

Proyecto Fin de Carrera

Grado de Ingeniería Aeroespacial

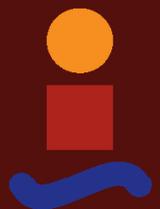
El tiempo de la mecánica cuántica

Autor: Nerea Adame Pastor

Tutor: José Martínez García

Dep. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Proyecto Fin de Grado
Grado de Ingeniería Aeroespacial

El tiempo de la mecánica cuántica

Autor:

Nerea Adame Pastor

Tutor:

José Martínez García

Profesor titular

Dep. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2017

Proyecto Fin de Carrera: El tiempo de la mecánica cuántica

Autor: Nerea Adame Pastor

Tutor: José Martínez García

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

Resumen

El objetivo de este trabajo de fin de grado es aportar una visión general de cómo el papel del tiempo ha supuesto desde un primer momento una incógnita intrínseca a todo sistema cuántico considerado.

Para ello se consideran los hitos más relevantes que forman parte de la evolución de este concepto, que se presentan a lo largo de todo el trabajo de forma cronológica.

Se parte desde principios del siglo XX, cuando surgen los primeros estudios de sistemas cuánticos, que empiezan a cobrar relevancia en el marco de la ciencia, y con los que nacen las primeras incógnitas en cuanto al tratamiento del tiempo en este ámbito.

Así se procede hasta llegar a la actualidad, donde aún se encuentran problemas a la hora de considerar la intervención del tiempo en determinados experimentos.

Finalmente se muestra un breve resumen donde se presentan las vertientes más importantes que han ido surgiendo según la evolución de los fundamentos de la cuántica, así como las conclusiones obtenidas tras la recopilación de dichos hitos.

Índice

Resumen	vii
Índice	ix
1 Introducción	1
2 Antecedentes	3
3 Teorema de Pauli	7
4 Positive operator-valued measure (POVM)	11
4.1 <i>Operadores proyección</i>	12
4.2 <i>Operadores densidad</i>	12
4.3 <i>Experimentos de medida</i>	13
4.4 <i>Aplicación a un observable</i>	14
4.5 <i>Concepto de POVM</i>	15
4.6 <i>Observable tiempo y POVM</i>	16
4.6.1 <i>Caso cinemático</i>	17
4.6.2 <i>Analogía temporal</i>	18
4.6.3 <i>Medidas de t con POVM no ortogonales</i>	19
5 Distribución de Kijowski	23
5.1 <i>Distribuciones de probabilidad</i>	24
5.1.1 <i>Caso cuántico</i>	25
5.2 <i>Cálculo del tiempo medio y la desviación media</i>	26
5.3 <i>Operador tiempo</i>	28
5.4 <i>Conclusión</i>	29
6 Principios de Incertidumbre: Operador de Aharonov-Bohm	31
6.1 <i>Interpretación de Mandelstamm-Tamm</i>	32
6.2 <i>Interpretación de Landau-Peierls</i>	33

6.3	<i>Crítica de Krylov y Fock</i>	33
6.4	<i>Operador de Aharonov-Bohm</i>	34
7	Aportaciones de Allcock	37
7.1	<i>Tiempo de llegada en problemas con fuentes</i>	39
7.2	<i>Características del aparato de medida</i>	42
7.2.1	Potenciales complejos	43
7.3	<i>Cálculo de la probabilidad total</i>	45
8	Conclusiones	49
	Referencias	51
	Anexo A	53
	Anexo B	55

1 INTRODUCCIÓN

La necesidad de obtener una definición precisa del tiempo es un hecho que sin duda se remonta al principio de la historia. El universo que nos rodea está repleto de desconocimiento. El ser humano, desde tiempos inmemoriales se ha sentido atraído por todo aquello que le rodea y afecta, debido a su naturaleza racional. Entender lo que ocurre en nuestro entorno no es ni mucho menos algo trivial, más aún si se refiere al concepto de tiempo.

¿Cuál fue el inicio de todo lo que existe? ¿Por qué el tiempo evoluciona hacia el “futuro”? ¿Existe la posibilidad de un tiempo cíclico que repita “estados” del universo periódicamente?... y otras innumerables cuestiones se han repetido a lo largo de los siglos, y para nuestra sorpresa, las respuestas encontradas son, en comparación con las preguntas, ínfimas.

El ser humano se siente reconfortado gracias a la creencia de que su existencia ocupa un lugar en la historia de todo lo que ha habido, y es por esto que desde que se tiene uso de razón, el tiempo ha estado íntimamente ligado a la religión, debido al intento de dar una explicación a aquello que se desconocía.

La búsqueda de respuestas a las incógnitas que supone el tiempo es algo que hasta el presente ha sido de vital relevancia. Esta situación hace que el estudio centrado en él ocupe gran parte de todas las disciplinas de la física, en particular por lo que concierne a este trabajo, también de la mecánica cuántica.

Esta disciplina nace a principios del siglo XX, debido a la necesidad que generan los avances más recientes en investigación, y gracias a estudios anteriores en los que se comenzaban a

cuestionar los sistemas a nivel atómico, debido al hallazgo de comportamientos fuera de lo cotidiano.

Con este marco relativamente joven de la ciencia, el tiempo no iba a ser ni mucho menos benevolente. Si bien a lo largo de siglos y siglos aún era algo “difuso” en general, debido al carácter atómico de la mecánica cuántica supondría un enigma aun mayor.

A ello se debe la gran importancia de conocer la evolución por la que ha pasado la definición y el tratamiento del tiempo en la mecánica cuántica, siendo esta la principal motivación a realizar este trabajo.

El objetivo del mismo es, por tanto, hacer un resumen de las diferentes consideraciones, problemas y sus posibles respuestas, que han ido surgiendo a lo largo del último siglo, planteando los distintos puntos de vista aportados en cada momento.

2 ANTECEDENTES

A pesar de que el tiempo en la mecánica cuántica desde siempre ha suscitado más incógnitas que respuestas, y que por ello numerosos científicos de renombre de la época han tratado de abordarlo, no se han llegado a obtener conclusiones claras acerca del papel que éste juega.

Desde hace décadas, una de las mayores preocupaciones de la disciplina ha sido encontrar la analogía entre el tiempo y el resto de observables cuánticos que se asocian a propiedades de un sistema. Por tanto, encontrar un operador capaz de describir al tiempo como una variable dinámica parece ser el primer paso para lograr cerrar el problema.

El establecimiento de la estructura del átomo de Rutherford como modelo atómico universal es la causa primordial que lleva a N. Bohr a presentar una alternativa al mismo en 1913 [1], debido a numerosas incongruencias que sería capaz de detectar en el modelo de Rutherford. Entre ellas, explica que si se tuviera en cuenta la energía de radiación, los electrones no describirían órbitas elípticas alrededor del núcleo.

El nuevo modelo propuesto por Borh establece que las órbitas que definen los estados estacionarios, denominadas niveles de energía, se corresponden con distintos valores discretos de energía según la ecuación de Plank

$$\Delta E = \hbar \nu$$

A partir de esta definición, Bohr deduce que los electrones serían capaces de ganar o perder una cantidad discreta de energía para cambiar de nivel energético, siendo este fenómeno conocido como salto cuántico.

Las primeras referencias al tiempo ocurren debido a este mismo resultado, puesto que la medición de la duración que tomaba un salto cuántico era algo que no se mencionaba en su deducción. Ante la propuesta de Bohr pues, se comienza a elucubrar acerca de su origen y su verdadera naturaleza.

Al mismo tiempo, W. Heisenberg critica los resultados del modelo propuesto por Bohr debido a la inexactitud a la hora de definir el tránsito entre dichos saltos cuánticos. Así, Heisenberg termina por establecer las conocidas relaciones de incertidumbre en 1927 [2]. Presentándolas como

$$\hat{E}\hat{t} - \hat{t}\hat{E} = -i\hbar$$

es capaz de mostrar que tanto energía como tiempo no pueden ser medidas con toda la exactitud que se desee considerando un mismo experimento. La forma de expresar este resultado incita a pensar que sería posible obtener una definición a partir de matrices, es decir, un *operador tiempo*.

No obstante, este resultado no quedaría claramente presentado en la publicación de Heisenberg. Se puede encontrar tanto secciones del mismo en las que el tiempo se trata como un parámetro externo, como ocasiones en los que Heisenberg lo define como una variable interna del sistema.

Por tanto el principio de incertidumbre, aunque presenta resultados sin los cuales hubiese sido imposible una evolución de la mecánica cuántica hasta como hoy la conocemos, no sería demasiado aclarativo puesto que la aplicación al par energía-tiempo presentaría aspectos algo difusos.

A continuación, en 1928, es el momento en el que Bohr propondría una nueva interpretación al principio de Heisenberg [3]. Para ello volvería a ayudarse de la ecuación de Planck, obteniendo lo que puede considerarse hasta hoy día el principio de incertidumbre más aceptado

$$\Delta t \Delta E \approx \hbar$$

en la que aparece como una duración de la medida de la energía del sistema (variable externa), con lo que el problema del operador tiempo quedaría en principio evitado.

Gracias tanto a los estudios realizados en los primeros años de la evolución de la mecánica cuántica, así como de los enigmas y errores que fueron surgiendo, ocurriría posteriormente un hecho revolucionario de manos de W. Pauli. Dicha revelación se detalla expresamente en el siguiente apartado.

3 TEOREMA DE PAULI

Motivado por los hallazgos de la época en la materia, en 1933, W. Pauli contribuye a lo que puede considerarse uno de los grandes hitos, con su segunda publicación enciclopédica, donde, a pie de página aparece brevemente desarrollado, no como teorema si no más bien como una anotación, lo que hoy día se denomina Teorema de Pauli [4]. Esto supone un punto de inflexión en cuanto a cómo abordar y entender el problema.

Su análisis toma como referencia el trabajo anteriormente realizado por M. Born, quien en 1925, estableció las relaciones de conmutación existente entre observables canónicamente conjugados. En particular, Born se centró en el estudio de la relación entre los observables posición y momento, $\hat{X} = x$ y $\hat{P} = i\hbar \partial/\partial x$, respectivamente. Dicha relación se corresponde con la conocida expresión:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \quad (3.1)$$

Para trabajar de forma análoga al caso cinemático desarrollado Born, es conveniente tener en cuenta un operador que permite obtener un resultado interesante para el caso de los observables posición y momento. Este operador se define como:

$$\hat{\tau} = \exp\left(-\frac{i\hat{P}x_k}{\hbar}\right) \quad (3.2)$$

de forma que mediante el uso del mismo se consigue una traslación tal que $|x\rangle \rightarrow |x + x_k\rangle$ ¹, y obteniéndose por consiguiente el resultado:

¹ Ver Anexo A

$$\hat{X}\hat{\tau}|x\rangle = (x + x_k)\hat{\tau}|x\rangle \quad (3.3)$$

Como puede observarse, el uso del operador traslación espacial transforma el sistema hacia un nuevo estado que está caracterizado por el autovalor $(x + x_k)$ y el autovector $\hat{\tau}|x\rangle$. El hecho de que los parámetros x_k puedan tomar cualquier valor en \mathbb{R} , determina el carácter continuo del espectro de x en el rango $[-\infty, \infty]$.

