidad.

La complejidad de la atmósfera es debido al número de regímenes que ésta tiene. Aunque hay valores que se muestran para una temperatura y altitud, estos siempre cambian con el tiempo y son difíciles de predecir.

En general, los modelos atmosféricos pueden clasificarse en estáticos o variables en el tiempo. Obviamente los estáticos son los más simples de usar ya que todos los parámetros atmosféricos permanecen constantes. Sin embargo, algunos factores afectan a dichos modelos:

- Variaciones latitudinales: estos efectos son muy fáciles de ver con un satélite en una órbita circular e inclinada. Pasando por encima del ecuador de la tierra, efectivamente, cambia la actual altitud y por tanto cambia la densidad. Este efecto produce la resistencia en todos los puntos virtuales de la órbita.
- Variaciones longitudinales: aunque este efecto es considerado en los modelos que varían con el tiempo, también pueden influir en los modelos estáticos. Hay que considerar la dificultad en determinar la completa simetría de la atmósfera en todas las regiones de la tierra. Por ejemplo, las cordilleras del Himalaya causa significantes diferencias en el viento, densidad y temperatura respecto a las vastas expansiones del océano abierto a la misma latitud pero diferentes longitudes.

También existen una serie de factores que afectan a los modelos variantes en el tiempo. Tan solo se citan sin entrar a explicarlos detalladamente.

- Variaciones diurnas.
- Ciclo de rotación solar de 27 días.
- Ciclo de 11 años de las manchas solares.
- Variaciones estacionales.
- Variaciones cíclicas.
- Rotación atmosférica.
- Vientos.
- Variaciones debidas a las tormentas magnéticas.
- Variaciones de corto periodo e irregulares.
- Mareas.

Si se quiere saber más sobre estos factores se puede consultar la bibliografía [3].

Modelos atmosféricos: numerosos modelos de densidad han sido desarrollados en las últimas décadas con dos enfoques principales: 1) combinando leyes de conservación y modelos de constitución atmosférica en modelos físicos; 2) usando conceptos físicos simplificados desarrollados a partir de datos o medidas in-situ y datos de satélites.

Se podría utilizar algún modelo variante en el tiempo, como el atmosférico Jacchia-Roberts pero los requerimientos computacionales serían demasiado altos. Modelos de esa fidelidad son los más completos y necesitan también datos de la época en los que sean requeridos necesitando un alto poder computacional. Por otro lado, se encuentran por ejemplo y más simple, el modelo exponencial el cual puede ser demasiado incorrecto para algunas aplicaciones. Sin embargo, éste es el que se utiliza en dicho proyecto.

**Modelo exponencial:** este modelo simple y estático asume que la densidad de la atmosfera decae exponencialmente con el incremento de altitud. También se asume una distribución esférica-simétrica de las partículas, en la que la densidad, varía exponencialmente siguiendo la siguiente expresión:

$$\rho = \rho_0 e^{\left[-\frac{h_{ellp}-h_0}{H}\right]} \quad (3.11)$$

Donde la densidad de referencia,  $\rho_0$ , es usada con la altitud de referencia,  $h_0$ , la altitud actual sobre el elipsoide,  $h_{ellp}$ , y la altitud de escala,  $H$ . La tabla 3-2 da estos valores a diferentes alturas.

Altitude $h_{ellp}$ (km)	Base Altitude $h_o$ (km)	Nominal Density $\rho_o$ (kg/m <sup>3</sup> )	Scale Height $H$ (km)	Altitude $h_{ellp}$ (km)	Base Altitude $h_o$ (km)	Nominal Density $\rho_o$ (kg/m <sup>3</sup> )	Scale Height $H$ (km)
0-25	0	1.225	7.249	150-180	150	$2.070 \times 10^{-9}$	22.523
25-30	25	$3.899 \times 10^{-2}$	6.349	180-200	180	$5.464 \times 10^{-10}$	29.740
30-40	30	$1.774 \times 10^{-2}$	6.682	200-250	200	$2.789 \times 10^{-10}$	37.105
40-50	40	$3.972 \times 10^{-3}$	7.554	250-300	250	$7.248 \times 10^{-11}$	45.546
50-60	50	$1.057 \times 10^{-3}$	8.382	300-350	300	$2.418 \times 10^{-11}$	53.628
60-70	60	$3.206 \times 10^{-4}$	7.714	350-400	350	$9.518 \times 10^{-12}$	53.298
70-80	70	$8.770 \times 10^{-5}$	6.549	400-450	400	$3.725 \times 10^{-12}$	58.515
80-90	80	$1.905 \times 10^{-5}$	5.799	450-500	450	$1.585 \times 10^{-12}$	60.828
90-100	90	$3.396 \times 10^{-6}$	5.382	500-600	500	$6.967 \times 10^{-13}$	63.822
100-110	100	$5.297 \times 10^{-7}$	5.877	600-700	600	$1.454 \times 10^{-13}$	71.835
110-120	110	$9.661 \times 10^{-8}$	7.263	700-800	700	$3.614 \times 10^{-14}$	88.667
120-130	120	$2.438 \times 10^{-8}$	9.473	800-900	800	$1.170 \times 10^{-14}$	124.64
130-140	130	$8.484 \times 10^{-9}$	12.636	900-1000	900	$5.245 \times 10^{-15}$	181.05
140-150	140	$3.845 \times 10^{-9}$	16.149	1000-	1000	$3.019 \times 10^{-15}$	268.00

Tabla 2-1. Valores característicos para la obtención de la densidad en función de la altura.

La densidad en función de la altitud obtenida con este modelo y mostrada en la figura 2-1, es como sigue:

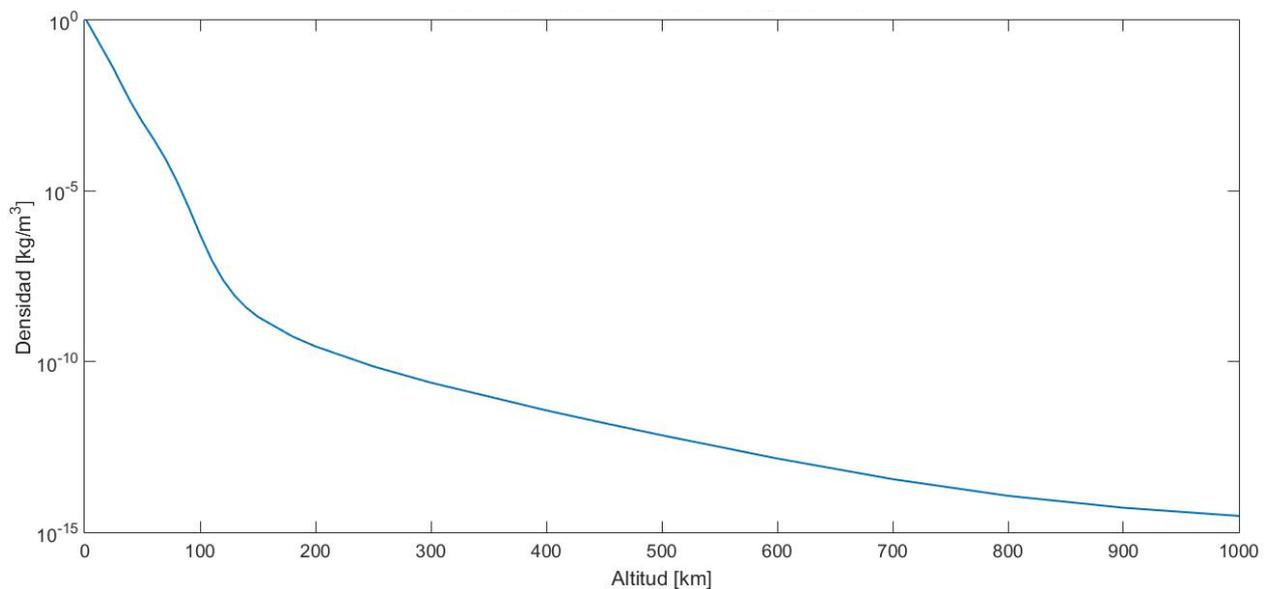


Figura 2-5. Densidad obtenida del modelo exponencial.



# 3 ESTUDIO DEL TIEMPO DE VIDA DE UN SATÉLITE. MODELO DETERMINISTA

---

## 3.1. Análisis matemático/numérico de perturbaciones

Para tratar los efectos de perturbación, y más concretamente los vistos en el capítulo 2, existen esencialmente dos metodologías:

- Método de perturbaciones generales: emplea los elementos orbitales como base, estudiando su variación con el tiempo.
- Método de perturbaciones especiales: no emplea elementos orbitales sino directamente las ecuaciones del movimiento. A su vez se divide en dos posibles formas de tratar el problema:
  - Método de Encke: resolución directa de las ecuaciones del movimiento, incluyendo las perturbaciones y tantos cuerpos como sea necesario. El más usado en la actualidad.
  - Método de Cowell: resuelve las ecuaciones de una corrección  $\delta r$  sobre una solución de referencia de los dos cuerpos  $r = -\mu\vec{r}/r^3$ . Si la corrección crece, es necesario recalcular la solución de referencia. Hoy en día, esta opción es menos usada.

En este proyecto se utilizará el método de Encke como se verá a continuación.

## 3.2. Modelo determinista

Se pretende por tanto obtener para cada instante el vector estado del satélite o cuerpo en estudio, es decir, su vector posición y su vector velocidad y con éstos poder saber la altitud a la que se encuentra respecto a la Tierra, lo que equivale a obtener su tiempo de vida ya que como se verá a partir de una determinada altitud se puede suponer la reentrada del cuerpo y la caída de éste durará tan solo unas pocas horas.

Se comienza a explicar el modelo determinista para el cual en un instante determinado, a una altitud fijada, se conoce el valor de todos los parámetros en estudio.

### 3.2.1. Perturbación J2

Para calcular la fuerza que genera dicha perturbación se debe obtener el potencial provocado por éste y realizarle el gradiente:  $F = \nabla U$ .

El potencial que se obtuvo en el capítulo anterior (ecuación 2.7) se muestra a continuación:

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 (1 - 3 \operatorname{sen}^2 \varphi) \right] \quad (3.1)$$

Para realizar el gradiente de este potencial, se supondrán coordenadas esféricas que vienen dadas en la figura 3-1:

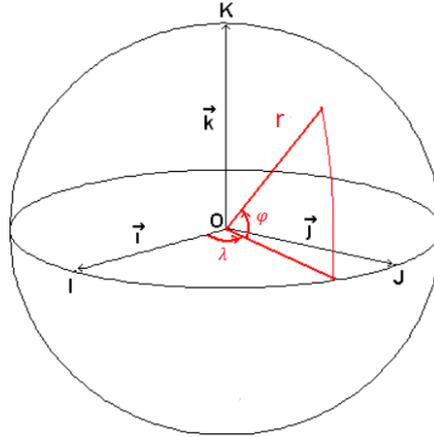


Figura 3-1. Sistema de coordenadas esféricas.

Las componentes del vector posición se definen a continuación:

$$r_x = r \cos \lambda \cos \varphi \quad (3.2)$$

$$r_y = r \operatorname{sen} \lambda \cos \varphi \quad (3.3)$$

$$r_z = r \operatorname{sen} \varphi \quad (3.4)$$

La fuerza que se obtiene es:

$$F = - \left( \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \right) \quad (3.5)$$

Con  $U = U_r + U_p$  donde  $U_r$  es la parte del potencial suponiendo la esfericidad de la Tierra y  $U_p$  es el potencial añadido por suponer el achatamiento, la parte de éste debido a la perturbación. Por lo que podemos dividir esta fuerza en dos componentes  $F = F_r + F_p$

Por tanto, se necesita conocer los vectores unitarios de dirección definidos a continuación:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \operatorname{sen} \lambda \cos \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos \lambda \operatorname{sen} \varphi \\ -\operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

En primer lugar, la primera componente de la fuerza es:

$$F_r = \nabla U_r = -\frac{\mu}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (3.7)$$

Donde se ha tenido en cuenta la siguiente definición:  $e_r = \frac{\vec{r}}{r}$

En segundo lugar, la segunda componente de la fuerza se define como:

$$F_r = \nabla U_p = -\frac{3}{2} \frac{\mu J_2 R_\oplus^2}{r^4} (1 - 3 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cdot \vec{e}_r - 3 \frac{\mu J_2 R_\oplus^2}{r^4} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \cdot \vec{e}_\varphi \quad (3.8)$$

Con esto, se obtiene la fuerza resultante que origina el achatamiento terrestre, la cual se tendrá en cuenta a la hora de realizar el modelo dinámico.

### 3.2.2. Resistencia atmosférica.

Realmente la fuerza de resistencia es solo una parte de la fuerza aerodinámica total aplicada sobre un cuerpo en movimiento en un fluido. Es por ello que los efectos aerodinámicos generan sobre dicho cuerpo:

1. Una componente de la fuerza paralela al flujo (resistencia)
2. Una componente de la fuerza perpendicular al flujo (sustentación)
3. Un par respecto al centro de masas

Pero cabe indicar que tanto el par como la sustentación no se tendrán en cuenta en este proyecto. Debido a que el ratio sustentación-resistencia para satélites tiene un valor de  $(L/D < 0.1)$ , la sustentación es despreciada y no se tiene en cuenta bajo las condiciones mencionadas. Pero a medida que la altitud del satélite disminuya, acercándose a la superficie terrestre, dicho ratio irá aumentando, sobre todo para altitudes cercanas a los 100 kilómetros.

En el presente problema, la resistencia atmosférica es una perturbación difícil de modelar debido a su dependencia con un gran número de parámetros, muchos de ellos conocidos con una baja exactitud. Además de esto, los efectos de la resistencia atmosférica son fuertemente dependientes de algunos parámetros relacionados con dicha perturbación ( $C_D$  y  $A$ ) como puede verse en su expresión matemática:

$$F_D = D = \frac{1}{2B} \rho v_{rel}^2 \quad (3.9)$$

Donde B es el coeficiente balístico como se definió con anterioridad

$$B = \frac{m_v}{SC_D} \quad (3.10)$$

En este apartado, se trata de explicar cada uno de los parámetros, indicando que valores tomarán para este modelo.

La tabla 3-1 muestra los satélites a los que se les ha aplicado dicho modelo determinista:

Spacecraft Name	NORAD Catalogue No.	Mass (kg)	Cross-Sectional Area (m <sup>2</sup> )	Drag Coefficient
ODERACS-A	22990	1.482	0.0081	1.93
ODERACS-B	22991	1.482	0.0081	1.99
ODERACS-E	22994	5	0.0182	1.96

Tabla 3-1. Características de los satélites utilizados en el modelo.

Como se puede observar en la tabla 3-1, vienen definidos parámetros como son la masa, el área frontal y el coeficiente de resistencia atmosférica. Se presenta ahora la explicación más detallada de cada uno de ellos.

1. Masa del satélite: la masa del satélite es conocida y además se supone invariante en el tiempo que esté orbitando el cuerpo ya que además, al no generar empuje el satélite, no disminuye por la pérdida de combustible.
2. Área de la sección: está directamente relacionada con la superficie, la dimensión y la actitud del satélite. Representa el área proyectada del satélite en un plano perpendicular al flujo del fluido. Cada uno de los satélites de la Tabla anterior es esférico, lo que permite la simplificación de las etapas iniciales del desarrollo del modelo, ya que permite la eliminación del problema de la actitud. Las actitudes de una nave espacial en descomposición pueden ser difíciles de predecir, ya que la mayoría por la reentrada son incapaces de mantener una actitud constante y caen alterando el coeficiente de arrastre y el área de la sección transversal, acción que complica el análisis. Sin embargo, los satélites con áreas de sección transversal no uniforme podrían ser analizados mediante la ISO (Organización Internacional de Normalización), Estándar para promediar el área de sección

transversal, en la cual se incluye normalización para toda forma de satélites [2].

En este caso y para estos satélites debido a su forma esférica la obtención del área frontal es trivial y no cambiará con su actitud.

3. El coeficiente de resistencia aerodinámica: varía mucho con las condiciones de flujo, ángulo de ataque, rango de velocidad, tipo de fluido y el recorrido libre medio de las moléculas. Su determinación no es fácil, especialmente debido a la forma irregular de la mayoría de los satélites. Para cuerpos esféricos suele tomar valores  $2.0 < C_D < 3.0$ , y para dichos cuerpos y a bajas altitudes valores en el intervalo  $1.9 < C_D < 2.3$  [3] y [4].

En este caso, al igual que con la masa y el área frontal, se tomará el valor del coeficiente de resistencia proporcionado por la tabla 3-1 obtenida de [5].

### 3.2.3. Condición inicial

La condición inicial es el punto a partir del cual se comienza a contar el tiempo de vida del satélite. Es importante su conocimiento para poder realizar el modelo y para los satélites en estudio es el mostrado en la tabla 3-2:

SATELLITE NAME	EPOCH yyymmdd hhmmss		SMA [km]	ECC	INC [deg]	RAN [deg]	AP [deg]	MA [deg]	PH [km]	AH [km]
ODERACS A	940209	173759	6723.4	0.00080	56.9	188.1	256.6	103.9	339.8	350.6
ODERACS B	940210	162931	6724.7	0.00062	56.9	183.8	254.3	105.6	342.3	350.7
ODERACS E	940211	091627	6726.4	0.00017	56.9	180.7	292.3	67.7	347.1	349.4

Tabla 3-2. Condicion inicial en elementos orbitales de los satélites en estudio.

Se puede observar que los datos ofrecidos son:

- La época en la que se encuentra dicho punto de inicio.
- Algunos elementos orbitales como semieje mayor de la órbita, excentricidad, inclinación, ascensión recta del nodo, argumento de perigeo y anomalía media.
- Altitudes de perigeo y apogeo.

### 3.2.4. Método de resolución

Como se indicó al comienzo de este capítulo para estimar el tiempo de vida se utilizaría el método de Encke el cual trabaja con las ecuaciones del movimiento añadiendo las perturbaciones y así obteniendo el nuevo vector estado (posición y velocidad) del satélite.

Para obtener este vector estado se realizará en la plataforma *MATLAB* un sistema de ecuaciones diferenciales el cual se integrará un tiempo  $t$ , con una condición inicial determinada. Dicha condición inicial deberá ser el vector estado en el punto de partida, es decir, un vector posición y otro velocidad. Para transformar los datos iniciales dados en la tabla anterior a estos vectores hay que realizar una conversión que se puede observar en la bibliografía [1].

El sistema a integrar será el siguiente:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad (3.12)$$

$$\dot{\vec{v}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}_D + \vec{F}_P \quad (3.13)$$

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad (3.14)$$

Donde el vector estado  $x$  se define:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Y las fuerzas  $F_D + F_P$  son las fuerzas provocadas por la resistencia atmosférica y el achatamiento de la Tierra respectivamente.

Se indican a continuación unas consideraciones muy importantes a tener en cuenta durante el método resolutorio ya que pueden afectar en gran medida al resultado final debido a lo sensible que es este estudio.

- En primer lugar el paso o intervalo de tiempo escogido: dicho paso no podrá ser excesivamente grande ya que si es así, el tiempo de vida obtenido será diferente al verdadero. Realizándose varias pruebas en las que para un mismo satélite se variaba ese intervalo de tiempo se llegó a la conclusión de que podría definirse en  $t=100$  segundos. Aunque pueda parecer un paso pequeño esos cien segundos debido a que las simulaciones realizadas suelen constar de unos cien días aproximadamente (como tiempo final de vida del satélite), el cuerpo aproximadamente avanza con velocidad de 7 kilómetros por segundo por lo que un paso mayor que este puede ser excesivo.
- En segundo lugar, pero no menos importante, se debe indicar que otro factor que igualmente afecta en la obtención del resultado final es el error tenido en cuenta en la plataforma *MATLAB* para realiza los cálculos. Éste trae por defecto preestablecido un valor de  $10^{-6}$  tanto de error relativo como absoluto, pero debido al tipo de cálculo que se quiere realizar (más preciso), es necesario otro más pequeño. Con un valor fijado en  $10^{-9}$  para ambos dos será suficiente y aproximará mejor el resultado final.

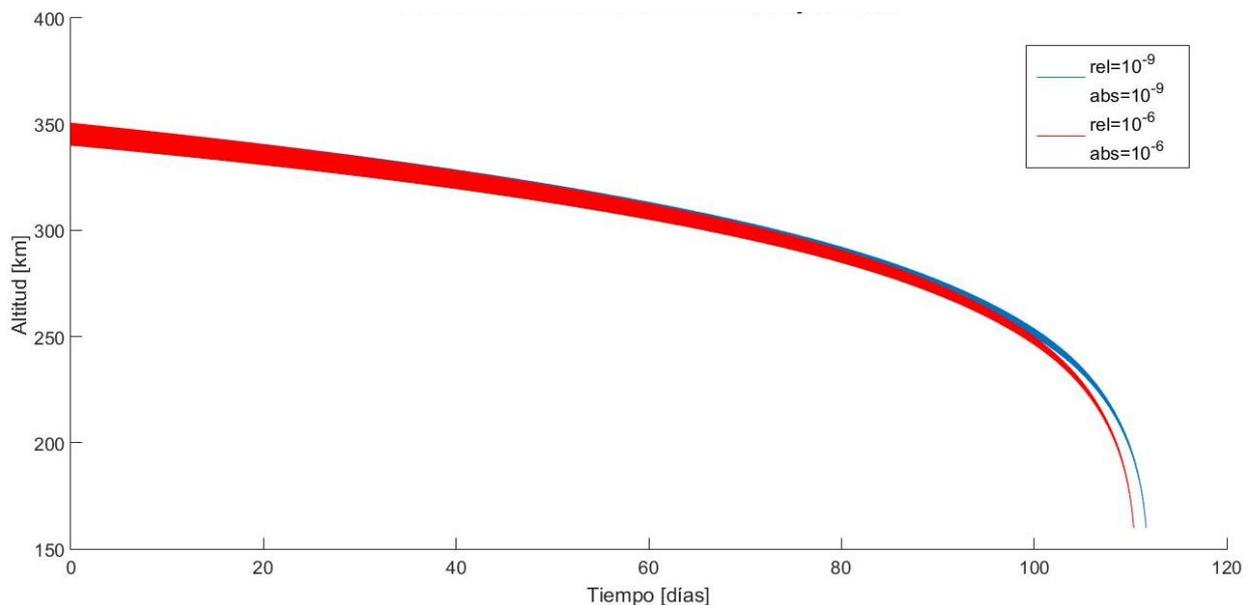


Figura 3-2. Altitud en función de los errores relativo y absoluto.

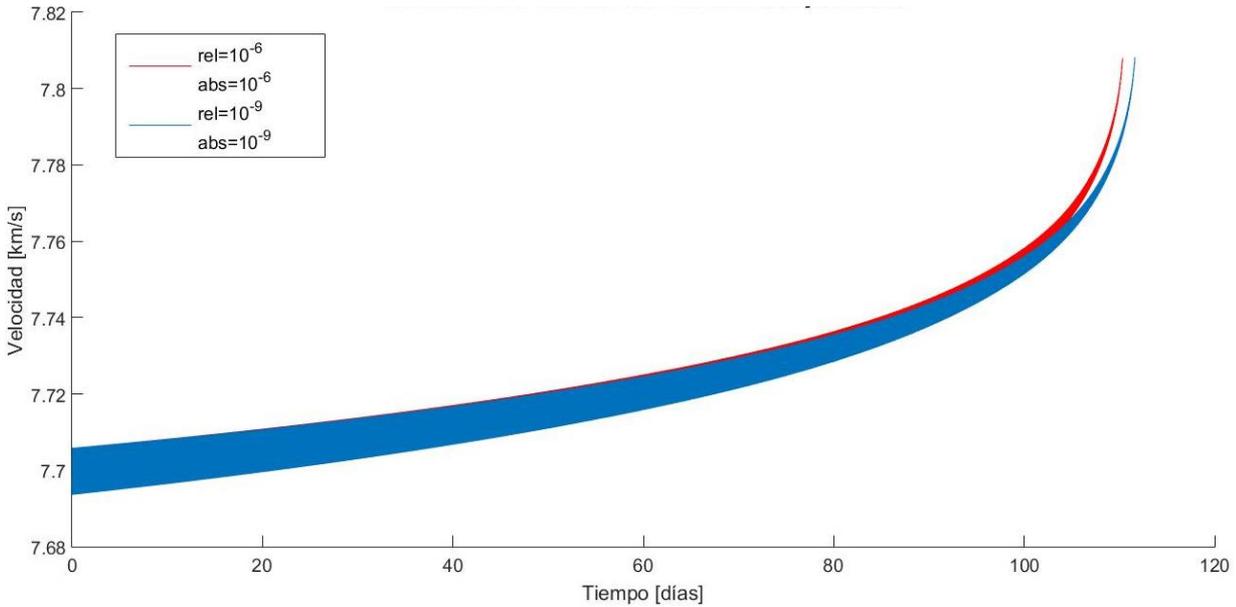


Figura 3-3. Velocidad en función de los errores relativo y absoluto.