Partiendo de este resultado, Pauli obtiene lo que se puede considerar el análogo a los observables posición y momento. Para ello, es necesario establecer una serie de premisas que se exponen a continuación.

Teorema 3.1 (Teorema de Pauli)

Sean dos operadores, correspondientes a la energía del sistema y al tiempo. En primer lugar, Pauli presupone la existencia de un operador autoadjunto asociado al tiempo \hat{T} , de tal modo que mediante un análisis inverso, comprobará la factibilidad del mismo.

Por otro lado, se define el operador \hat{H} , denominado Hamiltoniano del sistema, que es el operador autoadjunto asociado a la energía. Para este último se tienen además, sus correspondientes autovalores y autovectores: E_k y $|E_k\rangle$, que determinan los valores posibles de la energía del sistema, y que cumplen, por tanto:

$$\hat{H}|E_k\rangle = E_k|E_k\rangle \quad (3.4)$$

Una vez establecidos los cimientos del problema, cabría esperar que el comportamiento fuese análogo al caso de los observables posición y momento. Para obtener un resultado de las mismas características, usando un procedimiento idéntico a (3.3), se define en este caso el operador evolución energía \hat{U}_e , unitario para todo $E \in \mathbb{R}$, como

$$\hat{U}_e = \exp\left(-\frac{iE\hat{T}}{\hbar}\right) \quad (3.5)$$

De nuevo en analogía con el trabajo realizado por Born, se halla la siguiente expresión:

$$\hat{H}\hat{U}_e|E_k\rangle = (E - E_k)\hat{U}_e|E_k\rangle \quad (3.6)$$

Este resultado implica una de las mayores incongruencias encontradas hasta el momento, y que hasta hoy día sigue acarreado problemas a la hora de tratar el tiempo como observable.

El hecho de que el operador evolución temporal genere un nuevo estado del sistema considerado, definido por el autovalor $(E - E_k)$, implica que la energía de dicho sistema se caracteriza por tener un rango continuo que se extiende desde $[-\infty, +\infty]$, debido a que E_k puede tomar cualquier valor en \mathbb{R} . Es decir, en particular, el espectro de la energía no está acotado inferiormente.

Este hecho descarta por completo la primera suposición de Pauli: la existencia de un operador autoadjunto \hat{T} canónicamente conjugado con el Hamiltoniano del sistema. Por tanto es necesario abandonar la idea de la representación mediante un observable y termina asumiendo que éste sólo puede presentarse como un parámetro, formando parte de la ecuación de Schrödinger.

El teorema de Pauli se puede considerar como el primer obstáculo encontrado respecto al estudio del tiempo en mecánica cuántica. El afán de encontrar interpretaciones nuevas y distintas para encontrar una alternativa a esta deducción ha sido principalmente motivado por el teorema explicado con anterioridad.

En particular, es destacable la propuesta de E. A. Galapon [5], que consistió en modificar ligeramente algunas de las premisas del Teorema de Pauli, procurando mejorar algunos aspectos de su formulación. A continuación se exponen brevemente los puntos principales que según Galapon deben darse para llegar a una formulación válida del operador tiempo.

Teorema 2.2 (Teorema de Galapon)

Si se considera el operador hamiltoniano \hat{H} autoadjunto, que cumple las siguientes propiedades:

- Tiene un espectro discreto acotado inferiormente: $-\infty < E_1 < E_2 \dots$
- Su degeneración es finita: $1 \leq m < \infty$, es decir, un autovalor E_k tiene asociado más de un autovector.
- Posee autovalores que cumplen la propiedad $\sum_k E_k^{-2} < \infty$
- Sus autovectores general el espacio completo de Hilbert

entonces existe un operador tiempo autoadjunto, canónicamente conjugado con \hat{H} en un subespacio denso de H .

En cualquier caso, la imposición de un operador autoadjunto para definir el tiempo es algo que se lograría demostrar más adelante que no es imprescindible, siendo posible obtener resultados experimentales obviando dicho artificio matemático. Esto se debía a la posibilidad de asociar observables con los "Positive Operator-valued Measure" (POVMs).

4 POSITIVE OPERATOR-VALUED MEASURE (POVM)

Cuando se examina el problema hallado por Pauli concerniente a la asignación del operador correspondiente, surge de inmediato la siguiente cuestión: ¿es posible encontrar una alternativa al operador autoadjunto? La respuesta es sí, gracias al desarrollo del concepto de Positive Operator-Valued Measure.

Un Positive Operator-Valued Measure, en adelante POVM, es una herramienta usada en la teoría de medida que permite obtener resultados en experimentos de medida en un sistema, sin necesidad de usar explícitamente un operador asociado al observable en cuestión.

Esto es particularmente interesante en el caso de medidas de características relacionadas con el tiempo y por ello los POVM suponen un importante avance a la hora de trabajar con éste y, como se verá a continuación, permite esquivar el inconveniente encontrado por Pauli mencionado con anterioridad.

En cuanto al estudio de los POVM para la obtención de medidas temporales, las aportaciones de A. Holevo recogidas en sus numerosas publicaciones [6], que serán de suma relevancia, puesto que se puede encontrar un estudio exhaustivo de la teoría de medidas y la aplicación de los POVM. Así mismo, el estudio que se lleva a cabo en publicaciones como las de Busch [7] o Helstrom [8] deben ser tenidas en cuenta.

De acuerdo con Holevo, los experimentos de medida se rigen por la probabilidad, es decir, los resultados obtenidos están descritos teóricamente por probabilidades correspondientes a cada posible resultado obtenido. De este modo, esta característica es intrínseca al hecho de medir una propiedad del sistema, y se produce debido a ciertas "variables ocultas" que escapan del alcance del experimento pero cuya existencia produce estas fluctuaciones en los resultados.

Antes de proceder con el estudio de los POVM para la obtención de medidas temporales, es necesario presentar unas nociones básicas de teoría de medidas, con las que se describa tanto el procedimiento, como las variables más importantes que intervienen en el experimento.

4.1 Operadores proyección

Un concepto clave que conforma la base del concepto de POVM son los operadores proyección. Para ello se define un subespacio lineal H' contenido en el espacio de Hilbert H , de modo que se cumple que $H \subset H'$.

Por otro lado se definen $|\phi'\rangle$ como la proyección de los vectores $|\phi\rangle$ en el subespacio H' . Dichos vectores cumplen que:

$$|\phi'\rangle = \sum_j |e_j\rangle \langle e_j | \phi\rangle$$

donde $\{e_j\}$ es un set ortonormal del subespacio H' .

Por último, se define el operador proyección, según su representación espectral, como:

$$\hat{P} = p_j \sum_j \hat{P}_j = p_j \sum_j |e_j\rangle \langle e_j|$$

Debido al objeto de estudio, que en este caso es la medida de observables, los operadores proyección \hat{P}_j son denominados generalmente como \hat{M}_k .

4.2 Operadores densidad

Los operadores densidad \hat{S} permiten describir en su totalidad el estado en el que se encuentra un sistema en un instante determinado. Estos operadores conforman un conjunto denominado $G(H)$, que engloba todas las matrices de densidad posibles. Además, cumplen las siguientes propiedades

$$\hat{S} \geq 0, \quad \text{Tr}(\hat{S}) = 1$$

Asimismo, los operadores densidad se pueden formular en función de su representación espectral

$$\hat{S} = \sum_k s_j |e_j\rangle\langle e_j|$$

Estos operadores determinan el estado del sistema, más precisamente denominado *estado mixto*, en función de estados los estados puros, $|e_1\rangle, |e_2\rangle \dots |e_n\rangle$ respectivamente.

4.3 Experimentos de medida

Partiendo de un sistema preparado un estado inicial, representado por un operador densidad \hat{S} , tal que $\hat{S} \in G(H)$, siendo $G(H)$ el conjunto de todos los estados iniciales posibles. Debido al hecho de medir una característica del sistema, este se ve alterado por la interacción producida entre el aparato de medida y el propio sistema, es decir, se produce un *colapso de la función de onda*, estando el sistema ya medido caracterizado por un estado distinto. En cuanto a este nuevo estado, se define el conjunto de resultados posibles U y el σ -álgebra $A(U)$, un conjunto formado por operaciones booleanas entre subconjuntos de U . Dentro del dominio formado por U y $A(U)$, se distinguen subespacios $B \in A(U)$ denominados espacios medibles, donde recaen los resultados de una medida específica u .

En base a los conceptos anteriores, se define la distribución de probabilidad

$$\mu_{\hat{S}}(B) = \Pr\{u | \hat{S}\}, \quad u \in B, \quad B \in A(U) \quad (4.1)$$

que representa cómo están distribuidas las probabilidades de que se den cualquiera de los resultados posibles $u \in B$, para un sistema con un estado inicial \hat{S} . Por otro lado, esta distribución total se puede descomponer en sumandos para cada uno de los resultados:

$$\mu_{\hat{S}}(B) = \sum_{u \in B} \mu_{\hat{S}}(u)$$

Estas probabilidades satisfacen las siguientes condiciones

$$\mu_{\hat{S}}(u) \geq 0, \quad \sum_{u \in U} \mu_{\hat{S}}(u) = 1$$

Medida cuántica: Se conoce como medida cuántica la transformación de densidad de una probabilidad $\hat{S} \in G(H)$ en una distribución de probabilidad $\mu_{\hat{S}}$ en el espacio U .

$$\hat{S} \rightarrow \mu_{\hat{S}}(u)$$

4.4 Aplicación a un observable

Considérese un operador cualquiera \hat{A} con representación espectral $\hat{A} = a_k \sum_k |a_k\rangle\langle a_k|$. Es posible redefinir este operador según sus proyectores de la forma

$$\hat{A} = \sum a_j \hat{M}_j$$

Una vez que se tiene la expresión anterior del operador \hat{A} , así como los conceptos de operador proyección y densidad, es interesante obtener parámetros asociados a la medida de dicho observable. Para ello, definimos la probabilidad y el valor esperado, cuyas expresiones son

$$p_k = \langle a_k | \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k | a_k \rangle = \text{Tr} \left(\hat{S} \left(a_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \right) \right)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_k p_k a_k = \sum_k a_k \text{Tr} \left(\hat{S} \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \right) = \text{Tr} \left(\hat{S} \left(a_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \right) \right)$$

Las matrices \hat{M}_k se denominan *resolución de la identidad* puesto que cumplen las siguientes propiedades:

$$\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = \hat{I} \quad (4.2)$$

con

$$\hat{M}_k \geq 0, \quad \sum_k \hat{M}_k = \hat{I} \quad (4.3)$$

Si bien el resultado anterior es válido para cualquier observable, es interesante considerar el caso particular de los operadores autoadjuntos. En este caso, se cumplen una serie de propiedades adicionales. Para ello se considera el observable B , caracterizado por el operador autoadjunto \hat{B} . Su representación espectral viene dada por $\hat{B} = b_k \sum_k |b_k\rangle\langle b_k|$.

Para este tipo concreto de operadores se suele denominar a los proyectores con una terminología específica, siendo $\hat{M}_k = \hat{E}_k$. Esto es debido a que los proyectores en este caso cumplen, además, las condiciones siguientes

$$\hat{E}_k = \hat{E}_k^\dagger, \quad \hat{E}_k^2 = \hat{E}_k \quad (4.4)$$

Sabiendo esto, \hat{B} se puede escribir en función de sus proyectores como

$$\hat{B} = \sum b_j \hat{E}_j$$

De forma análoga, se obtienen las expresiones correspondientes a la probabilidad y el valor esperado

$$p_k = \langle b_k | \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k | b_k \rangle = \langle b_k | \hat{E}_k | b_k \rangle = \text{Tr} \left(\hat{S} \left(b_k \hat{E}_k \right) \right)$$

$$\langle \hat{B} \rangle = \sum_k p_k b_k = \sum_k b_k \text{Tr} \left(\hat{S} \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k \right) = \text{Tr} \left(\hat{S} \left(b_k \hat{E}_k \right) \right)$$

Ahora las matrices \hat{E}_k se denominan *resolución de la identidad ortogonal*, cumpliendo la siguiente propiedad:

$$\sum_k \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k = \sum_k \hat{E}_k = \hat{I} \quad (4.5)$$

Se puede considerar que la obtención de las matrices \hat{M}_k determinan una forma de hacer medidas de un observable sin necesidad de usar un operador que lo defina.

Por tanto, el inconveniente encontrado en el teorema de Pauli puede ser evadido, realizando medidas y obteniendo resultados factibles a través de POVMs en lugar de un operador asociado.

4.5 Concepto de POVM

Las resoluciones de la identidad sirven de unión entre el experimento de medida y el observable. Si el conjunto U de todos los resultados posibles de medida es finito, y además \hat{M}_k es un conjunto de operadores hermíticos en H que cumplen (4.3), entonces un *Positive Operator-Valued Measure* (POVM) viene dado por:

$$\hat{M}(B) = \sum_{u \in B} \hat{M}_u, \quad \text{con } B \subset A(U) \quad (4.6)$$

Además, este conjunto de operadores cumplen las propiedades siguientes

- $\hat{M}(\emptyset) = 0$
- $\hat{M}(U) = \hat{I}$
- $\hat{M}(B) \geq 0$

Si además consideramos el caso específico estudiado en secciones anteriores donde las resoluciones de la identidad son ortogonales, entonces para dos subconjuntos B_i y B_j , se cumple que

$$\hat{M}(B_i)\hat{M}(B_j) = 0 \quad \text{si } B_i \cap B_j = \emptyset \quad (4.7)$$

y análogamente a (4.4), también se cumple la siguiente propiedad

$$\hat{M}(B) = \hat{M}(B)^2 \quad \text{si } B \in A(U) \quad (4.8)$$

Una medida cuántica consiste en la transformación de una densidad de probabilidad a una distribución de probabilidad, dada por $\hat{S} \rightarrow \mu_{\hat{S}}(u)$. Ahora esta transformación cobra sentido puesto que los POVM son la herramienta empleada para dicha transformación. Sabiendo esto, se deduce que

$$\mu_{\hat{S}}(B) = \text{Tr}(\hat{S}\hat{M}(B)), \quad B \in A(U) \quad (4.9)$$

En el caso particular de que los POVM estén formados por resoluciones de la identidad ortogonales, la transformación anterior se denomina *medida simple*.

4.6 Observable tiempo y POVM

Considérese en primer lugar que es posible preparar el estado inicial del sistema según las necesidades impuestas por el experimento de medida a realizar. Esta preparación se puede establecer en un determinado instante trasladado en el tiempo una cierta cantidad t' respecto a un instante predeterminado, de forma que el nuevo estado inicial se produzca en $t = t - t'$. En base a esta traslación, se puede determinar la relación entre la matriz densidad del estado inicial preparado, \hat{S}_t y el estado inicial predeterminado \hat{S} . La relación que se cumple entre ambos es

$$\hat{S}_t = \hat{V}_t \hat{S} \hat{V}_t^\dagger \quad (4.10)$$

donde el operador \hat{V}_t se denomina familia uni-paramétrica particularizada para t y cuya expresión, según el teorema de Stone, viene dada por

$$\hat{V}_t = \exp(i\hat{H}t)$$

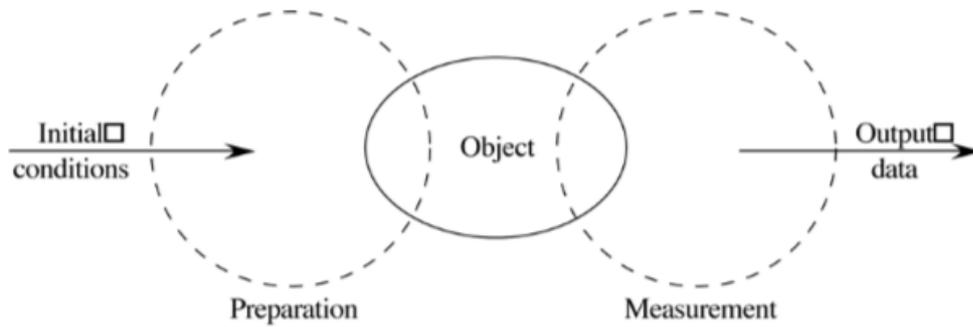


Figura 4.1 – Preparación del experimento de medida. [6]

4.6.1 Caso cinemático

Es interesante considerar primero el caso de los observables posición y momento, \hat{Q} y \hat{P} respectivamente, para establecer posteriormente una analogía con el caso que comprende.

Considérese las transformaciones debidas a la traslación de la posición del aparato que se mueve con velocidad v , una cantidad x

$$x' = x_0 - x - vt, \quad t' = t$$

La familia uniparamétrica para estas transformaciones, por el teorema de Stone, son

$$\hat{V}_x = \exp\left(-\frac{i\hat{P}x}{\hbar}\right), \quad \hat{U}_v = \exp(im\hat{Q}v)$$

siendo m un parámetro relacionado con la masa del sistema.

Como se hizo anteriormente, se define un nuevo estado inicial que difiere según una traslación espacial. De este modo, la matriz de densidad del nuevo estado inicial estará

relacionada con el observable \hat{Q} , y es

$$\hat{S}_x = \hat{V}_x \hat{S} \hat{V}_x^\dagger \quad (4.11)$$

Si sobre este sistema se realiza una medida de \hat{P} , se encuentra que la distribución de probabilidad del estado obtenido por la traslación se mantiene constante e igual al del estado base

$$\mu_x(B) = \mu_0(B_{-x}) \quad (4.12)$$

De igual forma podría obtenerse considerando la familia de estados siguiente:

$$\hat{S}_v = \hat{U}_v \hat{S} \hat{U}_v^\dagger \quad (4.13)$$

Por último, los observables \hat{Q} y \hat{P} son canónicamente conjugados. Es por ello que cumplen la relación de incertidumbre de Heisenberg

$$D_s(Q) D_s(P) \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (4.14)$$

que es una derivación de la ya conocida expresión $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$, y la relación de covarianza

$$\hat{V}_x^\dagger E(B) \hat{V}_x = E(B_{-x}) \quad \hat{U}_v^\dagger F(B) \hat{U}_v = F(B_{-v}) \quad (4.15)$$

teniendo en cuenta que las representaciones espectrales de ambos observables son $\hat{Q} = \int x E(dx)$ y $\hat{P} = m^{-1} \int \eta F(d\eta)$.

4.6.2 Analogía temporal

El hecho de que el tiempo no tenga un operador autoadjunto asociado no condiciona que sea imposible obtener información sobre características temporales de un sistema, como bien se apuntaba a principio del capítulo.

Considérese la familia de estados (4.10). En analogía con el caso cinemático (4.15), téngase en cuenta además la relación de covarianza

$$\hat{V}_t^\dagger M(B) \hat{V}_t = M(B_{-t}) \quad (4.16)$$

donde $M(B)$ conforma un POVM según (4.6). La distribución de probabilidad de la medida

también conlleva una traslación igual a la traslación temporal provocada en el estado de preparación del sistema.

$$\mu_t(B) = \mu_0(B_{-t}) \quad (4.17)$$

Se deduce pues que el experimento de medida está íntimamente ligado con el POVM $M(B)$. El hecho de que no exista un operador autoadjunto asociado al tiempo implica que el POVM no es ortogonal. Sin embargo, esto no es un problema puesto que también existen medidas representables por POVMs no ortogonales, y son éstas las que se estudian a continuación.

4.6.3 Medidas de t con POVM no ortogonales

Finalmente se conocen todas las herramientas necesarias para llevar a cabo la medición de un tiempo característico del sistema. Para facilitar el estudio, es conveniente el uso de la representación energía, donde este mismo observable estará definido por un operador diagonal. Para realizar este cambio, se considera una partícula libre, para la cual se cumple que $\hat{H} = (2m)^{-1} \hat{P}^2$. Por lo tanto se tiene en la representación momento que $\epsilon = (2m)^{-1} \eta^2$, y a partir de esta relación:

$$\eta = \pm \sqrt{2m\epsilon}; \quad d\eta = \pm \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} d\epsilon \quad (4.18)$$

El paso de la representación momento a la representación energía se realiza utilizando (4.18) mediante la siguiente deducción

$$\langle \phi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\eta)|^2 d\eta = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} |\phi(\sqrt{2m\epsilon})|^2 \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} |\phi(-\sqrt{2m\epsilon})|^2 \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}$$

Por tanto, renombrando el siguiente término

$$\phi(\epsilon) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\phi(\sqrt{2m\epsilon}) + \phi(-\sqrt{2m\epsilon}) \right) = \sqrt{\frac{m}{2}} \phi(\eta)$$

se obtiene que

$$\langle \phi | \phi \rangle = \int_0^{\infty} |\phi(\epsilon)|^2 d\epsilon \quad (4.19)$$

En base a la relación que existe entre el par canónico posición y momento, \hat{P} y $\hat{Q} = i\hbar d/d\eta$ (y viceversa \hat{Q} con $\hat{P} = -i\hbar d/dx$), se puede considerar un operador que guarde una relación similar con \hat{H} , a pesar de no ser autoadjunto. Además, tiene una representación espectral que está íntimamente ligada con el POVM $M(dt)$. De este modo

$$\hat{T} = i\hbar \frac{d}{d\varepsilon} \quad (4.20)$$

definido en el dominio

$$D(\hat{T}) = \left\{ \phi(\varepsilon) : \phi_0 = 0, \quad \int_0^\infty \left| \frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|^2 d\varepsilon < \infty \right\}$$

y cuya representación espectral es la resolución de la identidad no ortogonal $M(dt)$ dada por

$$\hat{T} = \int t M(dt) \quad (4.21)$$

con $M(dt)$ definida por la siguiente expresión

$$\langle \phi | M(dt) \phi \rangle = \frac{dt}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \phi^\dagger(\varepsilon) \phi(\varepsilon) \exp\left(\frac{i(\varepsilon' - \varepsilon)t}{\hbar}\right) d\varepsilon d\varepsilon'$$