Como puede observarse en las figuras 3-2, 3-3 los comportamientos en cuanto a altitud y velocidad son muy similares. La diferencia prácticamente se produce en el tramo final como puede apreciarse en el que para el caso de mayor precisión y por tanto menor error relativo y absoluto (gráfico azul), el satélite tiene algo menos de velocidad para un mismo instante de tiempo y en la gráfica de la altitud se puede ver como alcanza ese punto de reentrada a los 160 kilómetros algo más tarde. Se aprecia una diferencia de unos días en el tiempo de vida del satélite.

También se puede ver en las figuras 3-4 (zoom de la altitud) y 3-5 (zoom de la velocidad) cómo durante el movimiento del satélite se produce una oscilación amortiguada sobre su valor medio en cada instante el cual se mantiene durante todo el tiempo pero sin embargo, se va reduciendo.

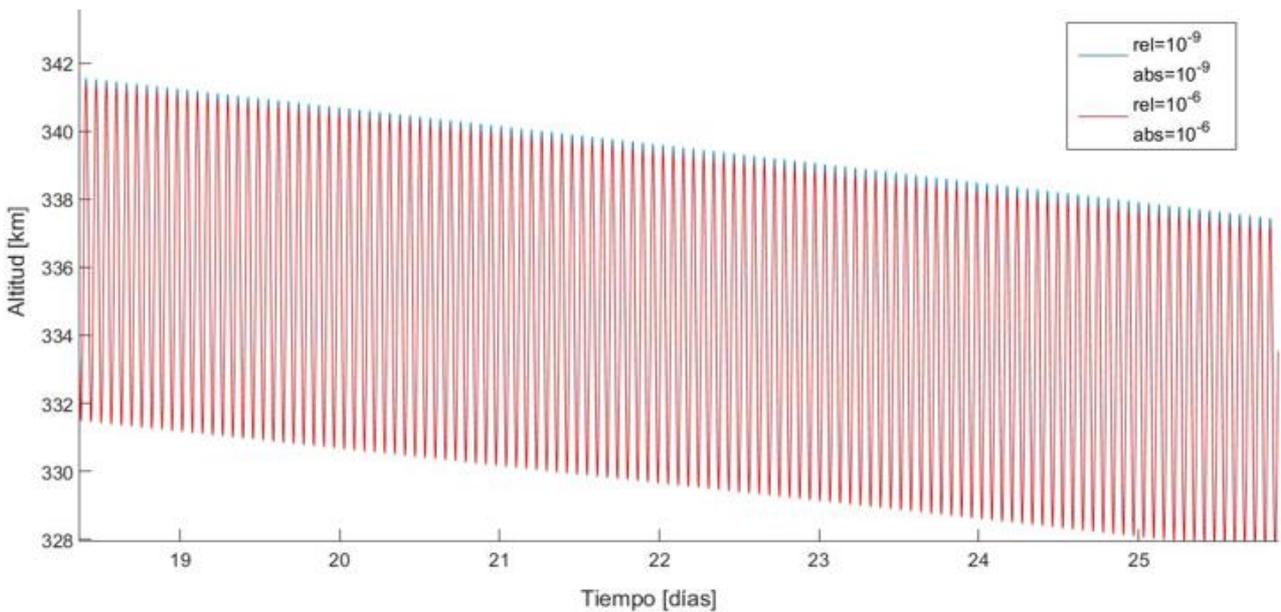


Figura 3-4. Zoom de la altitud en función de los errores relativo y absoluto.

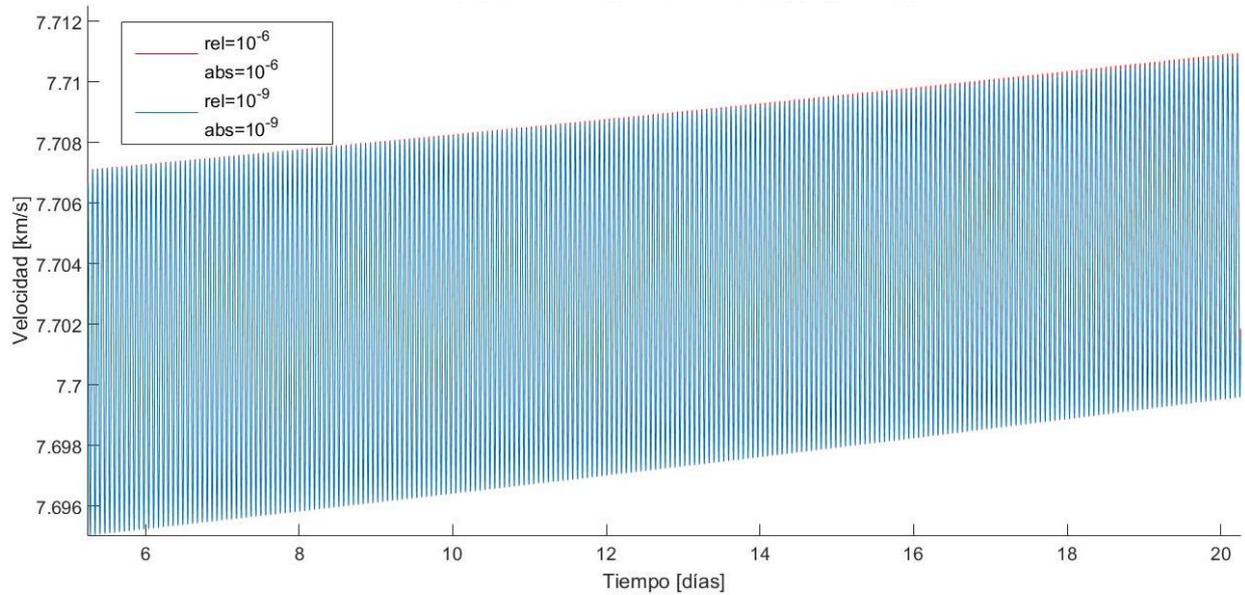


Figura 3-5. Zoom de la velocidad en función de los errores relativo y absoluto

Se observa como la oscilación del satélite es de aproximadamente unos 10 kilómetros de altitud. Dicha fluctuación es provocada debido a la imposibilidad de obtener una órbita totalmente circular. Este caso que se ha probado corresponde con una excentricidad inicial de valor  $e=0.00080$  la cual irá variando entorno al cero (caso correspondiente con una órbita circular). Aun con este valor tan bajo se puede observar como los puntos de la oscilación de mayor altitud corresponden a cuando el satélite alcanza el apogeo de la órbita y los más bajos corresponden por tanto al perigeo de la misma. También en la velocidad los puntos de mayor valor corresponden a cuando el satélite se encuentra en el perigeo de la órbita y los de menor velocidad cuando éste se encuentre en el apogeo. Dicha excentricidad observando la figura 3-5 se podría obtener sin más que tomando los valores de la altitud de perigeo y apogeo:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{10}{2(R_{\oplus} + 336)} = 0.00075 \quad (3.16)$$

Obteniéndose un valor muy cercano al introducido en el modelo para este caso.

También se puede observar en las figura 3-5 como para un día se producen 16 oscilaciones. Teniéndose en cuenta que el periodo medio de un satélite en órbita baja es de unos 90 minutos, dará 16 vueltas a la Tierra verificándose también dicha comprobación.

### 3.2.5. Altitud de reentrada

Para obtener el tiempo de vida del satélite partiendo de que en cada instante se conocerá el vector posición y el vector velocidad, es decir, el vector estado (3.15), habrá que obtener la altitud en la que el cuerpo se encuentra y crear un criterio de parada, es decir, una altitud para la cual se suponga la reentrada. Además, para modelar más correctamente el movimiento del satélite haría falta para cuando se aproxime a la tierra incluso tener en cuenta la sustentación que originaría.

Según la bibliografía, hay varios criterios para dicho punto de reentrada. En algunos casos se indica que dicha reentrada se origina entre los 120 km y los 160 km [6]; otras indican que cuando el perigeo debe estar entre 120 y 150 km [2]; pero la que se va a tener aquí en cuenta es la que indica que para 160 km de altitud, la reentrada se produce unas pocas horas más tarde [7], por lo que el criterio de parada se situará a esa altitud y se realizará una comprobación de la veracidad de dicha afirmación.

### 3.3. Resultados

#### 3.3.1. Caso práctico de tres satélites en órbita baja.

Las predicciones de los tiempos de vida o de la fecha de reingreso de los satélites son de gran interés para los planificadores, usuarios, seguidores de satélites, y con frecuencia para el público en general.

La predicción del tiempo de vida de satélites depende como ya se vio de muchos parámetros. Incluso con un modelo atmosférico completo, la descripción de las variaciones con el tiempo, estación, la latitud y la altitud, la especificación completa de decaimiento orbital no es posible debido a la incertidumbre en la predicción de la posición del satélite.

Aun cuando la mayor parte de estos son conocidos parece que hay un nivel irreducible debajo del cual no es posible predecir. Este nivel parece ser alrededor del 10% de la vida restante de satélite, con independencia de la duración de esta. En otras palabras, el error en la predicción de la desintegración de un satélite que se espera se mantenga en el aire durante unos 10 años es de un año como mínimo.

Se realizó la estimación de dicho tiempo de vida a los tres satélites esféricos que se indicaron con anterioridad: Oderacs A, Oderacs B y Oderacs E (véase tabla 3-3). Los resultados se muestran a continuación:

	SIN J2 (H=160KM)	CON J2 (H=160KM)	CON J2 (H=100KM)
<b>ODERACS A</b>	105.8266 días	92.4836 días	92.7938 días
<b>ODERACS B</b>	105.4845 días	92.2221 días	92.5397 días
<b>ODERACS E</b>	166.6871 días	145.9202 días	146.3989 días

Tabla 3-3. Tiempos de vida para los satélites en estudio.

Se pueden observar tres columnas:

- En la primera, se ha simulado el movimiento del satélite teniendo sólo en cuenta la resistencia atmosférica como perturbación, es decir, se ha supuesto que la tierra es una esfera perfecta y no tiene asimetrías, luego el  $J_2$  no se tiene en cuenta. Además, se ha tomado la altitud de 160 kilómetros como el punto de reentrada a partir del cual se termina el tiempo de vida del satélite.
- En la segunda, a diferencia de la primera, se tienen en cuenta ambas perturbaciones, la resistencia atmosférica y el achatamiento terrestre. Se toma como altitud de reentrada los 160 kilómetros.
- En la tercera columna, la única diferencia respecto a la anterior es la altitud del punto de reentrada el cual se sitúa en 100 kilómetros. Ahora se indica el porqué de esa simulación.

Se comenzará explicando todos los aspectos importantes vistos con los resultados y las conclusiones tenidas en cuenta, si bien antes, se representa la proyección del radio según el eje  $x$  frente a la del radio según el eje  $y$  (véase figura 3-6), en la que se puede observar un círculo en el que se aprecia alguna imperfección o asimetría debido a las perturbaciones introducidas en el modelo.

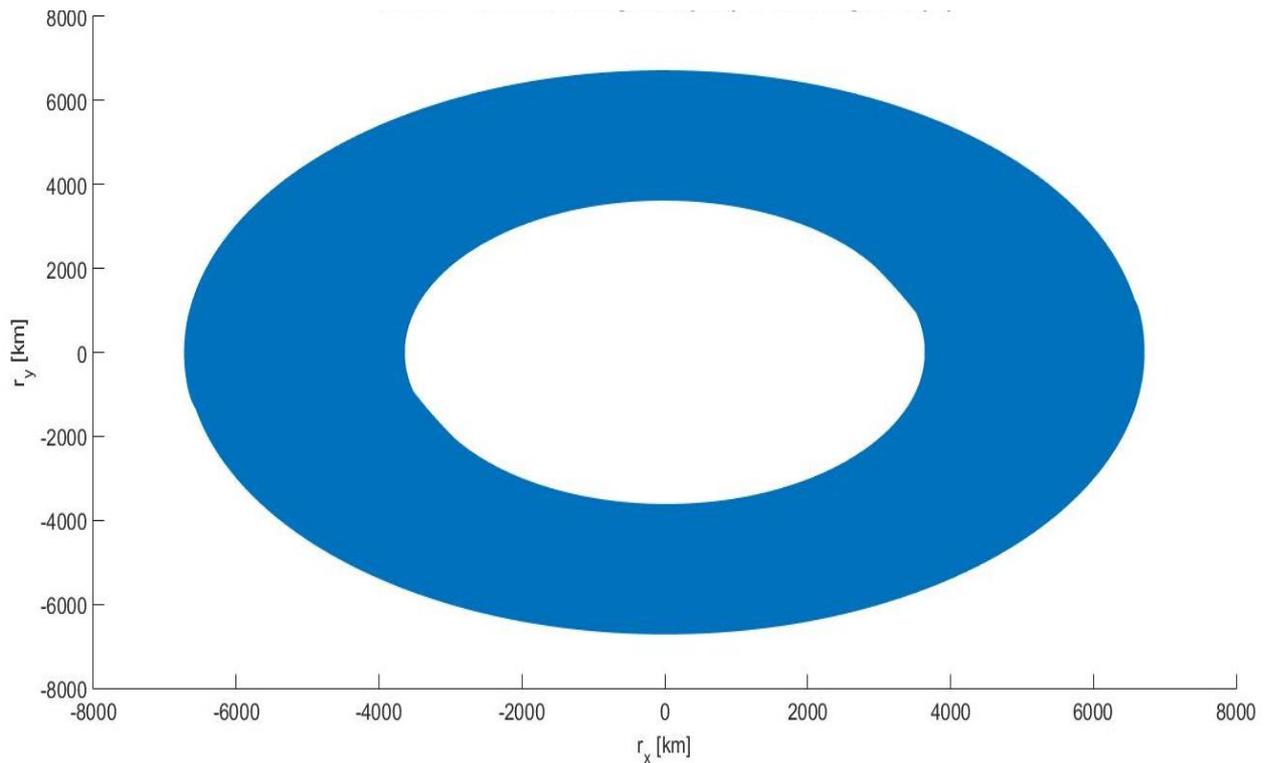


Figura 3-6. Relación entre el radio según el eje  $x$  y el radio según el eje  $y$ .

Para empezar, y vista la diferencia entre el caso en el que solo se modela la resistencia atmosférica y en la que también se tiene en cuenta la perturbación del  $J_2$ , se ha de indicar que dicha perturbación es de importancia y que se debe añadir a la hora de realizar un modelado lo más realista posible para un buen resultado en el tiempo de vida del satélite. La diferencia de tiempo en los dos primeros satélites (casi idénticos) es de unos 13 días y en el último la cifra aumenta hasta los 21 días. Se observa de la importancia que tiene ya que la diferencia es bastante considerable y por ello se tendrá que considerar.

También es interesante la diferencia entre la segunda y tercera columna de la tabla 3-4. Ésta es de 0.3 días es decir de 6 horas aproximadamente. Y es la diferencia de tiempo en la que el satélite pasa de estar de 160 kilómetros de altitud a 100 kilómetros. Como se observa, la diferencia es prácticamente despreciable (tan solo horas) comparándola con los cerca de 100 días o los 150 del tercer satélite, es una diferencia pequeña por lo que es cierto lo visto en la bibliografía [7] que indicaba que podía suponerse los 160 km de altitud ya que pasada esta altitud el satélite tardaba unas pocas horas en caer. Dicho fenómeno es debido a que la densidad de la atmósfera aumenta fuertemente a esas altitudes haciendo que la perturbación de la resistencia atmosférica también lo haga y por ende, el satélite caiga mucho más rápido.

A continuación se muestran dos figuras de cada uno de los satélites anteriormente modelados (Oderacs-A, Oderacs-B, Oderacs-E) y figuras 3-7, 3-8, 3-9, 3-10, 3-11, 3-12 respectivamente de la evolución de la altitud y de la velocidad respecto al tiempo.

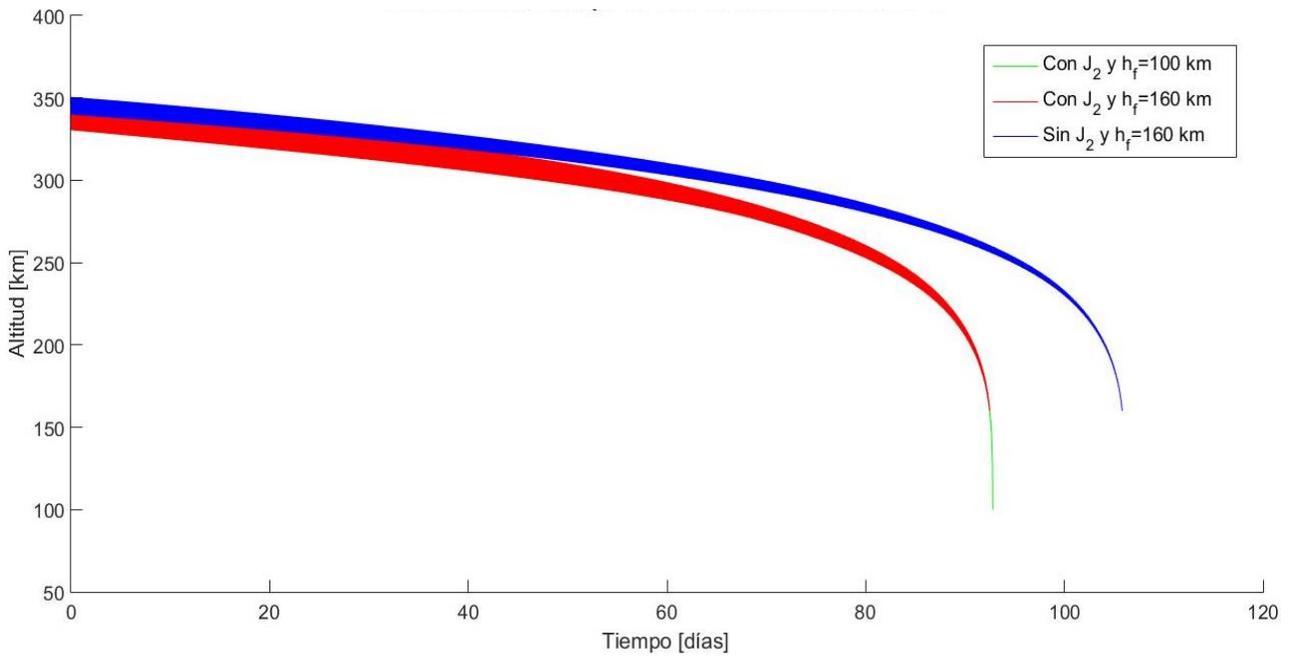


Figura 3-7. Altitud del satélite Oderacs-A frente al tiempo.

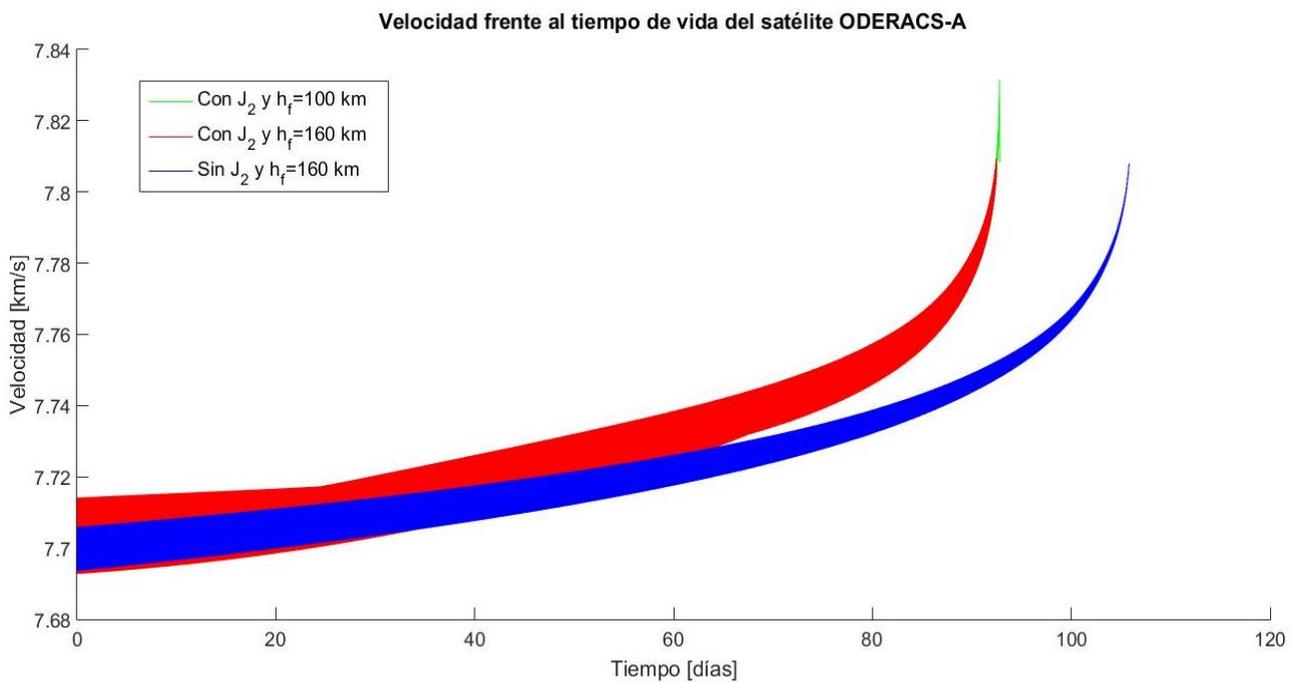


Figura 3-8. Velocidad del satélite Oderacs-A frente al tiempo.

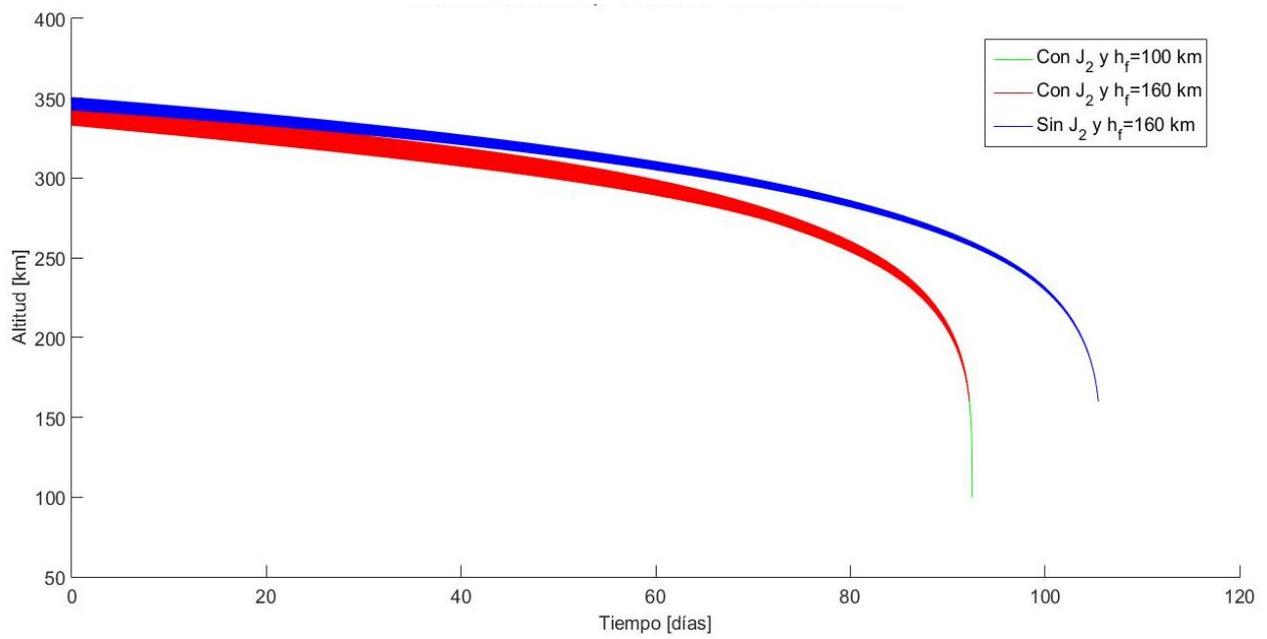


Figura 3-9. Altitud del satélite Oderacs-B frente al tiempo.