A continuación, considérese un vector $\phi \in D(\hat{T})$. En primer lugar se obtiene la siguiente expresión correspondiente al valor medio de \hat{T}

$$\langle \hat{T} \rangle = \int_0^\infty \phi^\dagger(\varepsilon) \hat{T} \phi(\varepsilon) = i\hbar \int_0^\infty \phi^\dagger(\varepsilon) \frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (4.22)$$

y por otro lado, también será útil la expresión de la desviación media, cuya deducción se presenta en adelante:

$$\Delta \hat{T}^2 = \langle \hat{T}^2 \rangle - \langle \hat{T} \rangle^2$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}^2 \rangle &= -\hbar^2 \int_0^\infty \phi^\dagger(\varepsilon) \frac{d^2\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} d\varepsilon = \left(\phi^\dagger(\varepsilon) \frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{d\phi^\dagger(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon = \\ &= \hbar^2 \int_0^\infty \left| \frac{d\phi^\dagger(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|^2 d\varepsilon \end{aligned}$$

por tanto la expresión de la desviación media resulta

$$\Delta \hat{T} = \hbar^2 \int_0^\infty \left| \frac{d\phi^\dagger(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|^2 d\varepsilon - \langle \hat{T} \rangle^2 \quad (4.23)$$

Una vez se tienen estas dos características del sistema, se puede proceder con la medida. En base a la relación de incertidumbre de Mandelstam-Tamm [7], que se cumple para cualquier par de observables, y en este caso en particular para \hat{T} y \hat{H} ,

$$\Delta\hat{T}_t^2 \Delta\hat{H}_t^2 \geq \frac{1}{4} \left| \frac{d}{dt} \langle \hat{T}^2 \rangle_t \right|^2 \quad (4.24)$$

Ahora bien, se considera que el experimento de medida se realiza con un aparato preparado en un estado \hat{S}_t , tal y como se describía en (4.10), mediante una traslación temporal. El observable \hat{T} constituye una estimación estadística del tiempo que este experimento de medida pretende determinar, el valor t que aparece en la expresión $\hat{S}_t = \hat{V}_t \hat{S} \hat{V}_t^\dagger$.

Para que el par \hat{T}, t sea compatible y pueda cumplirse (4.24), debe imponerse una condición adicional entre ambos, y es que no exista error en cuanto a la estimación estadística de t . Esto se traduce matemáticamente en la siguiente expresión

$$\langle \hat{T} \rangle_t = t \quad (4.25)$$

Cuando se cumple (4.25), entonces el término de la derecha de (4.24) queda $\frac{d}{dt} \langle \hat{T}^2 \rangle_t = 1$, y por tanto la relación de incertidumbre de Mandelstam-Tamm queda

$$\Delta\hat{T}_t^2 \Delta\hat{H}_t^2 \geq \frac{1}{4} \quad (4.26)$$

lo que sugiere que la varianza de ambos observables está acotada inferiormente.

Supóngase ahora que el tiempo que del que se quieren obtener resultados de medida es tal que una traslación en el estado preparado del sistema provoca una misma traslación en dicho parámetro. En ese caso se pueden relacionar distintos tiempos con el observable \hat{T} , de forma que a través de los resultados anteriores se podrían obtener automáticamente medidas de dichos tiempos. Por ejemplo el tiempo de llegada se relacionaría con \hat{T} como

$$\hat{T}_{llegada} = C - \hat{T}$$

5 DISTRIBUCIÓN DE KIJOWSKI

La naturaleza propia de la ciencia requiere que los aspectos teóricos puedan ser puestos en práctica de forma eficaz para la obtención de resultados experimentales. Es por ello que ante la negativa obtenida en los numerosos intentos de descifrar el concepto del tiempo, los estudios comenzarían a centrarse en ciertos casos prácticos para los que se podrían establecer ciertas condiciones y/o requerimientos específicos que permitirían resolverlos. En efecto, uno de los casos en el que el tiempo resulta especialmente interesante es el del *tiempo de llegada*. Este concepto resulta indispensable en los avances logrados en el campo de la mecánica cuántica.

El trabajo aportado por J. Kijowski estuvo principalmente enfocado en el tiempo de llegada, a través de numerosas publicaciones [8], [9], [10]. El principal objetivo de Kijowski es evitar los ya conocidos inconvenientes encontrados por Pauli, así como posteriormente la idea de que no existía un concepto ideal de tiempo de llegada, deducida por Allcock.

Kijowski considera que la única forma de tratar al tiempo como una variable dinámica sin caer en incoherencias, es mediante la definición del tiempo según a través del siguiente experimento:

Considérese una superficie Q en tres dimensiones. Escogiendo convenientemente tres coordenadas, es posible determinar el punto en el que una partícula P atraviesa esta superficie. Si las coordenadas escogidas en Q son de tipo espacial, (x, y, z) , entonces se tendrá el punto espacial de dicha partícula. Sin embargo en este caso es interesante plantearse unas coordenadas que contengan dos de las variables espaciales, con una tercera componente

referente a un tiempo, véase (t, x, y) , y con ello podrá determinarse el punto espacio-temporal de paso por Q , es decir, el tiempo t en el que la partícula se encuentra en (x, y) .

Con esta proposición, considera que existe un operador temporal asociado al tiempo en el que la partícula P atraviesa la superficie Q , que denomina \hat{t}_Q . Es importante sin embargo tener en cuenta que no cualquier partícula que atraviesa la superficie es válida; por la necesidad de simplificar el problema, sólo se toman en cuenta las partículas que pasan por Q en un único sentido.

5.1 Distribuciones de probabilidad

Mediante este experimento, Kijowski aborda el problema de forma axiomática. En primer lugar se centra en la búsqueda de la densidad de probabilidad $\hat{S}(t)$ de pasar a través de la superficie Q en el instante t . Para ello, se comienza definiendo el *tiempo medio* y la *desviación media*

$$t_{\text{medio}} = \int t \hat{S}(t) dt \quad (5.1)$$

$$\Delta t^2 = \int (t - t_{\text{medio}})^2 \hat{S}(t) dt \quad (5.2)$$

La densidad de probabilidad $\hat{S}(t)$ está directamente relacionada con el estado ϕ , que contiene la información del sistema. Además, $\hat{S}(t)$ debe cumplir las siguientes características

$$\hat{S}(t) \geq 0 \quad (5.3)$$

$$\int \hat{S}(t) dt = 1 \quad (5.4)$$

En cuanto a la superficie Q , la condición (5.4) implica que el estado ϕ contiene momento transversales a Q , es decir

$$\phi(\hat{p}) = 0; \quad p_3 \geq 0 \quad (5.5)$$

Con estos dos aspectos, se obtiene la siguiente densidad de probabilidad, siendo Q el plano $z = 0$

$$\hat{S}(t) = \int f(x, y, 0; p_1, p_2, p_3; t) \frac{p_3}{m} dx dy dp_1 dp_2 dp_3 \quad (5.6)$$

5.1.1 Caso cuántico

El cumplimiento de la condición (5.5) sugiere tener en cuenta un espacio en el que se consideren aquellas funciones de onda que son no nulas. De esta forma, se define el espacio $P_Q = \{p_1, p_2, p_3 > 0\}$.

Una traslación temporal en la función de onda que representa el estado del sistema sería

$$\phi_t(\hat{p}) = \phi(\hat{p}) \exp\left(-\frac{i\hat{H}(\hat{p})t}{\hbar}\right)$$

tomando el caso de una partícula libre con $\hat{H} = (2m)^{-1} \hat{p}^2$, entonces

$$\phi_t(\hat{p}) = \phi(\hat{p}) \exp\left(-\frac{i\hat{p}^2 t}{2m\hbar}\right) \quad (5.7)$$

Normalmente, en mecánica cuántica la densidad de probabilidad está relacionada directamente con la función de onda mediante una función bilineal, en adelante F . De este modo

$$\hat{S}(t) = \hat{F}(\phi_t) \quad (5.8)$$

donde

$$\hat{F}(\phi_t) = T_F(\bar{\phi}_t, \phi_t) \quad (5.9)$$

y T_F es una distribución en $P_Q \times P_Q$. Es interesante considerar una función F en particular, que será utilizada posteriormente, y que responde a la expresión

$$\hat{F}_0(\phi) = \int \frac{\sqrt{\hat{p} \cdot \hat{q}}}{m(2\pi\hbar)^4} \bar{\phi}(p_1, p_2, \hat{p}) \phi(p_1, p_2, \hat{p}) dp_1 dp_2 d\hat{p} d\hat{q} \quad (5.10)$$

El conjunto de todas las funciones bilineales se denomina Γ_Q . Para que \hat{S}_t cumpla las condiciones (5.3) y (5.4), las funciones bilineales anteriores deben responder a las siguientes características:

- $\hat{F}(\phi) \geq 0$
- $\int \hat{F}(\phi_t) dt = 1$ si la función de onda está normalizada.
- La desviación media debe ser finita, $\int t^2 \hat{F}(\phi_t) < \infty$

Teniendo esto en cuenta, en base a (5.1) y (5.2), se pueden definir el tiempo medio de paso por la superficie Q , así como la desviación media

$$t_{\text{medio}}(Q, F, \phi) = \int t \hat{F}(\phi_t) dt \quad (5.11)$$

$$\Delta t^2 = \int (t - t_{\text{medio}})^2 \hat{F}(\phi_t) dt \quad (5.12)$$

Haciendo uso de todas las consideraciones anteriores, se deduce el siguiente teorema

Teorema 5.1

Para cualquier $\hat{F} \in \Gamma_Q$,

$$t_{\text{medio}}(Q, \hat{F}, \phi) = t_{\text{medio}}(Q, \hat{F}_0, \phi)$$

$$\Delta t^2(Q, \hat{F}, \phi) \leq \Delta t^2(Q, \hat{F}_0, \phi)$$

Puesto que existe un valor $\hat{F} = \hat{F}_0$ para el que (5.14) se iguala, entonces se puede concluir que F_0 representa la distribución de probabilidad asociada a \hat{S} que provoca una desviación media mínima.

Es por ello razonable tomar el valor de la densidad de probabilidad como $\hat{S}(t) = \hat{F}_0(\phi)$.

5.2 Cálculo del tiempo medio y la desviación media

Hasta el momento se ha logrado obtener los valores de t_{medio} y Δt^2 como función de distribuciones de probabilidad, puesto que $\hat{S}(t) = \hat{F} = \hat{F}_0$.

Por otro lado, $\hat{F}_0 = \hat{F}_0(\phi)$ y a su vez $\phi = \phi(\hat{p})$. Es decir, se está trabajando en la representación momento. Ya se comentaba en la introducción del capítulo, que debido a las características del experimento, interesaba trabajar en la representación espacio-temporal formada por (x_1, x_2, t) , que permitiría obtener el instante t por el que la partícula alcanzaría el punto (x_1, x_2) .

Para realizar este cambio, es necesario tomar una función de onda $\phi \in P_Q$ en la representación (p_1, p_2, E) . Se debe tener presente que ahora la traslación temporal de la

función de onda (5.7) toma la siguiente forma

$$\phi_t(p_1, p_2, E) = \phi(p_1, p_2, E) \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{F}_0(\phi) = & \int \frac{1}{m(2\pi\hbar)^4} \bar{\phi}(p_1, p_2, E) \exp\left(\frac{itE_1}{\hbar}\right) \phi(p_1, p_2, E) \cdots \\ & \cdots \exp\left(\frac{itE_2}{\hbar}\right) dp_1 dp_2 dE_1 dE_2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por último, se define la siguiente función de onda en la representación espacio-temporal que se buscaba

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{\hat{Q}}(x_1, x_2, t) = & \int \frac{1}{m(2\pi\hbar)^3} \phi(p_1, p_2, E) \cdots \\ & \cdots \exp\left(\frac{i(x_1 p_1 + x_2 p_2 - tE)}{\hbar}\right) dp_1 dp_2 dE \end{aligned} \quad (5.16)$$

que se puede reescribir como

$$\hat{F}_0(\tilde{\phi}_{\hat{Q}}) = \int |\tilde{\phi}_{\hat{Q}}(x_1, x_2, t)|^2 dx_1 dx_2 \quad (5.17)$$

donde $|\tilde{\phi}_{\hat{Q}}(x_1, x_2, t)|$ representa la densidad de probabilidad de paso a través de Q en el punto (x_1, x_2) , en el instante t .

Una vez se ha logrado obtener \hat{F}_0 en la representación espacio-temporal, se tienen las expresiones del tiempo medio y la dispersión media según (5.11) y (5.12), respectivamente

$$t_{medio} = \int t |\tilde{\phi}_{\hat{Q}}|^2 dx_1 dx_2 dt = \int \bar{\phi}_{\hat{Q}} t \tilde{\phi}_{\hat{Q}} dx_1 dx_2 dt \quad (5.18)$$

$$\Delta t^2 = \int \bar{\phi}_{\hat{Q}} t^2 \tilde{\phi}_{\hat{Q}} dx_1 dx_2 dt - t_{medio}^2 \quad (5.19)$$

Por la propiedad del producto escalar de funciones de onda, se deduce

$$t_{medio} = \langle \tilde{\phi}_{\hat{Q}} | \hat{t}_{\hat{Q}} \tilde{\phi}_{\hat{Q}} \rangle \quad (5.20)$$

$$\Delta t^2 = \langle \tilde{\phi}_{\hat{Q}} | \hat{t}_{\hat{Q}}^2 \tilde{\phi}_{\hat{Q}} \rangle - t_{medio}^2 \quad (5.21)$$

Las expresiones del tiempo medio y de la desviación media quedan en base a lo que resulta ser un operador temporal \hat{t}_Q , cuyas características se expondrán posteriormente.

5.3 Operador tiempo

El resultado anterior sugiere la definición de un operador temporal \hat{t}_Q^+ , definido en el dominio $P_Q^+ = \{p_1, p_2, p_3 > 0\}$, que se corresponde con las partículas que atraviesan Q de izquierda a derecha, y que cumple la propiedad

$$\hat{t}_Q \tilde{\phi}_Q(x_1, x_2, t) = t \tilde{\phi}_Q(x_1, x_2, t) \quad (5.22)$$

y que además, considerando la representación de $\phi(p_1, p_2, E)$, se expresa como

$$\hat{t}_Q \phi(p_1, p_2, E) = -i\hbar \frac{\partial \phi(p_1, p_2, E)}{\partial E} \quad (5.23)$$

El operador asociado a partículas atravesando Q de derecha a izquierda es análogo, con dominio de definición $P_Q^- = \{p_1, p_2, p_3 < 0\}$ y escrito como \hat{t}_Q^- .

Por motivos operacionales, así como para simplificar los cálculos, parece lógico agrupar ambos tipos de partículas en un solo caso, así se define un operador temporal global en el dominio $P_Q = P_Q^+ \cup P_Q^-$

$$\hat{T}_Q \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_Q^+ \\ \tilde{\phi}_Q^- \end{pmatrix} = \hat{t}_Q^+ \tilde{\phi}_Q^+ + \hat{t}_Q^- \tilde{\phi}_Q^- \quad (5.24)$$

Este operador parece que posee, en primera instancia, todas las características necesarias para ser válido como operador temporal. Cumple el principio de incertidumbre de Heisenberg $[\hat{H}, \hat{T}_Q] = i\hbar$, sin embargo, es un operador no autoadjunto. Esta característica obliga a descartarlo como operador, pero a pesar de ello, aún pueden obtenerse otras conclusiones gracias a él. Kijowski decide entonces invertir el signo de una de las componentes, $\hat{t}_Q = (\hat{t}_Q^+, -\hat{t}_Q^-)$. Por tanto

$$\hat{T}'_{\hat{Q}} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{\hat{Q}}^+ \\ \tilde{\phi}_{\hat{Q}}^- \end{pmatrix} = \hat{t}_{\hat{Q}}^+ \tilde{\phi}_{\hat{Q}}^+ - \hat{t}_{\hat{Q}}^- \tilde{\phi}_{\hat{Q}}^- \quad (5.25)$$

Para este otro caso, se tiene un resultado diferente. Ahora la relación de incertidumbre de Heisenberg no es canónica

$$[\hat{H}, \hat{T}] = \begin{cases} i\hbar & \Rightarrow \text{partículas de izquierda a derecha} \\ -i\hbar & \Rightarrow \text{partículas de derecha a izquierda} \end{cases} \quad (5.26)$$

Sin embargo, realizando este cambio, sí que se obtiene un operador autoadjunto. Los autovectores correspondientes son las distribuciones

$$\delta(t-t_0)\delta(x_1-x_{10})\delta(x_2-x_{20}) \quad (5.27)$$

Se podría pensar en la posibilidad de abordar el problema partiendo de la suposición del operador temporal. Kijowski aclara que este procedimiento carece de lógica, puesto que no es trivial suponer desde un principio las relaciones (5.26).

5.4 Conclusión

Con los resultados obtenidos tanto por Pauli como Kijowski, se distinguen dos posibilidades que pueden ocurrir en cuanto a las características de un operador temporal.

Por una parte, si \hat{H} y \hat{T} guardan una relación canónica, entonces el operador tiempo no puede ser autoadjunto. Por el contrario, es posible obtener un operador que sea autoadjunto, pero a cambio la relación entre los operadores debe ser no canónica, como la que resulta del estudio de Kijowski.

Para el primero de los casos, por tanto, la opción inmediata es el uso de POVMs, que como se vio anteriormente permiten realizar medidas cuando se tiene un operador no autoadjunto. Para el otro caso, es evidente que tomar el método de Kijowski, partiendo de la densidad de probabilidad del observable tiempo, es la opción más conveniente.

6 PRINCIPIOS DE INCERTIDUMBRE: OPERADOR DE AHARONOV-BOHM

Las relaciones de incertidumbre, si bien forman parte de las principales características de los observables en la mecánica cuántica, son una herramienta que deriva en incoherencias cuando se trata del par energía-tiempo. El desarrollo de W. Heisenberg de la mecánica cuántica matricial le permitiría, en 1927 [2], establecer un resultado revelador respuesta a Pauli. En ella, describía la imposibilidad de conocer con exactitud y al mismo tiempo la posición y el momento de un sistema, debido a una incertidumbre intrínseca al sistema cuántico, $\Delta q \Delta p \geq \hbar / 2$. Este hecho cambiaría completamente la interpretación del comportamiento cuántico aceptado hasta el momento.

La aplicación del resultado de Heisenberg a los observables energía y tiempo no es una excepción; también se origina una incertidumbre entre ambos, pero en este caso la forma de interpretar el principio de incertidumbre sería distinta al caso de otros observables. De hecho, existiría más de una interpretación válida, debido a las distintas formas posibles de describir el tiempo.

En cuanto a la relación directa entre el operador tiempo y el principio de incertidumbre, existen dos formulaciones importantes de mano de Mandelstamm-Tamm y de Aharonov-Bohm, ambas constituyendo distintas interpretaciones del mismo.

6.1 Interpretación de Mandelstam-Tamm

En febrero de 1945 se publica un artículo de mano de L. Mandelstam e I. Tamm [7]. En él, desarrollarían la relación de incertidumbre de Heisenberg, teniendo en cuenta además la ecuación de Schrödinger y con una definición distinta hasta el momento.

El hecho que hace que la interpretación de Mandelstam-Tamm sea destacable es que el tiempo que aparece en la relación de incertidumbre es una característica intrínseca del sistema y de su evolución. Considérese una variable dinámica cualquiera del sistema en función del tiempo, denotado por A , que permita medir el tiempo; un buen ejemplo sería la posición de las agujas de un reloj.

La relación de incertidumbre general viene denotada por

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

En primer lugar es necesario considerar que uno de los observables se corresponde con la energía del sistema $\hat{B} = \hat{H}$. Teniendo en cuenta la ecuación de movimiento de Heisenberg $i\hbar\partial\hat{A}/\partial t = \hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}$, la ecuación anterior se transforma en

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{H} \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle i\hbar \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} \right\rangle \right| = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{A} \rangle \right| \quad (6.1)$$

Reestructurando esta inecuación se obtiene

$$\frac{\Delta\hat{A}}{\left| \frac{\partial\langle\hat{A}\rangle}{\partial t} \right|} \Delta\hat{H} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (6.2)$$

El resultado anterior empuja a definir el término $\Delta\hat{A}/|\partial\langle\hat{A}\rangle/\partial t|$ como el intervalo requerido para que se produzca una variación sustancial en \hat{A} , que se denomina *tiempo característico* Δt , y que cumple

$$\Delta t = \frac{\Delta\hat{A}}{\left| \frac{\partial\langle\hat{A}\rangle}{\partial t} \right|} \quad (6.3)$$

Este tiempo no está relacionado con la duración de una medida, si no con las propiedades

intrínsecas del sistema cuántico. Es importante puntualizar que la obtención de un tiempo del modo que proponen Aharonov-Bohm sólo es posible en el caso en el que se trate de un sistema no estacionario, que demuestre una variación de A .

6.2 Interpretación de Landau-Peierls

La deducción expuesta anteriormente por Mandelstam-Tamm fue obtenida mediante los conceptos de función de onda, operadores y probabilidad cuántica. Por ello surge la necesidad de referir el estudio al aparato que proporciona la medida temporal. En este aspecto, un buen modelo con estas características es el definido por Landau y Peierls [11].

El experimento que consideran para ello consiste en un sistema compuesto por dos partículas libres. La primera de ellas se denomina partícula testeadora, mientras que la segunda será la partícula observada, cuya función es impactar con la anterior, permitiendo realizar una medida del momento sobre ella. Una simplificación posible de esta situación es considerar que la partícula observada actúa como un espejo, pudiéndose entonces estudiar el caso monodimensional.

El procedimiento consiste en hacer una medida de la cantidad de movimiento $\Delta\hat{p}$ asociado a la colisión, y más adelante relacionarlo con la energía del sistema mediante $\hat{E} = (2m)^{-2} \hat{p}^2$.

La colisión entre ambas partículas queda registrada en un intervalo de tiempo Δt , por lo que existirá una incertidumbre si uno se refiere al instante específico de colisión. El hecho de obtener la definición del tiempo mediante el potencial asociado a la colisión de las partículas implica directamente una incertidumbre en la energía del sistema, que se obtiene directamente de la ecuación de conservación de la energía como

$$\Delta\hat{E} \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \quad (6.4)$$

Esta sencilla expresión acarrea resultados importantes: para realizar una medida precisa de la energía de un sistema, es necesario emplear un tiempo de medida Δt grande.