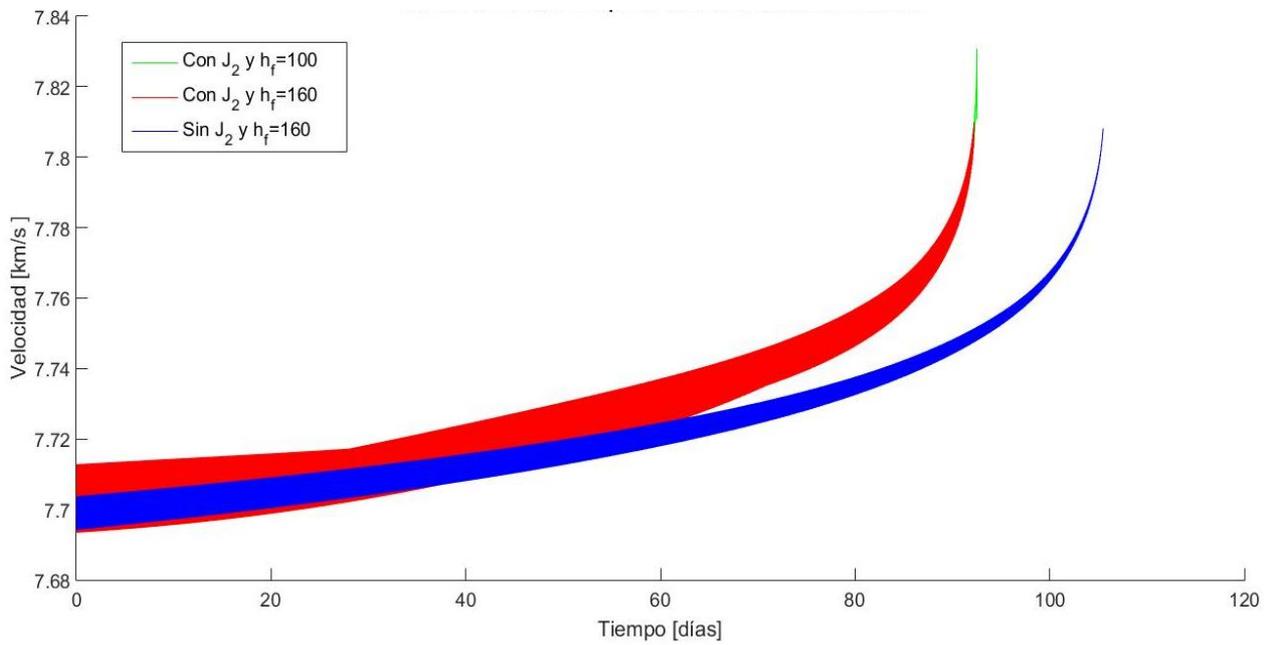


Figura 3-10. Velocidad del satélite Oderacs-B frente al tiempo.

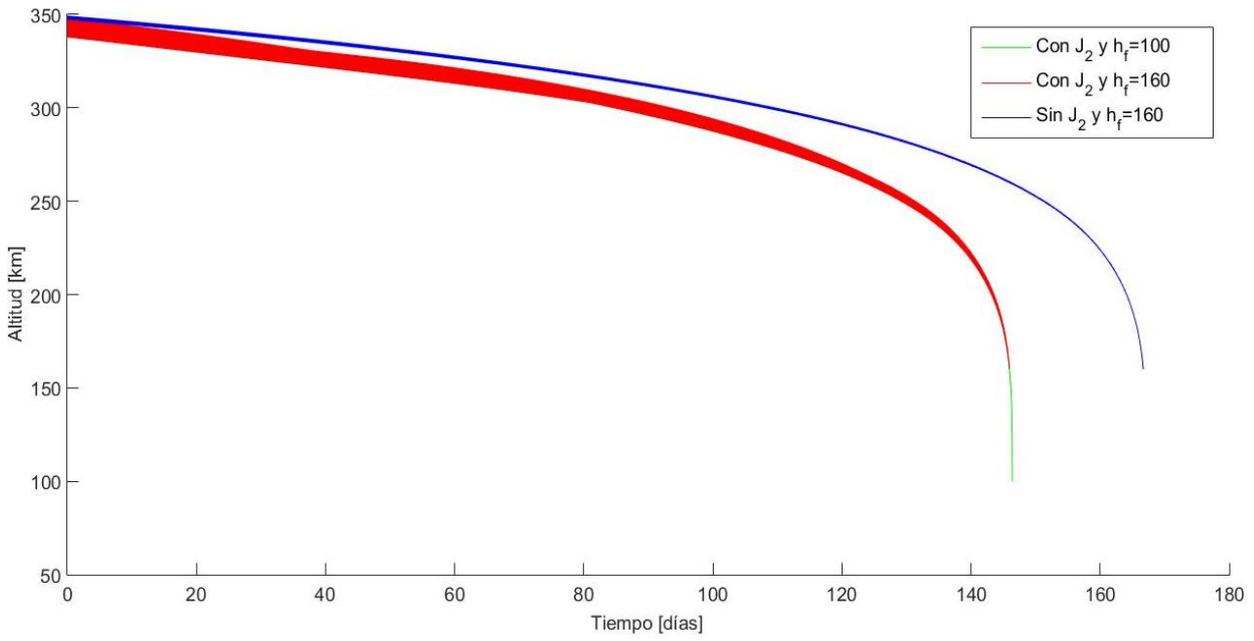


Figura 3-11. Altitud del satélite Oderacs-E frente al tiempo.

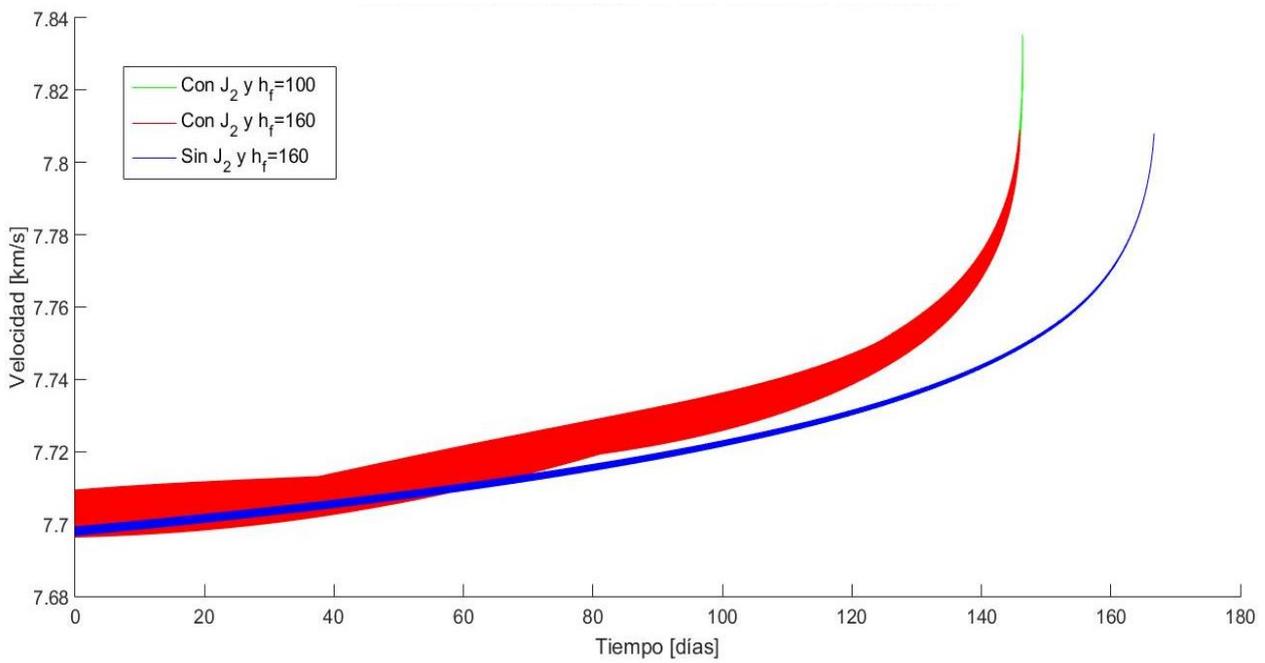


Figura 3-12. Velocidad del satélite Oderacs-E frente al tiempo.

Por último, indicar que estos satélites cuya reentrada ya fue efectuada presentan el tiempo de vida mostrado a continuación en la tabla 3-4:

Spacecraft Name	True Lifetime (Days) <sup>23</sup>
ODERACS-A	235.1
ODERACS-B	235.4
ODERACS-E	384.4

Tabla 3-4. Tiempo real de vida de los satélites en estudio.

La diferencia con respecto al que se ha obtenido en este proyecto (tabla 3-4) es del 60% aproximadamente. Dicha diferencia puede parecer muy alta, sin embargo, se deben indicar algunos datos:

- En primer lugar, cabe indicar que dicho estudio es una predicción y que por tanto nunca podrá llegar a ser totalmente exacta. Son muchos los factores a predecir y cuyo comportamiento además de muy difícil de obtener, es aleatorio en cierta medida.
- Es por ello por lo que se tienen que hacer buenos modelos de estos parámetros o factores para tener una buena estimación. Sin embargo en este caso, por ejemplo se ha supuesto un modelo atmosférico estático y algo sencillo ya que la complejidad de modelar todos los factores (ya indicados anteriormente) que en él aparecen, es muy alta y en muchos casos no se tienen medios para poderlos tener en cuenta.
- Debido a todas estas suposiciones y simplificaciones que se han supuesto, el resultado no ha sido lo preciso que se hubiese querido. Aun así, las consideraciones tenidas en cuenta en la plataforma *MATLAB* y los razonamientos llevados a cabo han permitido mejorar en cierta medida los resultados.
- Aun difiriendo de los datos reales del tiempo de vida, los resultados obtenidos entre sí tienen coherencia, también la comprobación realizada de la altitud entre 160 y 100 kilómetros.

### 3.3.2. Estudio paramétrico de $m_v$ , $S$ y $C_D$

Se presenta ahora un estudio para el cual tomando un satélite de referencia, en este caso el Oderacs-A, se realizará una variación de los parámetros que afectan al coeficiente balístico, es decir, la masa del satélite ( $m_v$ ), la superficie frontal de éste ( $S$ ) y el coeficiente de arrastre ( $C_D$ ). El estudio se hará para cada uno de los parámetros por separado obteniendo la evolución de la altitud respecto al tiempo de vida para cada caso y viendo también como afecta dicho parámetro al tiempo final del satélite.

Se comienza por variar la masa del satélite respecto al tiempo para la cual se obtiene la siguiente evolución de la altitud en la figura 3-13:

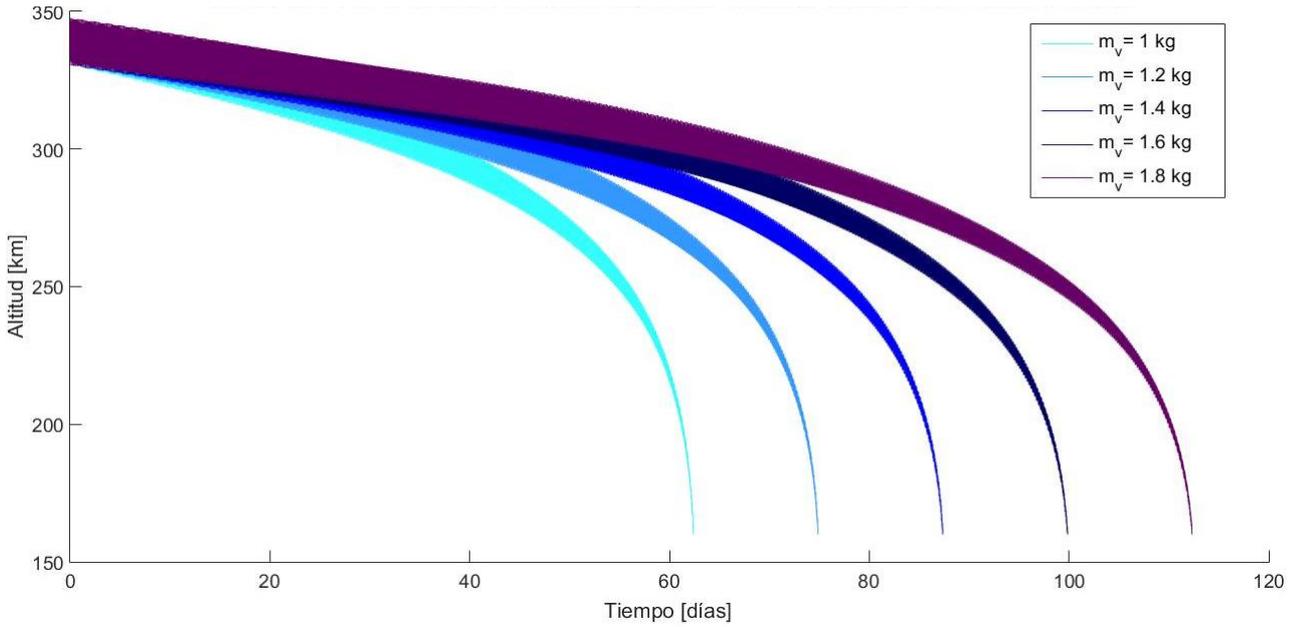


Figura 3-13. Comparación de la variación de altitud respecto al tiempo para satélite con diferente masa.

Se observa como, a medida que la masa del satélite aumenta, manteniendo la misma superficie frontal y el mismo coeficiente de resistencia, el tiempo de vida también lo hace. Esto es provocado por un aumento del coeficiente balístico lo que a su vez genera una disminución de la fuerza provocada por la resistencia atmosférica. Dicha disminución de la fuerza hace consecuentemente que el satélite no pierda altitud tan rápidamente y por tanto se mantenga mas tiempo en órbita baja previo a la reentrada.

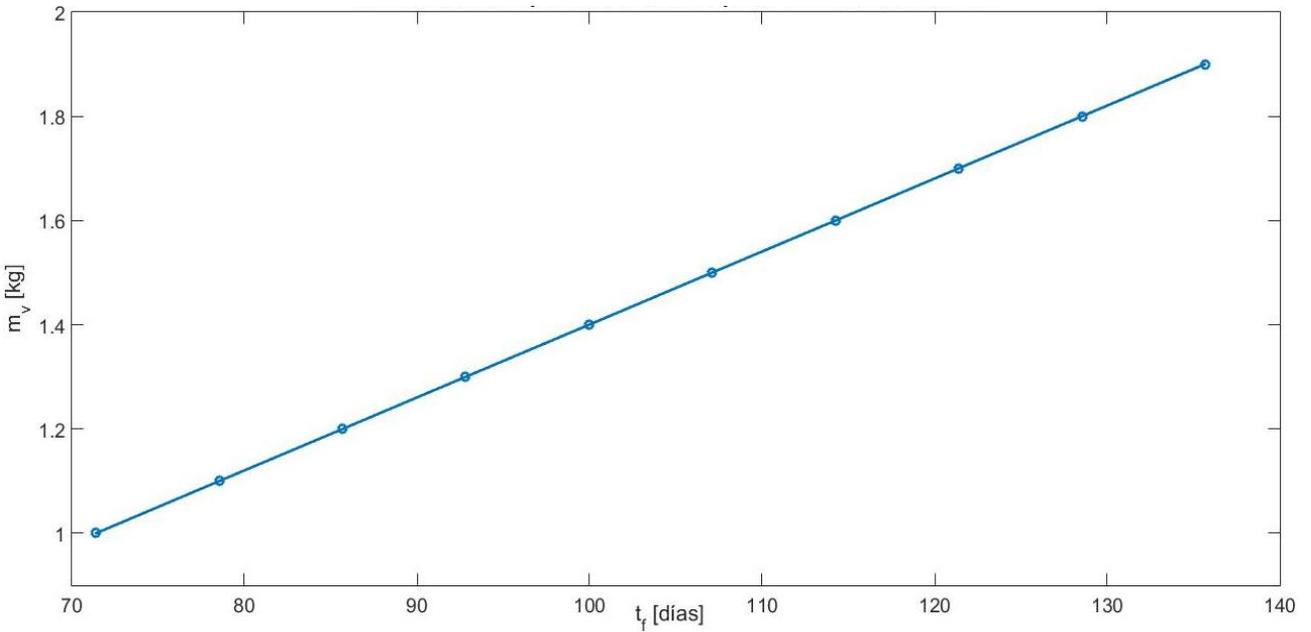


Figura 3-14. Variación del tiempo final de vida respecto a la masa del satélite.

Se puede apreciar en la figura 3-14 como una variación de masa de apenas 200 gramos puede en las mismas condiciones atmosféricas y con los mismos elementos orbitales iniciales generar una variación de aproximadamente 15 días. Con una variación de 800 gramos los tiempos de vida distan unos 55 días aproximadamente.

En segundo lugar se realizó el mismo análisis pero en este caso manteniendo constantes la masa del satélite y el coeficiente de resistencia y variando la superficie. El resultado se muestra en la figura 3-15 a continuación:

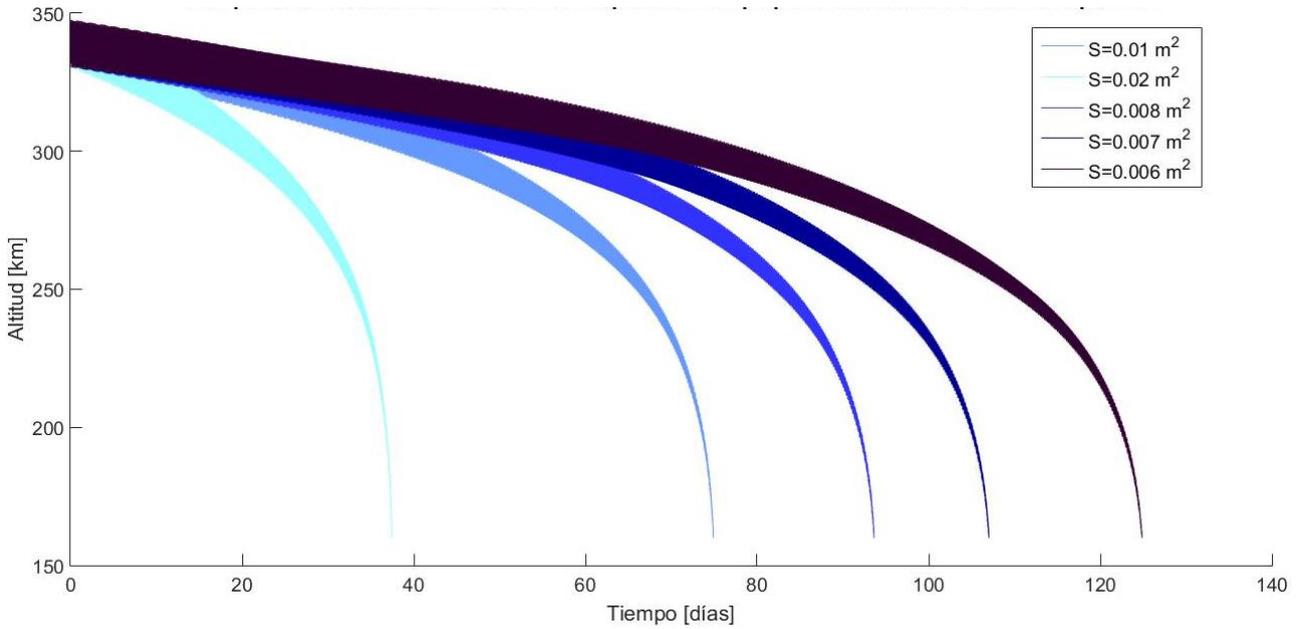


Figura 3-15. Comparación de la variación de altitud respecto al tiempo para satélites con diferente superficie.

Se aprecia de nuevo como manteniendo el resto de parámetros constantes y tan solo variando la superficie, a medida que esta disminuye provoca una disminución en el coeficiente balístico que a su vez, como en el caso anterior, disminuye la fuerza de resistencia que ejerce la atmosfera sobre el satélite y por tanto el tiempo de vida se ve aumentado.

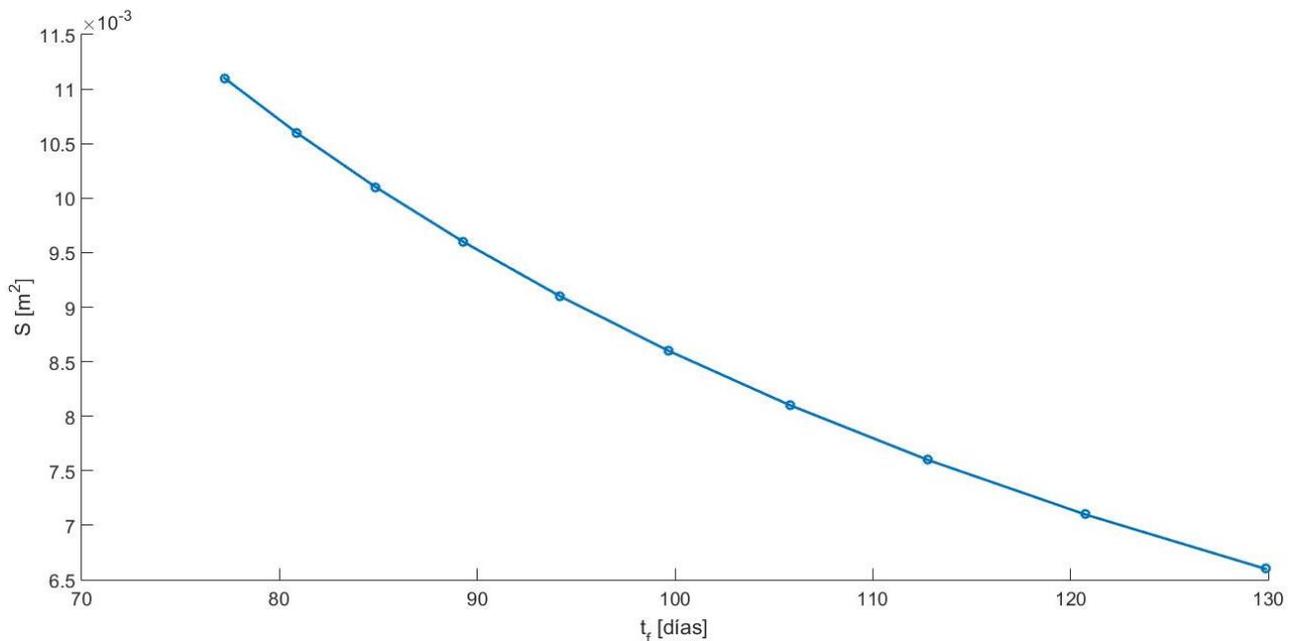


Figura 3-16. Variación del tiempo final de vida con la superficie del satélite.

Se puede apreciar en la figura 3-16 como disminuyendo el área frontal del satélite a la mitad aumenta el tiempo de vida prácticamente al doble. Al igual que en el caso anterior, se puede observar la fuerte dependencia del tiempo de vida con estos parámetros.

A continuación y por último, (ver figura 3-17) se muestra la variación del coeficiente de resistencia manteniendo el resto de parámetros. El resultado es el siguiente:

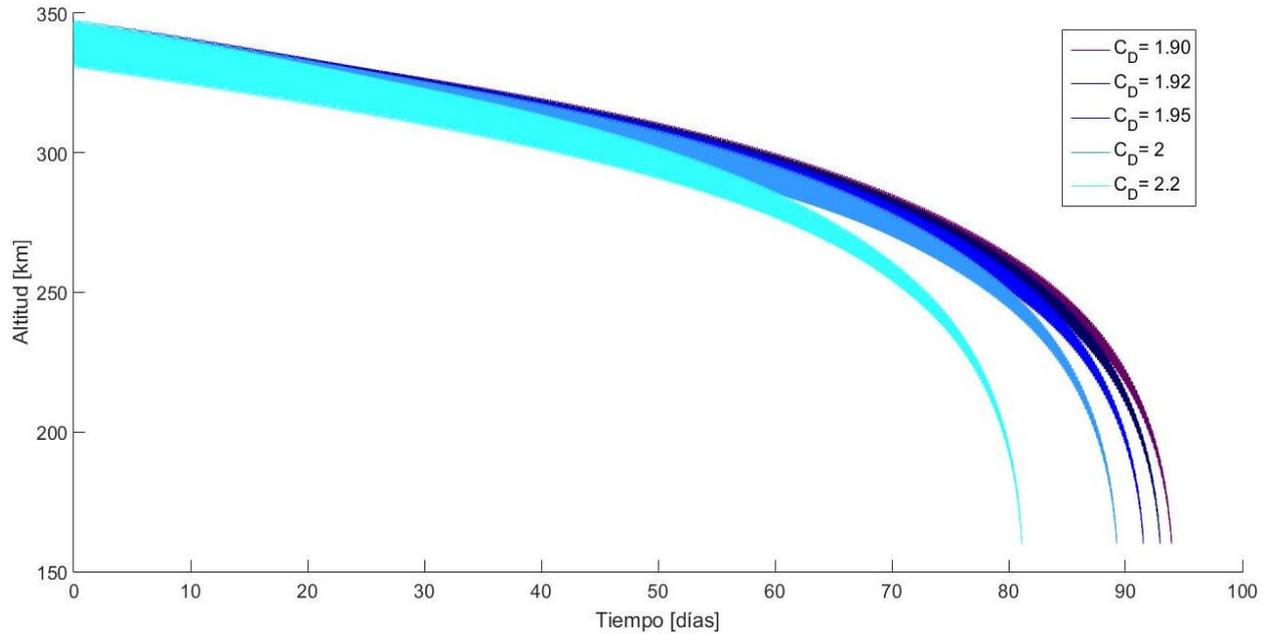


Figura 3-17. Comparación de la variación de altitud respecto al tiempo para diferentes  $C_D$ .

Se observa como a medida que se reduce el coeficiente de resistencia el tiempo de vida aumenta por el mismo razonamiento que en los dos anteriores casos. Disminuye el coeficiente balístico y eso provoca a su vez la disminución de la fuerza de resistencia que le genera la atmósfera.

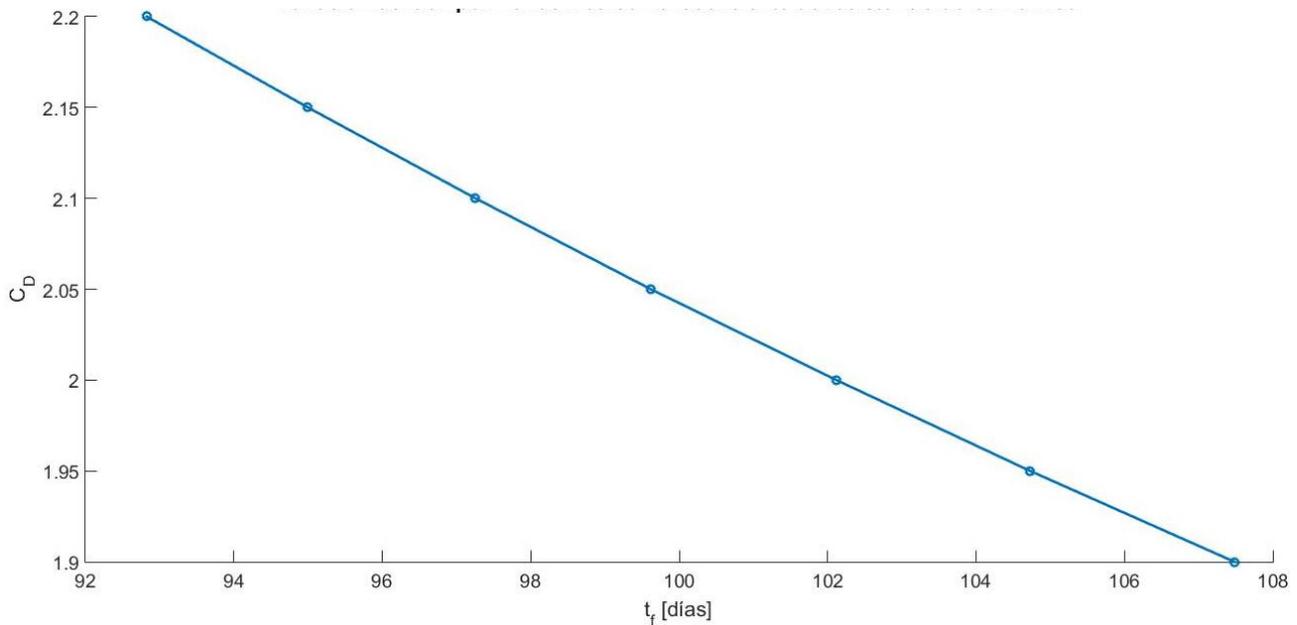


Figura 3-18. Variación del tiempo final de vida con el coeficiente de resistencia atmosférico.

En este caso, las variaciones que se han realizado del coeficiente de resistencia para este satélite han sido acordes al intervalo de valores válido que puede tomar dicho coeficiente para un satélite esférico en órbita baja y en el que se puede observar (figura 3-18), como el tiempo de vida varía aproximadamente 15 días variando el coeficiente de resistencia aerodinámico tres décimas.

### 3.3.3. Evolución de los elementos orbitales con el tiempo

Previo a realizar un estudio paramétrico con los elementos orbitales sobre el tiempo de vida de un satélite, al igual que se realizó anteriormente con la masa, la superficie y el coeficiente de resistencia del satélite, es interesante ver como evolucionan dichos elementos a medida que el satélite avanza en el tiempo. Se mostrarán dos casos: el primero en el cual se tendrá en cuenta tan solo la resistencia atmosférica y un segundo en el que además de ésta, se añadirá la perturbación debida al  $J_2$ . Se ha de indicar que dichas evoluciones se realizan para el satélite *Oderacs-A*, es decir, con sus elementos orbitales iniciales.

Comenzando por el semieje mayor de la órbita y para el primer caso con la perturbación debida a la resistencia atmosférica se obtiene en la figura 3-19:

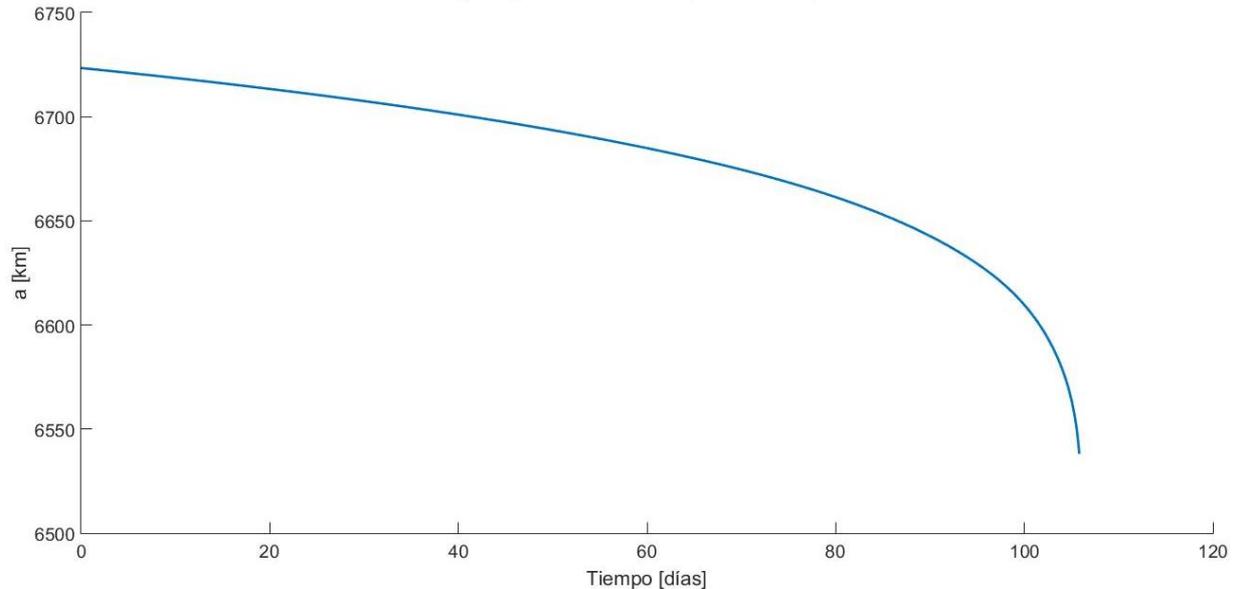


Figura 3-19. Evolución del semieje mayor de la órbita respecto al tiempo.

En ella se observa el decaimiento orbital del satélite reduciéndose la altitud con el avance del tiempo. Se observa además del efecto secular producido y un pequeño efecto periódico que hace oscilar el valor del semieje mayor entre un máximo y un mínimo. Sin embargo, este efecto se ve acrecentado por la perturbación debida al  $J_2$  como se puede observar a continuación en la figura 3-20:

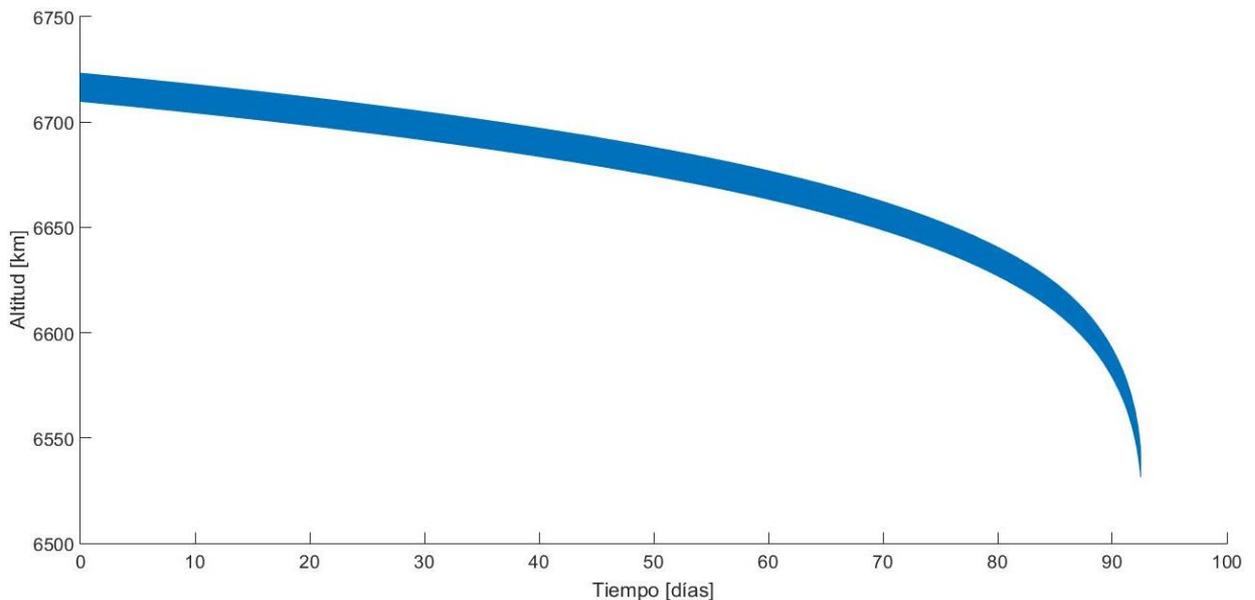


Figura 3-20. Evolución del semieje mayor de la órbita respecto al tiempo teniendo en cuenta el  $J_2$ .

En cuanto a la excentricidad sin el efecto del  $J_2$ , se aprecia en la figura 3-21 como a medida que avanza el tiempo se reduce su valor tendiendo a cero (circularización de la órbita) aunque nunca se mantenga en esa cantidad.

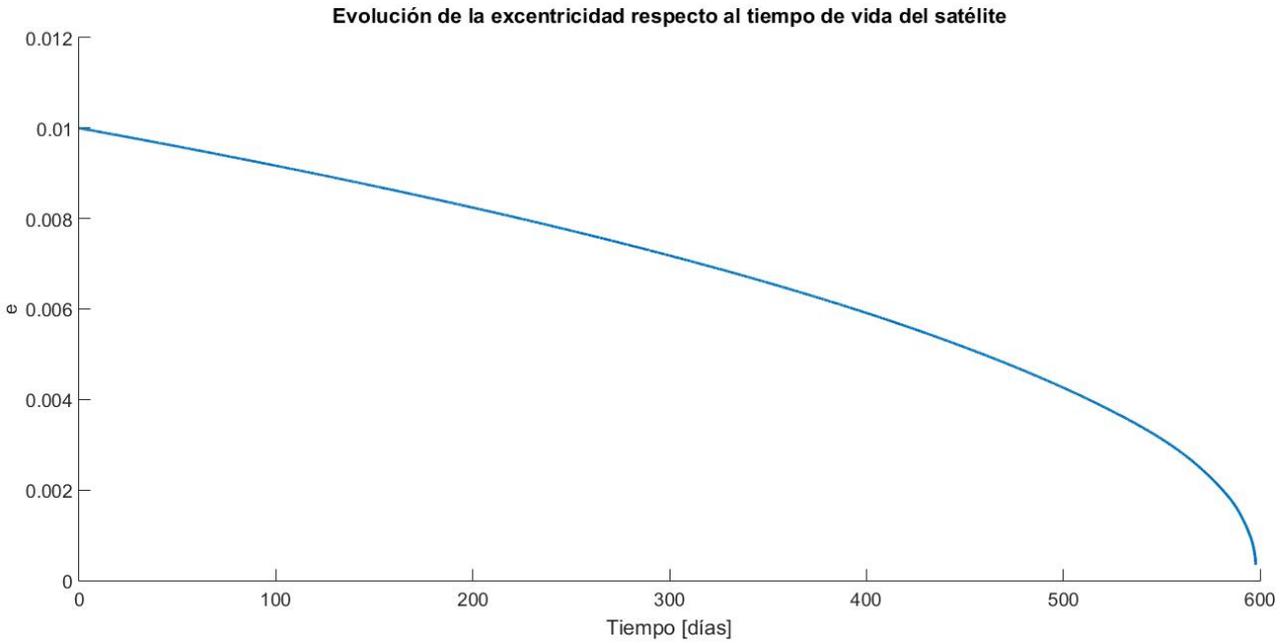


Figura 3-21. Evolución de la excentricidad de la órbita del satélite respecto al tiempo.

Para el caso en el que aparecen los dos perturbadores (véase figura 3-22), la excentricidad sufre un efecto periódico importante el cual se puede apreciar en la siguiente figura. Se producen oscilaciones alrededor del valor inicial de ésta que ha sido introducido ( $e=0.0008$ ).

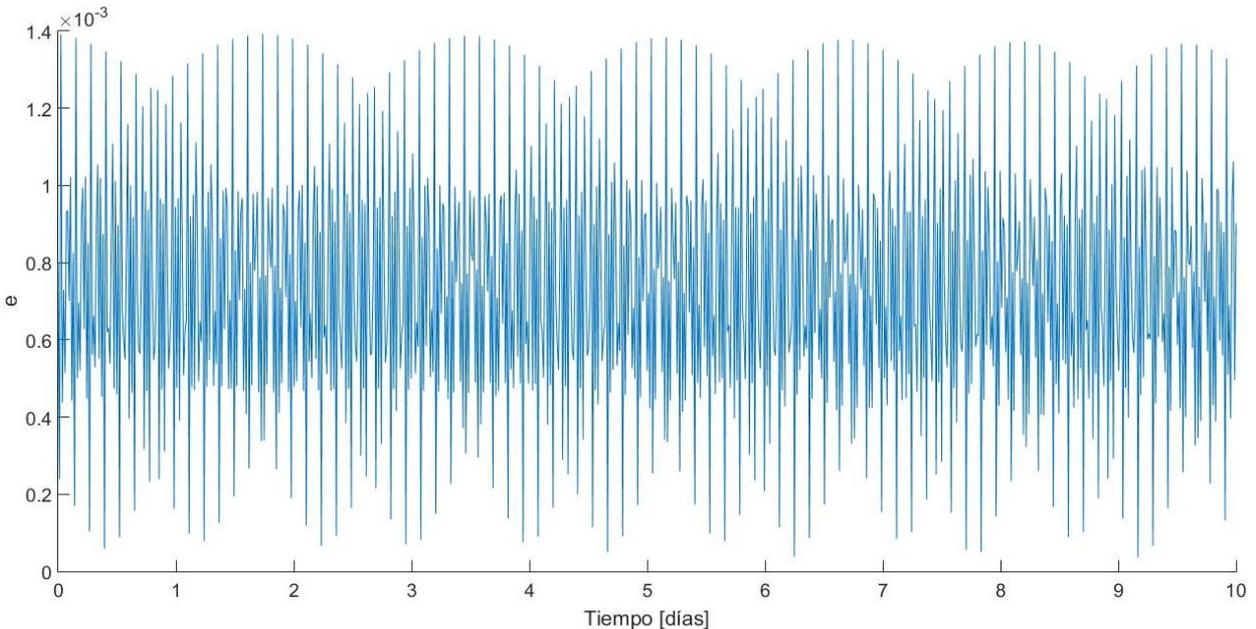


Figura 3-22. Evolución de la excentricidad de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el  $J_2$ .

Una vez observado la evolución del semieje mayor de la órbita y de la excentricidad se puede obtener otra figura a partir de ambos como es la evolución del radio de perigeo y el radio de apogeo respecto al tiempo. Ambos se definen como:

$$r_p = a(1 - e) \quad (3.17)$$

$$r_a = a(1 + e) \quad (3.18)$$

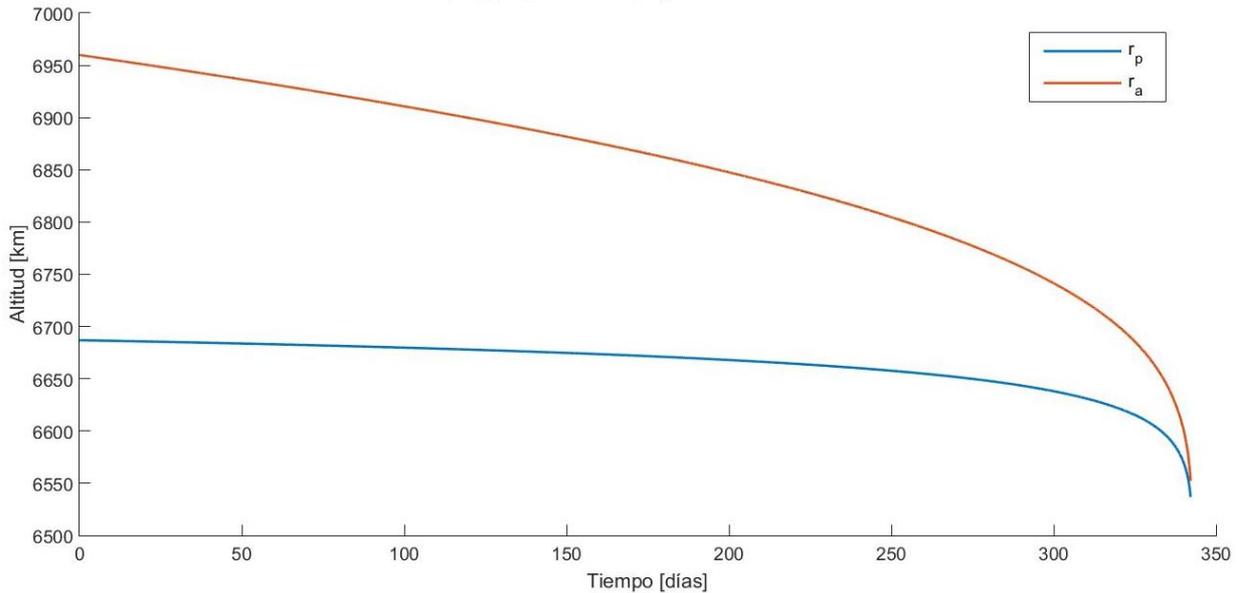


Figura 3-23. Evolución del radio de perigeo y apogeo de la órbita del satélite respecto al tiempo.

Se puede ver en primer lugar el caso con tan solo la resistencia atmosférica (figura 3-23). Se observa como se reduce el radio de apogeo drásticamente mientras el radio de perigeo prácticamente se mantiene constante produciéndose el efecto conocido como la circularización de la órbita.

A continuación (figura 3-24), se muestra el mismo efecto pero a diferencia del anterior se tiene en cuenta el efecto de perturbación producido por el achatamiento terrestre generándose una oscilación en ambos radios:

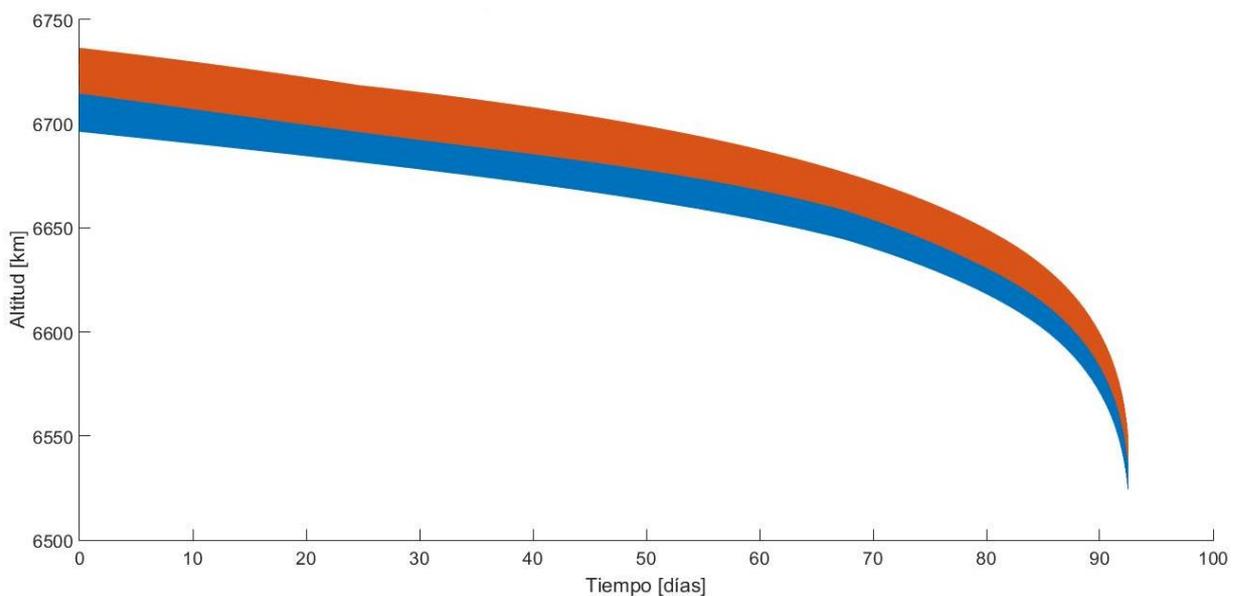


Figura 3-24. Evolución del radio de perigeo y apogeo de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el  $J_2$ .

Representando el radio en la dirección del eje  $x$  frente al radio en la dirección del eje  $y$  para un caso con mayor excentricidad (figura 3-25), se puede observar como la forma es más elíptica que en el de los satélites *Oderacs* ya que estos tienen una menor excentricidad de inicio y los radios de apogeo y perigeo son prácticamente los mismos.

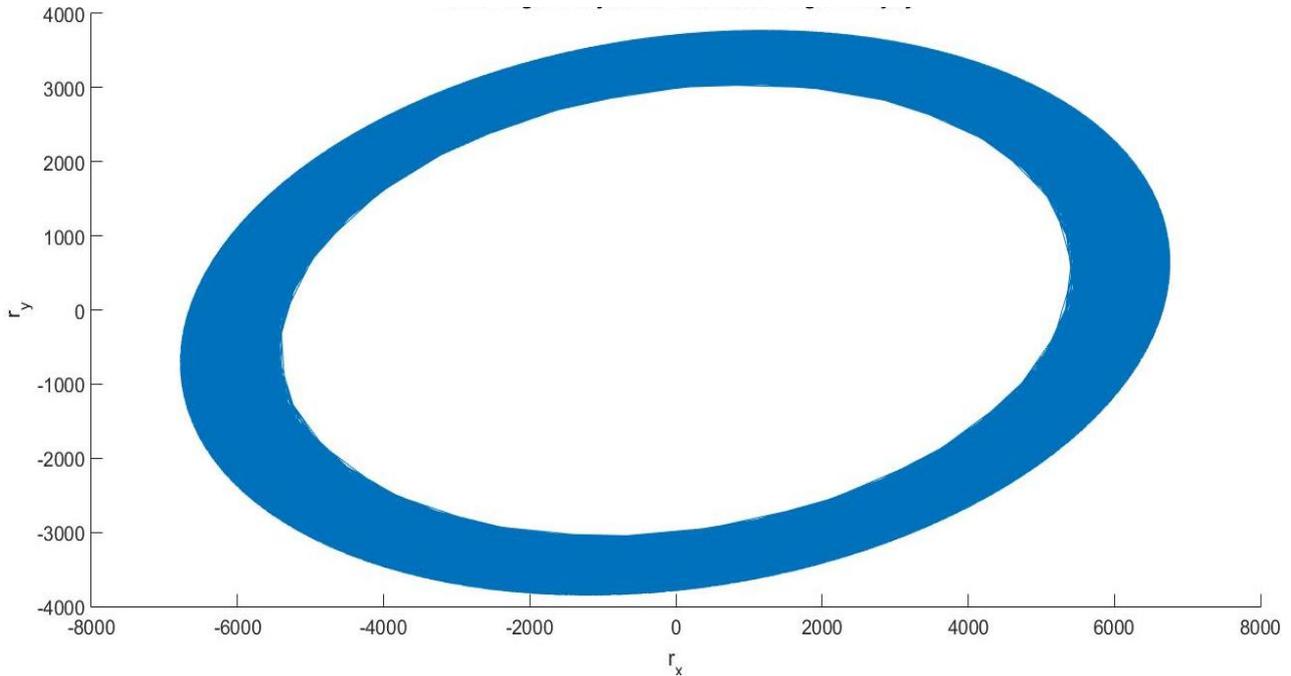


Figura 3-25. Radio de la órbita según el eje  $x$  frente al radio según el eje  $y$ .