6.3 Crítica de Krylov y Fock

En 1947 N. Krylov y V. Fock [12] presentarían una crítica a la forma de proceder de Landau y Peierls, ya que no aceptaban la definición del tiempo derivada de la colisión de las

partículas, si no que sugiere su obtención a través del movimiento de las partículas.

El supuesto de Krylov y Fock consiste en que la partícula testadora define el tiempo $t = x/v$, siendo x la posición en la que se encuentra en dicho instante. Según esta ecuación, el tiempo tendrá una incertidumbre $\Delta t = \Delta x/v$.

Por otra parte, la partícula que colisiona con la anterior partirá de una posición inicial x_p , con incertidumbre Δx_p . Entonces

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} \quad (6.5)$$

por lo tanto

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{2v\Delta p} \quad (6.6)$$

y por último, debido a que $\hat{E} = (2m)^{-1}\hat{P}^2$, se obtiene

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{\Delta E} \quad (6.7)$$

El resultado es idéntico al obtenido por Landau-Peierls, salvo que ahora la definición del tiempo se ha hecho mediante la posición de las partículas, dejando a un lado la ecuación de la conservación de la energía. La conclusión es la misma, sin embargo presenta una alternativa a la forma de obtenerla.

Además, Krylov y Fock refutarían aspectos del estudio realizado por Mandelstam-Tamm, aclarando que el hecho de que el tiempo tenido en cuenta estuviese definido por la función de onda del sistema sólo tendría un significado estadístico. Debido a ello considera la aportación de Mandelstam-Tamm como incompleta, al no poder ser referida a ningún experimento de medida.

6.4 Operador de Aharonov-Bohm

Y. Aharonov y D. Bohm publican en 1961 un artículo [13] donde desarrollan de forma resumida los tratamientos adoptados mencionados anteriormente. Por ello concluye que existe la necesidad de encontrar un método por el que se puedan describir los operadores energía transferida y el tiempo de medida. Toman entonces el caso experimental de Landau-Peiers, un sistema formado por dos partículas, donde una de ellas colisiona con la otra.

Aharonov-Bohm representan el tiempo de Landau-Peiers como un operador hermítico que se rige por la expresión

$$\hat{t}_c = \frac{\hat{X}}{v_{\hat{X}}} = \frac{m}{2} \left(\hat{X} \frac{1}{\hat{P}_{\hat{X}}} + \frac{1}{\hat{P}_{\hat{X}}} \hat{X} \right) \quad (6.8)$$

donde \hat{X} describe el operador posición de la partícula y $\hat{P}_{\hat{X}}$ la posición de la misma.

Aquí se va a suponer que la partícula testadora actúa como un reloj, determinando el instante en el que la partícula colisionadora impacta con ella. Aharonov y Bohm recalcan la importancia de diferenciar el tiempo definido por la función de onda del sistema observado (el caso de Mandelstam-Tamm) y el tiempo en el que se realiza una medida (el caso que ellos tratan). Ésta es diferencia principal con Mandelstam-Tamm, se relaciona la energía del sistema observado con el tiempo que se obtiene de la medida del aparato, en lugar de considerar el tiempo intrínseco de la partícula colisionadora.

Por ello, el operador tiempo anterior pertenece única y exclusivamente al aparato medidor, y es por esto mismo por lo que entonces \hat{t}_c conmuta con cualquier operador asociado al sistema observado, y en particular con su hamiltoniano.

Esto, como se puede comprobar con el siguiente ejemplo, elimina toda imposibilidad de hacer medidas de la energía de un sistema todo lo exactas que se quieran, en cortos periodos de tiempo.

Experimento de Aharonov-Bohm

Considérese el sistema compuesto formado por el aparato de medida, la partícula, y la interacción entre ambos. El hamiltoniano de este sistema tiene la siguiente forma

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{aparato}}(\hat{X}, \hat{P}_x) + \hat{H}_{\text{part}}(\hat{Y}, \hat{P}_y) + \hat{H}_{\text{interacción}}(\hat{X}, \hat{P}_x, \hat{Y}, \hat{P}_y) \quad (6.9)$$

donde $\hat{H}_{\text{aparato}} = \hat{P}_x^2 / (2m)$, $\hat{H}_{\text{part}} = \hat{P}_y^2 / (2m)$ y \hat{H}_{interac} sólo será no nulo en el periodo de tiempo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ en el que ocurre la medida. Esta última condición viene descrita por la función $g(t)$. El hamiltoniano entonces puede reescribirse como

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \frac{\hat{P}_y^2}{2m} + \hat{Y} \hat{P}_x g(t) \quad (6.10)$$

En base a (6.10), las ecuaciones de movimiento² asociadas al sistema son

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \frac{\hat{P}_x}{m} + \hat{Y} g(t) \quad (6.11)$$

$$\frac{d\hat{Y}}{dt} = \frac{\hat{P}_y}{m} \quad (6.12)$$

² Ver Anexo B

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = -\hat{P}_x g(t) \quad (6.13)$$

Tomando \hat{P}_x como constante, y resolviendo en (6.13) para \hat{P}_y , se obtiene

$$\Delta\hat{P}_y = \hat{P}_y - \hat{P}_y^0 = -\hat{P}_x g(t) \Delta t \quad (6.14)$$

Está claro según (6.14) que cuanto mayor sea el valor de la función $g(t)$, menores serán los valores de incertidumbre de $\Delta\hat{P}_y$ y Δt . Por tanto este experimento generalizado permite demostrar que es posible realizar una medida todo lo precisa que se quiera de la energía de un sistema si se es capaz de elegir un $g(t)$ lo suficientemente grande.

Así, Aharonov y Bohm desmienten una idea que hasta el momento todos sus contemporáneos daban por sentado, haciendo hincapié en que se habían hecho interpretaciones erróneas del principio de incertidumbre. Siendo capaces de describir los operadores no de modo que representen características intrínsecas del sistema, si no que se tenga en cuenta además el hecho de realizar la medida, y con ello el aparato utilizado para este fin, logran realizar medidas precisas de la energía en periodos de tiempo arbitrariamente pequeños.

7 APORTACIONES DE ALLCOCK

Es evidente que las principales incógnitas que ha presentado el tiempo en la mecánica cuántica han surgido debido a que éste tiene una naturaleza distinta al resto de observables, los cuales pueden definirse con relativa facilidad mediante operadores. Puesto que como se ha afirmado anteriormente, la utilidad de poder definir el tiempo en mecánica cuántica reside en poder usar el concepto para obtener resultados experimentales, se ha visto numerosas alternativas para subsanar este aspecto.

Uno de los estudios más importantes en esta línea es debido a G. R. Allcock con una publicación formada por tres artículos [14], en los que trata la medida del tiempo en sistemas cuánticos. En dicha publicación considera un sistema formado por una partícula, una fuente de la que ésta parte, y un detector que permite conocer el instante en el que la partícula pasa por el mismo. Este tiempo no será definido como un parámetro externo, si no que definirá el lapso que requiere una característica del sistema en variar notablemente.

La diferencia principal entre los argumentos de Pauli y Allcock reside en que el primero considera el sistema en un espacio de Hilbert, donde el espectro de la energía está acotado, mientras que el segundo supone que existe una fuente que arroja la partícula del sistema considerado. La existencia de dicha fuente tiene dos implicaciones principales: el dominio

espacial queda reducido solo a la parte posterior a la fuente, y más importante aún, el espectro de la energía cubre tanto valores positivos como negativos.

Allcock considera para este estudio un sistema simple, compuesto por una partícula con un movimiento espacial monodimensional. Dicha partícula emerge de una fuente, situada en $x < x_0$ con $x_0 < 0$. Se define fuente como una región espacio-temporal en la que la ecuación de Schrödinger no se cumple. En un principio, Allcock establece que la fuente está lo suficientemente lejos como para no ser necesario tener en cuenta su aportación a los resultados, por tanto el estudio de la fuente y sus características no son por ahora relevantes. Por otra parte, el sistema incluye un detector situado en $x = 0$.

El instante en el que la partícula del sistema pasa por el punto x queda determinado por $\tau(x)$, de modo que si se considera el instante en el que su paso queda registrado por el detector, se tiene $\tau(0)$, en adelante denominado simplemente τ , que se denomina el tiempo de llegada. Allcock considera una simplificación en cuanto al aspecto cuántico del sistema, y es que los paquetes de ondas cuánticos sólo tienen componentes desde valores negativos de x a valores positivos.

Las funciones de onda ϕ que son relevantes para el experimento son aquellas que emergen en la fuente situada en $x < x_0$ hacia $x \geq x_0$. En primer lugar las ondas ϕ se anularán en algún instante t_0 , donde $\phi(t, x) = 0$, de modo que

$$\phi(t, x) = 0 \quad \text{con} \quad \{t, x : t < t_0 \cap x \geq x_0\} \quad (7.1)$$

además, la función de onda debe cumplir la ecuación de Schrödinger,

$$i \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{con} \quad \{t, x : x \geq x_0\} \quad (7.2)$$

que como puede comprobarse, se corresponde con la ecuación imperturbada.

Esto se debe a que se buscan probabilidades ideales y por tanto es factible considerar que el aparato de medida no interfiere con el sistema, puesto que se puede demostrar que con la ecuación imperturbada se pueden obtener todos los datos necesarios y relevantes para el estudio. A pesar de ello, en la realidad la interacción con el aparato produce una alteración inevitable.

El problema en adelante consiste en realizar un estudio de la dependencia espacio-temporal de ϕ , partiendo de (7.1) y (7.2). La forma más directa de obtener una solución es mediante el uso de las funciones de Green $G_n(t, x)$, definidas por

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) G_n(t, x) = \delta(x) \frac{\eta(\eta^2 + t^2)}{\pi}$$

con la condición de contorno

$$G_n(t, x) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty$$

Partiendo de estas consideraciones, se obtiene la expresión de las funciones de onda que cumplen las condiciones (7.1) y (7.2)

$$\phi(t, x)_{x \geq x_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(E) dE}{\sqrt{2\pi} (2E)^{1/4}} \exp(i\sqrt{2Ex} - iEt) \quad (7.3)$$

donde el término $\phi(E)$ es la amplitud de la función de onda, que viene determinada por la fuente, y que permite a dicha amplitud tomar cualquier valor arbitrario. Así, se considera que el espectro de la energía se extiende en $[-\infty, \infty]$, y por tanto $\phi(E)$ se puede asociar con un movimiento unidireccional de la partícula.

7.1 Tiempo de llegada en problemas con fuentes

Debido a la existencia del aparato de medida, la onda (7.3) se ve inevitablemente alterada. Debido a este hecho, también serán perturbadas ciertas probabilidades asociadas al tiempo de llegada que se viene considerando para este sistema.

Entre ellas, el ratio de llegada $\dot{P}(\tau)$ y la probabilidad total $P(\infty)$ de que una partícula haya sido detectada cuando $t \rightarrow +\infty$, que se obtiene por integración de la primera de ellas. Para esta probabilidad total se pueden obtener la expresión ideal y la expresión que tiene en cuenta la perturbación del aparato.