Continuando por la inclinación y en primer lugar en el caso de la resistencia atmosférica sin la perturbación del  $J_2$ :

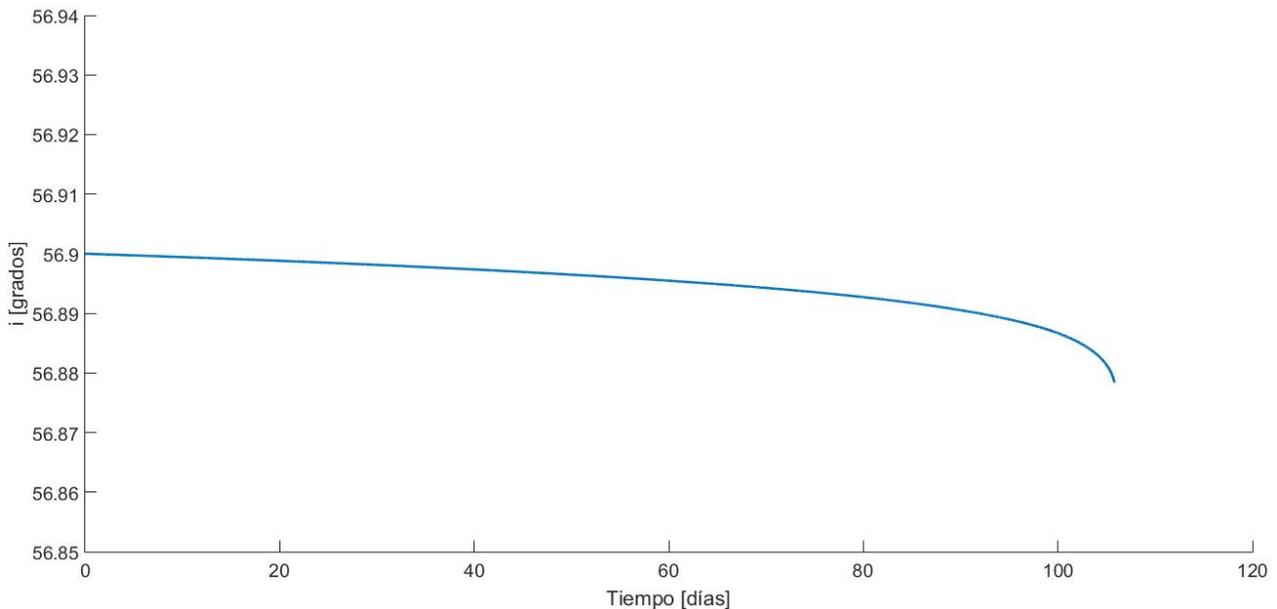


Figura 3-26. Evolución de la inclinación de la órbita del satélite respecto al tiempo.

En la figura 3-26 se observa como la inclinación se mantiene constante prácticamente, aunque con una tendencia decreciente de dos centésimas de grado en los 100 días de decaimiento orbital. esto es debido a que la resistencia atmosférica genera un efecto secular pero muy pequeño sobre este ángulo.

Para el caso con el  $J_2$  se vuelve a observar la misma tendencia y prácticamente el valor constante que se mantiene en el tiempo de la inclinación (ver figura 3-27). En este caso con una mayor oscilación (efecto periódico) originado por esta nueva perturbación tenida en cuenta:

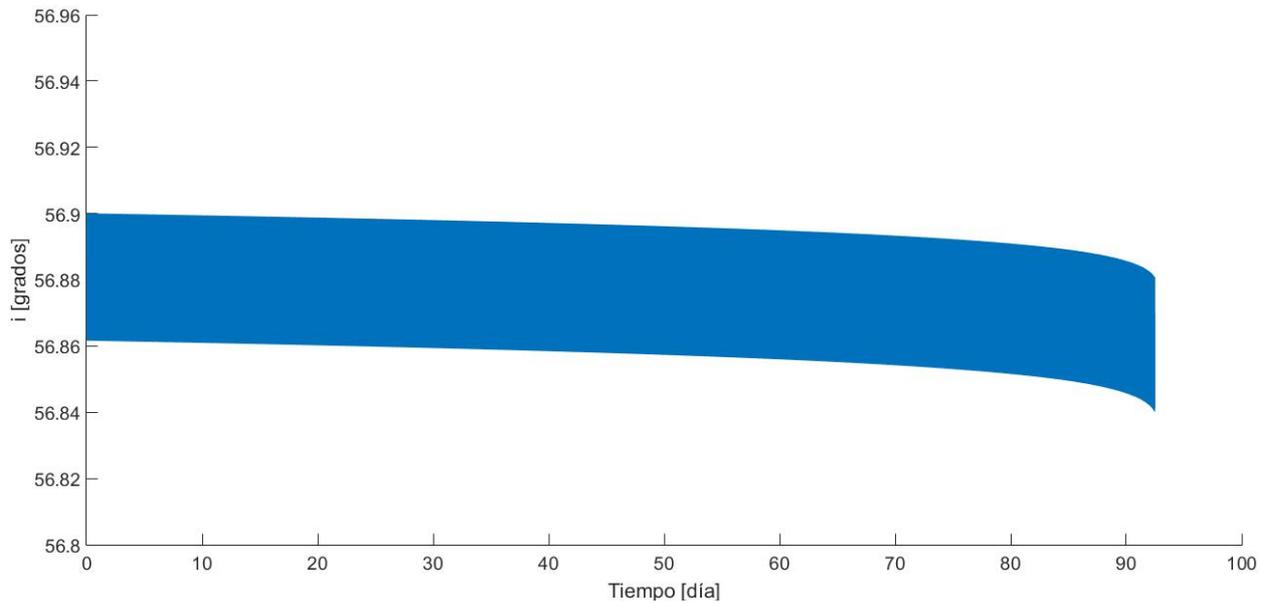


Figura 3-27. Evolución de la inclinación de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el  $J_2$ .

En cuanto al RAAN se puede observar como en el caso de la resistencia atmosférica como única perturbación (figura 3-28), se mantiene constante en el tiempo (con un pequeño efecto periódico) y produciéndose una perturbación despreciable por su valor en la reentrada del satélite.

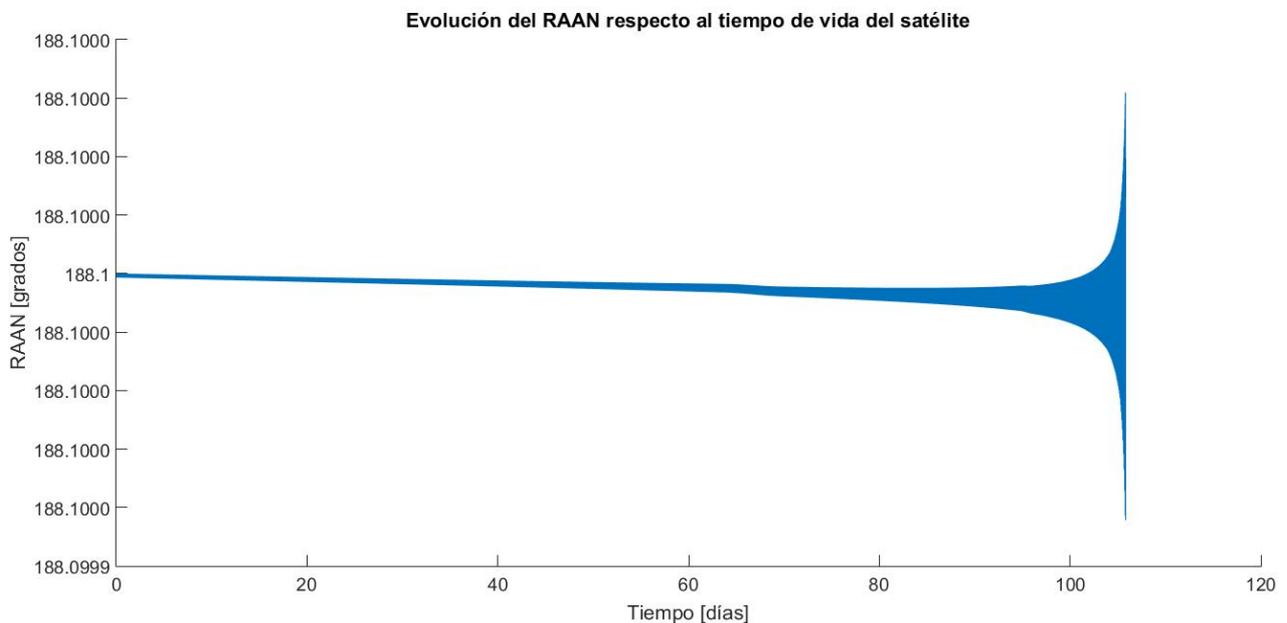


Figura 3-28. Evolución del RAAN de la órbita del satélite respecto al tiempo.

En el caso en el que se tiene en cuenta la perturbación del  $J_2$  se produce una variación secular en el RAAN conocida como regresión del nodo ascendente y que se puede apreciar en la figura 3-29:

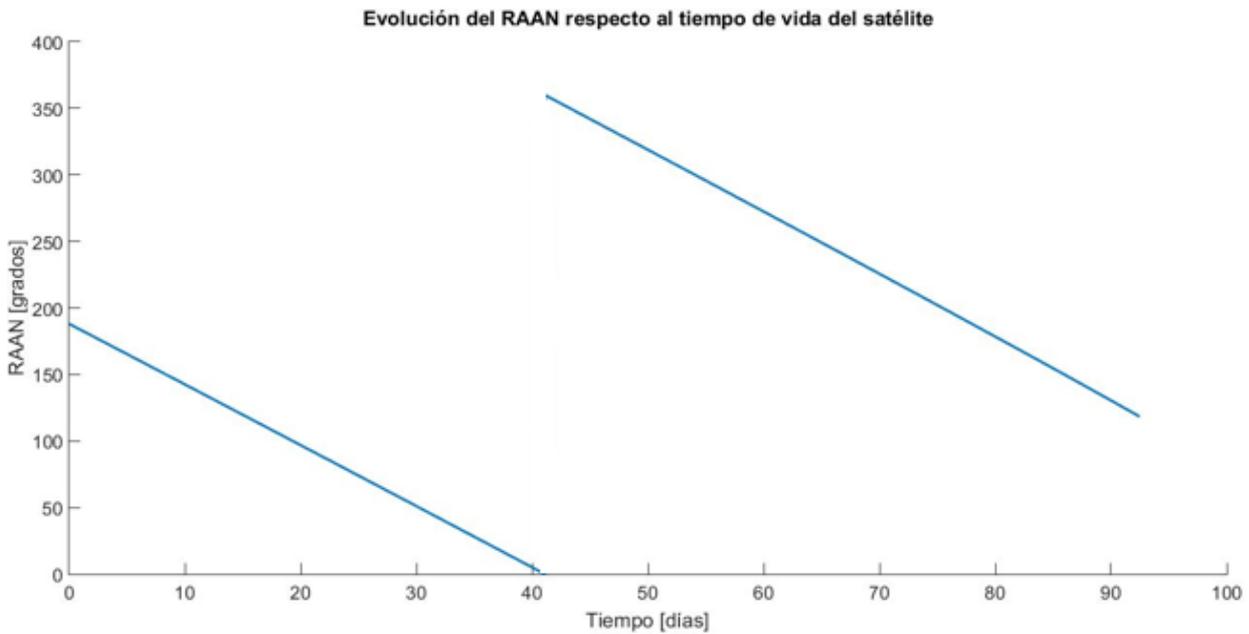


Figura 3-29. Evolución del RAAN de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el  $J_2$ .

Esta figura permite comprobar si la pendiente de dicho ángulo respecto al tiempo coincide con el valor analítico:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{-3J_2 n R_{\oplus}^2}{2p^2} \cos i \quad (3.19)$$

Para los valores iniciales que se tienen para el satélite *Oderacs-A* se calculó dicha pendiente obteniéndose el siguiente valor:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -4.5261 \left[ \frac{\text{grados}}{\text{días}} \right] \quad (3.20)$$

Se puede ver más claro en la figura 3-30 si observamos el cambio para 10 días para los cuales se observan los aproximados 50 grados que deben haber avanzado los nodos.

También se realizó una representación de la evolución del argumento de perigeo respecto al tiempo (véase figura 3-30), en el que se puede observar como para el primer caso, tan solo con la resistencia atmosférica, no se produce ninguna variación exceptuando la producida también en la figura 3-30 en la que aparece un pequeño efecto periódico provocado por la propia resistencia atmosférica:

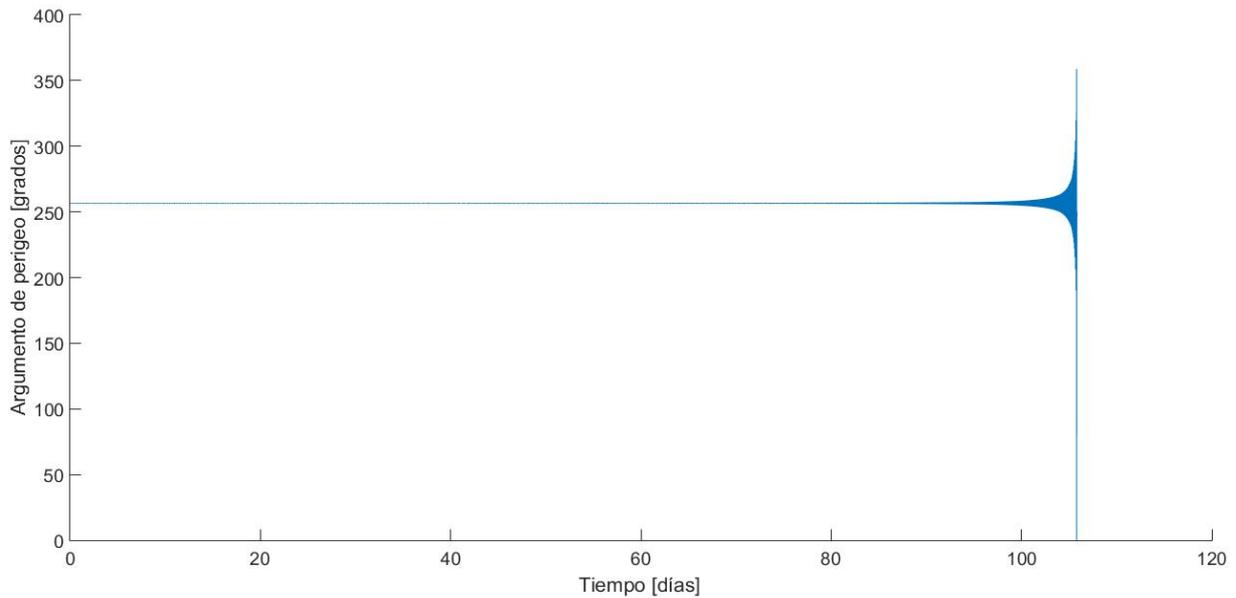


Figura 3-30. Evolución del argumento de perigeo de la órbita del satélite respecto al tiempo.

Al igual que con el RAAN, al argumento de perigeo también le afecta secularmente la perturbación del  $J_2$  pero en este caso la pendiente es positiva y por tanto, en vez de disminuir, el ángulo aumenta conociéndose el efecto como el avance del perigeo.

En este caso la pendiente tiene la siguiente forma:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3J_2 n R_{\oplus}^2}{4p^2} (5 \cdot \cos^2 i - 1) \quad (3.21)$$

Y el valor obtenido es:

$$\frac{d\Omega}{dt} = 2.0353 \left[ \frac{\text{grados}}{\text{días}} \right] \quad (3.22)$$

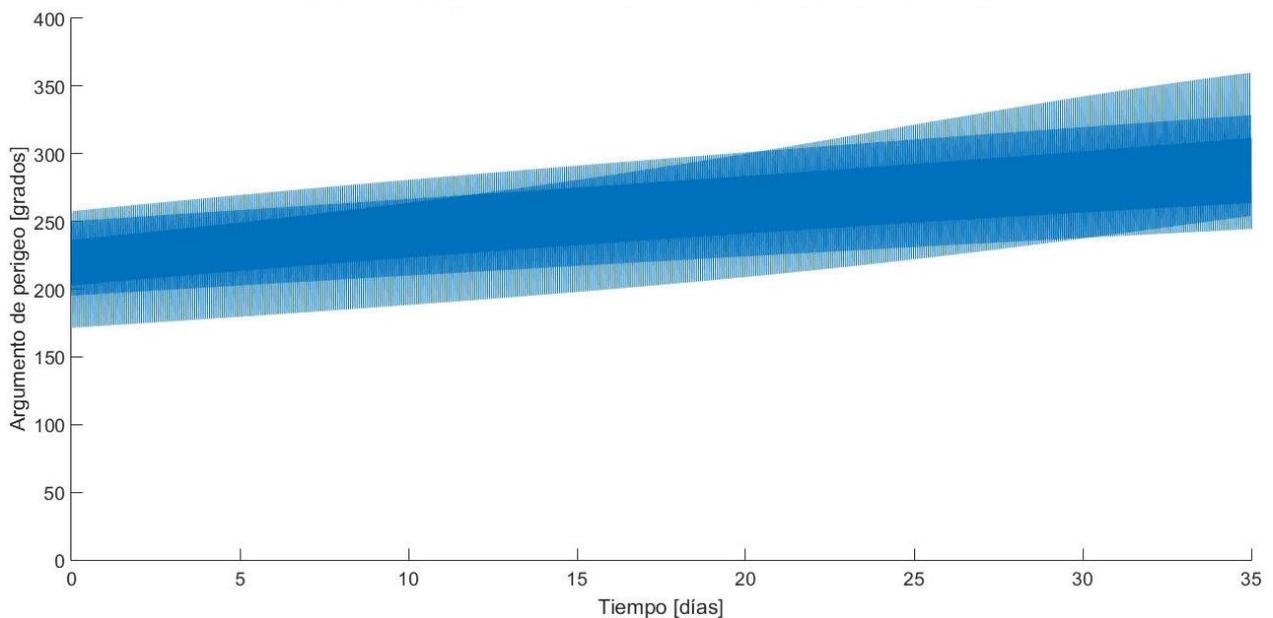


Figura 3-31. Evolución del argumento de perigeo de la órbita del satélite respecto al tiempo de vida teniendo en cuenta el  $J_2$ .

Al generar un mayor efecto periódico en el ángulo del argumento de perigeo es más complicado observar dicha

pendiente pero para 10 días se puede apreciar como el valor medio aumenta aproximadamente en 20 grados.

A partir de aproximadamente los 40 días el argumento de perigeo debido al valor tan bajo de la excentricidad deja de estar bien definido y oscila entre 0 y 360 grados hasta la reentrada del satélite. En estos casos se define un nuevo ángulo llamado argumento de latitud:

$$u = \omega + \theta$$

Dicho ángulo aparece cuando la línea de ápsides no queda bien definida. Y se utiliza para medir la posición del cuerpo desde el nodo ascendente en el sentido del movimiento.

Por último, se observa a continuación en la figura 3-32 la evolución de  $\theta$  respecto al tiempo de vida del satélite:

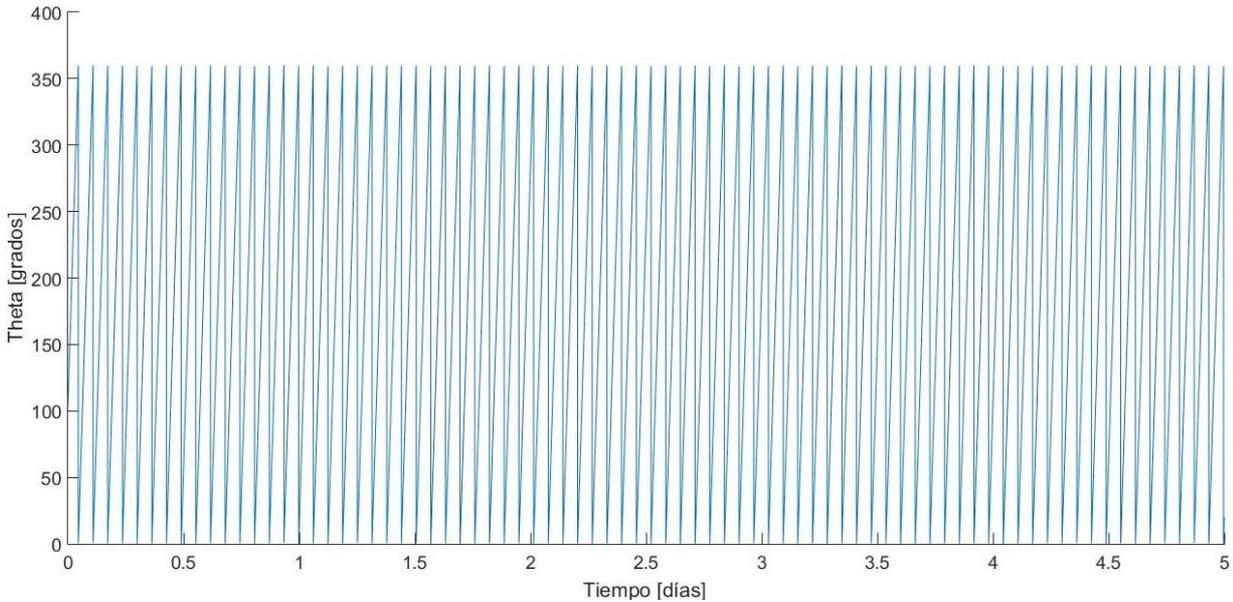


Figura 3-32. Evolución del  $\theta$  de la órbita del satélite respecto al tiempo.

Se observa el avance del ángulo theta desde los 0 grados hasta los 360, y cómo se producen 16 periodos por día, es decir, 16 vueltas completas a la órbita por día. Para tan solo la consideración de la resistencia atmosférica. Para el caso en el que se tenga en cuenta la perturbación del  $J_2$  (figura 3-33) se obtiene esa misma evolución del ángulo entre 0 y 360 grados pero con un pequeño efecto mostrado en la siguiente figura:

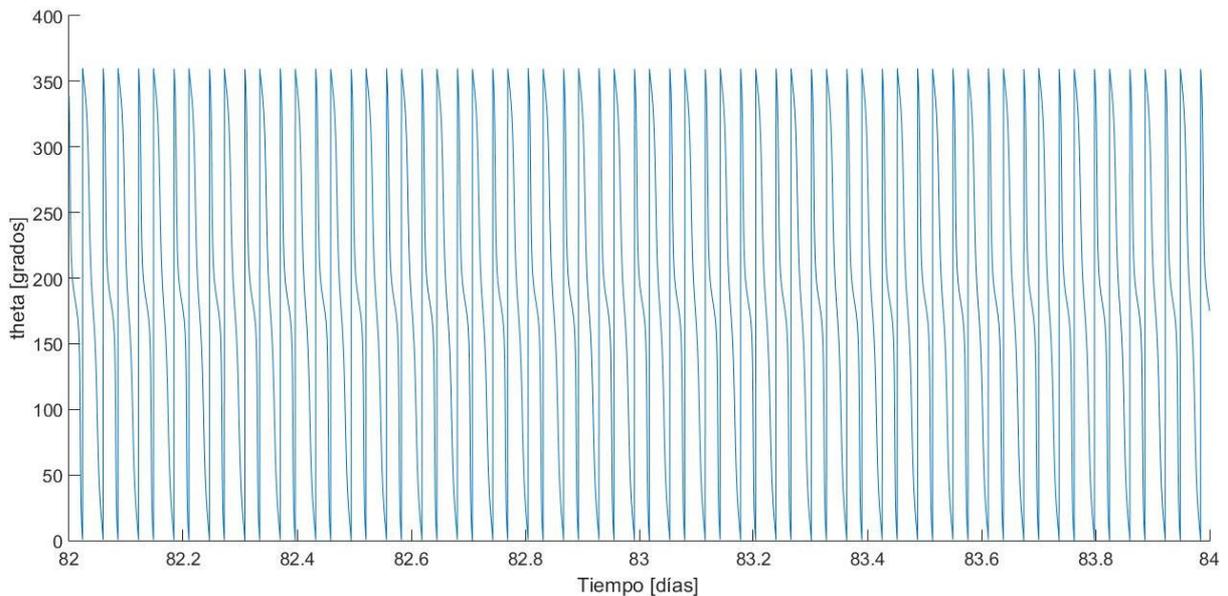


Figura 3-33. Evolución del  $\theta$  de la órbita del satélite respecto al tiempo teniendo en cuenta el  $J_2$ .

### 3.3.4. Estudio paramétrico de los elementos orbitales.

Una vez se ha estudiado la evolución de los elementos orbitales respecto al tiempo, se procede a realizar un estudio paramétrico de dichos elementos respecto al tiempo final de vida. Con ello quiere verse como afecta una variación de los elementos orbitales al tiempo de vida o si realmente les afectan.

Se comienza con el semieje mayor de la órbita para el cual se obtiene el resultado mostrado en la figura 3-34:

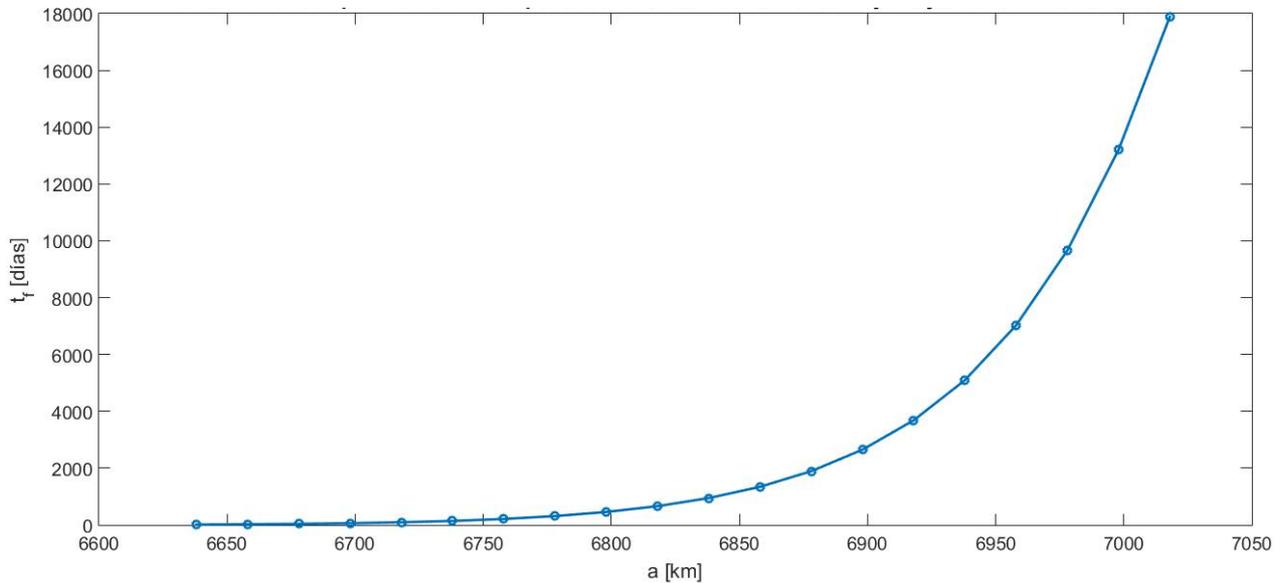


Figura 3-34. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales del semieje mayor de la órbita.

Se realizó un bucle en la cual se variaba el valor del semieje incrementándolo en 20 kilómetros cada iteración desde los 6638 hasta los 7038 kilómetros. Como se puede observar, un aumento del semieje mayor de la órbita produce un efecto igual en el tiempo de vida del satélite. Debido a que este se encuentra a más distancia de la tierra y por tanto, en una órbita más alta, tardará más en descender debido a que el efecto de la resistencia atmosférica es inferior a medida que el cuerpo se aleja de la Tierra y de igual manera ocurre con fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el satélite.

Continuando con la excentricidad y variando su valor, el resultado obtenido en la figura 3-35 es el siguiente:

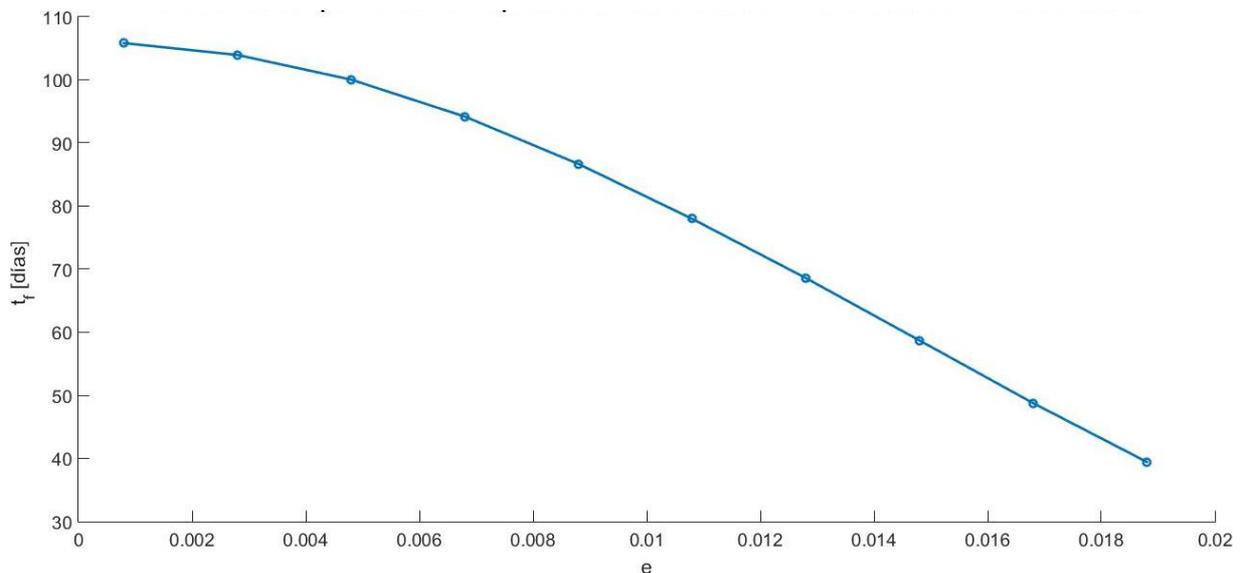


Figura 3-35. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales de la excentricidad de la órbita.

En este caso se ha aumentando la excentricidad desde 0.0008, valor que adquiriría inicialmente para el satélite *Oderacs-A*, hasta un valor 10 veces superior a éste comprobándose que a medida que ésta aumenta el tiempo de vida disminuye siguiendo la curva mostrada en la figura 3-35. Esto es debido a que al simular esta variación de excentricidad, se fijó la misma altitud inicial para todos los casos. A medida que la excentricidad aumenta, la diferencia entre el radio de perigeo y apogeo se hace mayor y por tanto habrá momentos en los que el satélite cuando pase por el radio de perigeo tenga una altitud menor respecto a la Tierra produciéndose una fuerza gravitatoria mayor sobre éste además de influir también más fuertemente la resistencia atmosférica haciendo que se produzca su caída más rápidamente.

Habiendo observado las tendencias creciente y decreciente del tiempo de vida con el semieje mayor de la órbita y la excentricidad respectivamente, se muestra a continuación la figura 3-36, en la que se observan ambos comportamientos o influencias al tiempo final de vida del satélite de forma muy clara.

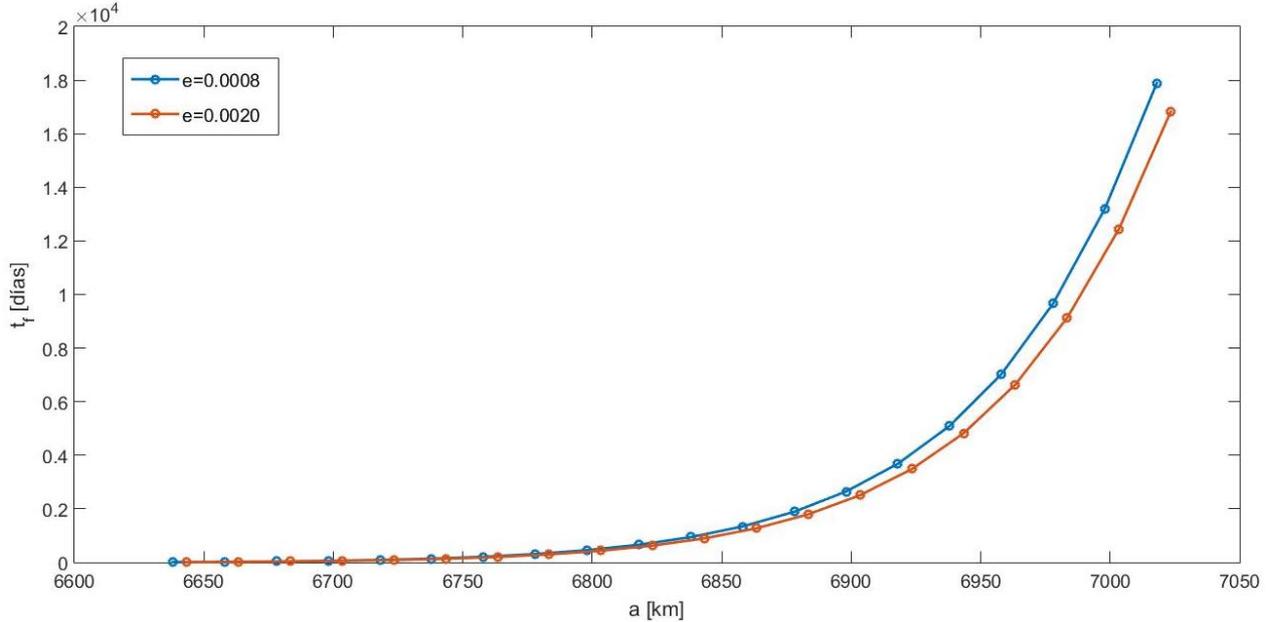


Figura 3-36. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales del semieje mayor de la órbita para dos excentricidades distintas.

Se puede observar, como para la curva roja, la cual tiene mas excentricidad que la azul, manteniéndose la tendencia creciente, se desplaza a la derecha, significando esto que, para el mismo valor inicial del semieje mayor de la órbita, el tiempo de vida del satélite es menor.

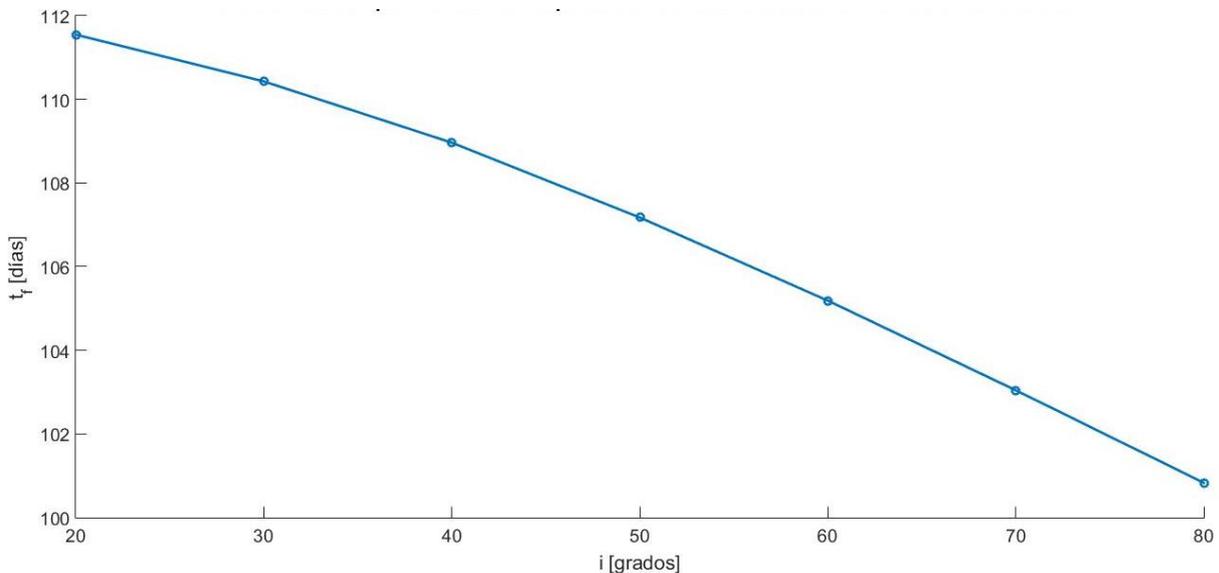


Figura 3-37. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores de la inclinación de la órbita.

La figura 3-37 muestra la variación del tiempo de vida para diferentes valores de la inclinación. Se puede observar como a medida que ésta aumenta, es decir, que pasamos de tener una órbita de baja inclinación (parecida a una órbita ecuatorial) a otra de mayor inclinación (más parecida a una órbita polar), el tiempo de vida se reduce en unos días. Esto es debido a que para orbitas de alta inclinación la velocidad atmosférica es algo menor que en la zona ecuatorial y eso conlleva a que la velocidad relativa en los polos sea un poco mayor, generando que la fuerza atmosférica sea mayor y haga que el satélite decaiga en menos tiempo.

Continuando con el efecto que genera la variación del RAAN al tiempo de vida del satélite se observa en la figura 3-38 que:

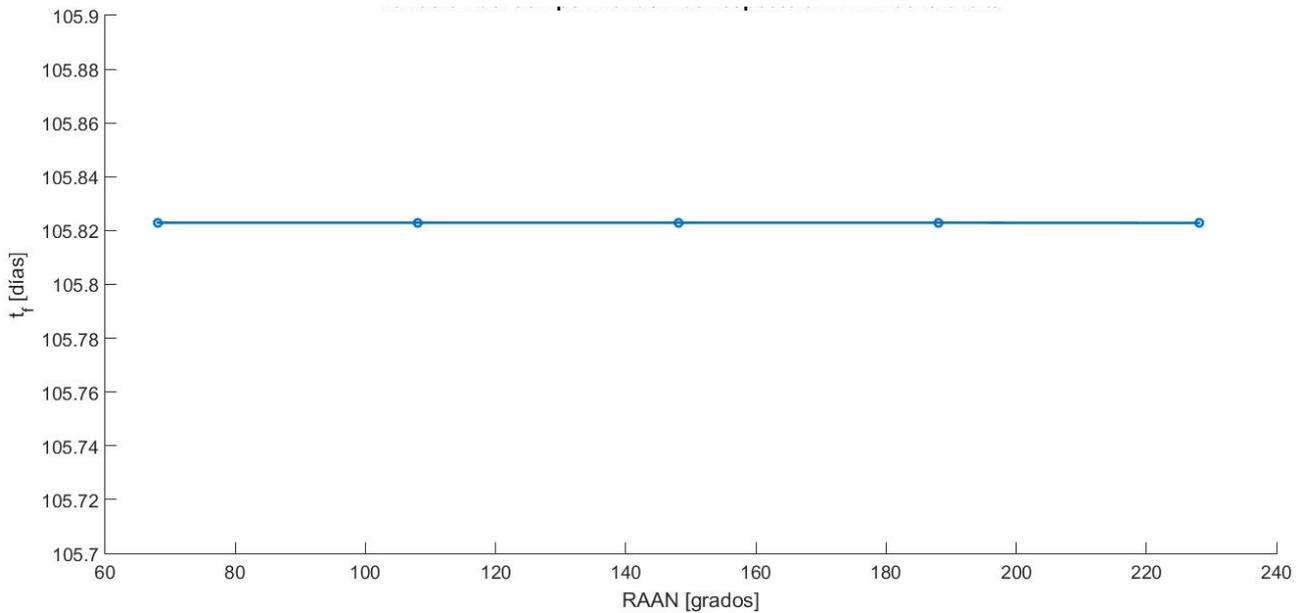


Figura 3-38. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales del RAAN de la órbita.

La figura 3-39 muestra la variación del argumento de perigeo inicial y como afecta al tiempo de vida:

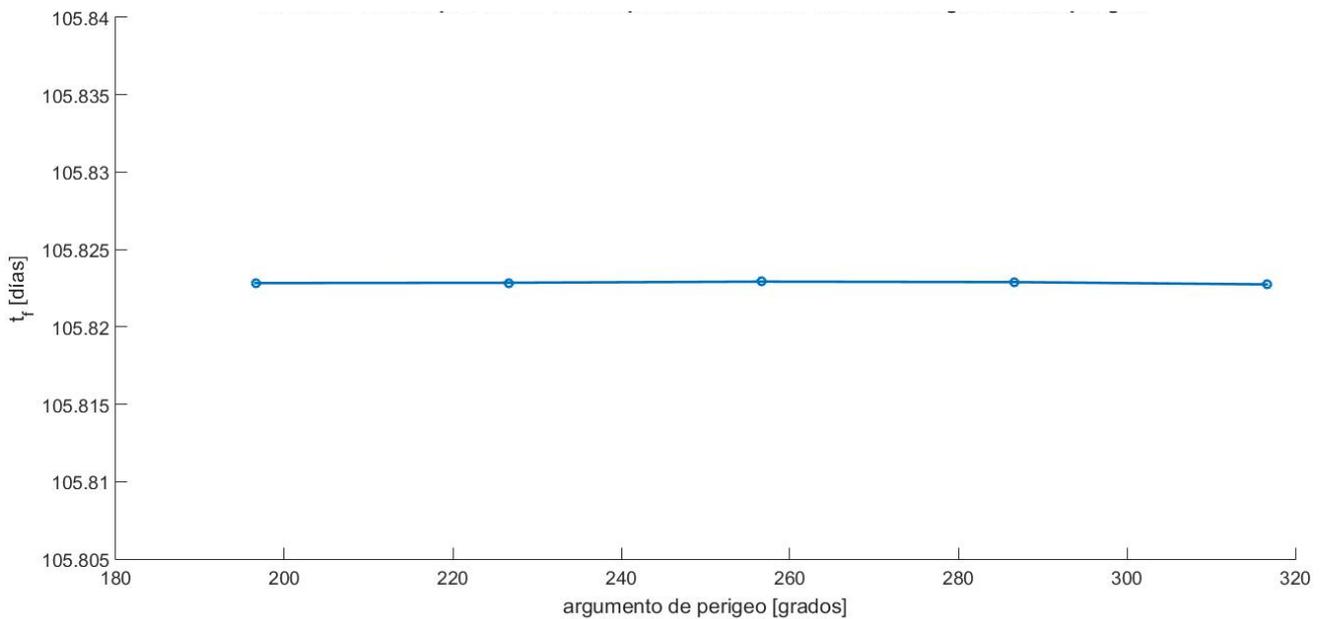


Figura 3-39. Tiempo final de vida respecto a diferentes valores iniciales del argumento de perigeo de la órbita.

Por último, se probó dicho estudio paramétrico para diferentes valores iniciales de la anomalía media para la cual el resultado es mostrado a continuación en la figura 3-40:

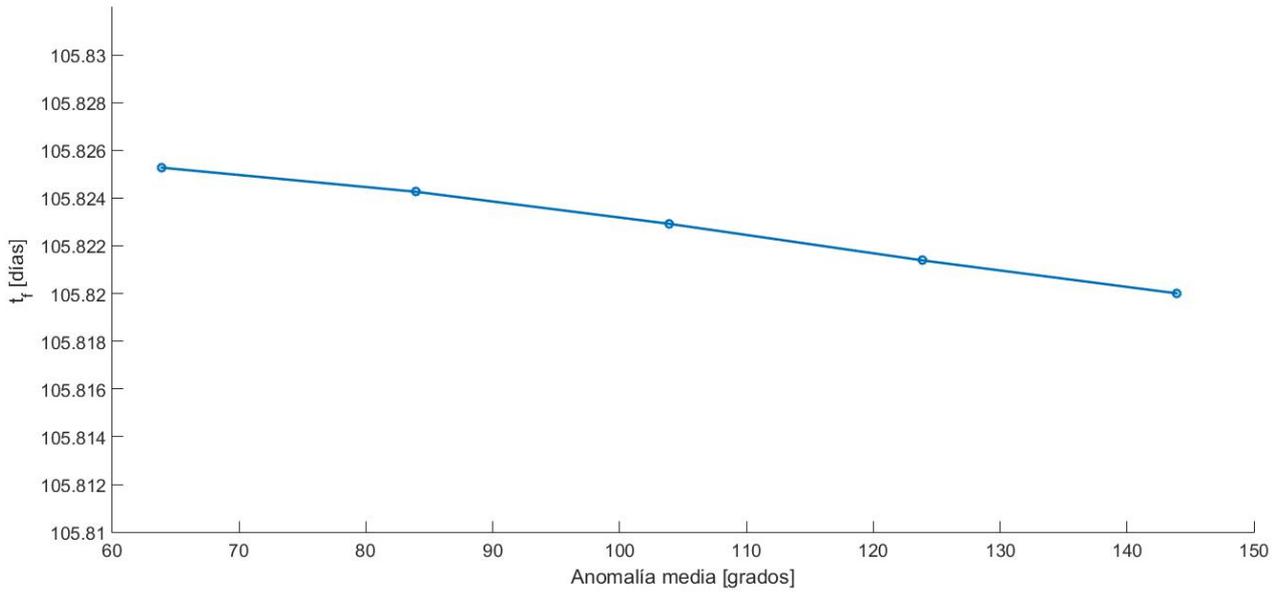


Figura 3-40. Tiempo final de vida para diferentes anomalías medias iniciales de la órbita.

Ninguno de estos tres ángulos produce variación alguna al tiempo final de vida del satélite, es decir, que si ya que fijados los elementos que más importancia tienen o que afectan en mayor manera al tiempo de vida (semieje mayor, excentricidad e incluso como se ha visto la inclinación de la órbita), el que ésta tenga un ángulo de RAAN inicial u otro, cualquier valor del argumento de perigeo o que el satélite tenga una posición inicial u otra con el ángulo theta, no produce la disminución en la altitud de manera más rápida o más lenta, manteniéndose constante el valor del tiempo de vida.

# 4 ESTUDIO DEL TIEMPO DE VIDA DE UN SATÉLITE. MODELO PROBABILISTA

En el capítulo anterior se realizó el estudio del tiempo de vida para varios satélites en órbita baja para los cuales todos sus parámetros eran definidos y conocidos: sus características físicas (masa, superficie), las características ambientales (densidad atmosférica) y también algún dato aerodinámico (coeficiente de arrastre). Pero en la realidad esto nunca ocurre así. Nunca se pueden conocer todos los parámetros de una forma exacta ya que éstos varían con el tiempo siguiendo una determinada dinámica. Dinámica que tiene una componente aleatoria y que por ello no puede predecirse sin albergar error.

- La masa puede ir disminuyendo a medida que el tiempo de vida del satélite avance.
- La superficie frontal del satélite es muy compleja de obtener en cada instante y es por ello por lo que se utilizan métodos aproximativos.
- El coeficiente de arrastre es función de la altitud a la que se encuentre el cuerpo. También se sabe que depende de la superficie frontal, también complicada de obtener.
- La densidad quizás sea de los parámetros más complejos de obtener debido a la cantidad de factores de los que depende y muchos de ellos con un comportamiento un tanto aleatorio.

Visto que o no se pueden conocer o son difíciles de estimar en cada instante y de forma exacta ninguno de estos parámetros que influyen en la estimación del tiempo de vida de un satélite, se puede realizar un estudio probabilístico en el que en vez de conocer el valor de dichos parámetros, se conociese una función de éstos y a las funciones de distribución del tiempo de vida obtenidas realizarles la media y desviación típica y así obtener un valor aproximativo de ésta.

## 4.1 Modelo probabilista.

Para una variable aleatoria  $X$  de la cual no se conoce su valor exacto en cada instante sino una función de distribución de ésta, se puede obtener una función de distribución de otra variable  $Y$  la cual depende de  $X$ , es decir,  $Y = f(X)$  a partir de su transformación y que vendría dada por la ecuación 4.1:

$$f_y(y) = \frac{f_x(F^{-1}(y))}{|F'(F^{-1}(y))|} \quad (4.1)$$

Se pretende realizar esto para obtener esa función de distribución del tiempo final de vida del satélite a partir de transformación de la función de distribución conocida de la densidad atmosférica. Como se comentó, al depender de tantos factores la densidad, es interesante realizar este estudio probabilístico en el que se le da una determinada incertidumbre a dicha variable.

Si bien hay muchas funciones de distribución que podrían tomarse para seguir el comportamiento de la densidad, aquí se escoge una función de densidad uniforme para la variación de la densidad ( $\Delta\rho$ ). La obtención de la densidad es de la siguiente forma:

$$\rho_{real} = \rho_{nominal} \cdot \Delta\rho \quad (4.2)$$

Donde la  $\rho_{nominal}$  es la obtenida en cada instante del modelo exponencial explicado en el capítulo 3 y la  $\rho_{real}$  es el producto de ésta por el valor de  $\Delta\rho$  (función con distribución uniforme).