En primer lugar se obtiene la expresión ideal de la probabilidad total $P(\infty)$, teniendo en cuenta que existe un valor a de distancia finita tal que $a \geq x_0$, así como de las siguientes propiedades de la función de onda (7.3)

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{x_0}^a |\phi(t, x)|^2 dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_a^\infty |\phi(t, x)|^2 dx = 0 \quad (7.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^a |\phi(t, x)|^2 dx \quad (7.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^\infty |\phi(t, x)|^2 dx = \int_0^\infty |\phi(E)|^2 dE \quad (7.6)$$

que se cumplirán para valores de la amplitud tales que $\int_{-\infty}^\infty |\phi(E)|^2 dE < \infty$, perfectamente compatibles con las amplitudes que pueden lograrse con fuentes usadas en la práctica. De estas propiedades puede deducirse que para $t \rightarrow \infty$, $\dot{P}(\tau) \rightarrow P(\infty)$.

La probabilidad $P(\infty)$ puede ser medida realizando un escaneo en $x > 0$ a partir de un determinado instante de tiempo. Se puede demostrar que la probabilidad obtenida no depende del instante en el que se comienza a escanear. Por ello, se deduce que

$$P(\infty) = \int_0^\infty |\phi(E)|^2 dE \quad (7.7)$$

esta fórmula representa la probabilidad total ideal de detección de la partícula.

La probabilidad total de llegada $P(\infty)$ es un valor que debe cumplirse aún en presencia de un aparato de medida. De no ser así, éste daría lugar a una perturbación y por tanto afectaría a la llegada propia de la partícula al detector, hecho que no es factible debido a que se trata de una probabilidad total *ideal*.

A continuación se buscará la probabilidad ideal de este nuevo sistema que incluye al aparato, y se comprobará si el resultado concuerda con (7.7).

Considérese ahora la función de onda $\Phi(t, x, \xi)$, que representa al sistema compuesto tanto por la partícula con movimiento unidimensional, como el aparato de medida, y siendo ξ la coordenada espacial del mismo. Debido a que la probabilidad ideal que se busca no debe depender del aparato, si no de la fuente, la influencia de la fuente en el aparato deberá producirse a través de la partícula misma. Por tanto los efectos que provoca la fuente serán transmitidos a través de la amplitud $\phi(E)$. Para ello se considera el siguiente postulado.

Postulado 7.1

La función de onda $\Phi(t, x, \xi)$ depende de la amplitud $\phi(E)$, que permite relacionarla con las características de la fuente.

Sea un sistema regido por la función de onda $\Phi(t, x, \xi)$ de modo que se pueda descomponer en los términos:

$$\Phi(t, x, \xi) = \int \Phi_\tau(t, x, \xi) d\tau + Z$$

donde el primer término comprende toda la información relativa al tiempo de llegada de la partícula, y Z incluye los casos en los que el registro de llegada de la partícula no ocurre. Además

$$\Phi_\tau(t, x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t, x, \xi, E) \phi(E) dE$$

siendo $Y(t, x, \xi, E)$ un término que depende del aparato y que en principio es un valor conocido.

Tomando un intervalo de tiempo de llegada $[\tau_i, \tau_i + \Delta]$, se puede deducir que

$$P(t, \tau_i, \Delta, \phi) = \int \left| \int_{\tau_i}^{\tau_i + \Delta} \Phi_\tau(t, x, \xi) d\tau \right|^2 dx d\xi$$

que se corresponde con la probabilidad de que se detecte la partícula en el intervalo anterior.

Postulado 7.2

Una traslación temporal en la onda incidente produce otra traslación idéntica en las probabilidades registradas por el aparato tras la detección.

La traslación de la onda incidente implica que

$$\phi(E) \rightarrow \phi(E) \exp(iT\hat{E})$$

y sabiendo que si el aparato de medida está correctamente diseñado, la misma traslación se producirá en los registros de τ del aparato y las probabilidades vendrán dadas por

$$P(\tau_i, \Delta, \phi) = P(\tau_i + T, \Delta, \phi \exp(iT\hat{E}))$$

Por tanto la expresión de la probabilidad viene dada por

$$P(\tau_i, \Delta, \phi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int \left| \int_{-\infty}^{\infty} Y(t, x, \xi, E) \phi(E) \exp(-iET) dEd\tau \right|^2 dx d\xi$$

A partir de este resultado, es posible calcular la probabilidad total $P(\infty)$, y se obtiene que

$$P(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} A(E) |\phi(E)|^2 dE \quad (7.12)$$

con

$$A(E) = \frac{2\pi}{\Delta} \lim_{t \rightarrow \infty} \int \left| \int_0^{\Delta} Y(t, x, \xi, E) d\tau \right|^2 dx d\xi$$

Se puede demostrar, mediante la aplicación del teorema de Titchmarsh y el teorema de unicidad, que $A(E) \neq 0$ para cualquier valor de E , y por tanto existe diferencia con el valor ideal al que se llegó con anterioridad. Por esta razón la definición del concepto de tiempo de llegada no es válido para problemas con fuentes en los que el espectro de energía se extiende en $[-\infty, \infty]$.

Este resultado incitaría a Allcock a proceder con un estudio más exhaustivo teniendo en cuenta las variables del aparato de medida, con lo que pretende encontrar una forma en la que las probabilidades totales para el sistema con o sin incluir el aparato de medida coincidan, y por lo tanto la definición del tiempo de llegada sea racional y factible.

7.2 Características del aparato de medida

Debido a la conclusión anterior, es necesario imponer ciertos requerimientos al aparato de medida que conforma el sistema. Recuérdese que el aparato está situado en $x=0$, y su función es proporcionar información acerca de la presencia de las partículas situadas en $x>0$. La característica principal que se impone al aparato es que las probabilidades $\int_0^{\infty} |\psi(t, x)|^2 dx$ en $x>0$ sean capaces de transferirse desde el *canal incidente* del aparato a los *canales de salida ortogonales* de forma rápida y total. De no ser así, la información

recibida por el aparato en distintos instantes t podría superponerse haciendo que ésta fuese indistinguible.

Para conseguir esta característica, se puede preparar un aparato de medida de relativa sencillez. Este aparato consta de una serie de láminas que se mueven en el eje de coordenadas y , mientras que la partícula a detectar lo hace en el eje x . Cuando una partícula entra en la zona $x > 0$, supóngase que lo hace entre las láminas n y $n+1$. La detección de esta partícula no será instantánea, ocurrirá cuando entre en contacto con la lámina $n+1$. Esto hace posible asegurar que el tiempo de llegada de la partícula se produce entre dichas láminas. La precisión de este resultado dependerá de la velocidad de las láminas, siendo posible conseguir un resultado bastante aproximado si la velocidad es alta.

La recogida de datos a través del registro en estas placas permite realizar una inspección posterior de los resultados sin que se produzca una variación en las probabilidades $\dot{P}(\tau)$. Además, ya que los canales de salida son ortogonales, se puede asegurar también que los resultados obtenidos no interfieren entre ellos, y a priori, se pueden considerar resultados correctos.

7.2.1 Potenciales complejos

Una vez establecidas las características del aparato de medida, se pretende obtener una expresión para la función de onda mediante la resolución de la ecuación de Schrödinger, tal y como se hizo anteriormente. Para ello Allcock propone definir los canales incidentes del aparato con potenciales imaginarios $-iV$ en la región $x > 0$. Así, se tiene la siguiente ecuación de Schrödinger a resolver

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -iV \Phi \quad \text{en} \quad x > 0 \quad (7.13)$$

siendo la probabilidad de pasar del canal incidente al canal de salida ortogonal en el instante t de

$$\dot{P}(\tau) = 2V \int_0^\infty |\Phi(t, x)|^2 dx \quad (7.14)$$

La expresión anterior sugiere que cualquier probabilidad de entrar en $x > 0$ en un instante t discreto tiende a ocurrir en un lapso de tiempo

$$\Delta t = \frac{1}{2} V^{-1} \quad (7.15)$$

por tanto, el hecho de que se registre una partícula en un instante t permite definir el tiempo de llegada de dicha partícula τ , con una incertidumbre

$$d\tau \equiv T = \frac{1}{2} V^{-1} \quad (7.16)$$

El parámetro T se conoce como *tiempo de resolución* y juega un papel similar al lapso de tiempo $t_{n+1} - t_n$ que se tiene entre el paso de dos láminas del experimento anterior. Además, el tiempo de resolución es un parámetro que sólo dependerá del aparato de medida.

Es importante el hecho de que definir el problema mediante potenciales complejos implica que se encuentra una discontinuidad en el potencial situada en $x = 0$, lo que deriva en que una parte de la onda incidente sea inevitablemente reflejada en $x = 0$. La amplitud de la onda reflejada está íntimamente ligada con el tiempo de resolución T , por lo tanto la correcta elección del aparato de medida será determinante.

Por otro lado está la región anterior al aparato de medida, $x < 0$, donde se tiene el parámetro asociado a la fuente $\rho(t, x)$ cuyo valor será conocido, que es independiente de la función de onda Φ . Esta suposición permite resolver la ecuación de Schrödinger con relativa sencillez, de esta forma resulta

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \rho(t, x) \quad \text{en} \quad x < 0 \quad (7.17)$$

La solución a dicha ecuación, suponiendo que no existe perturbación debida al aparato de medida, es la que se vió en (7.3), de forma que la amplitud $\phi(E)$ será ajustable según el valor de ρ . En particular, si se supone una fuente infinitamente lejana $x_0 \rightarrow -\infty$, o lo que es lo mismo, consideramos el experimento sin fuentes, entonces se obtiene que $\phi(E) = 0$ para valores $E < 0$. Una implicación trivial de esto es que la influencia de la onda es la misma

considerando la fuente o suponiéndola infinitamente lejana. Por tanto, es posible realizar el estudio del experimento "sin fuente", obteniéndose los mismos resultados.

Allcock desarrolla paso a paso la obtención de los resultados que aquí no se van a detallar puesto que su interés es puramente matemático, por ello sólo se muestran los resultados y sus implicaciones.

En primer lugar se considera el rango $x < 0$, donde se observa que residen las ondas incidente y reflejada, Φ y Φ_{ref} respectivamente, siendo la amplitud de la onda incidente

$$\Phi(E) = 2\phi(E) \left(1 + E^{-1/2} (E + iV)^{1/2}\right)^{-1} \quad (7.18)$$

y la amplitud de la onda reflejada

$$\Phi_{ref}(E) = \phi(E) \frac{1 - E^{-1/2} \sqrt{E + iV}}{1 + E^{-1/2} \sqrt{E + iV}} \quad (7.19)$$

Por otro lado, en el rango $x > 0$ existe la onda transmitida que se propaga proporcionalmente a $\sqrt{2(E + iV)}$.

7.3 Cálculo de la probabilidad total

Una vez comprendido el concepto de onda reflejada, y obtenidas las soluciones de la ecuación de Schrödinger, es posible transformar (7.14) haciendo las sustituciones pertinentes. Así, se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \dot{P}(\tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \left(\frac{2\phi(E) \exp(-iEt)}{E^{1/4} \left(1 + E^{-1/2} (E + iV)^{1/2}\right)} \right)^{\dagger} \times \\ & \times \frac{iV \left((E' + iV)^{1/2} + (E + iV)^{1/2} \right)}{2\pi (E' - E + 2iV)} \frac{2\phi(E) \exp(-iE't)}{E'^{1/4} \left(1 + E'^{-1/2} (E' + iV)^{1/2}\right)} \end{aligned} \quad (7.20)$$

como puede comprobarse, el valor del ratio de probabilidad depende del aparato puesto que en la ecuación aparece T , así como de la onda incidente al aparecer la amplitud $\phi(E)$.