Por tanto la ecuación 4.1 se redefine como:

$$f_{t_f}(t_f) = \frac{f_{\Delta\rho}(g^{-1}(t_f))}{|g'(g^{-1}(t_f))|} \quad (4.3)$$

Donde se tiene que  $t_f^i = g(\Delta\rho^i)$  y por tanto,  $g^{-1}(t_f^i) = \Delta\rho^i$ . Luego finalmente, la ecuación 4.3 queda:

$$f_{t_f}(t_f) = \frac{f_{\Delta\rho}(\Delta\rho)}{|g'(\Delta\rho)|} \quad (4.4)$$

Comenzando por el numerador, se observa (véase figura 4-1) la función de densidad de la variación de densidad que ya se indicó que sería una función uniforme. Por tanto podemos obtener su valor de forma sencilla:

$$f_{\Delta\rho}(\Delta\rho) = \begin{cases} 0 & \Delta\rho < a \\ \frac{1}{b-a} & \Delta\rho \in [a, b] \\ 0 & \Delta\rho > b \end{cases} \quad (4.5)$$

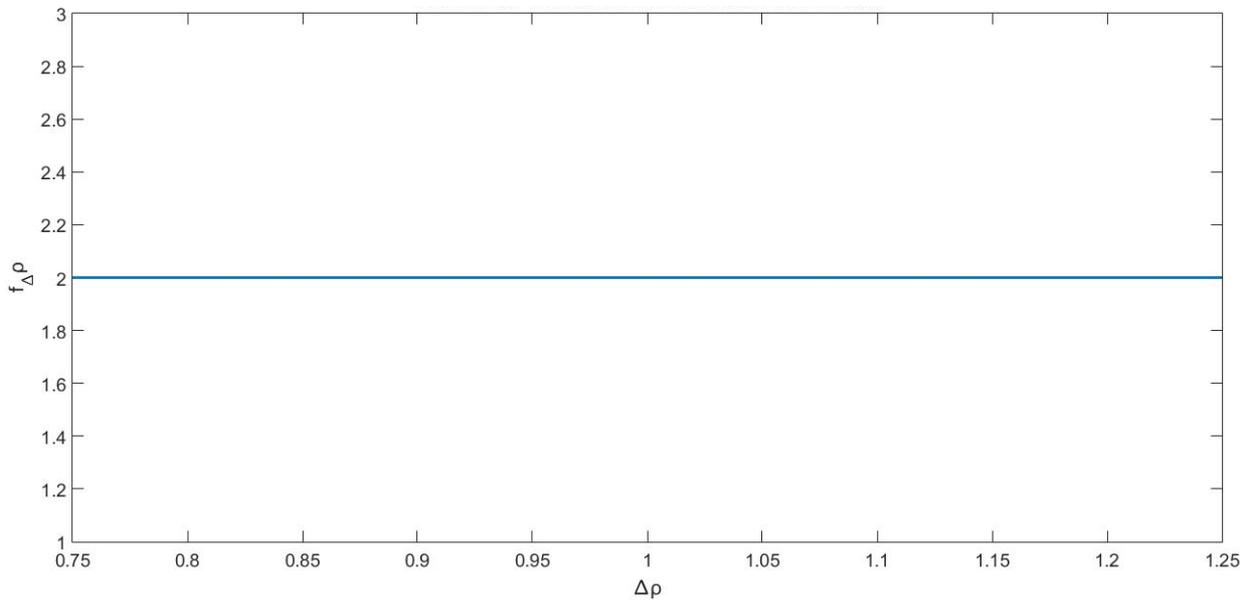


Figura 4-1. Función de densidad uniforme de la densidad atmosférica.

Donde  $a$ ,  $b$  son los límites de la función de densidad los cuales se sitúan en los valores de 0.75 y 1.25, es decir, que la densidad real llegará a tomar el valor del 75% y el 125% de la densidad nominal. Tomando el valor  $f_{\Delta\rho}(\Delta\rho)=2$  para así cumplir que el área bajo la curva debe ser igual a la unidad.

Continuando por el denominador y para obtenerlo, se tiene que utilizar la condición de parada a 160 kilómetros de altitud en la cual se terminará de contabilizar el tiempo de vida del satélite. Ésta es la siguiente:

$$\|\vec{r}(t_f, \Delta\rho)\|^2 = 160^2 \quad (4.6)$$

Se eleva al cuadrado el módulo del vector radio para facilitar posteriores cálculos, de forma que:

$$r_x^2(t_f, \Delta\rho) + r_y^2(t_f, \Delta\rho) + r_z^2(t_f, \Delta\rho) = 160^2 \quad (4.7)$$

Derivando la ecuación 4.7 se obtiene:

$$2 \left( \frac{\partial r_x}{\partial t} r_x + \frac{\partial r_y}{\partial t} r_y + \frac{\partial r_z}{\partial t} r_z \right) \frac{\partial t}{\partial \Delta\rho} + 2 \left( \frac{\partial r_x}{\partial \Delta\rho} r_x + \frac{\partial r_y}{\partial \Delta\rho} r_y + \frac{\partial r_z}{\partial \Delta\rho} r_z \right) = 0 \quad (4.8)$$

Donde  $\frac{\partial r_x}{\partial t} = v_x$ ,  $\frac{\partial r_y}{\partial t} = v_y$ ,  $\frac{\partial r_z}{\partial t} = v_z$  y  $\frac{\partial r_x}{\partial \Delta\rho} = x_{\Delta\rho}$ ,  $\frac{\partial r_y}{\partial \Delta\rho} = y_{\Delta\rho}$ ,  $\frac{\partial r_z}{\partial \Delta\rho} = z_{\Delta\rho}$  sustituyendo y despejando:

$$\frac{\partial t_f}{\partial \Delta\rho} = -\frac{r_x \cdot x_{\Delta\rho} + r_y \cdot y_{\Delta\rho} + r_z \cdot z_{\Delta\rho}}{r_x \cdot v_x + r_y \cdot v_y + r_z \cdot v_z} \quad (4.9)$$

Luego:

$$\left| \frac{\partial t_f}{\partial \Delta\rho} \right| = |g'(\Delta\rho)| = \left| -\frac{r_x \cdot v_x + r_y \cdot v_y + r_z \cdot v_z}{r_x \cdot x_{\Delta\rho} + r_y \cdot y_{\Delta\rho} + r_z \cdot z_{\Delta\rho}} \right| \quad (4.10)$$

Si bien, tanto la posición como la velocidad son conocidos en cada instante mediante el modelo explicado en el capítulo anterior, no se conocen las nuevas variables definidas ( $x_{\Delta\rho}$ ,  $y_{\Delta\rho}$ ,  $z_{\Delta\rho}$ ). Por tanto, a continuación se explicará como obtener el valor de  $t_f(t_f)$ .

## 4.2. Método de resolución.

El método se mantiene respecto al modelo determinista, sin embargo, se amplía con una nueva ecuación diferencial ordinaria la cual se debe añadir a las que ya se tienen.

Se define la matriz  $f$  (derivada respecto al tiempo del vector estado), la cual tendrá 6 componentes. Las tres primeras pertenecientes al vector velocidad y las tres últimas debido a la componentes de la aceleración:

$$f = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{f}_{GRAV} + \vec{f}_{ATM} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

El sistema a integrar es el mismo que con anterioridad pero a la vez que se resuelve éste, se debe ir obteniendo la variable que falta para obtener la función de distribución del tiempo final de vida del satélite:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad (4.12)$$

$$\dot{\vec{v}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}_D \quad (4.13)$$

$$\dot{\vec{\chi}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \Delta\rho} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\vec{x}, \Delta\rho) \frac{\partial \vec{x}}{\partial \Delta\rho} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \Delta\rho}(\vec{x}, \Delta\rho) \quad (4.14)$$

Con las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{cases} \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \\ \vec{\chi}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Donde el vector estado  $x$  y el vector  $\vec{\chi}$  se definen como:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad \vec{\chi} = \begin{bmatrix} \vec{\chi}_r \\ \vec{\chi}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\chi}_{r_x} \\ \vec{\chi}_{r_y} \\ \vec{\chi}_{r_z} \\ \vec{\chi}_{v_x} \\ \vec{\chi}_{v_y} \\ \vec{\chi}_{v_z} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

La fuerza  $\vec{F}_D = \vec{f}_{ATM} = \frac{1}{2B} \rho \cdot \Delta\rho \cdot v_{rel} \cdot \vec{v}_{rel}$ , es la fuerza provocada por la resistencia atmosférica la cual se reagrupa junto al término gravitacional como se aprecia en la matriz 4.16.

Por tanto, se deben obtener las matrices  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\vec{x}, \Delta\rho)$  y  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \Delta\rho}(\vec{x}, \Delta\rho)$  con dimensiones seis por seis y seis por uno respectivamente y con éstas integrar y obtener el parámetro que se busca ( $\vec{\chi}$ ).

La primera de ellas tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{I} \\ -\mu \vec{I} + \mu \frac{\vec{r}\vec{r}^T}{3r^5} + \frac{\partial \vec{f}_{ATM}}{\partial \vec{r}} & \frac{\partial \vec{f}_{ATM}}{\partial \vec{v}} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Donde el primer término corresponde a una matriz tres por tres de ceros; el segundo término se define como la matriz tres por tres identidad y los términos  $\frac{\partial \vec{f}_{ATM}}{\partial \vec{r}}$  y  $\frac{\partial \vec{f}_{ATM}}{\partial \vec{v}}$  se definen a continuación, partiendo de la definición de la velocidad relativa:  $\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

$$\frac{\partial \vec{f}_{ATM}}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{2B} \rho \cdot \Delta\rho \left( v_{rel} \cdot (-\vec{\omega}^x) + \vec{v}_{rel} \frac{\partial v_{rel}}{\partial \vec{r}} \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \vec{f}_{ATM}}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{2B} \rho \cdot \Delta\rho \left( v_{rel} \cdot I + \vec{v}_{rel} \frac{\partial v_{rel}}{\partial \vec{v}} \right) = \frac{-1}{2B} \rho \cdot \Delta\rho \left( v_{rel} + \vec{v}_{rel} \frac{\vec{v}_{rel}^T}{v_{rel}} \right) \quad (4.19)$$

Con el operador  $\vec{\omega}^x$  definido de la siguiente forma:

$$\vec{\omega}^x = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

La segunda de las matrices es la que sigue:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \Delta\rho} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{f}_{ATM}}{\partial \Delta\rho} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Donde el primer término es un vector columna de tres ceros y el segundo, un vector columna de tres componentes también desarrollado a continuación:

$$\frac{\partial \vec{f}_{ATM}}{\partial \Delta\rho} = \frac{1}{2B} \rho \cdot v_{rel} \cdot \vec{v}_{rel} \quad (4.22)$$

Resumiendo, el sistema en 4.13 queda:

$$\dot{\vec{\chi}}_r = \vec{\chi}_v \quad (4.23)$$

$$\dot{\vec{\chi}}_v = \left( \frac{-\mu}{r^3} + \mu \frac{\vec{r}\vec{r}^T}{3r^5} - \frac{1}{H} \frac{\vec{f}_{ATM}}{r} r^T \right) \cdot \vec{\chi}_r + \frac{-1}{2B} \rho \cdot \Delta\rho \left( v_{rel} + \vec{v}_{rel} \frac{\vec{v}_{rel}^T}{v_{rel}} \right) \cdot \vec{v}_{rel_{dot}} + \frac{1}{2B} \rho \cdot v_{rel} \cdot \vec{v}_{rel} \quad (4.24)$$

Con:

$$\vec{v}_{rel_{dot}} = \dot{\vec{\chi}}_v - \omega \times \vec{\chi}_r \quad (4.25)$$

Una vez definidas el sistema de ecuaciones diferenciales, se resuelve en la plataforma *MATLAB* como se hizo en el anterior capítulo pudiendo obtener en este caso la función de distribución del tiempo final de vida del satélite. Para ello, se discretiza la función de distribución de  $\Delta\rho$  y para cada partición se realiza todo el proceso de integración con el fin de obtener un gráfico que represente el valor de la función de distribución del tiempo de vida del satélite respecto al propio tiempo final de vida.

Un buen caso sería discretizar en cien valores la función de distribución de la densidad, es decir para un paso de 0.005 ir recorriendo dicha función desde el valor  $\Delta\rho = 0.75$  hasta  $\Delta\rho = 1.25$ . Así quedará un resultado bien aproximado.

### 4.3. Condición de parada.

En este caso, la condición de parada se toma para una altitud determinada, como en el capítulo 3, con la diferencia de que no se hace a los 160 kilómetros ya que en ese caso, la función de distribución del tiempo de vida desarrolla una evolución con picos y no uniforme. Sin embargo, si la altitud de parada disminuye hasta los 120 kilómetros o incluso a los 100 kilómetros, la función de distribución se homogeniza mucho, obteniéndose prácticamente una curva perfecta con la disminución del tiempo de vida.

Este problema, en el que la condición de parada no parece estar bien establecida para que el resultado de la función de distribución sea aceptable, no ocurre para los casos en los que la excentricidad de la órbita es cero. Esto es debido a que, sin ella, siempre se reduce su altitud. Pero como se ha visto, esto no ocurre cuando hay excentricidad por muy pequeña que ésta sea (para el caso en estudio, el satélite Oderacs-A vale 0.0008) produciéndose oscilaciones en el radio del satélite.

A continuación (figura 4-2) se muestra la evolución de la altitud respecto al tiempo de vida del satélite *Oderacs-A* para las 100 iteraciones nombradas con anterioridad en los que la densidad avanza desde el 75% de su valor hasta el 125% a paso de 0.005.

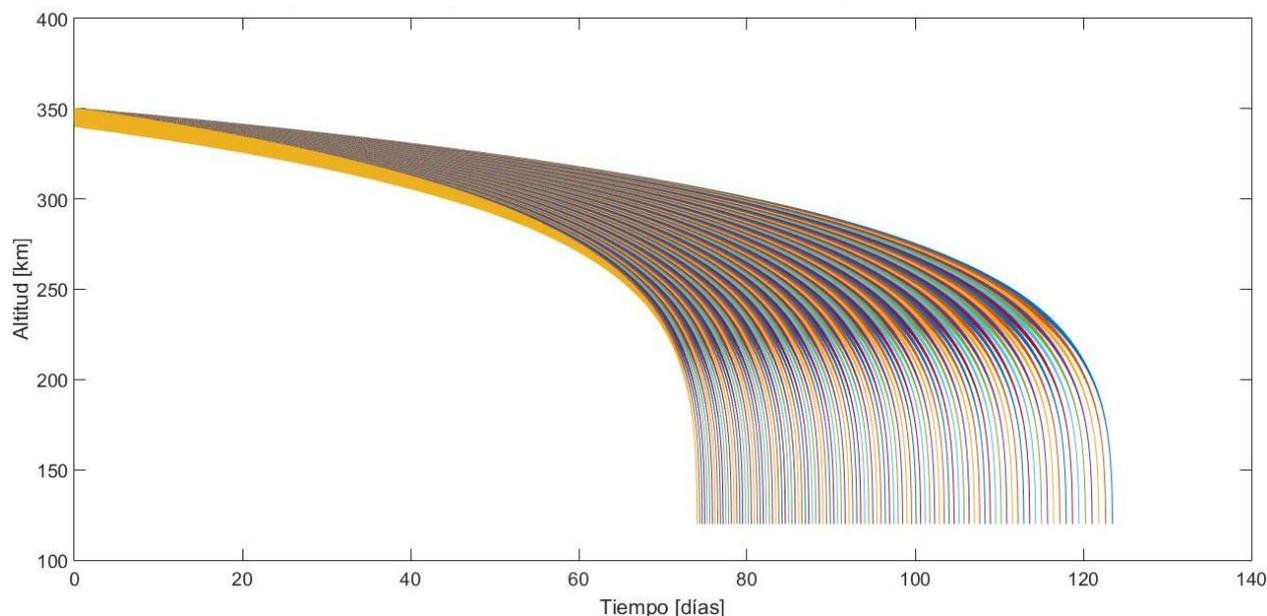


Figura 4-2. Evolución de la altitud respecto al tiempo para diferentes  $\Delta\rho$ .

Como se aprecia en la figura 4-2, la condición de parada ha sido definida a los 120 kilómetros de altitud. Para ese valor, la caída de la curva altitud-tiempo es más acusada. Las oscilaciones que se producen en la altitud debido a la excentricidad (oscilaciones verticales) se aprecian cada vez menos hasta el momento en el que estas desaparecen. Hecho también provocado por la reducción de excentricidad y la igualdad del radio de perigeo y apogeo como se vio en el capítulo anterior. Por este motivo, escoger una altitud de parada en la que ya no existan esas oscilaciones del radio, y la altitud del satélite estrictamente disminuya, como para el caso en el que no hay excentricidad, parece ser un hecho fundamental para obtener una función de distribución aceptable del tiempo de vida.

El motivo por el que esas oscilaciones (cuando la excentricidad aun no es tan pequeña como para que la altitud solo disminuya con el tiempo) afectan a la función de distribución, posiblemente sea debido a que para la altitud de parada, una iteración de las realizadas con mayor  $\Delta\rho$ , lo que se traduce en mayor densidad, y que debería generar la caída antes y por tanto que el tiempo de vida ser menor, no se cumpla. Sino que dicha iteración llegue a la altitud de parada después de la iteración que sigue. Cuando existen esas oscilaciones y aun valores de excentricidad considerable (para altitudes superiores a 120 kilómetros aproximadamente), puede ocurrir que en

el caso con densidad mayor se llegue a la altitud de parada antes porque justo ésta coincida con el radio de perigeo de la órbita mientras que el caso con mayor densidad y que supuestamente debía llegar antes a la altitud de parada coincida con la altitud de apogeo siendo la diferencia entre apogeo y perigeo de algún kilómetro y ocurriendo que la primera sea menor que la segunda y que por tanto se contradiga el comportamiento esperado. A este fenómeno le afecta también el paso que se escoja de la función de densidad, ya que si este es muy pequeño y apenas hay diferencia en ella, dicho efecto se produce con mayor facilidad intensificando los picos y haciéndolos más acusados, luego una solución de compromiso es lo más adecuado.

Se puede observar este hecho al representar  $\Delta\rho$  respecto al tiempo de vida del satélite. En el primer caso (véase figura 4-3), con los datos de la densidad indicados en la figura 4-2 (paso y límites de intervalo) y a la altitud de parada de 120 kilómetros, la figura 4-3 que se obtiene es la siguiente:

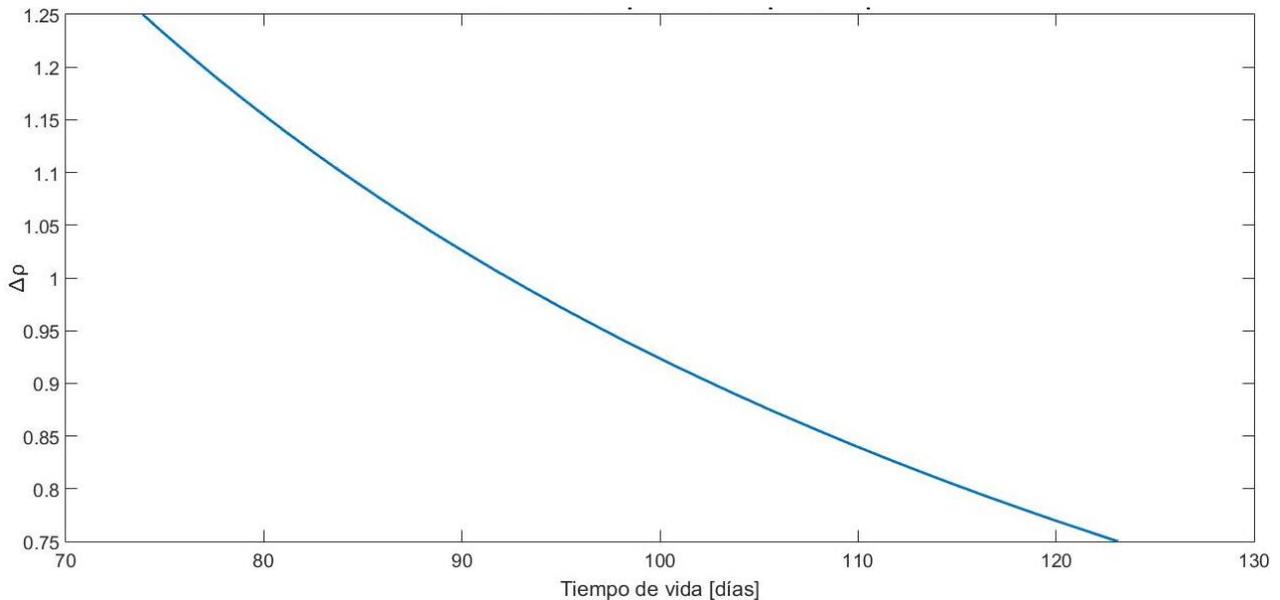


Figura 4-3. Evolución del tiempo de vida respecto a  $\Delta\rho$  y condición de parada  $h=120$  km.

Como se puede observar, la curva no tiene pequeñas oscilaciones y sigue un comportamiento decreciente debido a la disminución del tiempo de vida con el aumento de densidad.

Sin embargo, si se representa esta misma figura pero para un intervalo de  $\Delta\rho$  menor (entre 0.9 y 1.1) con un mayor número de iteraciones (200) y por tanto, un paso menor, se pueden observar en la figura 4-4 dichas oscilaciones de manera más clara. Realizando un zoom para su visualización más sencilla se obtiene:

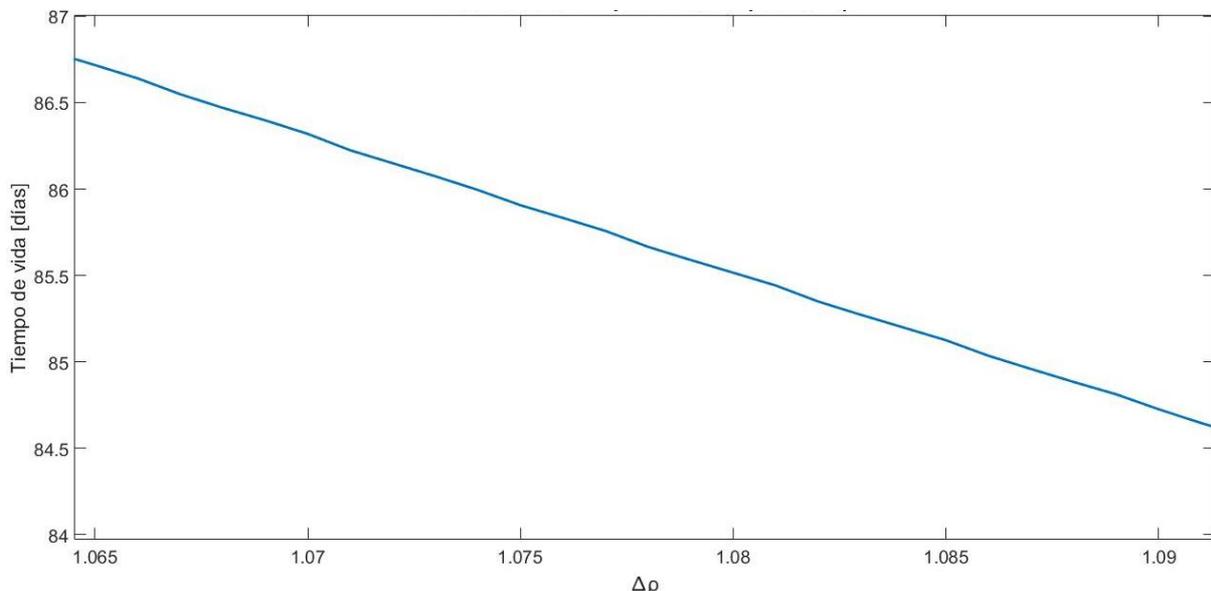


Figura 4-4. Zoom de la evolución del tiempo de vida respecto a  $\Delta\rho$  y condición de parada  $h=120$  km.

Probando el caso anterior, pero para una altitud mayor de parada (200 kilómetros), se observa como las oscilaciones y por tanto el efecto comentado se acrecenta:

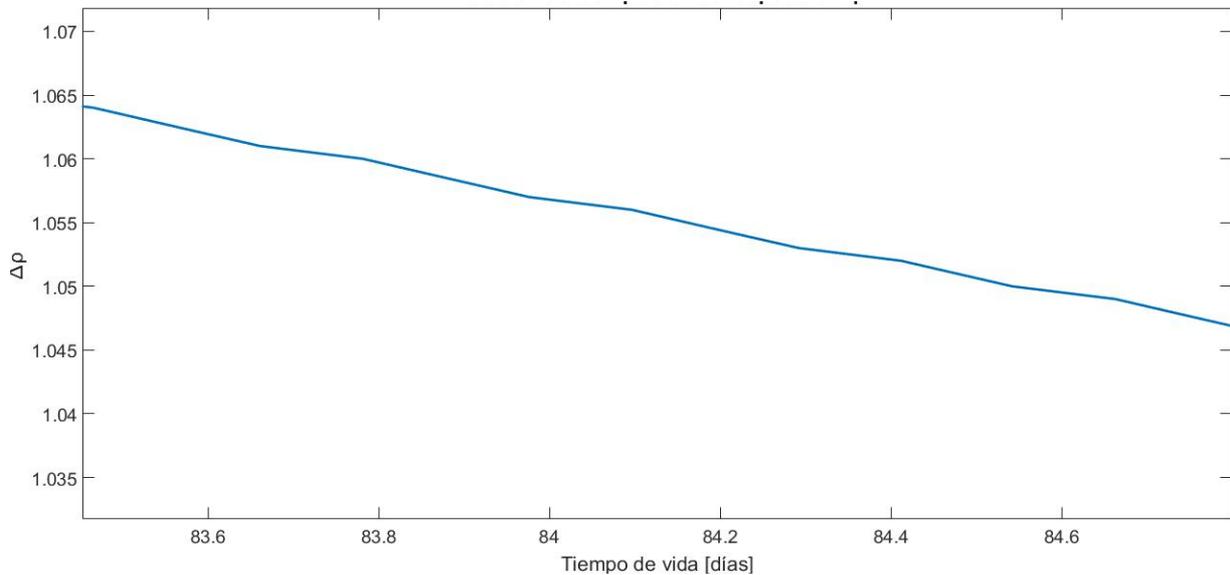


Figura 4-5. Zoom de la evolución del tiempo de vida respecto a  $\Delta\rho$  y con altitud de parada  $h=200$  km.

Con estas oscilaciones se tiene que para un  $\Delta\rho$  se tiene un tiempo de vida determinado y que el  $\Delta\rho$  inmediatamente después de éste (algo mayor que el primero) puede generar un tiempo de vida algo mayor y no menor.

#### 4.4. Resultados

A continuación se muestra la figura 4-6, que representa la función de distribución del tiempo de vida del satélite respecto al propio tiempo final de vida. Se ha seleccionado como se indicó un caso intermedio de iteraciones (41), con el paso de 0.0125 de  $\Delta\rho$ . El resultado se puede ver en la figura 4-6 a continuación:

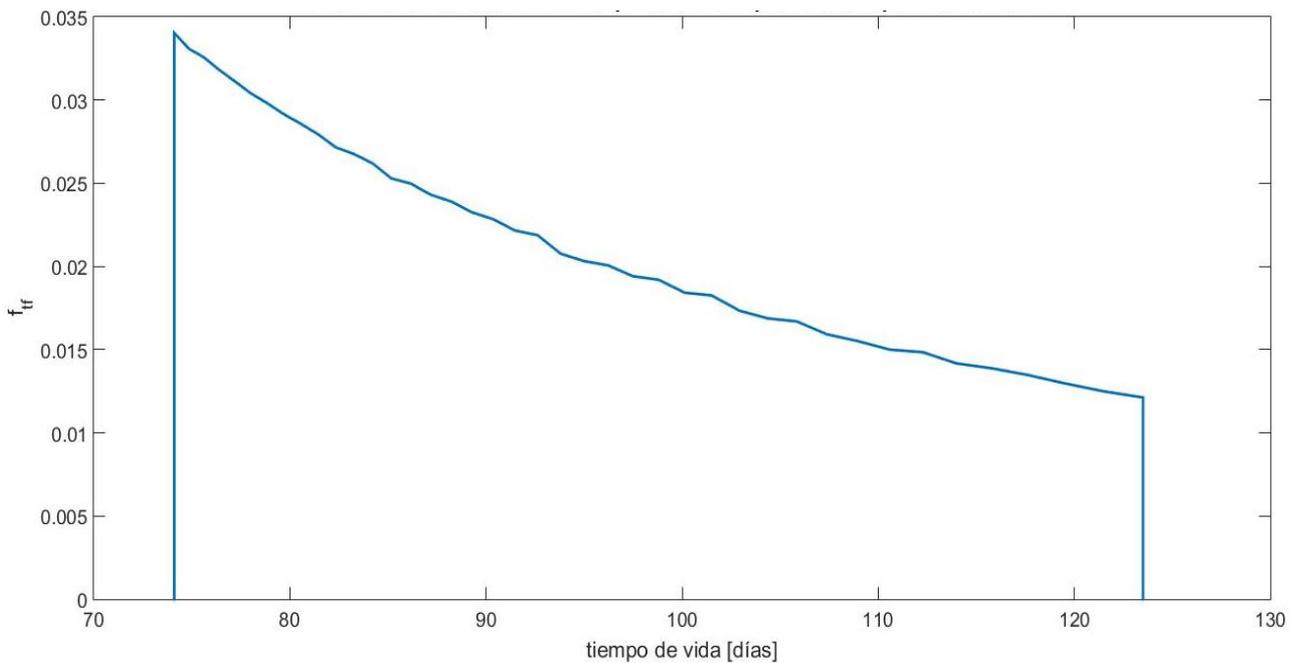


Figura 4-6. Función de distribución del tiempo de vida de un satélite respecto al tiempo final de éste.

Se pueden apreciar algunos picos pero muy leves en comparación con los obtenidos con la altitud de parada de 160 kilómetros y con pasos de densidad menores.

También son de interés los números que aparecen en el eje de ordenadas que no son más que los necesarios para que el área que encierra la curva sea igual a uno.

Se obtiene la media y la desviación típica de la función de distribución del tiempo de vida cuyos valores son los siguientes:

$$\bar{f}_{tf} = 94.64 \text{ días} \quad (4.26)$$

$$\sigma_{f_{tf}} = 13.9 \text{ días} \quad (4.27)$$

Estos valores pueden ser comparados con los obtenidos mediante aproximaciones de primer orden y cuya definición se muestra a continuación:

$$E[f(X)] = E[f(\mu_x + (X - \mu_x))] \approx f(\mu_x) + \frac{f''(\mu_x)}{2} \sigma_x^2 \approx f(\mu_x) = 92.629 \text{ días} \quad (4.28)$$

$$Var[f(X)] = (f'(E[X]))^2 var[X] = (f'(\mu_x))^2 \sigma_x^2 = 174.07 \text{ días} \quad (4.29)$$

$$\sigma_{f(x)} = \sqrt{Var[f(X)]} = 13.19 \text{ días} \quad (4.30)$$

Donde  $\sigma_x^2$  utilizado en 4.29 se define como:

$$\sigma_x^2 = \frac{(b - a)^2}{12} \quad (4.31)$$

Realizando una prueba con otro satélite el cual tenga una excentricidad inicial mayor, en este caso:  $e=0.005$ , y un valor menor del semieje mayor de la órbita (también como condición al inicio):  $a=6623 \text{ km}$ , el cual equivale a comenzar a 245 kilómetros de altitud, se obtiene como resultado la función de distribución mostrada en la figura 4-7:

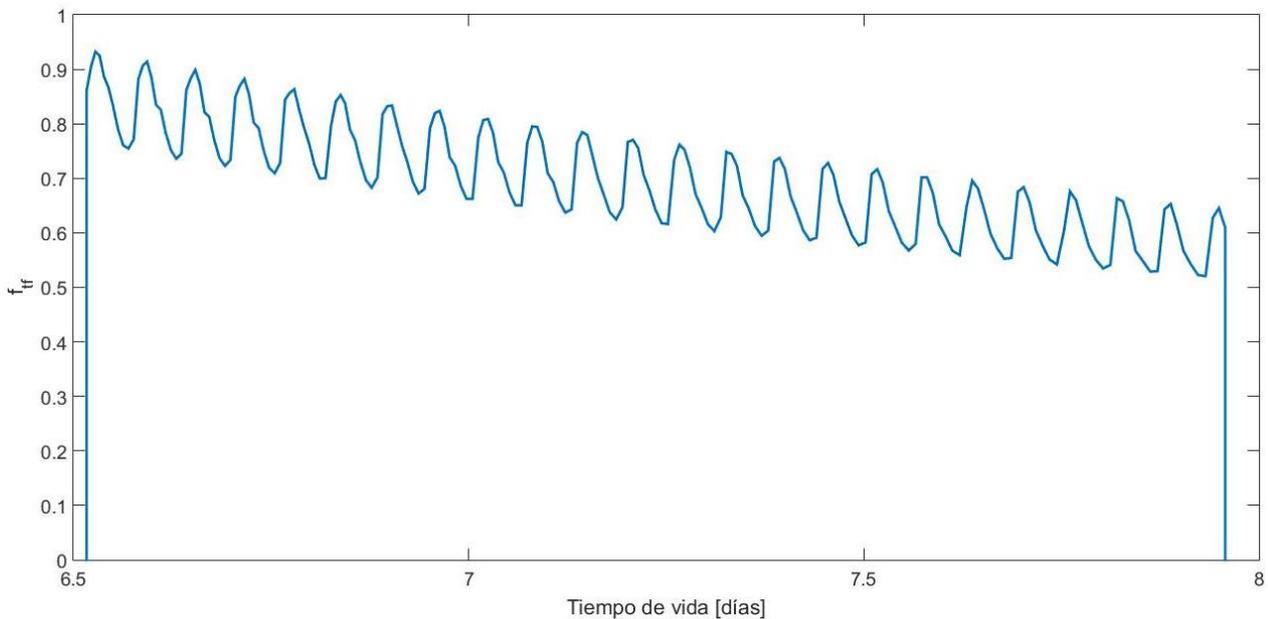


Figura 4-7. Función de distribución del tiempo de vida de un satélite respecto al tiempo final de éste para una excentricidad de 0.005 y un semieje mayor de 6623 km.

Se puede observar como para este caso se producen unas oscilaciones mayores en comparación a los picos que se podían apreciar en la figura 4-6, ya que al aumentar la excentricidad y disminuir el semieje mayor inicial, se magnifica el efecto explicando con anterioridad en el apartado 4.3 en el que la aparición de excentricidad junto con la utilización de un paso de  $\Delta\rho$  pequeño (teniendo así mayor resolución), produce la

oscilación en la función de distribución. En este caso, se realizaron 200 iteraciones, con límites de  $\Delta\rho$  de 0.9 y 1.1 un paso de 0.001.

Probando un ultimo caso en el que se mantiene la excentricidad utilizada en la figura 4-7 pero el semieje mayor inicial de la órbita se reduce hasta el valor de  $a=6573 \text{ km}$  el resultado obtenido se muestra en la figura 4-8:

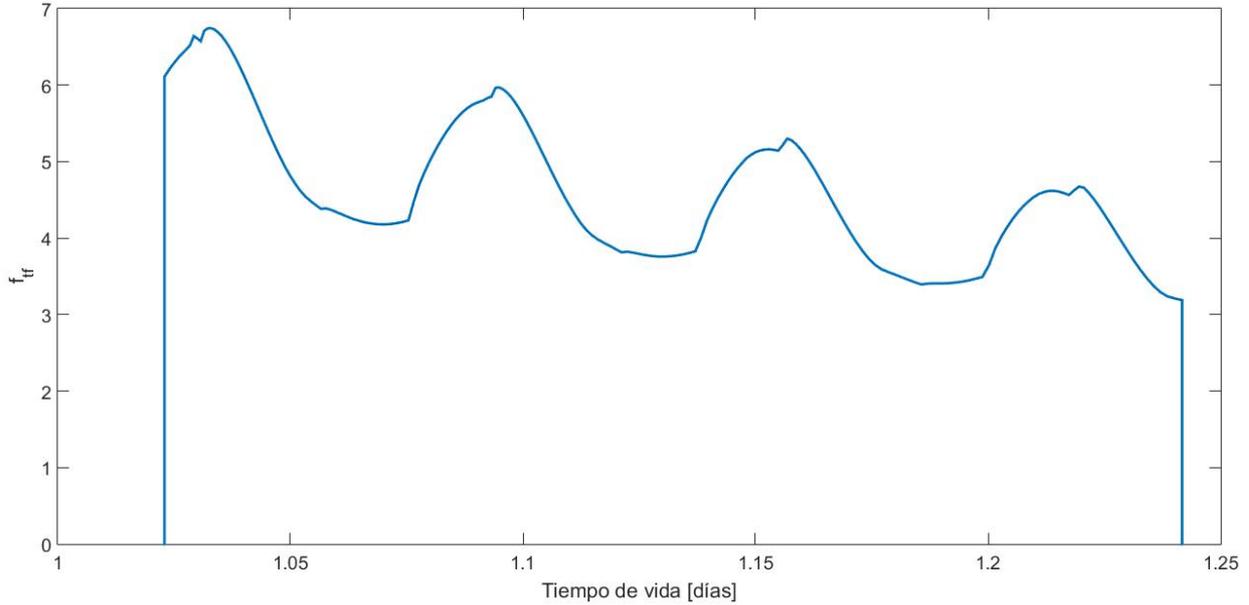


Figura 4-8. Función de distribución del tiempo de vida de un satélite respecto al tiempo final de éste para una excentricidad de 0.005 y un semieje mayor de 6573 km.

Se observa en la figura 4-8 un incremento de la oscilación respecto a las obtenidas en la figura 4-6 debido a que en este caso se tiene la misma excentricidad pero para una menor altitud de inicio.

También es de interés el poder observar como en estas funciones de distribución en ningún punto de ellas ocurre que la derivada se hace cero, aspecto positivo ya que si esto ocurriese se le debería dar un tratamiento especial a dichas funciones. Se observa como se producen picos y valles, zonas en las que estas oscilaciones se acumulan y otras en las que no, todo esto fruto de la complejidad de esta función de distribución.

#### 4.4.1 Método alternativo

Como forma alternativa de cálculo, se puede utilizar otra condición de parada en el programa. En vez de utilizar una condición en altitud, se utiliza la condición de que el semieje mayor de la órbita alcance un valor determinado. Esta variación supondrá dos cambios significativos en el método anteriormente comentado: uno de ellos es la propia condición de parada, y la otra es el cálculo diferente de  $\frac{\partial t_f}{\partial \Delta\rho}$ .

Comenzando por la condición de parada del semieje mayor o condición en energía se define de la siguiente forma:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r} = \varepsilon = -\frac{\mu_{\oplus}}{2a} \quad (4.32)$$

$$a = R_{\oplus} + 120 \quad (4.33)$$

Luego,

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r} = -\frac{\mu_{\oplus}}{2(R_{\oplus} + 120)} \quad (4.34)$$

A continuación, el segundo cambio a tener en cuenta es el denominador de la función de distribución del tiempo de vida. Al ser la condición de parada distinta, éste varía y se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{v^2(\Delta\rho, t_f)}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r(\Delta\rho, t_f)} = \varepsilon \quad (4.35)$$

Derivando la expresión de 4.35, se obtiene:

$$v \frac{\vec{v} \cdot \vec{\chi}_v}{v} + v \frac{\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}{v} \frac{\partial t}{\partial \rho} + \frac{\mu_{\oplus}}{r^2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{\chi}_r}{r} + \frac{\mu_{\oplus}}{r^2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{\chi}_r}{r} + \frac{\mu_{\oplus}}{r^2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r} \frac{\partial t}{\partial \rho} = 0 \quad (4.36)$$

Por ultimo, y despejando de 4.36 se obtiene:

$$\frac{\partial t}{\partial \rho} = - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\chi}_v + \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{\chi}_r}{\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{v}} = - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\chi}_v + \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{\chi}_r}{\vec{v} \cdot \vec{F}_D} \quad (4.37)$$

Con:  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}_D$ , como se definió al comienzo de este capítulo.

Con estos dos cambios significativos en la metodología de resolución, la función de distribución del tiempo de vida tiene la forma mostrada en la figura 4-9:

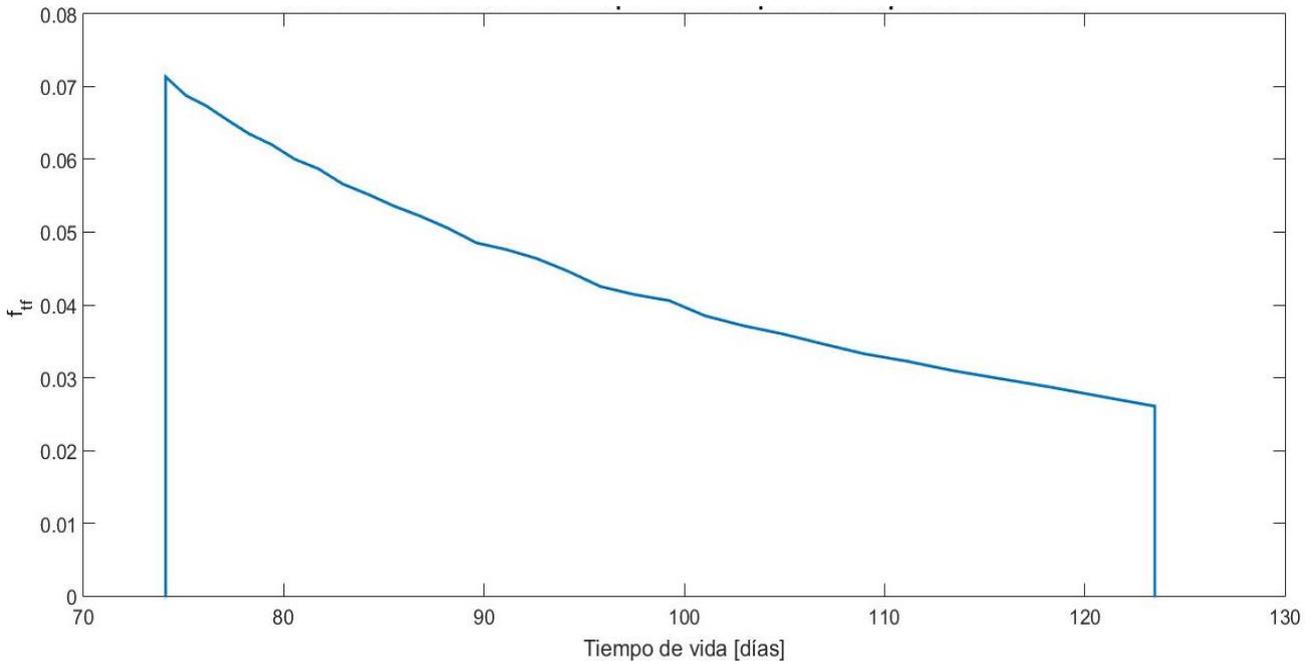


Figura 4-9. Función de distribución del tiempo de vida de un satélite respecto al tiempo final de éste (método alternativo).

En el caso de la figura 4-9, la función ha sido obtenida mediante 30 iteraciones entre los límites de 0.75 y 1.25 de  $\Delta\rho$ .

A la vista de las gráficas, ambos métodos tienen similares resultados comportándose la función de la misma manera, es decir, decreciente con el aumento del tiempo de vida pero con leves picos en su evolución en ambos casos debido al efecto de la excentricidad explicado con anterioridad.

# 5 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

Como se describió en la introducción, el objeto de este proyecto es realizar un modelo detallado del movimiento de un satélite en órbita baja, de forma que dada una órbita (a partir de sus elementos orbitales como condición inicial) se puedan obtener en cada instante su posición y su velocidad y por tanto, poder predecir el tiempo de vida del satélite.

Después de haber realizado el estudio, se concluye este trabajo con un análisis de los resultados obtenidos y las principales conclusiones que pueden extraerse de dichos resultados.

Posteriormente, se propondrán líneas de trabajo futuro que serían interesantes para mejorar e incluso completar los resultados obtenidos en el trabajo.

## 5.1 Conclusiones

La estimación del tiempo de vida de un satélite ha sido realizada mediante dos métodos: uno determinista en el cual son conocidos desde el inicio todos los parámetros y datos necesarios para su cálculo, y otro probabilista en el cual no es conocido algún dato de interés o gran repercusión sino una función de éste (se realizó para el caso en el que no era conocida la densidad).

- Método determinista

Partiendo del problema de los dos cuerpos, se pudo aplicar la *Ley de Gravitación Universal* y obtener la ecuación del movimiento. Sin embargo, se refutaron algunas de las hipótesis de dicho problema para obtener así un modelo más realista y exacto. Se tuvo en cuenta la no esfericidad de la Tierra (perturbación del  $J_2$ ), demostrando la importancia que este efecto tiene, y la aparición de la fuerza de resistencia atmosférica. Ambas fueron implementadas junto con la ecuación del movimiento anterior en la plataforma *Matlab* y con ello se pudo estimar el tiempo de vida de tres satélites en órbita baja de los cuales se tenían el valor de su tiempo de vida real y que sirvió para comparar resultados. La diferencia fue del 60% obteniéndose unos resultados a priori nada similares. Como se había indicado, bajar del 10% de error es prácticamente imposible debido a la inherente aleatoriedad que ofrece esta predicción, sin embargo se aleja bastante de este resultado el obtenido aquí al parecer por ser el modelo de densidad un tanto sencillo.

Además, partiendo de éste método se realizaron múltiples estudios. En primer lugar se obtuvieron gráficas de la evolución de los elementos orbitales en el tiempo para dos casos diferentes: uno en el que se tenía en cuenta la resistencia atmosférica y un segundo en el que además también se modelaba el achatamiento terrestre (perturbación  $J_2$ ) obteniéndose los efectos periódicos y seculares interesantes indicados en la bibliografía [1].

También se realizó un estudio paramétrico del tiempo de vida, consistente en manteniendo el resto de valores constantes, variar un parámetro (escogiendo varios valores de él) y observando que repercusión tiene sobre el propio tiempo de vida y como varía. Se hizo para los parámetros que forman el coeficiente balístico del satélite (masa, superficie frontal y coeficiente de resistencia atmosférica) y para los elementos orbitales iniciales de la órbita. Con estas gráficas, se arrojan unos resultados interesantes y que pueden probar la veracidad de lo leído en la bibliografía.

- Método probabilista

El otro método tratado en este proyecto es el consistente en el desconocimiento de alguno de los parámetros de los que depende el tiempo de vida del satélite. Debido, como se vio en el capítulo 4, a la imposibilidad de conocer de forma exacta el valor de todos estos parámetros en cada instante, es de interés además de un método en el que por hipótesis o simplificaciones se supongan todos conocidos, también realizar uno más real como es éste. Dicho método probabilista es utilizado para

dos condiciones de parada diferentes y para el caso en el que es desconocida la densidad (parámetro que al depender de tantos factores variantes en el tiempo es imposible de saber con exactitud) obteniéndose una función de distribución del tiempo de vida como resultado y siendo esta satisfactoria excepto por los pequeños picos mencionados en el capítulo 4.

## 5.2 Trabajos futuros

Pese al estudio de dos métodos para estimar el tiempo de vida, éstos pueden hacerse mucho más precisos. A continuación se proponen algunas ampliaciones y mejoras que se pueden aplicar al presente proyecto:

- En los casos tratados se han supuesto la masa, la superficie frontal y el coeficiente de resistencia atmosférico, constantes en el tiempo y obtenidos de la bibliografía. Por ejemplo, respecto a la superficie frontal, como los satélites tratados eran esferas su superficie era trivial y era dada, sin embargo la mayor parte de los satélites no lo son y es por ello por lo que se podría aplicar este trabajo ese tipo de satélites con su método para calcular el área frontal instantánea. También el coeficiente de resistencia se podría modelar y en función de donde se encontrase el cuerpo o su área frontal tener un valor u otro.
- La densidad es el parámetro que más se ha simplificado. Si bien, su obtención es muy compleja y no puede obtenerse de forma exacta, en este proyecto no se han tenido en cuenta ningún factor dinámico sobre ella (cambiante en el tiempo) sino que se ha utilizado un modelo estático. La utilización de estos efectos que producen gran variación en la densidad provocarían un aumento de la exactitud del modelo enorme. Sería interesante modelarla más complejamente
- Aunque ha quedado demostrado que para órbitas bajas las perturbaciones más importantes y que afectan de mayor forma al comportamiento del satélite son el achatamiento terrestre y la resistencia atmosférica, se podrían tener en cuenta otros efectos como los de un tercer o cuarto cuerpo (luna, sol), el efecto de la radiación solar, la utilización de propulsante en el satélite, etc. Tanto para obtener una mayor exactitud en el caso propuesto o en si se estudian satélites a mayor altitud.
- Respecto al modelo probabilístico se puede realizar como trabajo futuro la adición de la perturbación debida al achatamiento terrestre no tenida en cuenta por la complejidad que ésta añadiría.
- También se podría mejorar el método eliminando esos pequeños picos que aparecen en la función de distribución debido a la excentricidad de la órbita.

# REFERENCIAS

---

- [1] Rafael Vázquez Valenzuela. Apuntes Mecánica Orbital 2015-2016. Departamento de Ingeniería Aeroespacial. Universidad de Sevilla.
- [2] J. de Lafontaine and S. C. Garg. A review of satellite lifetime and orbit decay prediction. University of Toronto. Institute for Aerospace Studies.
- [3] David A. Vallado. Fundamental of astrodynamics and applications. Third Edition.
- [4] C. Pardini, L. Anselmo. Calibration of semi-empirical atmosphere models through the orbital decay of spherical satellites.
- [5] Emma Kerr, Malcolm Macdonald. A general perturbations method for spacecraft lifetime analysis.
- [6] David A. Vallado, David Finkleman. A Critical Assessment of Satellite Drag and Atmospheric Density Modeling. Center for Space Standards and Innovation, Colorado Springs, Colorado.
- [7] Satellite orbital decay calculation. Australian Government. The Australian space weather agency.