Es interesante estudiar los casos límites en los que la probabilidad anterior se vuelve independiente del potencial V , y con ello del aparato de medida. A simple vista se deduce que esta situación se produce cuando

$$V \gg |E|_{\max} \quad V \ll |E|_{\min} \quad (7.21)$$

Para el primer caso se tiene que si el potencial aumenta mucho, $\dot{P}(\tau) \rightarrow 0$. Esto se traduce en que toda la probabilidad incidente reside en la onda reflejada, lo que supondría un fallo en el experimento de medida.

Para el segundo caso en el que se tiene un potencial pequeño, no existe problema en cuanto a reflexión de la onda, es decir, la probabilidad de que la partícula llegue al aparato y sea detectada es alta. Sin embargo, esto implica directamente que la incertidumbre de medida sea muy elevada, que según (7.16), $\delta\tau \rightarrow \infty$, y entonces el tiempo de llegada quedaría definido con poca precisión.

Ambos casos llevan a pensar que es prácticamente imposible asegurar que ocurrirá la detección y además realizar una medida precisa para el tiempo de llegada.

Como se calculó anteriormente, la probabilidad total ideal estaba dada por la ecuación

$$P(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(E)|^2 dE \quad (7.22)$$

A priori, integrando la expresión (7.20), debería obtenerse el resultado ideal en el caso en el que el concepto de tiempo de llegada estuviese bien definido para el sistema cuántico. Puede comprobarse que no es así, puesto que se obtiene una expresión que depende del aparato

$$P(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} A(E, V) |\phi(E)|^2 dE \quad (7.23)$$

donde $A(E, V)$ se conoce como función de aceptación y cumple que

$$A(E, V) = \frac{4}{|E|^{1/2}} \left| 1 + \frac{\sqrt{E + iV}}{|E|^{1/2}} \right|^{-2} \Re(\sqrt{E + iV}) \quad (7.24)$$

Se puede definir por tanto un coeficiente de fallo regido por la expresión

$$\alpha(\phi, V) = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta(E - A(E, V))| |\phi(E)|^2 dE \quad (7.25)$$

Para un valor de fallo máximo tolerado, denominado $\alpha_0 < 1$, sólo podrá asegurarse la eficacia del aparato, y por tanto que la medida es válida, escogiendo un valor del potencial V tan pequeño que satisfaga que

$$\alpha(\phi, V) < \alpha_0$$

Si bien en un principio el experimento de Allcock se topaba con el inconveniente de que no era factible definir correctamente el tiempo de llegada para sistemas cuánticos, más adelante sería capaz de demostrar que mediante una definición correcta de los parámetros relativos al aparato de medida sí que sería posible obtener un concepto sólido del mismo, a pesar de que llevaría consigo una incertidumbre inevitable, asociada al propio concepto de tiempo de llegada.

8 CONCLUSIONES

A lo largo del último siglo, la forma de definir y tratar el tiempo en la teoría cuántica ha evolucionado considerablemente, debido a los numerosos experimentos mostrados en este trabajo, centrados en la búsqueda de una “ley universal” para describir un concepto un tanto distinto al resto de observables. Teniendo en consideración todos los procedimientos y resultados explicados, se puede hacer referencia a tres vertientes principales a la hora de abordar el problema [15], [16], [17].

Por un lado, atendiendo a la ecuación de Schrödinger, determinada por la expresión

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) = \hat{H} \Phi(\vec{r}, t)$$

donde aparece una dependencia con t . Este caso se corresponde con la consideración de que el tiempo es un parámetro externo *clásico*, es decir, no tiene relación con las propiedades del sistema considerado. Tomando esta definición, el tiempo puede ser obtenido mediante experimentos de medida.

Por otra parte, existe la posibilidad de considerar el tiempo como una variable dinámica, que es intrínseca al sistema, que forma parte de las propiedades que describen a éste. Para esta definición, la obtención del tiempo se logra mediante el estudio de la evolución de las propiedades intrínsecas mencionadas.

Por último, es posible definirlo como un observable, que por tanto tiene un operador asociado. Como se ha visto a lo largo de los capítulos anteriores, los problemas en los que deriva esta consideración son numerosos, debido a la imposibilidad de que el operador energía tenga un espectro acotado inferiormente, tal y como apunta Pauli en su teorema.

La confusión radica en un error conceptual, y es la confusión de los conceptos *coordenadas de un punto espacial* (variable externa) y la *posición de una partícula en el espacio* (variable interna) [19].

Es por ello que surge una incongruencia a la hora de establecer simetría entre t y las coordenadas (x, y, z) . Por un lado, para las coordenadas espaciales existe el operador posición \hat{Q} así como su operador conjugado, el momento \hat{P} . Sin embargo, se presenta el caso en el que la energía está determinada por un operador \hat{E} en mecánica cuántica, debiendo ser su operador conjugado el correspondiente a t , que se ha visto a lo largo de todo este trabajo que no es posible encontrar. Por tanto establecer dicha simetría carece de sentido.

Para comprender esto, es recomendable hacer referencia al caso clásico. En un primer momento, es posible definir una probabilidad de que en el instante t , una partícula se encuentre en el intervalo espacial $[x, x + \Delta x]$, puesto que en un instante de tiempo, una partícula sólo puede encontrarse en una posición x . En cuanto al caso contrario, no se puede definir una probabilidad de que en la posición espacial x la partícula se encuentre en un intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, puesto que dicha posición puede ser ocupada por la partícula en más de un instante distinto: no son excluyentes.

Es obvio que a lo largo de la historia, abordar conceptos “nuevos” siempre ha estado íntimamente ligado con la búsqueda de similitudes con los conocimientos de partida. En el caso de la mecánica cuántica, esto resulta determinante. El hecho de intentar establecer una relación entre la mecánica clásica, y la mecánica cuántica es y ha sido, el origen de toda incógnita asociada al tiempo durante este último siglo.

REFERENCIAS

- [1] N. Bohr, *Philosophical Magazine*, vol. 26, no. 1, 1913.
- [2] W. Heisenberg, "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik," *Zeitschrift für Physik*, no. 43, p. 172, 1927.
- [3] N. Borh, "The quantum postulate and the recent development of atomic theory," *Nature*, vol. 121, pp. 580-590, 1928.
- [4] W. Pauli, *Handbuch der Physik*, vol. 24, pp. 83-272, 1933.
- [5] E. A. Galapon, "Pauli's theorem and quantum canonical pairs," *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 458, pp. 451-472, 2002.
- [6] A. Holevo, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, 1982.
- [7] I. T. L. Mandelstamm, "The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics," *Journal of Physics*, vol. 9, no. 4, pp. 249-254, 1945.
- [8] J. Kijowski, "On the time operator in quantum mechanics and the Heisenberg uncertainty relation for energy and time," *Reports on Mathematical Physics*, vol. 6, no. 3, pp. 361-386, 1974.
- [9] J. Kijowski, "On the arrival time in quantum mechanics," *Physical Review A*, vol. 59, no. 1, pp. 897-899, 1999.
- [10] J. Kijowski, "Comment on "Time operator"," *Concepts of Physics*, vol. 2, pp. 99-102, 2005.
- [11] L. P. H. R. Arshansky, "The Landau-Peierls relation and a casual bound in covariant relativistic quantum mechanics," *Foundations of Physics*, vol. 15, no. 6, pp. 701-715, 1985.
- [12] V. Fock, "Criticism of an attempt to disprove the uncertainty relation," *Soviet Physics JETP*, vol. 15, no. 4, pp. 784-786, 1962.
- [13] D. B. Y. Aharonov, "Time in the quantum theory and the uncertainty relation for time and energy," *Physical Review*, vol. 122, no. 5, pp. 1649-1658, 1961.
- [14] G. Allcock, "The time of arrival in quantum mechanics," *Annals of Physics*, vol. 53, pp. 253-348, 1969.
- [15] J. Hilgevoord, "Time in quantum mechanics: a story of confusion," *Studies in History*

and Philosophy of Modern Physics, vol. 36, pp. 29-60, 2005.

[16] A. Karagiorgos, Time of arrival in quantum mechanics and the problem of time in quantum cosmology, 2014.

[17] J. Yearsley, Aspects of time in quantum theory, 2011.

ANEXO A

Sean el observable posición \hat{X} , con autovalores x_k y autovectores $|x_k\rangle$ y el observable momento \hat{P} , con autovalores p_k y autovectores $|p_k\rangle$. Estos observables son canónicamente conjugados, es decir, cumplen la relación de conmutación

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X} = i\hbar$$

Por otro lado, considérese el operador $\hat{\tau}$, que permite realizar una traslación en la línea espacial. Dicho operador se denomina operador traslación espacial y es unitario para todo $x \in \mathfrak{R}$. Su expresión viene dada por

$$\hat{\tau} = \exp\left(-\frac{ix\hat{P}}{\hbar}\right) = \sum_n \frac{\left(\frac{-ix\hat{P}}{\hbar}\right)^k}{k!}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{\tau}] &= \hat{X}\hat{\tau} - \hat{\tau}\hat{X} = \hat{X} \sum_n \frac{\left(\frac{-ix\hat{P}}{\hbar}\right)^k}{k!} - \sum_n \frac{\left(\frac{-ix\hat{P}}{\hbar}\right)^k}{k!} \hat{X} = \\ &= \sum_n \frac{\left(\frac{-ix}{\hbar}\right)^k}{k!} [\hat{X}, \hat{P}^k] = -x\hat{\tau} \end{aligned}$$

Usando el resultado anterior en $\hat{X}|x_k\rangle = x_k|x_k\rangle$, se obtiene

$$\hat{X}\hat{\tau}|x_k\rangle = \hat{\tau}\hat{X}|x_k\rangle - [\hat{\tau}, \hat{X}]|x_k\rangle = \hat{\tau}x_k|x_k\rangle + x\hat{\tau}|x_k\rangle = (x_k + x)\hat{\tau}|x_k\rangle$$

donde se tiene que la traslación aplicada produce un nuevo estado con autovalor $(x_k + x)$ y autovector $\hat{\tau}|x_k\rangle$

ANEXO B

Para la obtención de las ecuaciones de movimiento, se tiene en cuenta la ecuación del hamiltoniano del sistema

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \frac{\hat{P}_y^2}{2m} + \hat{Y}\hat{P}_x g(t)$$

Donde, a efectos de los cálculos posteriores, el último término será análogo a un potencial. Es conveniente tener en cuenta que se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} [\hat{P}, \hat{H}] &= \left[\hat{P}, \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{Y}\hat{P}_x g(t) \right) \right] \\ [\hat{P}, \hat{H}] &= \left[\hat{P}, \frac{\hat{P}^2}{2m} \right] + [\hat{P}, \hat{Y}\hat{P}_x g(t)] \end{aligned}$$